

数学科授業案：
教科で育みたい人間像「論理的かつ客観的な人」

メタデータ	言語: ja 出版者: 静岡大学教育学部附属静岡中学校 公開日: 2024-03-27 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 菊野, 慎太郎 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10297/0002000480

数 学 科 授 業 案

教科で育みたい人間像 「論理的かつ客観的な人」

授業者 菊 野 慎太郎

- 1 日 時 令和5年11月2日(木) 第2時 11:30~12:20
- 2 学 級 3年A組 (3年A組教室)
- 3 題材名 すごいぜ 三角形! —四角形の相似条件を考える—

4 本題材で願う学び

四角形の相似条件を考える活動を通して、相似の定義や三角形の合同条件をもとに、どのような場合でも相似が言えるために必要なことに気づいたり、反例を見つけたりすることができる。さらに、多角形の相似条件などを考えようとする中で、相似な図形に関する概念や三角形が図形の基準であるという概念を再構築することができる。

(学習指導要領との関連: B(1)図形の相似 相似の意味及び三角形の相似条件アの(ア))

5 これまでの子どもの学び

3年間を通して「数学科が願う子どもの学びを実現していく過程」を大切にしながら題材を重ねてきた。その中では、次のような子どもの学びを見ることができた。

一つめは、当たり前を疑うということである。教科書に載っている事柄でも「本当にそうなのだろうか」「なぜそのように言えるのだろうか」と疑問を抱き追究してきた。例えば中学2年の図形領域では「三角形の内角の和は180度である」という当たり前を疑うことからスタートし「なぜ平行線の同位角は等しいのだろうか」という問いを共有した。平行線の同位角が等しいことは、教科書において直感的に正しいと記載されている。教科書を疑い、そのように言える根拠を『ユークリッド原論』の公準公理をもとに解決することができた。子どもたちは当たり前を疑うことで基準を明確にすることの大切さを学ぶことができた。

二つめは多様な見方や考え方を大切にすることである。

大きい正方形から小さい正方形の面積の差を求めたり、一本の道に変形することで台形の面積の公式を活用したり、一般化して式で求めたりして追究してきた。よりよい求め方を追究する経験から仲間と語り合うことで、図形の見方や考え方が豊かになっていく楽しさを実感してきたと言えるだろう。

三つめは、発展的に考えるということである。中学2年の図形領域では「三角形の内角の和が180度であることは説明できた。では四角形の内角の和はどのように説明できるのだろうか」「五角形や六角形の内角の和も同様に言えるのだろうか」「内角の和が言えたのだから、外角の和はどのようにになっているのだろうか」など、自分たちで問い直ししながら発展的に追究した。

中学3年の数と式領域では正方形から考え始め、長方形や五角形、ハート型(図2)など自分たちでテーマを決め、図形の性質について追究した。



図1 S = alの題材

中学3年の数と式領域の題材「S(図形の面積) = al(道幅×中央線)はどのような図形でも言えるのだろうか」において、正方形などの面積を求める際には、仲間と多様な求め方を共有しながら追究してきた(図1)。

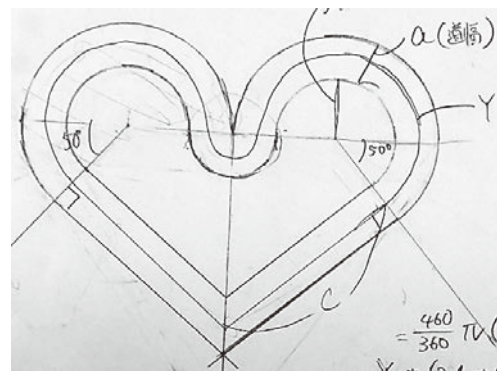


図2 ハート型の道の面積も $S = al$

さらに子どもたちは平面図形にとどまらず、「立体ではどうなるのだろうか」と立方体や正四面体なども追究し、自分たちなりの法則を見いだした。このように子どもたちは自分たちで問い直しながら事象を進展させ、さらなる学びの過程を推し進めてきた。

