中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導：「図形の性質の調べ方」と「円」での教材開発と実践

メタデータ	言語: ja 出版者: 静岡大学教育学部附属教育実践総合センター 公開日: 2024-03-15 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 稲熊, 紀昭, 美澤, 将史, 松元, 新一郎 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/0002000302

実践報告

中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導

ー「図形の性質の調べ方」と「円」での教材開発と実践ー

稲熊　紀昭*・美澤　将史*・松元　新一郎**

（*静岡大学教育学部附属島田中学校　**静岡大学教育学部）

Teaching of Geometry to Promote Comprehensive and Expansive Thinking in Junior High School

Development of teaching materials and practice in “investigation of the properties of figures’’ and “circle figures’’

Inaguma Noriaki, Misawa Masashi, Matsumoto Shinichiro

要　旨

本稿は，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形の指導について，これまでとは異なる教材を開発して実践し，その有効性を検証することを目的とする．そのために，中 2 の単元「図形の性質の調べ方」で「動点がつくる角」について，また中 3 の単元「円」で「二円の交点を通る図形」について，それぞれ教材化して実践を行った．授業中の生徒の様子や授業後の感想等から，統合的・発展的に考察する活動が多く観察され，教材の有効性を示すことができた．

キーワード：統合的・発展的な考察，動点がつくる角，円，二円の交点を通る図形

1．はじめに

本研究の目的は，「統合的・発展的な考察」に焦点を当て，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導のあり方を追究することである．

これまでに，本研究では，数学的な思考力の具体的な内容として，熊倉(2011)は以下のような能力を挙げている．

ア．数学的に推論する力

イ．多様に考える力

ウ．統合・発展・一般化する力

エ．分類・整理する力

オ．見通しを立て予想する力

カ．検証する力

この中の「統合・発展・一般化する力」について，本研究では，以下のア～エの4点を明らかにしてきた(加藤・杉山・熊倉，2018；加藤・杉山・熊倉，2020；加藤・杉山・熊倉，2021；鈴木・加藤・熊倉，2016；鈴木・加藤・熊倉，2017；杉山・美澤・松元・山田，2022；美澤・稲熊・松元：2023).

ア　中学校の教科書を分析した結果，発展的な考え方を育成するような問題設定は，教科書では扱いが少ない．

イ　発展的な考え方に関する先行研究を分析した結果，発展的な考え方をいくつかのタイプに分類することができ(橋本，2001；片桐，1988；菊池，1997)，その中で「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践(例えば，福田，2009)は，必ずしも多く実践されていない．

ウ　「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践として，以下の教材を開発して実践を行った．

中1「図形の移動の方法を考える」「最短距離の作図」

中2「くの字の法則を見つける」「くり抜いた図形の角の和」「三角形の対称軸の本数」「多角形の直角の個数」「ボロノイ図」「星形五角形の発展」

中3「相似な図形の面積比」「三角形の辺の比」「三平方の定理の導入」「折り返しの図形」

実践の結果から，「発展させることで数学の理解が深まるように設定を工夫する」，「難易度が高くなり過ぎないように配慮する」，「一般化することのよさを感じられる教材にする」，「多様な方法を分類する活動を取り入れる」，「生徒が統合的・発

展的に考察することの価値を認める」等が有効であるとの示唆を得た.

エ　中３時の各単元において，統合的・発展的に考える活動を継続して取り入れた結果，統合的・発展的に考えようとする態度が身に付いていることが調査結果から読み取れた.

ア～エの 2015～2022 年度の研究成果を踏まえて，本稿では，中２と中３の図形の内容の中で，これまでとは異なる統合的・発展的な考察を促す教材を開発して実践を行い，授業中の生徒の反応や授業後の感想等を分析して，教材の有効性を検証する.

なお，これまでの研究では，片桐(1988)の統合的な考え方を参考にして「統合的な考え方」，「発展的な考え方」を次のように規定してきた.

＜統合的な考え方＞

多くの事象をばらばらにせず，広い観点から本質的な共通性を抽象し，同じものとしてまとめていく考え方であり，次の2つに分類できる.

［C1］複数の事象を，共通なものでまとめる.

［C2］複数の事象を，その中の1つに統合したり一般化したりする.

＜発展的な考え方＞

1つのことが得られても，さらによりよい方法を求めたり，これを基にして，より一般的な，より新しいものを発見したりしていこうとする考え方であり，次の2つに分類できる.

［E1］問題の条件を変える.

［E2］思考の観点を変える.

このうち，これまで2つに分類してきた「統合的な考え方」を見直し，中島(1982/2015)を参考にして次の①，②，③の3つの場合に分類する.

また，中島(1982/2015)では，それぞれの統合の具体例が小学校算数科の内容であるため，中学校数学科の図形領域における具体例を以下のように挙げた.

＜統合的な考え方＞

①集合による統合

はじめは異なったものとしてとらえられていたものについて，ある必要から共通の観点を見出して一つのものにまとめる場合．上記の［C1］にあたる.

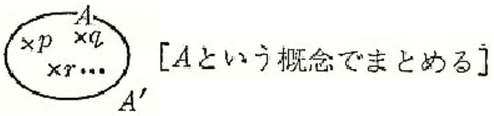


図１　集合による統合（中島，1982/2015, p. 127）

【具体例】

・すべての面が合同な正多角形で，どの頂点のまわりにも面の数が同じであって，へこみのない立体を，「正多面体」としてまとめる場合.

・円周角∠APB と中心角∠AOB について，中心 O が∠APB の辺上にあるとき，中心 O が∠APB の内部にあるとき，中心 O が∠APB の外部にあるとき，それぞれについて 2∠APB=∠AOB が成り立つことを証明し，「円周角の定理」としてまとめる場合.

②拡張による統合

はじめに考えた概念や形式が，もっと広い範囲（はじめの考えでは含められない範囲のものまで）に適用できるようにするために，はじめの概念の意味や形式を一般化して，もとのものも含めてまとめる場合．上記の［C2］にあたる.

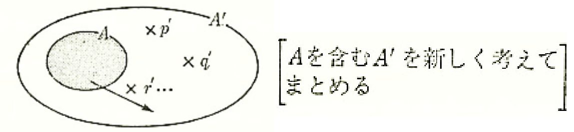


図２　拡張による統合（中島，1982/2015,p.128）

【具体例】

・直線上の一点からの垂線の作図が，任意の角の二等分線として使えるようにする場合.

・n 角形の内角の和について，三角形が 180°を活用して，四角形や五角形を三角形に分割して考えることで三角形の個数に着目し，180°(n−2)と一般化する場合.

③補完による統合

すでに知っている概念や形式だけでは，適用できない場合が起こるとき，補うものを加えて，「完全になる」ようにまとめる場合

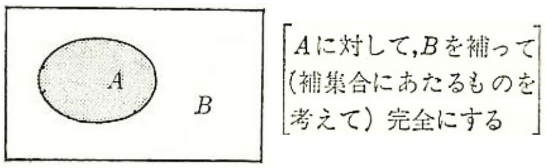


図３　補完による統合（中島，1982/2015, p. 129）

【具体例】

・「四角形の辺の中点同士を結ぶと平行四辺形になる」ことに対して（一般に中学校数学科では多角形はへこんだ形を考えない），４つの線分で囲まれた図形の場合も同じことがいえるかどうかを，いわゆるブーメラン型（凹四角形）に着目して考え出す場合.

・平行な２直線の内部で２線分が交わる図（いわゆるくの字型の∠x=∠a+∠b の性質）について，2 直線が平行ではない場合を考えると元の性質が成り立たなくなる．しかし，平行ではない２直線の見込む角を∠c とすると∠x=∠a+∠b+∠c となり、２直線が平行であれば∠c=0 と考えて統合して考える場面.

