

時空創発の記述に向けた繰り込み群に基づくテンソルネットワークの研究

メタデータ	言語: ja 出版者: 静岡大学 公開日: 2024-06-18 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 桑原, 孝明 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/0002000665

博士論文

時空創発の記述に向けた
繰り込み群に基づく
テンソルネットワークの研究

2023年12月

静岡大学

大学院 自然科学系教育部

情報科学専攻

桑原 孝明

概要

AdS/CFT 対応において、境界からいかにバルクを構築するかは未解明である。バルクを構築する上で、近年テンソルネットワーク手法が注目されている。本論文では、AdS/CFT 対応が備えるべき性質を満たすようなテンソルネットワークを構築すべく、テンソル繰り込み群による数値的アプローチによる研究と、厳密繰り込み群を用いた解析的アプローチによる研究とを行う。具体的にはまず、ゲージ場の経路積分をテンソルネットワークとして表す定式化を提案する。テンソルネットワークを用いる手法の一種であるテンソル繰り込み群により、3次元 SU(2) ゲージ理論を解析する。数値解析結果が、強結合展開の結果と弱結合展開の結果双方と整合することを見る。次に、厳密繰り込み群によって波動関数のスケール依存性を記述する関数微分方程式を導く。これは連続幾何を直接扱うための連続テンソルネットワークを、AdS/CFT 対応において不可欠である繰り込み群から直接得るための枠組みを構築したことを意味する。一方で、AdS/CFT 対応は量子誤り訂正と関係することが知られている。そこで量子誤り訂正と繰り込み群双方の性質をもつテンソルネットワーク構築に向けて、繰り込み群と量子誤り訂正との関係について、この関数微分方程式の摂動解をもとに議論する。

目次

第 1 章	序論	3
1.1	背景	3
1.2	構成	5
第 2 章	AdS/CFT 対応	7
2.1	AdS/CFT 対応	7
2.2	テンソルネットワーク	9
2.3	テンソル線り込み群	15
2.4	バルク局所性と量子誤り訂正	17
2.5	AdS/CFT 対応と量子誤り訂正	21
2.6	量子誤り訂正条件	21
第 3 章	3D SU(2) TRG	23
3.1	TRG	23
3.2	Levin-Nave TRG	24
3.3	Anisotropic TRG	27
3.4	テンソルネットワーク表現	30
3.5	3次元 SU(2) ゲージ理論の数値解析結果	37
3.6	3D SU(2) TRG 結論と展望	41
第 4 章	波動汎関数に対する厳密線り込み群	42
4.1	波動汎関数に対する厳密線り込み群 背景	42
4.2	記法	43
4.3	波動汎関数に対する ERG 方程式	43
4.4	波動汎関数の摂動論	49

4.5	摂動論による検証	52
4.6	結論と展望	54
第 5 章	繰り込み群と量子誤り訂正	55
5.1	コヒーレント状態の符号化	56
5.2	自由場	58
5.3	摂動論	60
5.4	繰り込み群と量子誤り訂正 結論と展望	67
第 6 章	結論	69
6.1	まとめ	69
6.2	展望	70
付録 A	3次元 SU(2) ゲージ理論の初期テンソル構成方法	72
付録 B	δm^2 のフロー方程式	75
参考文献		77

第 1 章

序論

1.1 背景

人類が到達した中で、高エネルギーで最も成功を収めた理論は標準模型である。電磁気力、弱い力、強い力の量子論を統一的に記述し、実験結果と非常によく整合している。しかしながら、宇宙の起源を解明する上で、ブラックホールや初期宇宙といった対象を記述するのに必要な重力の量子論は未だ構築されていない。量子重力理論の構築こそ、素粒子論分野に残された最大の問題の一つである。

量子重力理論を構築する上で注目されているのが、Anti de-Sitter space/Conformal field theory correspondence (反 de-Sitter 空間/共形場理論対応, AdS/CFT 対応) [1] である。この対応は、負の定曲率をもつ空間における重力理論と、その境界に定義された共形場理論が等価であることを主張する。具体例としては、古典重力理論と large N 強結合ゲージ理論が対応する。AdS/CFT 対応は、共形場理論のエンタングルメント構造を始めとする数多くの例で正当性が検証されている。しかしながら、AdS/CFT 対応は提唱から 20 年以上経った今日においても厳密な証明がされておらず、基本的なメカニズムが理解されていない。

基本的な問題点の一つは、境界のゲージ理論からいかに時空内部 (バルク) の重力理論を構成するかということである。AdS/CFT 対応が満たすべき性質のうち、次の三点に着目する。

- 笠-高柳公式 (ホログラフィックエンタングルメントエントロピー公式)
- 繰り込み群の構造
- 量子誤り訂正符号

以下で各項目について説明する。

笠-高柳公式

笠-高柳公式 [2] では, AdS/CFT 対応において境界上に定義された量子多体系の量子もつれを測る量であるエンタングルメントエントロピーが, 時空内部の幾何で記述される. より具体的には, AdS 空間の境界上の部分系 A のエンタングルメントエントロピーが, A の極小曲面 γ_A の面積で与えられる. これを始めとした研究により, 幾何がエンタングルメントから創発するとみなすことができることが示唆された. つまり適切なエンタングルメント構造があれば, 極小曲面を通じて, 対応する時空の計量が決まるという描像である. 実際に, ある種のテンソルネットワークである Multi-scale entanglement renormalization ansatz(MERA) [3] はそのような描像を具現化する. MERA とは, 変分法によって量子多体系の基底状態を数値的に求める数値手法である. MERA のネットワークは系をスケール方向に多層化したテンソルネットワークで与えられ, 変分法でテンソルの成分を最適化することで, 系の基底状態の波動関数を近似する. 後に議論するように, MERA は笠-高柳公式と同様のエンタングルメント構造をもつことから, 離散的な AdS 空間の計量と対応すると示せる [4].

繰り込み群の構造

AdS/CFT 対応において時空内部の方向は繰り込み群のスケールと対応することが知られている. そのため, 境界から時空内部のバルク重力を記述するためには何らかの繰り込み群の構造が必要である. 先述した MERA はスケール方向に多層化されているため, 量子多体系に対してブロックスピン変換を繰り返しているものと類似している. しかしあくまで変分法であるため, 繰り込み群ではない. 繰り込み群に基づく連続テンソルネットワークへのアプローチがいくつか行われているが, いずれも一般の非摂動論を扱っていない. AdS/CFT 対応において古典重力と対応するのは重力を含まない強結合理論であるため, 直接非摂動論的に繰り込み群を扱うことが必要である.

量子誤り訂正符号

近年では AdS/CFT 対応において, バルクの自明理論を避けるためには, 量子情報で知られる量子誤り訂正の性質を持たなければならないことが示された [5]. 量子誤り訂正はもともと量子コンピュータにおいて, データをエラー (誤り) から守るために構築された理論である. 典型的には, 量子的なスピン系を送る際に, ノイズによってスピンの向きが反転したり, スピンが消去されるといったエラーを受けることがある. 基本的なアイデ

アは、元々の状態を冗長化することでエラーに耐性をつけることである。このように量子誤り訂正はもともと実用的な文脈で考えられたが、AdS/CFT 対応において理論構成上、バルクの自明理論を避けるためにも必要である。つまり少なくとも古典重力においては、境界からバルクの重力を記述するために量子誤り訂正の性質を持つ必要がある。

テンソルネットワークによるアプローチ

AdS/CFT 対応の基礎を解明するには、AdS/CFT 対応を顕に仮定せずして、境界上の理論からこれらの条件を満たすようなバルクの連続幾何を構築することが必要である。そこで、テンソルネットワークによるアプローチが有力視されている。先述した MERA を始めとして、HaPPY code [6], Random tensor network [7] などにより、離散的な時空の創発の記述が提唱され、それぞれ AdS/CFT 対応のエンタングルメント構造や量子誤り訂正の性質を満たすことが示され、量子情報と幾何の関係など、重要な性質を捉えている。実際に時空の創発を記述するには、連続的な幾何を導出するという困難と、境界としてゲージ理論を扱うという困難とを克服する必要がある。

本研究では、テンソルネットワークによる時空の創発の記述による、AdS/CFT 対応の基礎解明を主眼におく。最終的に境界上のゲージ理論のテンソルネットワークから連続的な幾何を構築すべく、テンソルネットワークと量子エンタングルメント、繰り込み群、量子誤り訂正の関係を明らかにすることを目指す。本論文では、その一環として我々が行ったいくつかの研究について述べる。なお、量子重力を直接扱うことは困難であるため、本論文では一貫して背景時空が古典的である場合を対象とする。