6 題材観

(1) 本題材の価値

本題材はこれまでの学びを生かして、四角形の相似条件を考察していくこととする。

①合同と相似を往還しながら見当をつける

中学3年の教科書において、相似とは「拡大縮小したときにぴったり重なる図形」と定義されている。また、相似な図形の性質は次の二つである。

- ・対応する辺の比がすべて等しい
- ・対応する角の大きさが等しい

これらは相似条件を考える上で基準となる。

そして相似条件を考える上で大切なのは三角形の合同条件である。

- ア 3組の辺がそれぞれ等しい
- イ 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい
- ウ 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい

ア～ウを根拠に相似な三角形をかき、相似条件を考察していくと次のエ～カのように見当をつけることができるだろう。

アからはエ「3組の辺の比がそれぞれ等しい」

イからはオ「2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい」

ウからはカ「1組の辺の比とその両端の角がそれぞれ等しい」

さらに、ウについて「相似比を気にせず相似のみを判断するのであれば、対応する2角（3角）が等しければ、三角形の相似が言える」ことからキ「2角がそれぞれ等しい」も見いだすことができる。

つまり三角形の相似条件は次のエ～キのように言うことができる。

- エ 3組の辺の比がそれぞれ等しい
- オ 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい
- キ 2組の角がそれぞれ等しい

上記のように三角形の合同条件をもとに三角形の相似条件が考えられることから、中学2年の学びが実感できるだろう。さらに三角形の合同条件アイウと三角形の相似条件エオキを比較することで、キの条件が特別に見えてくる。合同と相似の違いについても見いだ

すことができるだろう。

②四角形の相似条件を考えるおもしろさ

三角形の相似条件をもとに四角形の相似条件を考えてみる。四角形の相似条件を考える上で、四角形の合同条件（四角形の決定条件）が根拠となるため、四角形の合同条件とともに考察していく。「4組の辺の比がそれぞれ等しい」や「3角（4角）がそれぞれ等しい」などが予想されるが、どちらとも四角形は一つに決まらない（図3）。

長方形と正方形は3角（4角）がそれぞれ等しく、正方形とひし形は4組の辺がそれぞれ等しいが四角形は一つに決まらない。つまり相似な図形も一つに決まらないと言えるだろう。