2. 本稿の目的

本稿の目的は，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形の指導について，これまでとは異なる教材を開発して実践し，その有効性を検証することである．

3．研究の方法

以下の手順に従って，研究を進める．

(1)　中 2，中 3 の図形指導の内容について，過去に実践した教材とは異なる統合的・発展的な考え方を育成する効果的な教材を開発する．

(2)　(1)で開発した教材を用いて実践を行い，授業中の生徒の反応およびワークシートの記述，授業後の感想等から，中島(1982)の統合的な考え方のうち，①〜③のどれに当てはまるかを分析することで，教材の有効性について検証する．

4．統合的・発展的な考え方の育成を重視した教材の検討

(1)　「図形の性質の調べ方」における教材の検討

中 2 の図形領域である「図形の性質の調べ方」では，「数学的な推論の過程に着目し，図形の性質や関係を論理的に考察し，表現する力を養う」ことを目標としている．これまで帰納的に認めてきた図形の性質について，演繹的に確かめ，証明する活動を通して論理的に考察して表現することが求められている．単元の後半では，多くの出版社の教科書が，三角形の合同条件を用いて図形の性質を証明するという流れが一般的である．また，次単元の「三角形・四角形」では，二等辺三角形や平行四辺形などの特殊な三角形・四角形の定義から性質を証明したり，命題の逆を示すことで与えられた図形がどんな図形なのかを証明したりする学習が一般的である．四角形の性質については，たとえば飯島（2021）の「四角形の４つの角の二等分線で囲まれた四角形」のように，条件を変えることで統合的・発展的に考える教材がある．一方で，生徒にとって三角形や四角形の性質の証明がまだ不十分な本単元で，三角形の合同の証明を利用した統合的・発展的に考える教材については，多くないと言える．

そこで，合同の証明を用いて図形の性質を統合的・発展的に考える教材を開発することにより，三角形の合同条件の有用性を感じると共に，統合的・発展的な見方を生徒が身に付けていくと考えた．以下では，茨城県公立高校入試問題（旺文社，2011）を参考に教材を検討する．茨城県公立高校入試問題では，正方形の動点問題として，以下のような図が提示されている．

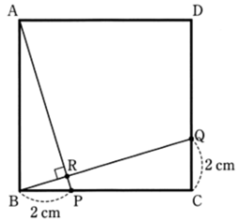


図４　正方形の動点問題（旺文社，2011, p. 15）

図４の正方形 ABCD について，2 点 P，Q はそれぞれ辺 BC，CD 上の点であり，BP=CQ を満たしながら動く．また，線分 AP と線分 BQ との交点を R とする．BP=CQ=2cm のとき，∠ARB=90° が成り立つことが示されているが，これは BP=CQ=2cm に限った話ではない．元の入試問題では，∠ARB=90° と，△ARB と△BPR の面積比が問われているが，今回は前者の∠ARB=90° になる結果に注目した。この図形について，「元の図形」と，「点 P の位置」に注目して教材化した．本研究では，元の図形を正多角形にしたときに，∠ARB ではなく，∠BRP が正多角形の１つの内角と等しくなることから，拡張による統合を期待して，本時の原題を「正三角形 ABC において，点 B と点 C から反時計回りに等しい速さで動く点をそれぞれ点 P，Q とし，AP と BQ を結び，交点を O とする．点 P と点 Q がそれぞれ BC 上と CA 上にあるときの，∠POB の大きさを求めよう．」と設定した（図５ア）．ただし，原題をいきなり生徒に提示すると，合同な三角形に注目せずに角度を求めようとする生徒が多く現れると考え，前時では，点 P が BC の中点にある場合（図５イ）に取り組むこととした．

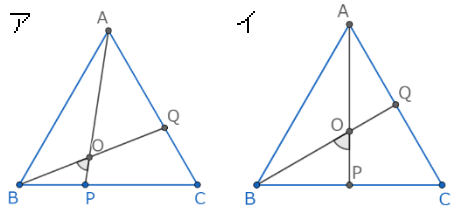


図５　原題の図形（アが本時，イが前時）

原題（図５ア）では，「仮定と正三角形の内角」が等しいことから，「2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」ので，△ABP≡△BCQ となり，対応する角は等しいので，∠PAB=∠QBC…①となる．また，∠OAB と∠PAB は同じ角を表すので，①より∠OAB=∠QBC である．一方，∠POB は△ABO の∠BOA の外角なので，∠POB=∠OAB+∠OBA…②となる。①と②より，∠POB=∠OAB+∠ABO=∠QBC+∠ABO=∠ABC=60° となる．

図５イでは，仮定と共通の辺が等しいことから３組の辺がそれぞれ等しいので，△ABP≡△ACP となり，対応する角が等しいことから，正三角形の３つの角が等しいことや，中線が正三角形の内角を二等分することが証明できる．∠POB の求め方は原題と同様である．

次に，原題を「元の図形」と「点 P の位置」，「結ぶ線分」の 3 つの視点で発展させた．

①　「元の図形」に着目した場合

原題の元の図形を正三角形から図６のように二等辺三角形に変えた場合について考える．二等辺三角形は AB=AC（図６ア），BA=BC（図６イ），CA=CB（図６ウ）が考えられるが，どの場合でも∠POB=∠ABC を示すことはできない．

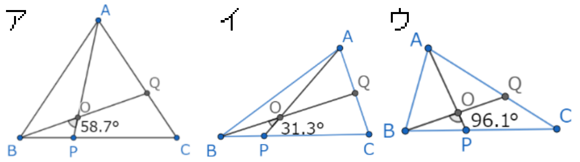


図６　二等辺三角形の場合

∠POB=∠ABC を示すためには△ABP≡△BCQ を示す必要があるが，その合同条件を満たすためには AB=BC，∠ABP=∠BCQ が必要となる．図６のア～ウのうち，AB=BC を満たすのはイのみ，∠ABP=∠BCQ を満たすのはアのみとなるため，両方の条件を満たす二等辺三角形は正三角形しか存在しない．

n 多角形のうちの 4 頂点を A,B,C,D（n=3 の場合は D=A）とし辺 BC 上に点 P，辺 CD 上に点 Q を BP=CQ となるようにとる．また線分 AP と線分 BQ の交点を O とする．このとき，AB=BC かつ∠ABC=∠BCD ならば∠BOP=∠ABC となる．n≧4 では正 n 角形であることを仮定しなくてもよい．しかし，後述の「点 P の位置」に着目して原題を発展させることを考慮し，今回の実践では正多角形以外は取り扱わなかった．

次に，元の図形を図７のように正多角形に変えた場合について考える．

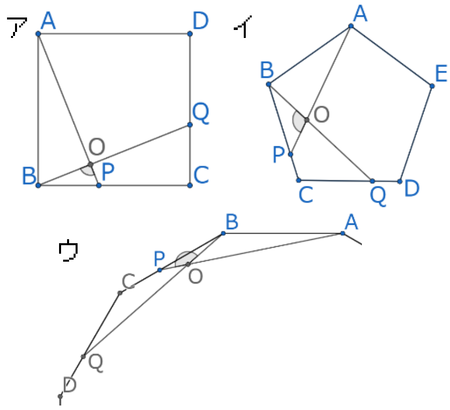


図７　正多角形の場合

図７アは正方形，イは正五角形，ウは正 n 角形とした．どの正多角形においても，「仮定と正多角形の全ての内角が等しい」ことから，2 組の辺とその間の角が等しいので△ABP≡△BCQ となり，対応する角は等しいので，∠PAB=∠QBC となる．∠POB は△ABO の∠BOA の外角なので，∠POB=∠ABC となり，は正 n 角形の 1 つの内角と等しくなる．つまり，∠POB=180°(n-2)/n となる．

②「点 P の位置」に着目した場合

原題の図５では，点 P は辺 BC 上にあったが，BP=CQ であることを満たしていれば，図８アのように BC の延長線上に点 P をとることができる．また，BC から延長せずに C で折り返して辺 CA 上を進む場合（図８イ）や，C で折り返して CA の延長線上を進む場合（図８ウ）のような以下の５つの場合が考えられる．なお，AP と BQ が交わらない場合は，平行である場合を除いて交わるまで延長することとした．

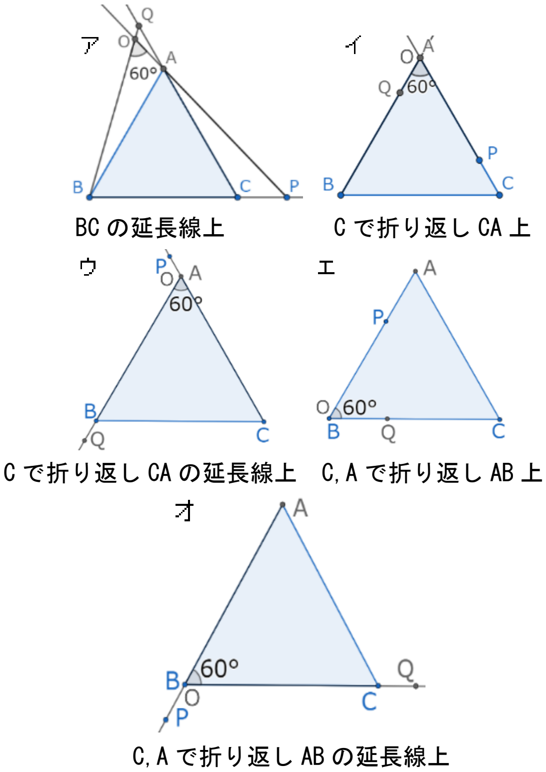


図８　点 P の位置を動かした場合

図８アは原題と同様に△ABP≡△BCQ であることから∠POB=60° となる．イは O が A と重なるため，明らかに∠POB=60° である．ウは∠POB=120° となるが，∠BOP を「点 O にできる最も小さい角」と捉え直せば，これも 60° になるといえる（補完による統合）．このことは，O が B と重なるエ，オにおいても同様である．