1.2 構成

本論文の構成を以下に示す。

2 章では、AdS/CFT 対応と繰り込み群、量子誤り訂正との関係と、関連するテンソルネットワークについてレビューする。まず AdS/CFT 対応 (ホログラフィー原理) を概観する。テンソルネットワークの一種である MERA を導入し、離散的 AdS 時空との対応について議論する。次に、ある種の実空間繰り込み群であるテンソル繰り込み群を導入する。MERA が波動関数を変分法により求める手法である一方、テンソル繰り込み群は分配関数を特異値分解による情報圧縮によって求める手法である。さらに、AdS/CFT 対応と量子誤り訂正との関係についてレビューする。まず量子誤り訂正の基礎について述べる。バルク局所性を単純に課すとバルクの自明理論を導くというパラドックスが生じる

が、量子誤り訂正の言語を用いることにより、パラドックスが解消されることを議論する。

3 章では、一般のゲージ理論に対してテンソルネットワーク表示を行う定式化を提案し、さらに具体的にテンソル繰り込み群によって 3 次元 $SU(2)$ ゲージ理論を解析した我々の研究 [8,9] について述べる。テンソル繰り込み群を用いて高次元非可換ゲージ理論を解析したのはこの研究が初である。この研究は AdS/CFT 対応において重要なゲージ理論を数値的に直接扱うという点において意義がある。さらには、符号問題が生じるため従来のモンテカルロ法が適用できない有限密度 QCD を解析する上でも、我々の研究が有用になると考えられる。

4 章では、厳密繰り込み群から連続テンソルネットワークを構築するという我々の研究 [10] について述べる。具体的には、一般の相互作用を持つ任意次元のスカラ場理論において、波動関数関数のスケール依存性を表す厳密繰り込み群方程式を導いた。この方程式は、連続テンソルネットワークを定義していると解釈できる。前節で述べた AdS/CFT 対応が備えるべき繰り込み群の構造を、厳密繰り込み群を考えることで直接導入したことを意味する。同時に、テンソルネットワークと繰り込み群とを直接関係づけていることも意味する。

5 章では、繰り込み群と量子誤り訂正との関係についての我々の研究 [11] について述べる。4 章で導いた厳密繰り込み群方程式の摂動解を用いて、スカラ場において、繰り込み群のフローにより量子誤り訂正符号を構築する具体例を示す。

6 章では、本論文のまとめと展望を述べる。

第2章

AdS/CFT 対応と繰り込み群，テンソルネットワーク，量子誤り訂正

本章では，我々の研究の基礎となる AdS/CFT 対応と，繰り込み群との関係，また，関連するテンソルネットワーク，量子誤り訂正についてレビューする。

2.1 AdS/CFT 対応

2.1.1 ホログラフィー原理と AdS/CFT 対応

一般相対論が予言する典型的な対象はブラックホールである。ブラックホールはマクロな熱力学の対象としても扱える。例えば，ブラックホールのエントロピー S_{BH} について，ブラックホールの表面積 $\text{Area}(\Sigma_{\text{BH}})$ に比例するという Bekenstein-Hawking 公式 [12, 13] が知られている：

$$S_{\text{BH}} = \frac{\text{Area}(\Sigma_{\text{BH}})}{4G_N}. \quad (2.1.1)$$

ここで， G_N はニュートン定数であり， Σ_{BH} はブラックホールの事象の地平面である。注目すべきは，エントロピーが系の体積ではなく表面積に比例するという点である。通常，熱力学的エントロピーは系の自由度を表すことから，系の体積に比例すると考えられるが，Bekenstein-Hawking 公式 (2.1.1) は直感に一見反している。この結果から，重力理論の自由度は 1 次元低い境界に存在することを原理として Susskind と 't Hooft は 1995 年に主張した。これがホログラフィー原理である。

1997 年にホログラフィー原理の具体例として，Maldacena は **AdS/CFT (anti de-Sitter space/conformal field theory) 対応** を提唱した [1]。d + 2 次元の反ドジ

ツター空間 (anti de-Sitter space) AdS_{d+2} 上の重力理論は $d + 1$ 次元の共形場理論 (conformal field theory, CFT) と等価であるという主張である。言い換えると、重力理論は、その境界上に定義された重力を含まない理論と等価ということである。

反ドジッター空間とは、負の曲率をもつ時空中で最も対称性の高い時空である。 $d + 2$ 次元の $\text{AdS}(\text{AdS}_{d+2})$ は、時間が二つある $d + 3$ 次元 Minkowski 空間

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_{d+2}^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{d+1}^2 \quad (2.1.2)$$

内の超曲面

$$X_0^2 + X_{d+2}^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{d+1}^2 + R^2 \quad (2.1.3)$$

として得られる。 R は AdS の半径である。

Poincare 座標

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{z}{2} \left(1 + \frac{R^2 + \vec{x}^2 - x_0^2}{z^2} \right) & (\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{d+1})) \\ X_i &= \frac{Rx_i}{z} & (i = 1, 2, \dots, d) \\ X_{d+1} &= \frac{z}{2} \left(1 - \frac{R^2 - \vec{x}^2 + x_0^2}{z^2} \right) \\ X_{d+2} &= \frac{Rx_0}{z} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

を導入すると、AdS の計量は

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{dz^2 - dx_0^2 + \sum_{i=1}^d dx_i^2}{z^2} \right) \quad (\mu = 0, 1, \dots, d) \quad (2.1.5)$$

と与えられる。 z は CFT において繰り込み群の長さスケールを表す。境界は $z \rightarrow 0$ の極限で与えられ、境界の内側はバルク (bulk) と呼ばれる。

一方共形場理論 (Conformal field theory, CFT) とは、局所的に角度を保つ共形変換のもとで不変な理論である。共形変換群は

- 並進
- 回転
- スケール変換
- 特殊共形変換 (反転と並進の積)

から構成される。臨界点上の理論は一般に CFT で記述されると知られている。

AdS_{d+2} と CFT_{d+1} は共に SO(2, d + 1) 対称性をもつ. AdS/CFT 対応の基本原理は, 両者の分配関数が一致するという GKP-Witten 関係式

$$Z_{\text{gravity}}(\phi_i) = \left\langle e^{i \int d^{d+1} x \mathcal{O}_i(x) J_i(x)} \right\rangle_{\text{CFT}} \quad (2.1.6)$$

である. ここで, Z_{gravity} は重力理論の分配関数であり, ϕ_i は重力理論すべての場を表す. なお, 右辺は境界条件 $\phi_i \propto J_i$ を課して経路積分する. J_i は CFT の演算子 \mathcal{O}_i と結合する外場である.

AdS/CFT 対応の帰結として, 笠-高柳公式 (ホログラフィックエンタングルメントエントロピー公式) [2]

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N} \quad (2.1.7)$$

が知られている (図 2.1 参照). ここで, S_A は領域 A におけるエンタングルメントエント

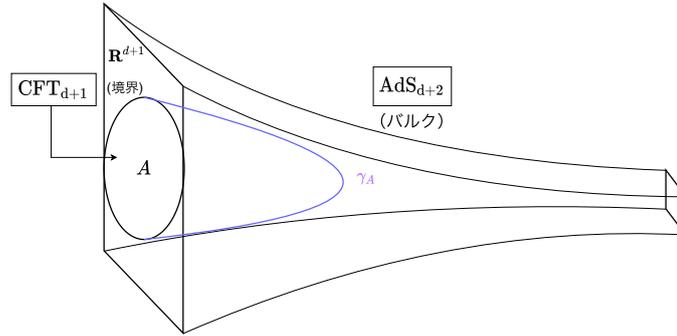


図 2.1 笠-高柳公式. $d + 1$ 次元の CFT の部分系 A のエンタングルメントエントロピー S_A は, $d + 2$ 次元の AdS 空間上の A の極小曲面 γ_A の面積に比例する.

ロピーであり, G_N はニュートン定数, $\text{Area}(\gamma_A)$ は A の極小曲面 γ_A の面積である. この公式は, AdS/CFT 対応において境界上の量子多体系のエンタングルメントエントロピーが, 時空内部 (バルク) の幾何で記述されることを意味する. AdS/CFT 対応を具現化するようなモデルを構築する上では, このエンタングルメント構造を満たすことが必要となる.