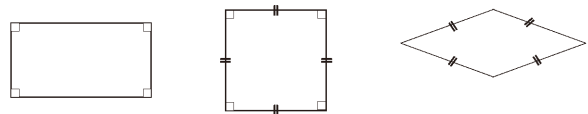


図3 長方形 正方形 ひし形

「3組の辺とその間の1角」「3角とその間の1辺」なども同様に一つに決まらない条件である（図4・図5）。

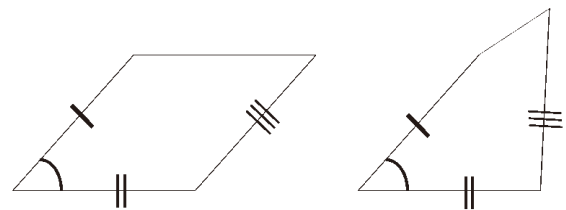


図4 3組の辺とその間の1角

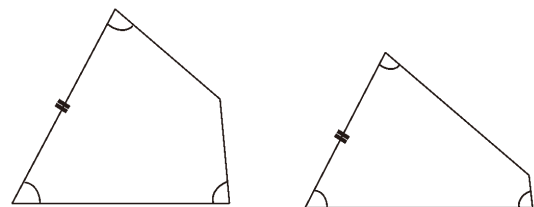


図5 3角とその間の1辺

これらの反例から辺と角の要素4つでは四角形は一つに決まらないことがわかる。

次に5つの要素で相似条件を考えてみる。

ク 4組の辺とその間の1角

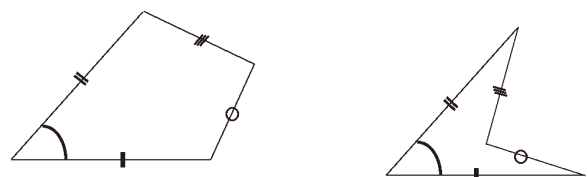


図6 条件クの2種類の四角形

→凸四角形と凹四角形の2種類できてしまう。

ケ 3組の辺の比とその間の2角

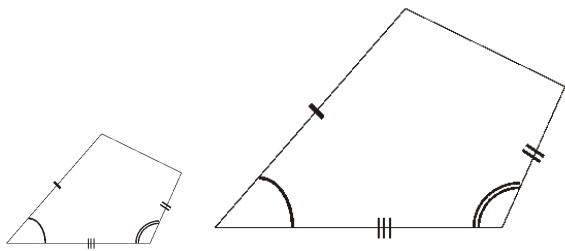


図7 条件ケの相似な四角形

→最後の1辺以外は固定されるため四角形が一つに決まる。

コ 2組の辺の比とその間の角と両端の角

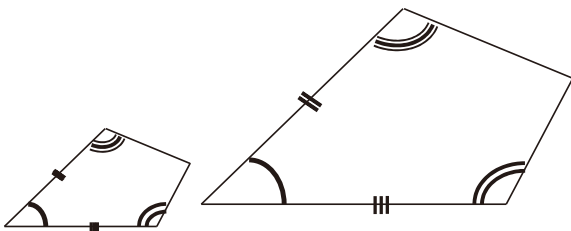


図8 条件コの相似な四角形

→四角形が一つに決まる。

サ 1組の辺の比と4つの角

図5に同じ

→四角形は一つに決まらない。

これ以外にも「4組の辺の比と1本の対角線の比」「3組の辺の比と2本の対角線の比」など「対角線」を使った条件も考えられるだろう。

多様な条件が考えられるが、数学の特性上一つでも反例が見つければ、その性質は認められない。

三角形に分割したり、四角形の合同条件を考えたりすることで、どのような場合でも四角形が一つに決まる条件を考えていくことにおもしろさがある。

③発展するからこそ気づく三角形のすごさ

四角形の相似条件は5つの要素が必要であることがわかった。同様に考えると五角形の相似条件は7つの要素(例:4辺とその間の3角)が相似を言うために必要である。つまり多角形の頂点の数と要素の数の規則性をみると、 n 角形が一つに決まるためには $2n - 3$ 個の要素が必要であると言えるだろう。例えば100角形のときは197個の要素がわかれば図形が一つに決まり、相似条件が言えるのである。

しかし、三角形の相似条件は例外であり、「2角がそれぞれ等しい」だけで相似と言える。 $2n - 3$ には該当せず、たった2つの要素だけで相似と判断できるの

である。さらにこの条件は辺を必要とせずに相似と判断できるため、直接測定できない巨大なものでも、相似な三角形とみなすことで長さを計算で求めることができるのである。

また、多角形の相似条件を考える場合などでは、三角形に分割することで規則性を見いだすことができる。これを応用することで、様々な図形の性質や規則を見いだすことにつながるのである。「三角形は図形の基準である」という当たり前のことについても改めて実感することができる。

(2) 本題材で願う子どもの姿

本題材において、これまでと同様に子どもたちが自ら疑問を抱き、多様な見方や考え方を大切にしながら、見当をつけて課題を解決し、さらなる学びの過程を生み出す姿を願っている。