元の図形が正方形や正五角形になっても，角度は保存される．図９はその一例である．

図９イ，エでは，原題のように△ABP≡△BCQ を直接証明することはできないが，BP，CQ を結んで△BCP≡△CDQ を証明してから△ABP≡△BCQ を証明したり，△ADP≡△BAQ を証明したりすることで，∠BOP が 1 つの内角と等しいことがいえる．

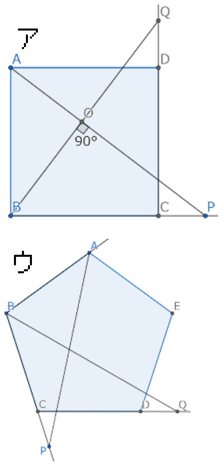


図９　正方形，正五角形でＰが動いたもの

③「結ぶ線分」に着目した場合

原題では，点 B を出発した P，点 C を出発した Q について線分 AP，BQ を結んだ．これは，B と C の続きの頂点で構成され，線分を結ぶ頂点も A と B の続きで構成されている．これを１点とばし（点 C を出発した P，点 E を出発した点 Q について，AP と CQ を結ぶ）や２点とばし（点 D を出発した P と点 F を出発した点 Q について，AP と DQ を結ぶ）で線分を結ぶことで交点 O の角度を求めることができる．ただし，例えば正三角形では頂点 D や F が存在しないので，２週目の頂点としてそれぞれ A と C として考える．正三角形の１点とばしは交点 O と三角形の頂点が重なるため省略し，ここでは正方形（図 10）と正五角形（図 11）について触れる．

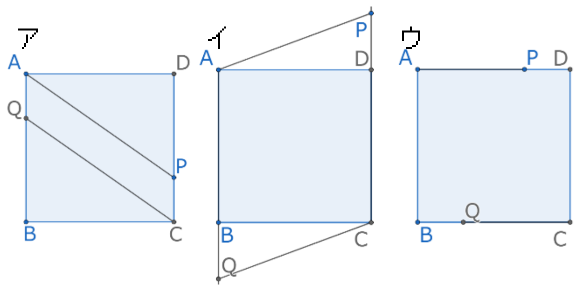


図 10　正方形，１点とばし

正方形に１点とばしでは， AP//CQ となり，交点 O はできない．このことは，図 10 アなら，△APD≡△CQB であるから∠APD=∠CQB，AB//CD から∠APD=∠PAB となる．∠PAB=∠CQB となることから同位角が等しいので AP//CQ であることが証明できる．図 10 イの場合は，△APD≡△CQB を用いて四角形 AQCP が２組の対角が等しいため，平行四辺形であることを使うと示すことができる．これらは，三角形・四角形の学習が進んでから取り組むのが適していると考え，今回の実践では取り扱わなかった．

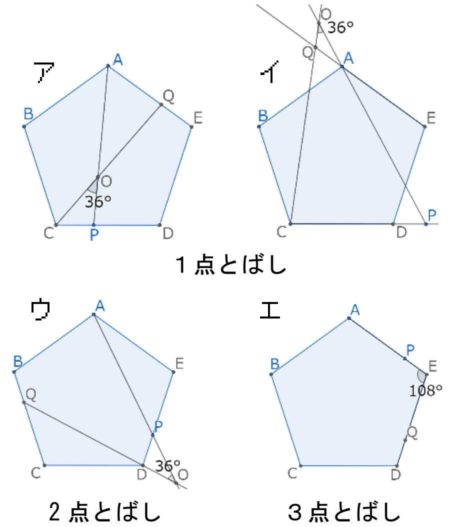


図 11　正五角形，m 点とばし

正五角形に線分を引くと，１ 点，２ 点とばしでは 36°，０ 点，３ 点とばしでは 108° となる．

アでは，△BCP≡△DEQ より△ABP≡△CDQ から∠PAB=∠QCD を示し，四角形 ABCO の内角の和が 360° であることから∠POC=36° が得られる．ウでも，四角形 ABQO の内角の和が 360° であることから∠DOP=36° が得られる．これらは，合同な三角形の対応する角は等しいことを利用して説明できる．

これらの場合から，次のような結論が考えられる．

- ∠BOP が１つに定まるためには，元の図形が正多角形であることが必要条件である．
- 正 n 角形の場合，∠POB の大きさは正 n 角形の１つの内角 180° (n-2)/n と等しい．
- 正 n 角形の場合，△ABP≡△BCQ を２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいことを用いて証明し，∠POB=∠ABC であることを示せばよい．
- 点 P, Q が原題の条件を満たしているときは，点 P がどの場所でも点 O にできる鋭角の大きさは変わらない．
- ２本の線分の引き方を変えた場合，合同な三角形の対応する角が等しいことと，多角形の内角の和を利用して∠O を求めることができる．

これらの結論から，この教材は三角形の合同の証明を利用した統合的・発展的に考えることができるといえる．

(2)　「円」の教材２の検討

平成元年告示学習指導要領まで中学校で扱っていた「2 つの円に関する性質」や「内接四角形の性質」は，平成 10 年告示学習指導要領以降，高等学校で学習する内容となっている．

以前は，「2 つの円に関する性質」の先行的な実践も行われていた（例えば，小岩 2014）．しかし高校

へ移行した後，教科書等には「2 つの円」に関する問題は扱われていないことが多い．

現行の学習指導要領では，中学校 3 年生で学習する「円」は，円周角の定理を導いた後，円周角の定理を利用して角度を求める学習という流れが一般的である．

例えば，学校図書の教科書では，単元の前半部分では円周角の定理や円周角の定理の逆について扱った後，演習問題を解く流れとなっている（池田他，2020）．単元の後半部分には，円周角の定理を利用した証明を行い，演繹的な推論の力を高めることをねらいとしている問題を扱っているが，その数は多くない．

そこで，本稿では「2 つの円に関する」教材を開発して円の性質を演繹的に見出し，統合的・発展的に考察すること，高等学校で学ぶ「2 つの円に関する性質」についての「架け橋」となること，の 2 つをねらいとしていく．また，現行の平成 29 年告示学習指導要領に準拠するために条件を設定する必要がある．

まず原題について考察する．学校図書の平行線と円の証明問題で扱われている図（図 12 の左：池田他，2020，p.193）を参考に教材化することとした．この問題は，AB∥CD の時弧 AC=弧 BC を証明するものである．

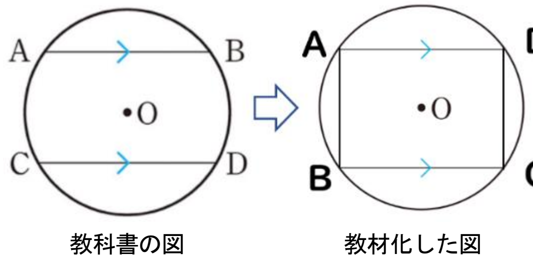


図 12　教科書の図を教材化した図

本研究の教材を演繹的に説明するものにするために，平行線という条件を保存して，「中にできる四角形はどんな四角形なのか」を考えることとした．そこで，図12の左の AC と BD を線分で結び，記号を C から B，D から C，B から D とふり直すと，図 12 の右のように円の中に四角形 ABCD ができる．この四角形には，長方形，正方形，台形の 3 つの可能性がある（図 13）

