

本論文は「コンパクト空間上の連続関数環に \sup ノルムと本質的に違う代数ノルムは存在しない (NDH)」という Kapranksy 予想に関する未解決問題に関して研究している。1978 年に Dales と Esterle は独立に、連続体仮説 CH を仮定すると NDH が成り立たないことを示し、その後 1984 年に Woodin は (ZFC が無矛盾ならば) ZFC と NDH が無矛盾であることを示した。よって NDH は ZFC と独立である。さらに 1993 年に Woodin は「ZFC と \neg CH および \neg NDH」が無矛盾であることを示し、「ZFC と Martin の公理、および \neg NDH」は無矛盾かという問題を提唱した。この問題は今でも未解決である。

青木氏は EPC_{\aleph_1} と $\text{ProjCes}(E)$ という、可算鎖条件より強い二つの強制法の性質を定義し、 $MA_{\aleph_1}(EPC_{\aleph_1} + \text{ProjCes}(E))$ が無矛盾であることを、および「ZFC と $MA_{\aleph_1}(EPC_{\aleph_1} + \text{ProjCes}(E))$ および \neg NDH」は無矛盾であることを示した。これは Woodin の問題に部分的な解決を与えたことになる。さらに青木氏は EPC_{\aleph_1} およびその弱化である $EPC_{\aleph_1}^*$ を満たす強制法の保存定理、および gap interpolation に関する Kunen の強制法と $EPC_{\aleph_1}^*$ の関係を詳細に調べた。

本論文は次のように構成されている。第 1 章では、NDH の歴史と背景、既知の結果を述べ、青木氏が導入した二つの強制法の性質である EPC_{\aleph_1} と $\text{ProjCes}(E)$ の定義と基礎事項を述べている。第 2 章では、青木氏の主結果の一つである「ZFC と $MA_{\aleph_1}(EPC_{\aleph_1} + \text{ProjCes}(E))$ および \neg NDH」の無矛盾の証明を詳細に述べている。第 3 章では、 EPC_{\aleph_1} および $EPC_{\aleph_1}^*$ を満たす強制法の例を与え、 $EPC_{\aleph_1}^*$ を満たす強制法の保存定理を複数与えている。さらに第 3 章において gap interpolation に関する Kunen の強制法が持つ性質を gap のタイプごとで分類している。

本論文で青木氏は二つの有用な強制法の性質を独自に与え、それらを駆使して Woodin の問題の部分解を得たことは特筆すべき事項である。また第 2 章において、Woodin の論文では与えられていない複数の定理の証明を詳細に与えている点も高く評価できる。さらに、青木氏が本論文で与えた保存定理も大変有用だと考えられる。以上のことから本論文は博士（理学）の学位授与にふさわしいものと認められる。