2.2 テンソルネットワーク

本節では, テンソルネットワークの基礎を簡単に述べる. テンソルネットワークは, 波動関数や分配関数などの目的関数をテンソル積として表したものである. ここではまず波動関数を扱い, 後に 2.3 節では分配関数を扱うテンソル繰り込み群を導入する. n 自由度

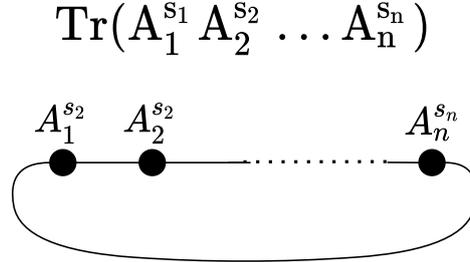


図 2.2 MPS のテンソルネットワーク図. 一番左の行列は一番右の行列と周期的境界条件によりつながっている.

をもつ系の波動関数は, 一般に

$$|\psi\rangle = \sum_{\{s_i\}} T^{s_1 s_2 \dots s_n} |s_1 s_2 \dots s_n\rangle \quad (2.2.1)$$

と表せる. 一般に, 量子多体系における Hilbert 空間のサイズは粒子数 (自由度) とともに指数関数的に増大するため, 波動関数の直接的な計算は難しい. そこで, 対称性やエンタングルメント構造など, うまく系の性質を取り入れつつ, 計算コストをおさえることを考える. 以下では簡単のために, 系に周期的境界条件を課す. 波動関数の係数 $T^{s_1 s_2 \dots s_n}$ の表現方法の一種が, テンソルネットワークである. 波動関数を計算する上では, 式 (2.2.1) をうまく表現 (近似) するような係数 $T^{s_1 s_2 \dots s_n}$ の ansatz を設け, 数値変分によって最適化することが基本的なアプローチである.

もっとも簡単なテンソルネットワーク表現の例は, 図 2.2 で表される行列積状態 (matrix product state, MPS)

$$|\psi^{\text{MPS}}\rangle = \sum_{\{s_i\}} \text{Tr}(A_1^{s_1} A_2^{s_2} \dots A_n^{s_n}) |s_1 s_2 \dots s_n\rangle \quad (2.2.2)$$

である. ここで, $\{A_i^{s_i}\}$ は自由度 s_i に対応した行列である. 元々の波動関数 (2.2.1) を, 行列積状態 (2.2.2) の ansatz のもとで数値変分をとる手法は密度行列繰り込み群 (density matrix renormalization group, DMRG) [14] と呼ばれ, 1 次元量子系や 2 次元古典系で成功を収めた.

波動関数を表現するような, より一般のテンソルネットワークはテンソル積状態 (tensor product state, TPS)

$$|\psi^{\text{TPS}}\rangle = \sum_{m_1, m_2, \dots} (A_1^{s_1})_{m_1 m_2 \dots} (A_2^{s_2})_{n_1 n_2 \dots} \dots |s_1 s_2 \dots s_n\rangle \quad (2.2.3)$$

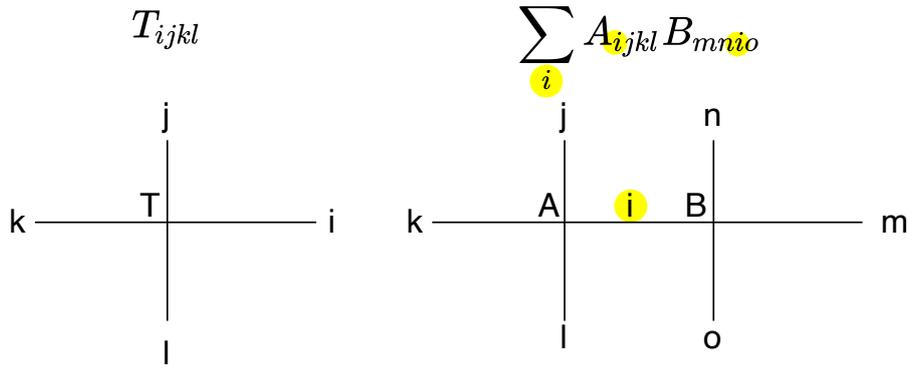


図 2.3 テンソルネットワーク図の記法. 格子点がテンソルを表し, ボンドがそれぞれテンソルの添字を表す. 右図のように複数のテンソルに共有されている添字は足し上げる.

である. 以降ではこのようなテンソルネットワークの構造を見やすくするため, 行列積の図 2.2 を一般化し, 図 2.3 のように表す. 格子点がテンソルを表し, ボンドはテンソルの縮約が取られていることを意味する.

2.2.1 MERA

前節で導入した行列積状態やテンソル積状態は, エンタングルメントエントロピーを見積もると, 一般には臨界系のエンタングルメント構造を満たさないことが知られている. そのため, 臨界系で効率のよい ansatz ではない. さらに後に議論するように AdS/CFT 対応の離散モデルとして適切なエンタングルメント構造を備えていない.

そこで臨界系を効率よく扱うテンソルネットワーク手法が, 実空間繰り込み群の思想を取り入れた multi-scale entanglement renormalization ansatz(MERA) [3] である. MERA は図 2.4 に示すように, 系の粗視化を表す等長演算子であるアイソメトリと, エンタングルメントを適切に除去するユニタリー演算子であるディスエンタングラーとから構成される. この波動関数の ansatz のもとで変分法をとり, アイソメトリとディスエンタングラーのテンソルの成分を最適化することで, 基底状態を求めるのが MERA の基本的な手順である.

次に, MERA のエンタングルメントエントロピーを評価する. 各テンソルのボンド次元を D とする. つまり, テンソルの添字がとりうる範囲が 0 から $D - 1$ とする. このとき, ボンドあたりのエンタングルメントエントロピーは, 各ボンドが最大限もつれている

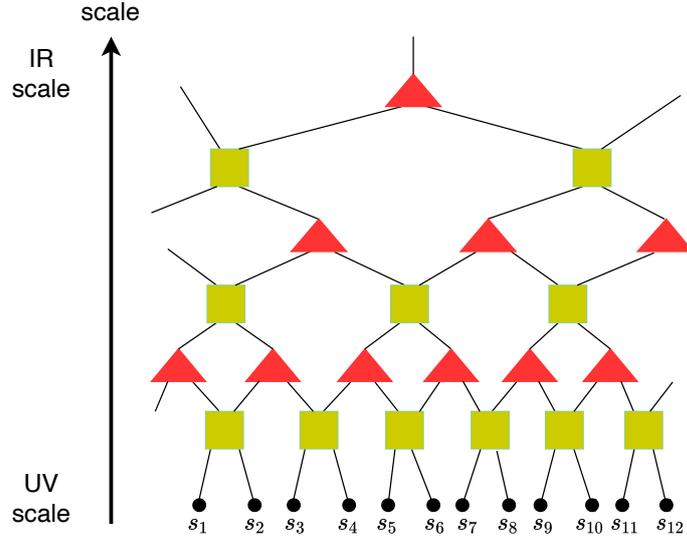


図 2.4 1次元 MERA のテンソルネットワーク図. ネットワークの最下層が紫外 (UV) スケールで定義された元々のスピン系を表し, 三角が粗視化の役割を果たすアイソメトリー, 四角がエンタングルメントを適切に除去するディスエンタングラーを表す. 粗視化に伴い, 系の自由度は減少し, 赤外 (IR) スケールに向かうと解釈される. このネットワークが MERA における波動関数の ansatz である.