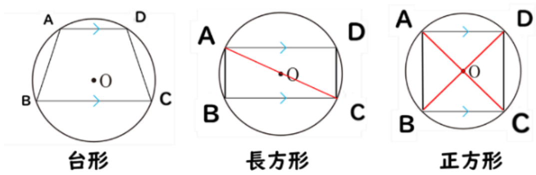


図 13　円の中にできる 3 種類の四角形

平行線の引き方を工夫すると，長方形や正方形になる場合が考えられるが，多くの場合台形になる．そこで，台形については次の 2 つの性質を確認する．

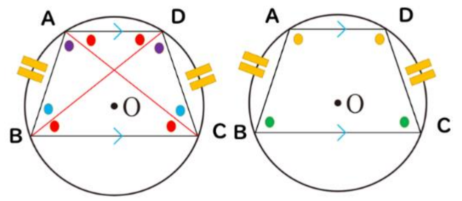


図 14　平行線を引いたときにできる台形の性質 1

1 つは図 14 の左のように，平行線を引いたことで弧 AB=弧 DC となることなどから円周角の定理を利用して，図 14 の右のように∠BAD=∠CDA，∠ABC=∠DCB といった「平行な線分の両端にある角が等しい」ことである（平行線を引いたときにできる台形の性質 1 とする）．

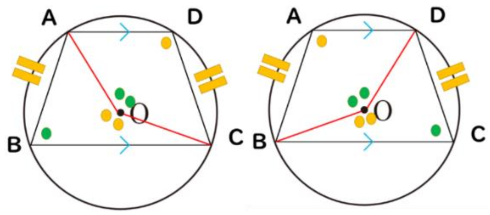


図 15　平行線を引いたときにできる台形の性質 2

もう 1 つは図 15 のように，∠BAD＋∠DCB＝180° になることである．円に内接する四角形の性質であり，対角の和が 180° になる．本教材では「平行線を引くこと」を保存するので，平行線を引いた時にできる台形の性質 2 とする．「2 つの円」を設定する前に「1 つの円」と平行線の関係について考えることで，演繹的に説明する際の根拠となると言える．

1 つの円について考えた後，統合的・発展的に考える展開として本研究では，平行線を保存しつつ「2 つの円」について考えていく．さらに生徒自ら課題を発展させて「2 つの円」の性質やきまりを見いだし，統合していくことをねらいとした．「2 つの円」になることで図が複雑化し，何を考えるのかが不明確になる可能性があったため，最初に特殊な場合について考えていく．

そこで原題を次のように設定した．

> 図 16 のように、同じ半径の 2 つの円が P，Q で交わったとき，交点 P，Q を通るように，AD∥EF∥BC を引きます．そして，AB，DC を引きます．このとき，四角形 ABCD はどんな四角形だろう．

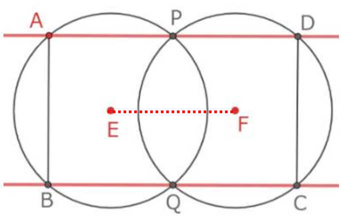


図 16　原題として設定した図

原題の条件として AD∥BC を設定し，さらに 1 つの円から飛躍し過ぎないように，「同じ半径であること」，と，「AD∥EF∥BC であること」を加えた．特殊な場合から始める理由として，本教材を理解しやすくし，その後の統合的・発展的考察に繋げていくためである．

原題の条件で中にできる図形は「長方形」である．図17 のように，P，Q を線分で結び，線分 EF との交点を G とすると，四角形 PEQF はひし形より対角線は直交するので∠PGF＝90° となる．AD∥EF から錯角で∠PGF＝∠APG＝90° となり，円周角∠APG が 90° なので AQ が直径となる．同様に，PB,PC,QD が直径と説明することができ，「4 つの角が 90° 」となるため，四角形 ABCD は長方形と言える．

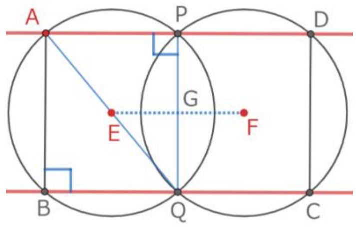


図 17　四角形 ABCD が長方形となる場合

補助線 PQ を引くことで，１つの円において，円周角の定理や，内接四角形の性質を利用して考えることができ，そうしたことを根拠に，演繹的に説明することが可能となる．「PQを引くこと」は本教材を考察する上で，重要な点であると言える．次に AD∥BC は条件に設定したまま，原題の「円の半径を変えること」，「EFを平行でなくすこと」，の 2 つの視点で発展させる．

①「円の半径を変えること」に着目した場合

AD∥EF∥BC のまま「2 つの円」の半径を変えると，四角形 ABCD は図 18 の左のようになる．

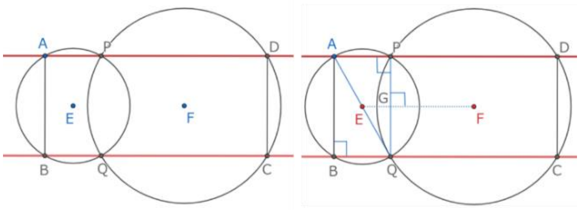


図 18　円の半径を変えることに着目した場合

中にできる四角形は，PQ を結ぶと図 18 の右のように角度を求めることができる．つまり，図 17 と同様のことが言え「長方形」とわかる．

②「EF を平行でなくすこと」に着目した場合

AD∥EF∥BC という条件は，図 17 で∠PGF＝90° になるためのものであり，円の位置関係が特殊な場合であると言える．EF が AD，BC と平行でない場合，四角形 ABCD は図 19 のようになる．

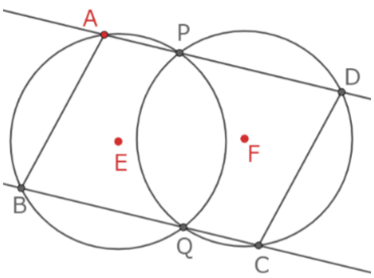


図 19　AD,BC と EF を平行でなくすことに着目した場合

原題と同じように，PQ を結ぶと四角形 ABQP が台形であることがわかる．そこで，図 14，図 15 の台形の性質が図 20 のように成り立つことが言える．

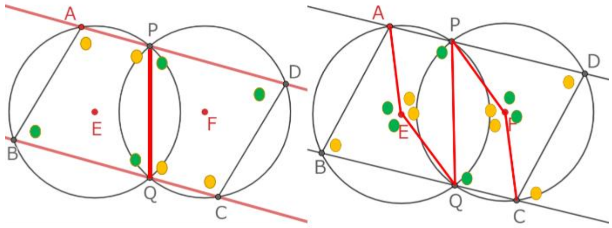


図 14 の台形の性質 1 の場合　　図 15 の台形の性質 2 の場合

図 20　2 つの台形の性質がそれぞれ成り立っている場合

図 20 の“図 15 が成り立った場合”については，円 E で円周角の定理を利用して，∠ABQ＋∠APQ＝180° となる．また AD∥BC より錯角で∠APQ＝∠CQP となり，円 F でも同様に円周角の定理を利用すると，∠CQP＋∠CDP＝180° となる．以上より，∠ABQ＝∠CDP となる．同様に∠PAB＝∠QCD より，「向かい合う角が等しくなる」ため，EF が AD,BC と平行でない場合，四角形 ABCD は平行四辺形になることが説明できる．

③「円の半径を変えること」と「EFを平行でなくす」の両方に着目した場合

PQ を結ぶと次の図 21 のようになる．

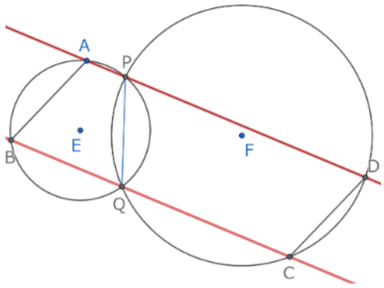


図 21　円の半径を変え，EF を平行でなくした場合

四角形 ABQP，四角形 PQCD は台形となる．しがたって，EF が AD,BC と平行でなく，円の半径を変えて考えたとしても図 20 と同様に四角形 ABCD は平行四辺形であると言える．

これまでの③の考察は，全て点 A が長い弧 PQ 上にある場合である．そこで図 22 のように点 A が短い弧 PQ 上にある場合について考える必要がある．

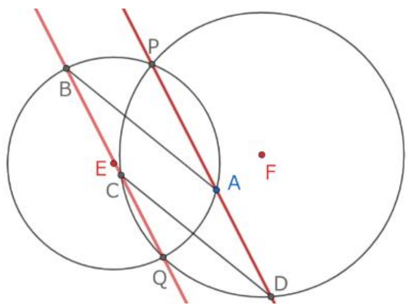


図 22　点 A が短い弧 PQ 上にある場合

この場合もこれまで同様に補助線 PQ を結んで考える．

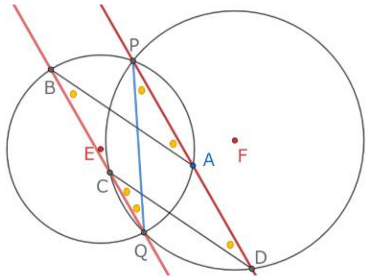


図 23　点 A が短い弧 PQ 上にある場合の等しい角度

同じ弧に対して円周角の定理が成り立つため，弧 PB において∠BQP(CQP)＝∠BAP，弧 PC において∠CQP＝∠CDP，弧 QA において∠QBA＝∠QPA，弧 QD において∠QCD＝∠QPD が言える．また平行線の錯角より∠CDP＝∠QCD のため，図 23 のように等しい角がわかる．∠BAP＝∠CDA なので，AB∥DC より「2 組の対辺がそれぞれ平行」となるため，四角形 ABCD は「平行四辺形」となる．