その中で、授業者が願う子どもの姿は、大きく三つある。

一つめは「三角形の合同条件や相似条件、四角形の合同条件などをもとに見当をつけながら考えようとする姿」である。四角形が一つに決まることを確かめるために、作図をしたり、実際に鉛筆などで四角形をつくったりするなど試行錯誤し、どのような場合でも言える条件を見つけていく。反例を探すことや演繹的に考えることで、図形が一つに決まる条件を考察していこう。四角形の相似条件を考えるためには、これまでに学んだ三角形の合同条件や相似条件を根拠に考えようとしていこう。仲間と共に多様な考えを共有し、合同と相似を往還しながら図形の概念を再構築していこう。

二つめは「相似条件などを発展させて考えようとする姿」である。「四角形の相似条件に規則性が見いだせれば、次は五角形、六角形…… n 角形も同様な法則が見いだせそうだ」と一般化していこう。他にも「正方形や長方形など特別な四角形の相似条件はあるのだろうか」「円ではどうなるだろうか」など関連づけ、広げていくことを期待する。自ら疑問を抱き、学びの過程を生み出そうとすることを、本題材を終えた後も大切に学んでいこう。

三つめは、「発展的に考え、そこから三角形をとらえ直す姿」である。 n 角形の法則まで考えたからこそ、子どもたちは三角形の相似条件は辺のみ、角のみの要素で相似が言えることに気づく。また、多角形を考察する際には、自然と三角形で分割していく。このように三角形は図形の基準であることに気づいた子どもたちは三角形の相似条件に戻り、三角形のすごさに感嘆するだろう。「三角形の合同条件」「三角形の相似条件」

数学科授業案

を学ぶ意味があることを実感し、今後の題材「三平方の定理」や高校数学においても三角形のおもしろさを

存分に味わってほしいと願う。

7 題材構想（全7時間）

- ①相似な図形とは何か（1～2時）
- ②三角形の相似条件を考えよう（3～4時）
- ③四角形の相似条件を考えよう（5～6時：本時は6時）
- ④これまでのことから何が言えそうか（7時）

8 題材構想における授業者の考え

(1) 子どもたちの疑問からはじまる問い

問いは授業者から与えるものではなく、子どもたちから湧き出てくるものであると考えている。中学1年生のときから、当たり前を疑い、子どもが抱く疑問からはじまる問いで授業を展開することを大切にしてきた。そのような子どもたちに相似に関して「気になることやわからないこと」を自由に書くように促す。子どもたちからは「相似の定義は合同と似ている」「相似の定義は曖昧でよくわからない」「三角形の相似条件があるのだから四角形の相似条件もあるのだろう」などと様々な気づきや疑問が出てくるだろう。授業者は子どもたちの疑問から議論がはじまるように、考えを全体で共有し、問いを明確にしていきたい。問いが明確になった子どもたちは、進んで追究していくだろう。

(2) 数学らしい条件について考える

四角形の相似条件を考えていくと子どもたちから辺や角の要素だけにとらわれない、たくさんのアイデアが出てくるだろう。例えば「3組の辺と2組の対角線」「補助線と平行な辺と中点を結んだ対角線」などである。思考する段階で、様々なアイデアが出ることは認めていくが、最終的に「相似条件」としてまとめる際には「初めからある要素の辺と角のみで保証される命題」で考えていきたい。その理由は、初めからある辺や角の要素のみにしなければ、三角形の合同条件も「1辺とその両端から引いた中線がそれぞれ等しい」という合同条件も考えることができてしまい、よりよい条件の表現方法ではないと考えるからである。このようにすることで頂点の数 n と必要な要素の数 $2n - 3$ の関係に気づくことができるだろう。多様な思考は認め