とき, すなわちボンドに定義された (縮約された) 密度行列 ρ が

$$\rho = \frac{1}{D} I \quad (2.2.4)$$

となるとき最大となる. ここで, I は単位行列である. このとき, ボンドあたりのエンタングルメントエントロピーは

$$S = -\text{Tr} \rho \log \rho = \log D \quad (2.2.5)$$

となる. 図 2.5 に示すように, 部分系 A のエンタングルメントエントロピーは, ボンドを横切る数が最も少ない最小カット γ_A によって決まる. MERA の場合, 最小カットは $\log_2 L$ と振る舞う. よって, 部分系 A のエンタングルメントエントロピー S_A は

$$\begin{aligned} S_A &\leq \min [\#\text{Bonds}(\gamma_A)] \log D \\ &= \log L \cdot \log D \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

と評価できる. よって, MERA は 1次元臨界系のエンタングルメントエントロピーの振る舞い $S \propto \log L$ を不等式の形で満たす. このエンタングルメント構造は, ディスエンタ

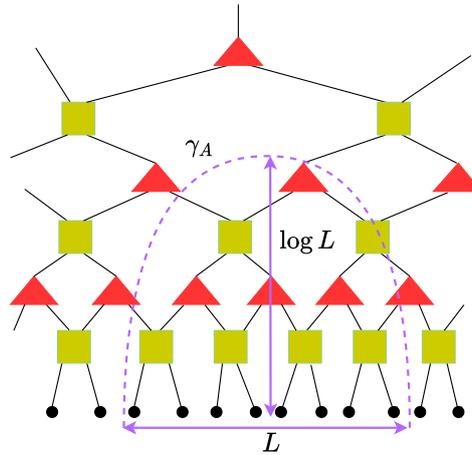


図 2.5 MERA ネットワークと、長さ L をもつ部分領域 A の最小カット γ_A . 部分領域の最小カットの長さは $\log_2 L$ (= 層の数) と振る舞う.

ングラーなしには成り立たない. このように, 臨界系のエンタングルメント則を満たすようなテンソルネットワークを構成するには, エンタングルメントを適切に扱うデザインが必要である.

2.2.2 MERA と離散 AdS 時空との対応

MERA は臨界系において基底状態の波動関数を求めるために導入された計算手法である. しかし, 実は MERA のテンソルネットワークが離散 AdS 時空と対応することが示唆された [4].

AdS/CFT 対応において, 領域 A のエンタングルメントエントロピー S_A は, 笠-高柳公式 (2.1.7) によって, 極小曲面の面積 $\text{Area}(\gamma_A)$ に比例する. 一方, MERA の場合, S_A は最小カットの長さ $\log L$ に比例する.

よって, 図 2.6 に示すように, 両者のエンタングルメント構造に相関^{*1}が見られる. MERA の最小カット γ_A と笠-高柳公式の極小曲面 γ_A を同一視すると, ネットワークのボンドが最大限エンタングルしているという仮定のもとで

$$\#\text{Bonds} \simeq \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{G_N} \quad (2.2.7)$$

の関係が予測できる. ここで \simeq は $O(1)$ の定数の範囲で等しいことを表す.

^{*1} MERA のエンタングルメント構造 (2.2.6) はあくまで不等式の関係であるため, 完全な対応関係ではない.

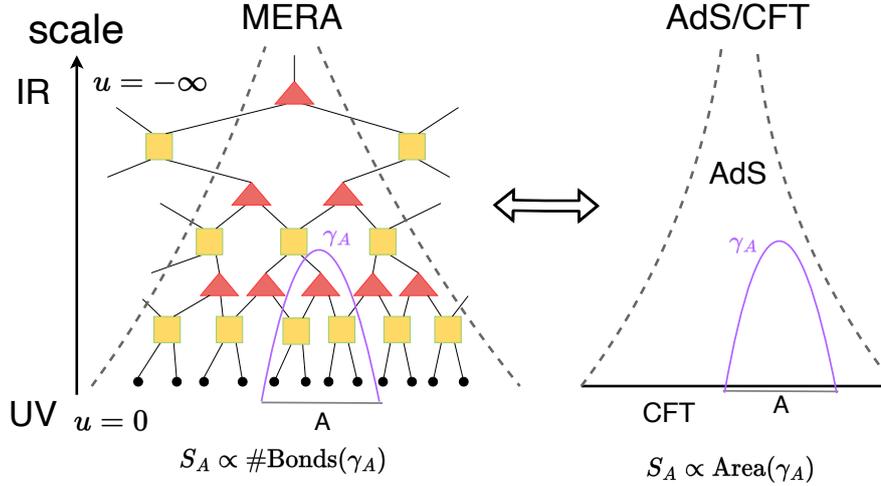


図 2.6 MERA と AdS/CFT の対応図. MERA の層は紫外スケールから順に $u = 0, -1, \dots, -\infty$ とラベルされている. エンタングルメントエントロピーにおいて, MERA の最小カットと AdS の極小曲面が対応する.

次に, MERA の層の離散的ラベル u と AdS のバルク方向の座標が対応を見るため, $d+2$ 次元の AdS 計量を

$$ds_{\text{AdS}}^2 = du^2 + \frac{e^{2u}}{\epsilon^2} (d\vec{x}^2 - dt^2) \left(= \frac{dz^2 - dt^2 + d\vec{x}^2}{z^2} \right) \quad (2.2.8)$$

と導入する. ここで, AdS 時空の半径 z を $z = \epsilon \cdot e^{-u}$ と書き直した. \vec{x} は \mathbf{R}^d の座標であり, ϵ は格子間隔を指す. AdS のバルク方向 u は臨界系 (共形不変系) の基底状態を記述する MERA のラベル u と同一視される. このとき, スケール不変であることを反映して, スケール方向の計量 g_{uu} は定数である. つまり, MERA の構造は層に依らず一定である.

一般に共形対称性をもたない系のエンタングルメントエントロピーを考える. ネットワークの構造が層によって異なることから, 層ごとのボンド密度 $n(u)$ を導入する. 非共形な MERA は計量

$$ds^2 = g_{uu} du^2 + \frac{e^{2u}}{\epsilon^2} d\vec{x}^2 + g_{tt} dt^2 \quad (2.2.9)$$

の離散版の時空と双対と考えられる. ここで粗視化の手順は同一であることから, \vec{x} の計量は固定されている. また, 繰り込むごとに (層の離散的ラベル u が 1 減るごとに) 格子点の数が空間の各方向について半分になることから, リスケーリングにより格子間隔は 2 倍になる. よって \vec{x} の計量は $2^{2u}/\epsilon^2$ と考えられる. $u \log 2$ を新たに u と定義し直すことで, 式 (2.2.9) において \vec{x} の計量に因子 e^{2u} がつく. スケール方向の計量 g_{uu} はボンド密

度 $n(u)$ と関係する．時間方向の計量 g_{tt} はエンタングルメントエントロピー S_A の情報からは決定できない．部分系 A が時間一定面の Lorentz ブーストで定義されるように S_A の定義を拡張すれば，原理的には g_{tt} を決定できると考えられる．

より具体的に MERA と離散的 AdS 時空の関係を見るために，部分系 A が空間の半分で与えられる場合に S_A を計算する．ボンド密度 $n(u)$ を用いると，繰り込むたびに格子点の数が半分になることから，MERA のエンタングルメントエントロピーは

$$\begin{aligned} S_A &\propto \min [\#\text{Bonds}(\gamma_A)] \\ &= L^{d-1} \sum_{u=-\infty}^0 n(u) \cdot 2^{(d-1)u} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

と見積もれる． L^{d-1} は A の境界の格子点の数である．一方，AdS/CFT 対応の笠-高柳公式 (2.1.7) は

$$\begin{aligned} S_A &= \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N} \\ &= \frac{1}{4G_N} \cdot \frac{V_{d-1}}{\epsilon^{d-1}} \int_{u=-\infty}^{u=0} du \sqrt{g_{uu}} e^{(d-1)u} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

となる． V_{d-1} は A の境界の面積である．連続極限 $\epsilon \rightarrow 0$ をとると，式 (2.2.10) と式 (2.2.11) は似た構造をもつ式と分かる．両者を比較すると，それぞれのラベル u は $u_{\text{AdS/CFT}} = \log 2 \cdot u_{\text{MERA}}$ の関係をもち，ボンド密度は

$$n(u) \propto \frac{\sqrt{g_{uu}}}{G_N} \quad (2.2.12)$$

という関係をもつと考えられる．

以上のように，MERA ネットワークはそのエンタングルメント構造から，離散的 AdS 時空と対応すると考えられる．これより，適切な構造を備えたテンソルネットワークが AdS/CFT 対応において創発する時空を記述することが期待される．

2.3 テンソル繰り込み群

本節では，3 章で 3 次元 SU(2) ゲージ理論の数値解析を行う際に用いるテンソル繰り込み群 (tensor renormalization group, TRG) [15] の基礎を述べる．2.2 節や 2.2.1 節で導入した MPS や MERA は波動関数を変分法によって求めるテンソルネットワーク手法であったのに対し，TRG は分配関数を情報圧縮による近似で求める手法である．ここで