こうした場合から，次のような結論が考えられる．

・円の半径や位置関係に関わらず，四角形 ABCD は平行四辺形である（条件が加わり，ひし形，長方形，正方形になることもある） ・補助線 PQ を引くことで，円周角の定理や 1 つの円においての台形の性質を根拠に説明できる．

この教材は，2 つの円の中にできる四角形について条件を変えながら考察し，新たな円の性質に気付いたり演繹的に説明したりすることができる．条件を変える中で，同じ結論が導け，まとめることができるため，統合的・発展的な考察ができるものと言える．

５．中 2「図形の性質の調べ方」の実践

(1)　授業の概要

中 2 の単元「図形の性質の調べ方」において，4(1)で述べた「動点がつくる角」の教材を扱った実践を行った．なお，授業の分析は，授業を撮影したビデオ映像，個人追究時に記述したワークシート（追究用紙），授業後の感想等をもとに行った．

①　単元計画

単元計画は表 2 の通りであり，本時は第 21 時である．なお，多角形の角の求め方の指導計画では杉山他(2022)を参考にしている．

表 2　「図形の性質の調べ方」の単元計画

時間	学習内容
1 2	【ユークリッドの公理と図形の性質】**補完** ・ユークリッドの第 1 ～第 5 公理をつかって，対頂角や平行線の同位角，錯角が等しいことを説明する．
3 4 5	【「くの字」の角の性質】**集合**　**拡張** ・平行線と角，三角形の角の性質を用いて，「くの字」の角度を求める． ・「くの字」の問題を発展させて，角度の規則性を見いだす．
6 7	【「ブーメラン型」の角の性質】**拡張** ・「くの字」から発展させた「ブーメラン型」の図形（凹四角形）の内側の角と外側の凹みの角の関係について考える． ・「ブーメラン型」の図形（凹四角形）を発展させて，角度の規則性を見出す．
8 9	【凹みのある多角形の角の性質】**拡張** **補完** ・「ブーメラン型」から発展させた凹多角形の内側の角と外側の凹みの角の関係について考える．
10 11	【図形の内部の角の性質】**集合**　**拡張** ・多角形の外側の角を使わない図形をつくるために，凹みの部分を交差させてできた図形の角の和を考える．
12	【星形多角形の角の性質】**拡張** ・前時までの図を変形して得られた星形五角形の頂角の和を求め，頂点の数を増やしたり，点を飛ばす数を変えたりして得られた図について頂角の和を求め，その関係について考える．
13 14 15	【三角形の合同条件】**集合** ・Geogebra でかかれた合同な三角形（元の三角形の条件を変えても合同が保たれる図）を見て，その図がどんな条件で作られているのかを読み取る． ・得られた三角形の合同条件の中から条件が重なるものを統合し，最終的にいくつにまとまるのかを考える．
16 17 18 19	【三角形の合同の証明】**拡張** ・三角形の合同の証明を，証明の手順にしたがって書く． ・直接合同であることを説明できない図形について，補助線をひくなどして合同な三角形を見いだす．
20	【合同を利用した角の求め方】**拡張** ・点 P,Q が具体的な場所にあるときの交点の角を求め，なぜその角度になるのか演繹的に説明する．
21 (本時) 22	【動点がつくる角の性質】**集合** **拡張** **補完** ・前時の原題の条件を変えて発展させたとき，∠BOP の大きさがどのように変わるか考える．
	単元のまとめ

②　本時の実施時期：2023 年 12 月

③　対象生徒：国立大学附属中学校 2 年生 34 名

④　授業の目標：図形の性質について根拠を明らかにして証明する活動を通して，新たな性質やその条件を見いだし，説明することができる．

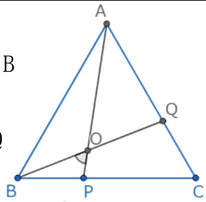
(2)　第 21 時の授業展開と生徒の反応

①　共通課題の提示と追究

前時では，原題の図形について条件を特殊化し，点 P が BC の中点にある場合（図５イ）を解決した．その後，一般化して原題を解決している．

本時は，前時に解決した原題の，条件を変えて発展させる活動を行った．冒頭で前時に解決した原題と，どの部分を発展させるのかを確認した．

> 原題
>
> ①正三角形 ABC において，点 B と点 C から反時計回りに等しい速さで動く点をそれぞれ点 P，Q とし，②AP と BQ を結び，交点を O とする．点 P と点 Q がそれぞれ③BC 上と CA 上にあるときの，∠BOP の大きさを求めよう．

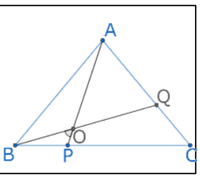


この原題を発展させることについて，生徒から以下のような意見が出た．

- ①を正方形などの正多角形に変える．
- ①を二等辺三角形などの別の三角形に変える．
- ②の P と Q を別の頂点と結ぶ．
- ③を別の場所に動かす．

そこで，①を二等辺三角形に変えたときを共通課題に設定し，全体追究を行った．

> 共通課題
>
> 二等辺三角形で原題と同様に AP と BQ を結び，交点を O とするとき，∠BOP の大きさを求めよう．



生徒は，原題と同様に△ABP≡△BCQ とならないか考えていたが，AB=BC でないと合同条件を満たせないことに気づき，同じような方法で∠BOP が求められないことに気づいていた．また，AB=BC の二等辺三角形だと∠ABP≠∠BCQ となり，こちらも合同条件が満たせないことから，元の図形が正多角形でないと角度が定まらないことに気づいていた．（図 24）

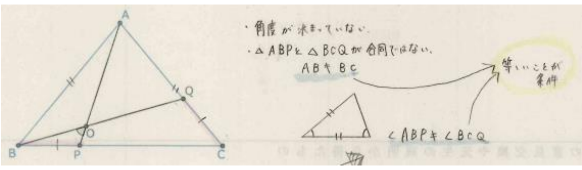


図 24　生徒の考えア

②　個人追究

その後は，生徒が自分で取り組みたい発展した課題に取り組んでいった．多くは元の図形を正方形などの正多角形に変えたり，点 P，Q の位置を別の場所に動かしたりして考えていた（図 25）．

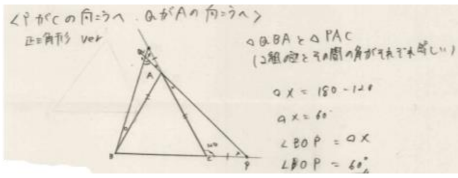


図 25　生徒の考えイ

③　小集団追究

小集団追究では，まず個々の考えを共有することから始めていた．正多角形について取り組む生徒が多かったので，正方形が 90°，正五角形が 108° などとなることがわかり，自然と正 n 角形についての議論が進んでいた（図 26，図 27）．