ていくが、今までの合同条件や相似条件を想起させ、よりよい条件を子どもたちと探っていくたい。

(3) すごいぜ 三角形！

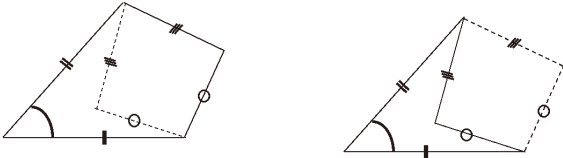
三角形の相似条件はそれだけで価値のあるものであるが、多角形まで発展させて考えることでそのすごさが際立つと考えている。例えば、三角形の相似条件では、辺のみ、角のみで相似が判断できること、2つの要素でも相似が言えること、これまでの図形の題材においても、三角形を図形の基準として考えてきたことなどである。四角形の相似条件を考え、さらに多角形の相似条件へ発展させていくからこそ、三角形の相似条件を学ぶ意味を実感するだろう。また、中学2年「三角形の合同条件」の題材ではなく、中学3年「三角形の相似条件」の題材において発展して追究することで、相似条件を帰納的にも演繹的にも明らかにできるおもしろさを感じることができる。

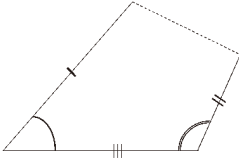

多角形の相似条件や、特別な四角形の相似条件など発展させて追究していく中で、子どもたちの疑問、気づきに耳を傾け、全体で共有していきたい。合同条件と相似条件を比較するなど、相似について深く考察したり、三角形に立ち戻ったりしている子どもの姿を丁寧にとっていきたい。

この他にも、題材を通して子どもたちの授業の様子や追究の記録など、子どもたちのあられから自覚された学びをみとり、授業を展開していくことを大切にしていく。子どもたち自身の疑問を共有することで問いを明確にする。そして見当をつけて試行錯誤し、多様な見方や考え方を共有しながら問題解決していく学びの過程を、授業者も一緒に楽しんでいきたい。

9 予想される子どものあらわれ

時数	活動、問い	子どものあらわれ
1～2	<p>相似な図形とは何か 【教科書や問題集を読んだり、これまでの経験を振り返ったりして、相似に関する疑問や気になることを自ら見つけようとする。また、気になった疑問を周りの友人たちと協力しながら解決しようとする。】</p> <p>○「相似な図形についてわからないことや気になることを挙げてみよう」という授業者のなげかけにより、教科書や問題集を見て、相似について素朴な疑問やわからないことを話し合う。</p> <p>○相似についての疑問やわからないことを仲間と語り合うことで、疑問を明らかにしたり、問いを焦点化したりしていく。</p> <p>※授業者は疑問をもてない子どもにかかわり、級友から出された疑問（合同条件と相似条件の違いなど）をなげかける。子どもたちの問いには大きいものと小さいものがあるため、子どもたちとやりとりをしながら全体で問いを焦点化していきたい。</p>	<p>子どものあらわれ</p> <ul style="list-style-type: none"> ・相似とは拡大図、縮図のことだろう。 ・拡大図、縮図と何が違うのだろう。 ・二つの図形を扱うときに相似と言うのだから、合同と同じだろう。 ・相似とは二つの図形を比べたとき、拡大、縮小したときに合同になる図形を相似な図形と言うと教科書に書いてある。 ・相似の中に合同があるのだろう。 ・相似な図形の性質は相似な図形の定義とは異なるのだろうか。 ・相似の位置とは何だろうか。 ・相似の記号\simの語源は何なのだろうか。 ・三角形の相似条件が書いてあるが、三角形の合同条件とは少し違う部分がある。なぜ違うのだろうか。 ・2角が等しい三角形は相似な図形と書いてあるが、なぜそのように言えるのだろうか。
3～4	<p>三角形の相似条件を考えよう 【1：2の相似な三角形をかくことを通して、合同条件と相似条件の共通点や相違点、どんな場合でも言えるために反例を探ることができる。さらにそこから発展的に考えようとする。】</p> <p>○1：2の相似な三角形をかくことを通して、三角形の相似条件を考える。</p> <p>○どのような三角形でも言える根拠や反例についてふれながら、三角形が一つに決まることを説明する。</p> <p>○相似かどうかを言うためだけならば「2角（3角）のみで相似が言える」ことを確認する。</p> <p>※授業者は子どもたちが試行錯誤しやすい環境づくりに努める。図形セットや追究用紙、学習用端末では図形アプリGeogebraを常に使えるようにしておく。また、豊かな創造力を大切にしてほしいと考えているため、子どもたちに学びの安心感を与えられるような声かけをしていきたい。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・3辺の比がすべて1：2であれば相似と言えるだろう。 ・2辺の比と間の角がそれぞれ等しければ相似と言えるだろう。 ・2辺と1角では三角形が一つに決まらないのは、三角形の合同条件と同じだろう。角の位置が重要になってくる。 ・1辺の比とその両端の角が等しければ相似と言えるだろう。しかし1組の辺と2角でも相似は言えるだろう。 ・相似を言うためだけならば、1辺という要素は無くても、2角のみで相似と言えるだろう。 ・三角形は角が3つしかないので、2角がわかれば必ずと残りの1角もわかるので、2角がわかれば相似と言える。