は簡単に TRG の手順と実空間繰り込み群との関係を述べ、詳細のアルゴリズムは 3 章で扱う。

まず、分配関数 Z をテンソル積で表す:

$$Z = \text{Tr} \bigotimes T . \quad (2.3.1)$$

ここで、 T はテンソルであり、 Tr はテンソル空間でのトレースを意味する。今、系に並進対称性が課されているものとする。つまり、テンソルネットワークが同一のテンソルの積で与えられている。原理的にはテンソルの縮約を繰り返せば分配関数を求められるが、現実には困難である。

そこで、テンソルの情報を特異値分解により圧縮する繰り込みを繰り返す。繰り込みによって、テンソルは

$$T \rightarrow T^{(1)} \rightarrow T^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow T^{(i)} \rightarrow \dots \quad (2.3.2)$$

とフローする。 $T^{(i)}$ は i 回目の繰り込み後のテンソルであり、一般に繰り込みによってテンソルのボンド次元は減少し、テンソルの数は指数的に減少する。例えば、Levin-Nave TRG の場合は繰り込むごとにテンソルの数 (= 系の体積) が半分となるため、体積 $V = 2^n$ の系の分配関数は、

$$Z = \text{Tr} \bigotimes_V T \quad (2.3.3)$$

$$\sim \text{Tr} \bigotimes_{V/2} T^{(1)} \quad (2.3.4)$$

$$\dots \sim \text{Tr} \bigotimes_{V/2^i} T^{(i)} \quad (2.3.5)$$

$$\dots \sim \text{Tr} T^{(n)} \quad (2.3.6)$$

と評価される。 n 回繰り込んで残ったただひとつのテンソルのトレースを取ることで、近似的に分配関数を求めるのが TRG の基本的な手順である。

この手続きは、ある種の実空間繰り込み群とみなすことができる [16–21]。実空間繰り込み群のフローがハミルトニアンの変化であるのに対し、TRG のフローはテンソルのフローである。一般に、TRG のテンソルは理論の結合定数の関数であることから、両者は対応すると考えられる。実際に Ising 模型や XY 模型などにおいて、TRG のフローに対して不変な固定点テンソルを用いて、臨界点の臨界指数や CFT の演算子積展開係数の計算が行われている。

TRG の一種である tensor network renormalization [22] により, 前節で導入した MERA が記述できることが議論されている [23]. よって, TRG から AdS/CFT 対応を具現化する模型を構築することも将来的には可能と考えられる.

2.4 バルク局所性と量子誤り訂正

5 章で扱う繰り込み群と量子誤り訂正に関する我々の研究の背景となる, AdS/CFT 対応と量子誤り訂正の関係 [5] についてレビューする.

2.4.1 バルク再構成

大域的 $d + 2$ 次元 AdS を考える. 計量は漸近的に

$$ds^2 \sim -(r^2 + 1)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 + 1} + r^2 d\Omega_d^2 \quad (2.4.1)$$

と与えられる.

境界上の演算子 \mathcal{O} からバルク上の演算子 ϕ を構成することを考える. ここで, バルク演算子はバルクの運動方程式に従い, さらに境界条件として GKP-Witten 関係式 (2.1.6) と等価な “外挿関係” [24]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^\Delta \phi(r, x) = \mathcal{O}(x) \quad (2.4.2)$$

を満たすとする. この外挿関係は, バルク演算子が十分境界に近い極限で境界演算子に一致することを意味する.

このような対応関係は

$$\phi(x) = \int_{\mathbf{S}^d \times \mathbf{R}} dY K(x; Y) \mathcal{O}(Y) \quad (2.4.3)$$

となる. x はバルクの座標, Y は境界の座標である. $K(x; Y)$ は “smearing 関数” と呼ばれる. x 座標についてバルクの波動方程式に従い, 境界で条件 (2.4.2) を満たす. さらに, x と Y が空間的な隔たりをもつ (spacelike separated) 場合のみ積分するとする.

バルク演算子が境界に近づくとつれ, (2.4.3) の積分範囲が狭まるような構成として, AdS-Rindler 再構成 [25] を導入する. CFT の時間一定面上の部分領域 A を考える. A における依存境界領域 (boundary domain of dependence) $D[A]$ とは, これ以上延長不可能な因果曲線の集合である. 因果曲線は, 接ベクトルが空間的 (spacelike) でなく, A と交叉するようなより大きな曲線の一部でないものを指す.

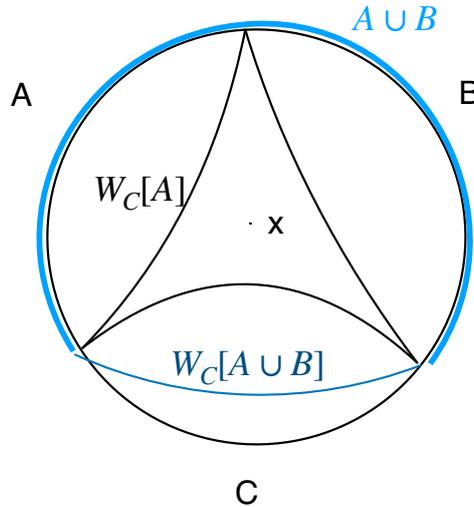


図 2.7 三つの領域 A, B, C に分割された時間一定面 Σ と、その causal wedge W_C . バルク上の点 x は A の causal wedge $W_C[A]$ 内部に入っていないため、 A 単体からは再構成できない. 一方で、 $A \cup B$ の causal wedge $W_C[A \cup B]$ 内部に入っているため、 $A \cup B$ からは再構成できる.

バルクの因果未来／過去 $\mathcal{J}^\pm[A]$ とは、領域 A から発展してバルクの因果曲線に到達できるバルク点の集合として定義される. これを用いて、CFT の部分領域 A の causal wedge は

$$W_C[A] \equiv \mathcal{J}^+[D[A]] \cap \mathcal{J}^-[D[A]] \quad (2.4.4)$$

と定義される. 後に時間一定面の場合の causal wedge を図 2.7 に示す.

バルク場の境界演算子による表現 (2.4.3) は、causal wedge を使って表せる. つまり任意の点 $x \in W_C[A]$ における場 $\phi(x)$ は式 (2.4.3) を通して再構成される. ただし積分範囲は $D[A]$ 上のみである. causal wedge 内部の場は再構成可能だが、causal wedge 外部にある場は再構成不可能ということの意味する.

このようなバルク場 ϕ の AdS-Rindler 再構成は、バルク点 x が境界に近づくほど再構成に必要な境界の領域が小さくなるという性質をもつ. さらに、(2.4.3) 右辺の演算子を Heisenberg 表示で時間発展させることで、時間一定面 Σ に落とし込むことができる. すると (2.4.3) はこの特定の時間一定面 Σ 内の A のみに作用する、一般に非局所的な Heisenberg 演算子で書ける.

2.4.2 バルク局所性のパラドックス

時間一定面 Σ を考え、図 2.7 のように A, B, C の重なりをもたない三つの部分領域に分割する。前節の議論により、ハミルトニアンで時間一定面に演算子を落とし込むことで、バルク上の点を Σ 上の境界演算子からバルク演算子を再構成できる。中央の点 x は A, B, C 単体からは構成できないが、 $A \cup B, B \cup C, C \cup A$ からは構成可能である。

つまり、それぞれの部分領域に対応して $\phi_{AB}, \phi_{BC}, \phi_{CA}$ という三つの $\phi(x)$ の表現が存在する。causal wedge は因果関係から定義されているため、局所性より ϕ_{AB} は C 上の任意の境界演算子と交換する。同様に、 ϕ_{BC} は A 上の演算子と交換し、 ϕ_{CA} は B 上の演算子と交換する。よって、これら三つの演算子が同一であるとすると、構成されたバルク場は境界全体の任意の演算子と可換となる。Schur の補題より、バルクの演算子が単位演算子に比例するという自明理論が導かれてしまうというパラドックスが生じる。よってこれらは同じ演算子ではありえない。この問題は、量子誤り訂正を用いることで解消される。準備として、まず量子誤り訂正の基本を述べる。

2.4.3 量子誤り訂正

もともと、量子誤り訂正は量子コンピュータにおいて量子状態をエラーから復元するために発展した手法である。ここでは、三準位スピン (qutrit) の情報

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^2 a_i |i\rangle \quad (2.4.5)$$

を Alice から Bob に送るという例を考える。一般に、送信の過程で量子状態にエラーが生じる。ここではデータの一部のスピンが消去され、かつどのスピンが消去されたか Bob が知っているとする“消去 (erasure)”と呼ばれる種類のエラーに注目する。