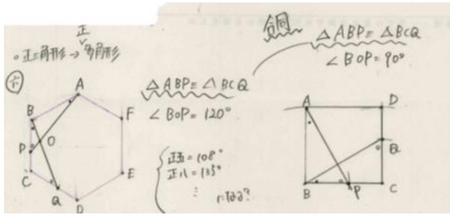


図 26　生徒の考えウ

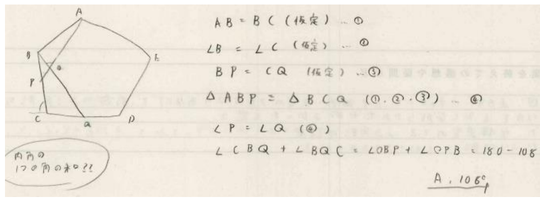


図 27　生徒の考えエ

④　全体追究

正三角形で点 P，Q の位置を別の場所に動かしたものと，正多角形のものに取り組んだ生徒を指名し，その内容を黒板にまとめた（図 28）．

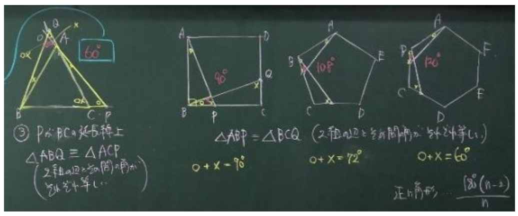


図 28　第 21 時の板書の一部

前者では，原題とは異なる△ABQ≡△ACP をつかって∠AQB=∠CPA，∠ABQ=∠CAP から∠BOP=∠ACB=60°を導いていた．これによって，∠BOP=60° という原題と同じ結果が得られ，『点 P がどの場所でも∠BOP の大きさは変わらない．』という統合的な結論が得られた．後者では，正方形が 90°，正五角形が 108°，正六角形が 120° となることから類推的に『正 n 角形は 180°（n-2）/n』と予想できていたが，その後の生徒とのやりとりを通して，どの図でも∠BOP=∠ABC となり，正 n 角形の 1 つの内角と等しくなることがわかり，証明の手順も原題と同じ手順であることから，『正 n 角形の場合，△ABP≡△BCQ を 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいことを用いて証明し，∠ABP=∠BOP であることを示せばよい．』という統合的な結論が得られ

た．

(3)　第 22 時の授業展開と生徒の反応

①　個人追究

前時に取り組みたかった課題について引き続き時間をとって追究した．発展のうち，原題のうち，①と③，あるいは①と②を同時に発展させている生徒が多かった（図 29，図 30）．

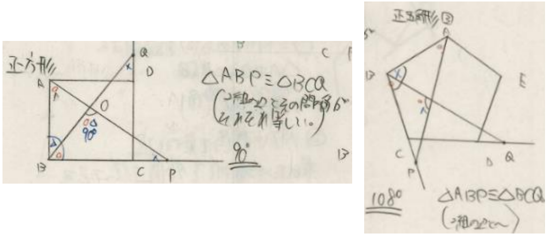


図 29　生徒の考えオ（原題の①，③を発展）

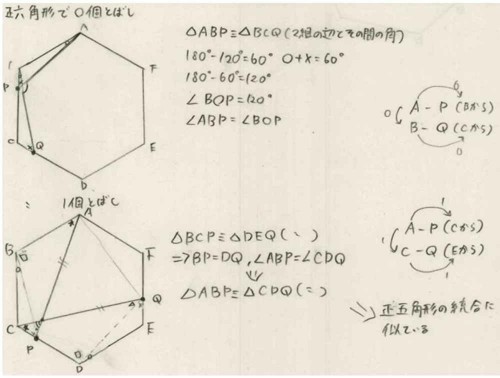


図 30　生徒の考えカ（原題の①，②を発展）

②　全体追究

正方形や五角形で点 P，Q の位置を変えたものと，正六角形で結ぶ線分を変え，1 点とばしをしたものについて生徒が発表した．前者はどの点をとっても正方形だと 90°，正五角形は 108°となり，点 P が BC 上にあるときと同じ結果が得られた．他には点 P がどの場所にいくのかを全体で考え，生徒の発言を黒板にまとめた（図 31）．

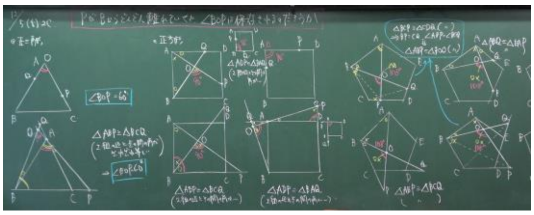


図 31　第 22 時の板書

これらから，『点 P がどの場所でも∠BOP の大きさは変わらない．』という統合的な結論が得られた．

後者については生徒自身の手では結論が出なかったので，全体で∠COP の大きさを求めた．△ABP≡△CDQ までは説明できていたので，∠BAP=∠DCQ となることを確認した．その後，四角形 ABCO の内角の和が 360°を利用して∠AOC が 120°となり，∠COP=60°が得られた．生徒からは「2 点とばしは何度になるのか」などの発展的な発言が聞かれたが，他の場合を試す時間がなく，統合的な結論が得られぬまま授業を終えた．

(4)　授業の考察

第 21,22 時の実践を通して，「統合的・発展的な考察」を促す視点から，次の点を指摘することができる．

本時は，授業者は発展的な考え方『[E1]問題の条件を変える』ことを意図し，元の図形を正三角形から他の三角形や他の正多角形にしたり，点 P，Q の場所を変えたり，結ぶ線分を変えたりして生徒が自由に条件を変えて発展的な考え方をできるような課題設定をした．また，生徒が学習課題に取り組む中で，合同な図形を見つけ，対応する角が等しいことを証明することや，三角形の外角の性質などをつかって角の大きさを求めることなど，原題と同じような手順で示すことができるため，統合的な考え方の②『拡張による統合』が起こりやすい学習課題であった．

生徒の振り返りからは，「正方形の場合に，正三角形のやり方を生かして角度を求めることができた」と書かれており，拡張による統合が起こっていたと考えられる．また，共通課題として条件が原題よりも緩い二等辺三角形に取り組むことで，角を求めるために元の図形が正三角形であることが必要条件であると理解できていた．このことから，生徒には統合的な考え方の③『補完による統合』も起こっていたと考えられる．一方，統合的な考え方①『集合による統合』については，正方形や正五角形で点 P，Q の場所が変わったときの図について第 22 時で取り組み，「点 P がどの場所でも∠BOP の大きさは変わらない」という統合的な結論が得られたものの，点 P と Q の位置については他の場合も考えられるため，すべての場合について確かめられた統合が起こっていたとはいえない．『集合による統合』が起こるため，生徒の考えに加えて教師から，「他の場合はもうないだろうか」などと問いかけ，全ての場合を洗い出してから取り組ませれば，より完全な『集合による統合』が起こると考えた．

これらのことから，本教材は，統合的・発展的な考察を促す上で，有効であったと考える．

６．中 3「円」の実践

(1)　授業の概要

中 3 の単元「円」において，4(2)で述べた「2 つの円の中にできる四角形について」の教材を扱った実践を行った．なお，授業の分析は，授業を撮影したビデオ映像，個人追究時に記述したワークシート（追究用紙），授業後の感想等をもとに行った．

①　単元計画

単元計画は表3の通りであり，本時は第8時である．

表 2　「円」の単元計画

時間	学習内容
1	**【円とはどのような図形だろう】** ・円についての既習事項を想起させ，円の学習について見通しをもつ．
2 3	【円周角の定理】　**集合**　**拡張** ・円周角と中心角の関係や等しい弧に対する円周角の関係特徴を見い出す． ・円周角の定理を証明する．
4 5	**【円周角の定理の逆】**　**集合**　**補完** ・「円周角の逆」について証明する．
6	**【円周角の定理を利用する】** ・円周角の定理や円の性質を利用して，求めたい角度を求めることができる．
7 8 本時 9	**【2 つの円の関係と四角形】**　**集合**　**拡張** ・2つの円の関係の中でできる四角形が，どんな四角形になるか考え，説明する．
10 11	**【円の接線】**　**拡張** ・円外の点を通る円の接線の引き方について考え，作図する．
12	**【円周角を利用した作図】** ・円周角の定理を利用して，条件に合った作図を行う．
13	**【円周角を利用した証明】**　**拡張** ・円の性質や既習の定理等を利用して，図形の性質を証明する．
14	単元のまとめ

② **本時の実施時期**：2023 年 12 月

③ **対象生徒**：国立大学附属中学校 3 年生 36 名

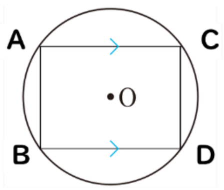
④ **授業の目標**：2 つの円の関係の中でできる四角形の様々な場合を考えることを通して，その特徴を見いだし，どんな四角形になるか説明することができる．

(2) 授業展開と生徒の反応

① 前時（第 7 時）の概要

本時で「2 つの円」について考える前に，前時までに「1 つの円」の図形の性質について考える必要がある．また「平行」を保存することを意識させるため，前時で次のような課題を扱った．