		<ul style="list-style-type: none"> ・三角形の相似条件は合同条件とほぼ同じだけど、異なる部分は2角のみで相似と言えるところだろう。 ・三角形の相似条件では相似比のある場合は1組の辺の比とその両端の角という条件になり、相似比がなしでは2組の角という相似条件に変わるのだろう。 ・相似は大きさを自由に変えられるので、合同条件よりも自由度がある。 ・三角形の相似条件を、三角形の合同条件をもとにして考えることができた。四角形の相似条件はあるのだろうか。
<p>5～6</p>	<p>四角形の相似条件を考えよう</p> <p>【1：2の相似な四角形をかくことを通して、四角形の相似条件を考えることができる。また、三角形の相似条件や四角形の合同条件などを往還しながら、相似についての理解を深めることができる。】</p> <p>○四角形の相似条件はあるのだろうか、という問いから1：2の相似な四角形をかくことを通して、四角形の相似条件を考える。</p> <p>○合同と相似の関連性から四角形の合同条件を考える。</p> <p>○条件を考え、仲間と共有することで反例を見つける。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・三角形では3辺の比がすべて等しければ相似が言えたのだから、4辺の比が等しければ、相似が言えるだろう。 ・4角が等しければ相似と言えるだろう。 ・4辺も4角も反例が見つかったので、四角形が一つに決まらないことがわかった。 ・3辺の比とその間の1角も四角形が一つに決まらないだろう。 ・4つの要素では相似が言えそうにない。 ・5つの要素で考えてみよう。 ・4辺1角、3辺2角、2辺3角、1辺4角の4種類を考えればよいだろう。 ・辺の位置、角の位置も重要なので、すべて考えると4種類以上あるだろう。 ・1辺4角は反例が既にあるので考えなくてもよいだろう。 <p>※子どもたちは多様な相似条件を考えるだろう。その考えを分類すると<折れ線の考え方><三角形に分割して考える>の2つの考えに分けられると考えている。</p> <p><折れ線の考え方></p> <ul style="list-style-type: none"> ・4辺と1角では凸四角形と凹四角形の2種類かけてしまう。四角形が一つに決まらない。 