誤り訂正の基本は、元々の状態を冗長化 (符号化) することである。今の場合、元々の状態の代わりに

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sum_{i=0}^2 a_i |\tilde{i}\rangle \quad (2.4.6)$$

を送ればよい。ここで

$$\begin{aligned} |\tilde{0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle) \\ |\tilde{1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|012\rangle + |120\rangle + |201\rangle) \\ |\tilde{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|021\rangle + |102\rangle + |210\rangle) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

である。この冗長化された状態は、任意の状態 $|\tilde{\psi}\rangle$ に対して任意の一つの qutrit の縮約された密度行列が最大限に混合している。つまり最大限もつれて (エンタングルして) いる。

$|\tilde{\psi}\rangle$ の三つの qutrit のうち、任意の二つの qutrit から Bob は元々の状態を復元できる。例えば、三つ目の qutrit が消去され、Bob が最初の二つの qutrit のみ読み取れたとする。最初の二つの qutrit のみに作用するユニタリー変換 U_{12} :

$$(U_{12} \otimes I_3) |\tilde{\psi}\rangle = |\psi\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle) \quad (2.4.8)$$

が与えられると、Bob は状態 $|\psi\rangle$ を再現できる。 U_{12} は具体的に

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |00\rangle & |11\rangle &\rightarrow |01\rangle & |22\rangle &\rightarrow |02\rangle \\ |01\rangle &\rightarrow |12\rangle & |12\rangle &\rightarrow |10\rangle & |20\rangle &\rightarrow |11\rangle \\ |02\rangle &\rightarrow |21\rangle & |10\rangle &\rightarrow |22\rangle & |21\rangle &\rightarrow |20\rangle \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

という置換として働く。 $|\tilde{i}\rangle$ (2.4.7) の巡回置換対称性より、三つの qutrit のうちどの一つが消去されても、Bob は $|\psi\rangle$ を復元できる。したがって任意の一つの qutrit の消去に対して Bob は誤りを訂正できる。 $|\tilde{i}\rangle$ で張られる符号化 (冗長化) された部分空間は符号部分空間 (code subspace) と呼ばれる。

これを演算子の作用に着目して書き直そう。 O を一つの qutrit からなる Hilbert 空間に

$$O|i\rangle = \sum_j (O)_{ji} |j\rangle \quad (2.4.10)$$

と作用する演算子とする。 $(O)_{ji}$ は O の行列要素である。任意のこのような O について、符号部分空間上で同様に働く (一般に非一意の) 三つの qutrit に作用する演算子 \tilde{O} :

$$\tilde{O}|\tilde{i}\rangle = \sum_j (O)_{ji} |\tilde{j}\rangle \quad (2.4.11)$$

が存在する。

一般の符号部分空間では、 \tilde{O} は三つの qutrit に非自明に作用する。しかし O を最初の qutrit にのみ作用する演算子とすると、ユニタリー演算子 U_{12} で変換した

$$O_{12} \equiv U_{12}^\dagger O U_{12} \quad (2.4.12)$$

は

$$O_{12} |\tilde{i}\rangle = \sum_j (O)_{ji} |\tilde{j}\rangle \quad (2.4.13)$$

と働く。したがって O_{12} は最初の二つの qutrit のみに非自明に作用する \tilde{O} である。同様にして O_{23} , O_{31} も構成できるため、異なる qutrit に作用する非自明な演算子は、符号部分空間上で同じ行列要素をもつ。すなわち O_{12} , O_{23} , O_{31} は同一の演算子ではないが、符号部分空間上では同様に作用する。

2.5 AdS/CFT 対応と量子誤り訂正

AdS-Rindler 再構成におけるバルク演算子の表現 ϕ_{AB} , ϕ_{BC} , ϕ_{CA} は、同一の演算子とするとパラドックスが生じるが、これらは同じ点の演算子 $\phi(x)$ の表現であるため、同様の作用を持たなければならない。量子誤り訂正の qutrit の例で導入した O_{12} , O_{23} , O_{31} は異なる演算子であるが、それぞれの符号部分空間上で同じ行列要素をもつことから、望ましい性質を有している。

つまり、局所性を空間全体に課すのではなく、符号部分空間上にのみ課すことでパラドックスが解消される。AdS/CFT 対応の符号部分空間を、

$$|\Psi_0\rangle, \phi_i(x) |\Psi_0\rangle, \phi_i(x_1) \phi_j(x_2) |\Psi_0\rangle, \dots \quad (2.5.1)$$

の線形結合が張る空間と定義する。ここで、 i がとりうる値の範囲は $\phi(x)$ の表現の数と対応し、点 x の数はある有限定数で制限されている。 $|\Psi_0\rangle$ は系の基底状態である。表現 $\phi_i(x)$ の選択により符号部分空間が異なることには注意を要する。以上のように、場の理論の局所性を尊重するには、背景が古典重力である場合は一般に AdS/CFT 対応は量子誤り訂正と関係付かなくてはならない。

2.6 量子誤り訂正条件

2.4.3 節では具体的な量子誤り訂正の例を導入した。ここでは、一般の量子誤り訂正条件について述べる。まず、符号部分空間が定義されたとする。つまり、もともとの状態 $|i\rangle$

を、より広い Hilbert 空間である符号部分空間 $\text{span}(|\tilde{i}\rangle)$ に写すような符号化写像 W が

$$W|i\rangle = |\tilde{i}\rangle \quad (2.6.1)$$

と与えられたとする。それぞれの基底に対して直交条件

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \tilde{i}|\tilde{j}\rangle = \delta_{ij} \quad (2.6.2)$$

を仮定する。

エラーの集合 $\{E_a; a = 1, 2, \dots\}$ と、符号部分空間への射影演算子 P が量子誤り訂正条件 (Knill-Laflamme 条件) [26]

$$PE_a^\dagger E_b P = \alpha_{ab} P \quad (2.6.3)$$

を満たすとき、符号部分空間は誤り $\{E_a\}$ に対して耐性がある。つまり誤り訂正可能である。ここで、 α_{ab} は Hermite 行列である。これを符号部分空間の元で挟むことで、誤り訂正条件は

$$\langle \tilde{i}|E_a^\dagger E_b|\tilde{j}\rangle = \alpha_{ab}\delta_{ij} \quad (2.6.4)$$

と書き換えられる。符号部分空間の直交基底 $\{|\tilde{i}\rangle\}$ が、エラーが作用したあとも識別可能であることを意味する。2.4.3 節の例はこの誤り訂正条件を満たす。これまでは厳密な誤り訂正を議論してきたが、AdS/CFT 対応のバルク再構成においては、近似的に誤り訂正ができればよい [5]。近似的な誤り訂正条件は小さい補正定数 ϵ を加えて、

$$\langle \tilde{i}|E_a^\dagger E_b|\tilde{j}\rangle = \alpha_{ab}\delta_{ij} + \epsilon \quad (2.6.5)$$

と与えられる。5 章で繰り込み群と量子誤り訂正との関係を議論する際には、この近似的な誤り訂正条件を用いる。

第 3 章

3 次元 $SU(2)$ ゲージ理論へのテンソル繰り込み群の適用

3.1 テンソル繰り込み群の場の理論への適用

格子場の理論を解析する手法として、近年テンソル繰り込み群 [15] が注目されている。従来は、モンテカルロ法による数値計算が成功を取めてきた。しかし、モンテカルロ法はボルツマン因子を確率とみなすため、複素作用系では計算が困難という悪名高い符号問題が生じる。この符号問題は、典型的な複素作用系である有限密度 QCD を始めとする多くの系の解析を阻んできた。近年では、符号問題を解決する手法として、テンソル繰り込み群や複素 Langevin 法 [27, 28], Lefschetz thimble 法 [29] などが提案されている。テンソル繰り込み群 (Tensor renormalization group, TRG) は、確率解釈を一切しないため、符号問題が原理的に生じないことが最も顕著な特徴である。また、複素 Langevin 法とは異なり、パラメータ範囲に原理的には制限がない。加えて、計算コストが体積に対して対数的にしか効かないため、大体積極限をとることが容易という長所もある。

モンテカルロ法と比べ、テンソル繰り込み群の計算コストは高次元で大きくなるという短所がある。しかし効率の良いアルゴリズムの開発が進み、近年では 4 次元スカラー場やフェルミオン場を始め、場の理論においてもテンソル繰り込み群が盛んに適用されている [30–56]。場の理論における TRG の適用で非自明な点は、いかに連続的なボゾン自由度の積分をテンソルの離散的自由度で表現するかということである。スカラー場においては、ガウス求積法が 2 次元 [38, 39] と 4 次元 [40, 41] でうまく機能している。ゲージ場の関連研究として、キャラクター展開が 2 次元で $U(1)$ ゲージ場 [32–34, 50, 55], $SU(2)$ ゲージ場 [42, 43], $SU(N)$, $U(N)$ ゲージ場 [45] で成功し、一方で 3.4.2 節で導入する一様

サンプリング法が 2 次元 SU(2) と SU(3) ゲージ場 [44] に適用されている. 他にも 2 次元 SU(2) プリンシパルカイラル模型 [56], 3 次元有限温度 Z_2 ゲージ理論 [46], 4 次元 Z_2 , Z_3 ゲージヒッグス模型 [47, 48] が解析されている. しかし 3 次元以上の非可換ゲージ理論は TRG により解析されていなかった. 本章では高次元非可換ゲージ理論に TRG を適用する初の研究である, 3 次元 SU(2) ゲージ理論の TRG による我々の数値解析 [8] について述べる.