【前時の課題】
円にＡＣ // ＢＤを引き，ＡＢとＣＤを直線で結びます．四角形ＡＢＣＤはどんな四角形になるだろうか．



生徒からは，3 つの図形（台形，長方形，正方形）の可能性があるという意見が出されたため，それぞれについて考察した．

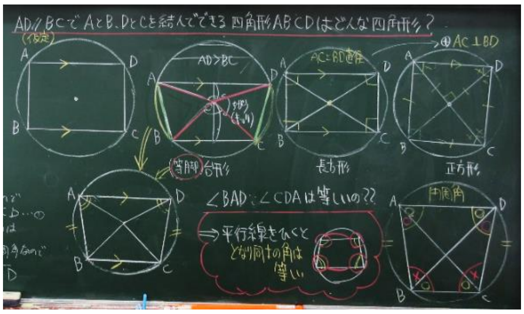
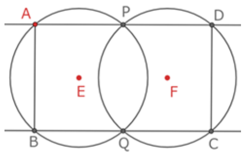


図 32　前時板書の一部①

最初に課題を提示した際に，A, B, C, D が円周上にあることを確認して，次に条件を付けて平行線を引くことで長方形や正方形になること，多くは台形になることについて共有した．生徒からは「等脚台形」と出てきたが，定義を扱っていなかったため，「台形」として扱うこととした．また，台形を考察する中で台形は「隣り同士の角が等しくなる」という性質についても説明があった．

それらを確認した後，「2 つの円」についての原題となる課題Ｉを提示した．

【課題Ｉ】
同じ半径の 2 つの円が P，Q で交わったとき，交点 P，Q を通るように，AD // EF // BC を引きます．そして，AB，DC を引きます．このとき，四角形 ABCD はどんな四角形だろう．



課題Ｉを提示した後，図については全体で確認しながら板書した．特に AD // BC について確認し，前時の課題との違いや 2 つの円になった時の注意点を把握した．生徒は最初から「長方形」になると予想していた．また，今回は，2 つの円になることで図が複雑になることから，口頭証明や証明の要素のみでも良いとして，どんな四角形か説明できることをねらいとした．

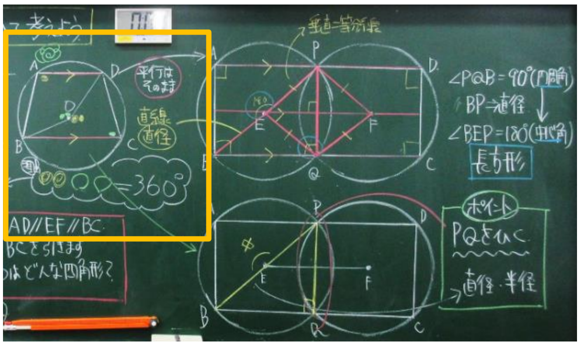


図 33　前時板書の一部②

2 つの円になると線の重なりが増えるため，どこに着目して考えたら良いか迷っている生徒も多くいた．そこで，「補助線 PQ」を結んで説明していた生徒に全体で説明してもらい，PQ を結ぶことで円周角の定理が成り立っていることが理解できる．PQ は EF の「垂直二等分線」であると説明し，90° を求めていた

生徒もいた．

また，課題Ⅰを考える中で，図 33 の左の黄色枠のような 1 つの円の中にある台形の性質に気付き説明した生徒もいた．これは内接四角形の性質であり，既習事項の中で気付くことができた．

前時の終末部分では「補助線 PQ を引くこと」，「台形の性質」，「円周角の定理」が四角形 ABCD を考察する時のポイントとして共有した．

② 課題の提示（第 8 時）

本時（第 8 時）では，課題Ⅱを提示する前に，生徒に「課題Ⅰを発展させるとしたらどこを変えられる？」と投げかけた．生徒からは，図 34 のように「円の半径を変える」，「円の数を変える」，「EF を平行でなくす」といった考えが出された．

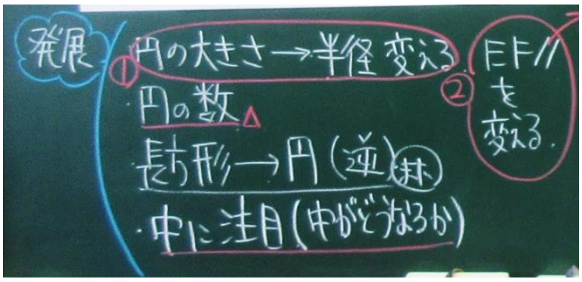


図 34 生徒の発展に対する考えの板書の一部

「“逆”について考える」といった生徒に関しては，補完による統合が期待できると考えたが，四角形 ABCD を十分に考察してからの方が良いと考え，今回の実践では扱わなかった．また，「円の数」については，まず「2 つについて考える」よう共有した．その後，課題Ⅱを提示した．

> 【課題Ⅱ】
> 課題Ⅰの①「同じ半径」や②「AD // EF // BC」の部分を変えて，四角形 ABCD についてどんなことが言えるか考えよう．

課題Ⅰに取り組む生徒の表れから，「2 つの円」について考えることは生徒にとって難易度が高いことがわかった．課題Ⅱをそのまま生徒が取り組むと，自由度が高く発散的になってしまう．前時の終末で抑えたポイントが統合的・発展的に考察する上でも重要になることやその後の考察を行いやすくするために，「共通課題」を設定した．

共通課題設定時の生徒との会話

> T:発展の視点として「半径を変える」や「EF を AD, BC と平行でなくす」という意見が出たけど，一気に変えると大変そうだね．
> S:まずどちらかについて考えれば良いと思う．
> T:どっちの方が取り組みやすそう？
> S:半径を変えるより，同じ半径で EF を平行じゃなくした方が良いかも．
> T:どんな感じの図になる？
> S:斜めにする感じ．
> T:じゃあこの場合(図 19)から考えていこう．

ここで，図 19 を共有し，まず EF を平行でなくした場合四角形 ABCD がどんな図形になるか考えた．多くの生徒が「平行四辺形」になりそうだという予想をしていた．

② 共通課題の個人追究

やはり「2 つの円」になったことから，図のどこを見れば良いかを考えている生徒が多くいた．念頭操作だけではわかりにくく図も書きづらいため，GeoGebra のデータを送付して，iPad 上で操作活動ができるようにした．また前時の終末部分のポイントを想起し，補助線 PQ を引く生徒も多くいた．ただ，90° ではないため，円周角の定理がどこで成り立っているのか等が見つけられない生徒もいた．

③ 共通課題の小集団追究

主に，四角形 ABCD が平行四辺形であることをお互いに説明する時間となった．説明した方法で本当に言えるのか，前の課題との繋がりについて検討している姿も見られた．

④ 共通課題の全体追究

全体追究では，2 人の生徒の説明を扱った．以下は生徒の考えである．

1 人は，図 20 の“図 15 の台形の性質 2 の場合”のように，円周角の定理を利用して説明した生徒の考えである（図 35）．

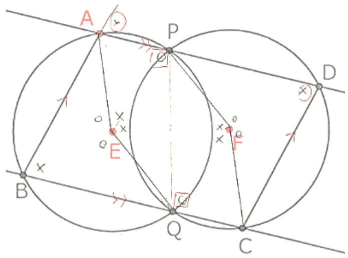


図 35 円周角を利用した生徒の考えキ

補助線 PQ を引くことで，円 E に内接する四角形 ABQP と円 F に内接する四角形 PQCD において円周角の定理から対角が等しくなることを説明しており，円周角の定理の有効性も示していた．また，AD // BC より同位角が等しくなるため，AB // DC を導き，「2 組の対辺が平行である」ことを根拠にしていた．

1 人は図 20 の“図 14 の台形の性質 1 の場合”のように台形の性質を利用して説明した生徒の考えである（図 36）．

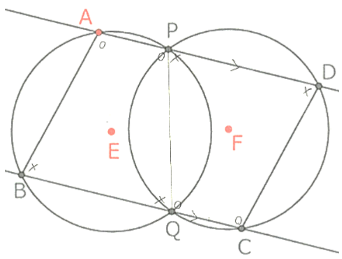


図 36 台形の性質を利用した生徒の考えク

前時でまとめた「台形の性質」を円 E，円 F それぞれで適用して説明していた．この考えは，四角形 ABCD において「2 組の対角が等しい」ことがわかりやすく，他の生徒も有効であると感じていた．
「円周角の定理を利用して台形 ABPQ の対角の和が 180° であること」や「台形の性質」を利用して，説明することで，四角形 ABCD が「平行四辺形」になることを確認した．