	<p>○考えられた相似条件をよりよい四角形の相似条件として磨く。</p> <p>※相似条件としてまとめていく際に、数学の定理や性質の簡潔さやわかりやすさについてふれることで、よりよい条件を子どもたちとつくっていききたい。</p>	 <ul style="list-style-type: none"> ・ 3 辺と 2 角では角の場所が重要で、辺を挟むことで四角形が一つに決まる。 ・ 2 辺と 3 角では角の間に辺を挟むことで四角形が一つに決まる。 <p><三角形に分割して考える></p>  <ul style="list-style-type: none"> ・ 三角形に分割して考えれば、対角線という補助線で四角形が一つに決まる。 ・ 3 辺と 2 本の対角線で四角形が一つに決まる。 <p><それ以外の補助線の考え方></p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 各辺の中点を結んでできる平行四辺形と 2 本の対角線の交点を結んだ四角形は相似である。 <p><相似条件としてまとめていく></p> <ul style="list-style-type: none"> ・ いろいろな相似条件が出されたが、四角形の相似条件をどのように表現すればよいだろうか。 ・ 相似条件としてまとめるものはできるだけシンプルなものがいいだろう。 ・ すべて反例がなく正しいのだから四角形の相似条件と言えるだろう。 ・ 対角線や補助線など初めにはない要素を条件に入れることはよいのだろうか。 ・ 三角形の合同条件や相似条件では初めからある要素しか入っていなかった。 ・ 3 辺の比とその間の 2 角は初めからある要素のみでつくられている。 ・ その視点で言えば 3 角とその間の 2 辺の比もはじめからある要素と言える。 ・ 辺と角のみで構成されているものこそ洗練されていて数学らしいだろう。
<p>7</p>	<p>これまでのことから何が言えそうか</p> <p>【子どもたちが自らの疑問から新たな学びの過程を展開することができる。また、事象を発展させることで相似について深く理解したり、基準である三角形の概念を再構築したりすることができる。】</p>	

<p>○五角形、六角形など多角形の相似条件を考える。</p> <p>○正方形の相似条件や長方形の相似条件など特別な四角形の相似条件を考える。</p> <p>○三角形の相似条件に戻って多角形の相似条件を考えたり、三角形が図形の基準であるということに気づいたりする。</p>	<p><特別な四角形の相似条件を考える></p> <ul style="list-style-type: none"> ・長方形は角がすべて90°なので、2辺の比が等しければ相似と言える。 ・平行四辺形は2辺と1角が等しければ、相似と言えそう。 ・特別な四角形や多角形の相似条件は必要なのだろうか。 ・正三角形や正方形など正多角形や円は、すべて相似な図形だ。 ・空間図形における相似条件はどうなるのだろう。 <p><多角形の相似条件を考える></p> <ul style="list-style-type: none"> ・五角形の相似条件は辺-角-辺-角-辺-角-辺のように4辺と3角で相似が言えそう。 ・五角形は4角と3辺でも言えそうなので、7個の要素で相似が言えそう。 ・辺と角が交互に並ぶという条件で相似が言えるだろう。 ・同様に考えると六角形は9個の要素で相似が言えそう。 ・n角形は$2n - 3$個の要素で相似が言えそう。 <p><三角形に戻って考える></p> <ul style="list-style-type: none"> ・合同条件や決定条件を考えれば$2n - 3$だが、相似条件では三角形が唯一$2n - 4$という少ない条件で相似が言える図形と言えるだろう。 ・そもそも四角形の相似条件は必要なのだろうか。 ・三角形の相似条件が言えれば、多角形の相似条件が言えそう。三角形の相似条件さえあればすべてのことが言えるだろう。 ・三角形の相似条件は他の多角形の相似条件とは異なり、辺のみ、角のみの要素で相似が言えることがわかった。 ・三角形は図形の最小単位なので、三角形は特別なだろう。 ・三角形が特別なのではなく、三角形が基準なのだろう。 ・これまでも三角形をスタートにして様々な図形を考えてきた。三角形は複雑な図形を分析するための道具の一つとも言えるだろう。 ・三角形だけを見てもわからないが、四角形、五角形……n角形と発展させていくことで、三角形の特徴がはっきりしてくる。発展させて、別の場所からもとの場所を比較して見ることの大切さを学ぶことができた。教科書に三角形の合同条件や相似条件だけ載っている意味が理解できた。すごいぜ 三角形！
---	---

参考文献：小林文美子（2020）『四角形の相似条件』 日本数学教育学会 論文集

筑波大学附属駒場中高数学科（2008）『創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発』 2008筑波大学附属駒場論集48号

増島高政（2013）『数学教育』 明治図書