キャラクター展開はテンソルの添字が既約表現のラベルと対応するため, 3 次元以上では多くの既約表現を取り込むことが難しい. 3.5 節で議論するように, 3 次元 SU(2) ゲージ理論において強結合領域では一様サンプリング法が有効であることがわかる. しかし, 他の領域では現実的にとりうるボンド次元の範囲では計算結果が収束しない. したがって, ゲージ場の経路積分をテンソルネットワークに表す, より効率的な手法が必要である. このような手法の候補として, 文献 [8] で我々が提案した手法を 3.4.3 節で導入する.

まず, 3.2 節で, オリジナルの TRG である Levin-Nave TRG のアルゴリズムを導入する. 3.3 節で, Levin-Nave TRG よりも低コストな手法である Anisotropic TRG を導入する. 3.4 節で, ゲージ場のテンソルネットワーク表示を導入し, 3.5 節で, Anisotropic TRG による数値計算結果を述べる.

3.2 Levin-Nave TRG

本節では, オリジナルの TRG である Levin-Nave TRG(LNTRG) [15] のアルゴリズムを導入する. LNTRG は 2 次元格子系に対するアルゴリズムである. 特別な場合として, ここでは正方格子を考え, 系には並進対称性が課されているものとする. 以降では全て, 系の体積は格子の数 (=テンソルの数) で測る.

テンソル繰り込み群のアルゴリズム概略を図 3.1 に示す. 元来のテンソル繰り込み群で

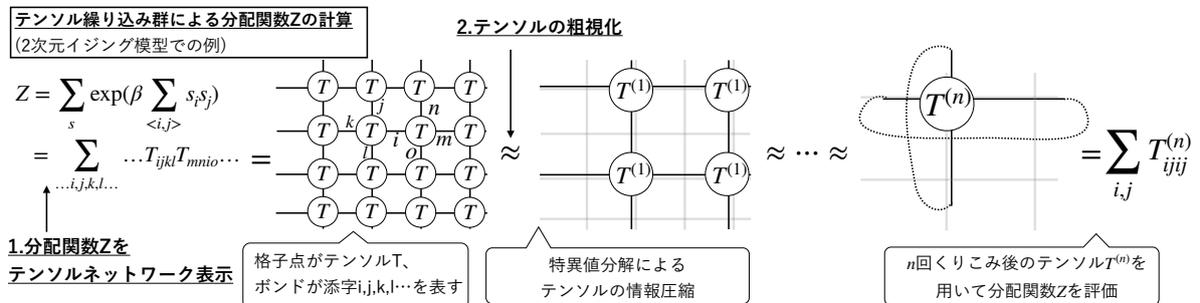


図 3.1 2 次元イジング模型の例におけるテンソル繰り込み群のアルゴリズム概略図.

ある LNTRG も、それに連なる改良されたテンソル繰り込み群スキームも、基本的にはこの概略図に従う。

まず分配関数 Z をテンソル積に分解するというテンソルネットワーク表示を導入する:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} \bigotimes T \\ &= \sum_{\dots, i, j, k, l, \dots} \dots T_{ijkl} T_{mnio} \dots \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

ここで、 Tr はテンソル空間におけるトレースを意味する。イジング模型の場合、テンソルネットワーク表示は厳密にできる。しかし場の理論の場合は、一般にテンソルネットワーク表示にする際に、積分を和に近似する必要がある。系の並進対称性の帰結として、テンソルネットワークは全てのテンソルが同一の T で与えられる。テンソルネットワーク表示の例は 3.4 節にまとめる。ここでテンソルネットワーク表示のテンソル T は、繰り込む前という意味で初期テンソルと呼ばれる。ここでは簡単のために、分配関数を与えるテンソルの数は系の体積 V と一致するものとする。実際にはイジング模型を含む大抵の模型でそのような状況が成り立つ。後にゲージ場の例で見ると、テンソルネットワーク表示は一般に一意ではない。

次に、初期テンソルを繰り込む。まず初期テンソル T を図 3.2 のように分解する。テンソル T の添字をまとめて行列 $T_{(jk), (li)} = T_{ijkl}$ とみなす。特異値を大きい順に D 個残し、あとは切り捨てるという低ランク近似を行うと、

$$\begin{aligned} T_{(jk), (li)} &= \sum_m U_{(jk), m} \Sigma_{mm} V_{m, (li)}^\dagger \\ &\approx \sum_{m=0}^{D-1} U_{(jk), m} \Sigma_{mm} V_{m, (li)}^\dagger \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

を得る。ここで、 U と V はそれぞれユニタリー行列であり、 Σ は特異値行列 $\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ である。 Σ は一般に非負実数成分をとり、ここでは特異値 σ_i が降順に並んでいるものとする。3 階テンソル S_1, S_3 を

$$(S_1)_{jkm} = U_{(jk), m} \sqrt{\sigma_m} \quad (3.2.3)$$

$$(S_3)_{lim} = \sqrt{\sigma_m} V_{m, (li)}^\dagger \quad (3.2.4)$$

と定義する。同様に、行列 $T_{(ij), (kl)}$ の特異値分解により、

$$(S_4)_{ijm} = U_{(ij), m} \sqrt{\sigma_m} \quad (3.2.5)$$

$$(S_2)_{klm} = \sqrt{\sigma_m} V_{m, (kl)}^\dagger \quad (3.2.6)$$

を得る．次に，図 3.3 のように，3 階テンソル S_1, S_2, S_3, S_4 について，特異値行列の添字のみ残して縮約をとり，繰り込まれたテンソル $T^{(1)}$ を得る：

$$T_{abcd}^{(1)} = \sum_{ijkl} (S_1)_{ila} (S_2)_{jib} (S_3)_{kjc} (S_4)_{lkd}. \quad (3.2.7)$$

繰り込まれたテンソルの添字 a, b, c, d の走る範囲を表すボンド次元は D である．この場合，1 回繰り込むごとに体積は半分となる．繰り込まれたテンソルを再び入力とし，同様の操作を繰り返す．

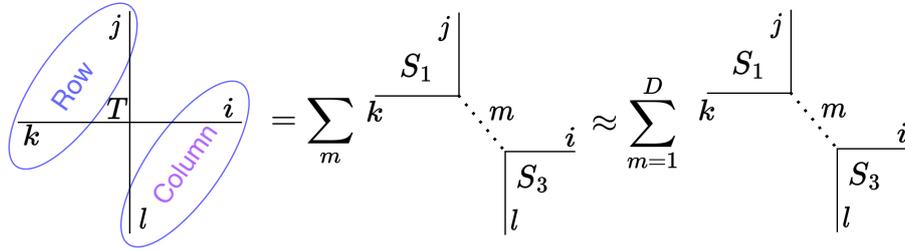


図 3.2 テンソル T の分解．添字をまとめてテンソルを行列とみなし，特異値分解する．小さい特異値を切り落とした上で，特異値行列の添字 m を用いて二つの 3 階テンソル S_1, S_3 へと分解する．

この繰り込み操作を n 回繰り返し，最終的に一つのテンソルのトレースをとることで，分配関数を近似的に得る：

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} \bigotimes_V T \\ &\approx \text{Tr} \bigotimes_{V/2} T^{(1)} \\ &\dots \approx \text{Tr} T^{(n)} \\ &= \sum_{i,j} T_{ijij}^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