個人追究，小集団追究の中では，どんな四角形か説明できなかった生徒も，全体追究の段階で扱った 2 人の生徒の考えに納得していた．

共通課題に取り組んだことで，四角形 ABCD がどんな四角形になるかの考える助けとなり，見通しをもって統合的・発展的に考察できると言える．

⑤　共通課題後の課題Ⅱへの取り組み

共通課題後は，発展させる視点(図 34)を参考に，自由に考えていく時間とした．

⑥　課題Ⅱの個人追究

共通課題として「EF を平行でなくす」を扱ったので，「円の半径を変える」について考える生徒も多くいた．また，GeoGebra のデータを配付したこともあり，「円の半径を変える」と「EF を平行でなくす」の 2 つの条件を変えて，四角形 ABCD について考察している生徒も多くいた．どんな四角形かを説明するために，共通課題の 2 つの考えを元に説明していた．

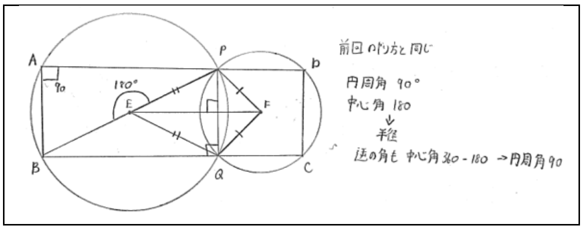


図 37　生徒の考えケ

図 37 の生徒の考えは AD∥EF∥BC を保ったまま，「円の半径を変えた」生徒の考えである．この場合「長方形」になることがわかる．

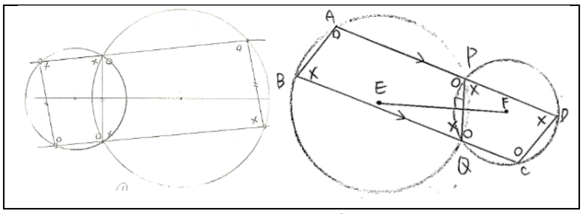


図 38　生徒の考えコ

図 38 の生徒の考えは「円の半径を変える」と「EF を平行でなくす」に着目して考察したものである．これは「平行四辺形」となる．また生徒の考察の中には図 39 のようなものもあった．

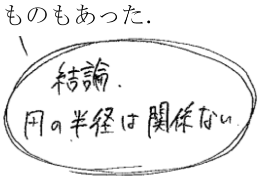


図 39　追究用紙の生徒の記述

考察していく中で，「EF が平行でない」と平行四辺形となり，「円の半径を変えて」も四角形 ABCD がどんな四角形かに影響はないことを統合している生徒もいた．

⑦　課題Ⅱの小集団追究

課題Ⅱに対して統合的・発展的に考察した結果を共有する時間となった．また個人追究の疑問を解決したり，正しいかどうかを判断したりする時間となった．

⑧　課題Ⅱの全体追究

個人追究，小集団追究の結果を全体で共有した．
「円の半径を変える」と「EF を平行でなくす」の 2 つの条件を変えた生徒の考えを共有し，2 つの条件を変えても「四角形 ABCD」が「平行四辺形」になることを確認した．そうした結論を導いている生徒の多くが，図 20 を根拠として説明していた．補助線 PQ を引き「共通課題と同じように説明できる」といった意見も生徒から出てきた．その中で図 20 のような場合「同じように説明できない」という考えが出された．
そこで GeoGebra で弧 PQ の短い方に A が入った場合について確認し，この四角形 ABCD はどんな四角形になるのかを次時（第 9 時）に検討することになった．

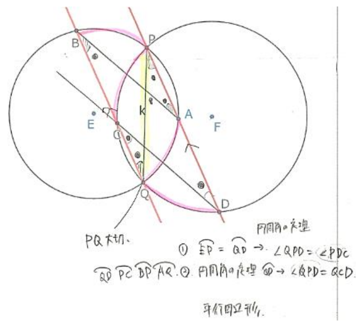


図 40　生徒の考えサ

図 40 の生徒の考えは，補助線 PQ を引き，それぞれの弧に着目して，円周角の定理を利用して説明した．
これまでと同様に補助線 PQ を引くことで，円周角の定理が利用できることを全体で確認した．

また，図 41 のように「円の数」に着目して統合的・発展的に考察した生徒もいたため考えを共有し，円が「偶数個なら平行四辺形になる」，「奇数個なら台形になる」という結論を導いた．扱えなかったものはレポート課題として提出するようにし，全授業を終えた．

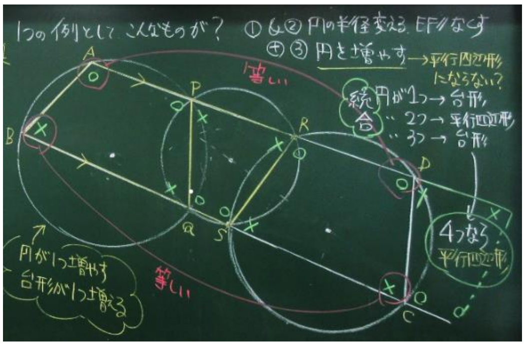


図 41　次時の板書

⑶　授業の考察

第 7～9 時の実践を通して，「統合的・発展的な考察」を促す視点から，次の点を指摘することができる．

本時の授業は 「円の半径を変えること」，「EF を平行でなくすこと」に着目して発展させて考えることで，結果的に「平行四辺形」になることが言えた．これは円の半径が変わったとしても，変わらない時と同じように言えるので，統合的な考え方①『集合による統合』であると言える．また，原題から条件を変えていくと考えると統合的な考え方②『拡張による統合』とも言える．

追究用紙には「円の半径は関係なく平行四辺形になる」や授業後の振り返りには「補助線 PQ を引くことが重要」といった記述が見られた．統合的に考察した結果，「PQ を引くこと」で円周角の定理を利用して考えることができる．短い方の弧 PQ に点 A がある場合を考えることで，点 A がどこにあっても「平行四辺形」であることが言える．これらは，統合的な考え方③『補完による統合』と言えるだろう．

「2 つの円」を教材化することによって，様々な統合的・発展的に考察する場面を設定することができる．よって本教材は，統合的・発展的な考察を促す上で，有効であったと考える．

7．今後の課題

今後の課題として，次の 3 点を挙げる．

(1)　中学校の図形指導について，さらに「統合的・発展的な考察」を促す教材を開発して実践すること．発展しやすく，色々な種類の考えが出されるものを開発することでより統合に考える良さを感じることができると言える．

(2)　図形以外の領域でも「統合的・発展的な考察」を促す教材の開発・実践を行い，中学校 3 年間を通した指導の在り方を追究すること．

(3)　「統合」については，中島(1982/2015)を参考に，分類分けを進めていくこと．

＜引用・参考文献＞

飯島康之(2021). ICT で変わる数学的探究　次世代の学びを成功に導く 7 つの条件．明治図書，78-84.

池田敏和(2020). 中学校数学３．学校図書，180-201

加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2018). 統合的・発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，28，97-106．https://doi.org/10.14945/00024664

加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2020). 中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，30，244-253．https://doi.org/10.14945/00027127

加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2021). 中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導：「多角形の直角の個数」と「ボロノイ図」の教材開発と実践．静岡大学教育実践総合センター紀要，31，315-324．https://doi.org/10.14945/00027931

片桐重男(1988). 数学的な考え方の具体化．明治図書.

菊池兵一(1997). 統合的，発展的に考察する．新しい算数研究，313，6-9，東洋館.

熊倉啓之(2011). 数学的な思考力・表現力を鍛える授業 24．明治図書.

小岩大(2014). 問題解決を通して円の性質を創造することを目指した学習指導．学芸大数学教育研究，26, 17-26.

旺文社(2011). 全国高校 2012 年入試問題正解.

杉山篤史，美澤将史，杤元新一郎，山田耕三(2022)．中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導:「図形の性質の調べ方」と「三平方の定理」．静岡大学教育実践総合センター紀要，32，379-390．http://doi.org/10.14945/00028728

鈴木直・加藤健二・熊倉啓之(2016). 発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形の指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，25，43-52．https://doi.org/10.14945/00009430

鈴木直・加藤健二・熊倉啓之(2017). 統合的・発展的に考える活動を重視した中学校数学科における図形指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，26，45-54．https://doi.org/10.14945/00010138

中島健三(2015). 算数・数学教育と数学的な考え方とその進展のための考察（復刻版），東洋館出版社.（原著出版 1982 年）

橋本吉貴(2001). 算数・数学科における「発展的な考え方」に関する考察．日本数学教育学会誌，83(9)，10-17．https://doi.org/10.32296/jjsme.83.9_10

福田允(2009). 学校数学における発展的な考え方の指導に関する一考察-「式を読む」ことに着目して-．日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集，181-186.