ここで，体積は $V = 2^n$ であり， i 回繰り込まれたテンソルを $T^{(i)}$ と表記した．テンソルネットワークは全てのテンソルが同一の成分をもつため，数値計算を行う際にはただ一つのテンソルに注目すればよい．

特異値分解による情報圧縮は，変換前後のテンソルの差のノルムを最小化することが知られている．ボンド次元は，系の自由エネルギーなどの量が， D の上昇に伴ってほぼ変化しないとみなせる点の値として決定する．言い換えれば，極力ボンド次元が無限大まで外

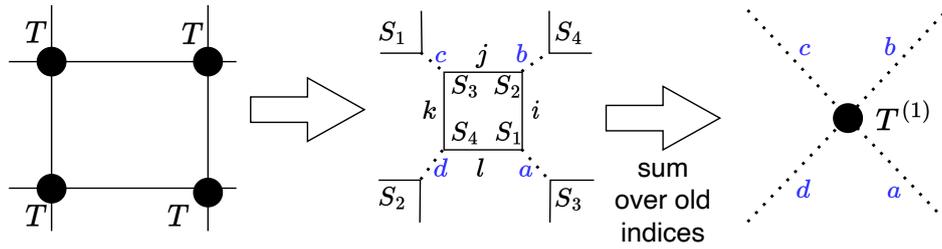


図 3.3 LNTRG の繰り込み手順. テンソル T を行列とみなし, 特異値分解によりそれぞれ 3 階テンソル S_1, S_2, S_3, S_4 へと分解する. 実線部の縮約をとることにより, 繰り込まれたテンソル $T^{(1)}$ を得る.

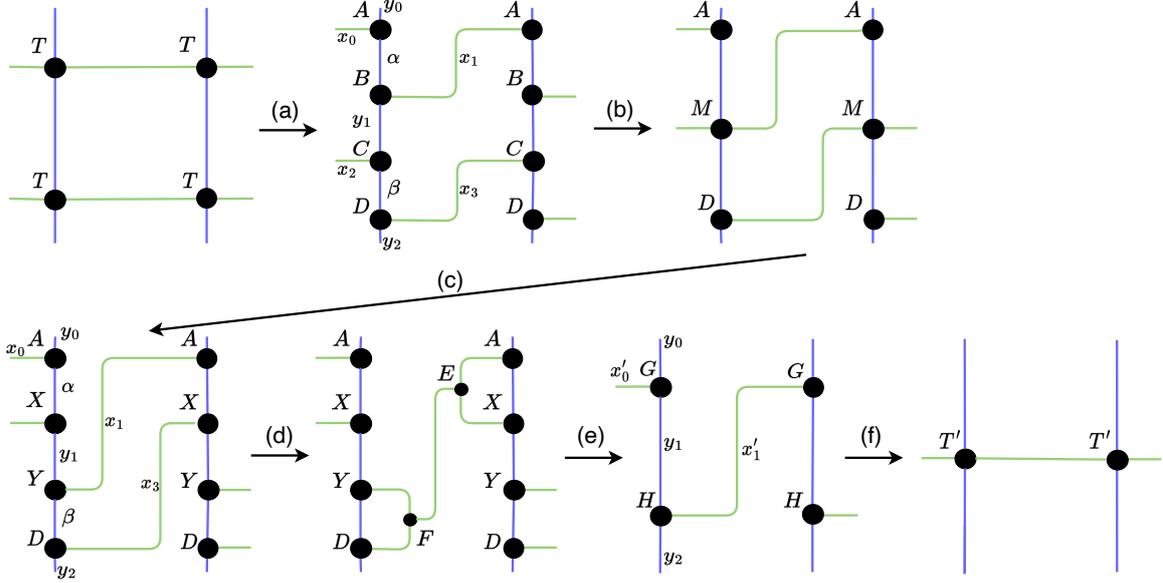
挿できるほど D を大きくとる. このカットオフ D の存在により, テンソル繰り込み群の計算には一般に系統誤差が生じる^{*1}. このように, テンソル繰り込み群は一般に, テンソルネットワーク表示と, テンソルの低ランク近似の繰り返しにより近似的に分配関数を得る手法である. 現実的にとりうるボンド次元 D の値で分配関数が求める精度で収束するかは, モデルとそのテンソルネットワーク表示, および TRG スキームに依存する. どのようにこれらを選択すべきかは一般論が存在しないため, 試行錯誤の必要がある. 情報圧縮の詳細はスキームに依存する. しかし, いずれのスキームも初期テンソルを繰り込んでいき, 最終的にただ一つのテンソルになったところでトレースをとることで分配関数を近似的に計算するという点において, 本節の議論と同様である.

3.3 Anisotropic TRG

3.3.1 Anisotropic TRG 概要

LNTRG は 2 次元系に対するアルゴリズムである. 一方で, 高次元系に適用できるアルゴリズムとして Higher-order TRG(HOTRG) [31] が提案された. 高次特異値分解により, 各方向に対して粗視化を表すアイソメトリーを導入することで, 順次繰り込みを行う手法である. しかしながら, HOTRG は d 次元の CPU コストが $O(D^{4d-1})$, メモリコストが $O(D^{2d})$ であり, ボンド次元 D の上昇に従い劇的に計算時間が増加するという欠点がある. この節では, HOTRG の計算コストを改良した Anisotropic TRG(ATRG) [52] を導入する.

^{*1} 全ての特異値のモードを取り入れることにより, 系統誤差を回避する手法として All-mode renormalization [57] が提案されている.

図 3.4 2次元 ATRG の y 方向に対する繰り込み手順.

ATRG は CPU コストが $O(D^{2d+1})$ 、メモリコストが $O(D^{d+1})$ であり、HOTRG に比べて計算コストが低い。実際に 2 次元イジング模型において、ボンド次元を固定した場合と計算時間の主要オーダー (leading order) を固定した場合双方において、ATRG による自由エネルギーの数値結果は HOTRG よりも厳密解との誤差が小さいことが示されている [52].

3.3.2 ATRG アルゴリズム

ATRG のアルゴリズムを導入する [52]. ここでは簡単のために 2 次元系を扱う. 高次元に対しても基本的には単純に拡張できる. HOTRG と同様に, 各方向について順次繰り込む. y 方向の繰り込み手順 (a)-(f) を図 3.4 に示す. まず手順 (a) において, 初期テンソル T を特異値分解して小さい特異値を切り落とす:

$$T_{y_0 y_1 x_0 x_1} \approx \sum_{\alpha=1}^D U_{\{T\} y_0 x_0 \alpha} S_{\{T\} \alpha \alpha} V_{\{T\} \alpha y_1 x_1}^\dagger. \quad (3.3.1)$$

ここで, $U_{\{T\}}$, $S_{\{T\}}$, $V_{\{T\}}^\dagger$ はそれぞれ T の特異値分解から得られたユニタリ行列と特異値行列である. 以降でも同様の表記を用いる. LNTRG と同様に, 4 階テンソルを特異

値分解から 3 階テンソルに分解する:

$$A_{y_0 x_0 \alpha} = U_{\{T\} y_0 x_0 \alpha}, \quad (3.3.2)$$

$$B_{y_1 x_1 \alpha} = \Sigma_{\{T\} \alpha \alpha} V_{\{T\} \alpha y_1 x_1}^\dagger, \quad (3.3.3)$$

$$C_{y_1 x_2 \beta} = U_{\{T\} y_1 x_2 \beta} \Sigma_{\{T\} \beta \beta}, \quad (3.3.4)$$

$$D_{y_2 x_3 \beta} = V_{\{T\} \beta y_2 x_3}^\dagger. \quad (3.3.5)$$

次に、手順 (b) と (c) において、 B と C のボンドを交換 (swapping) する。 B のボンド x_1 と C のボンド x_2 を交換するため、テンソル M を

$$M_{\alpha \beta x_1 x_2} = \sum_{y_1} B_{y_1 x_1 \alpha} C_{y_1 x_2 \beta}, \quad (3.3.6)$$

と定義する。 M の特異値分解により、交換されたボンドをもった X, Y を得る:

$$M_{\alpha \beta x_1 x_2} \approx \sum_{y_1}^{\chi} U_{\{M\} \alpha x_2 y_1} \Sigma_{\{M\} y_1 y_1} V_{\{M\} y_1 \beta x_1}^\dagger, \quad (3.3.7)$$

$$X_{\alpha x_2 y_1} = \sqrt{\Sigma_{\{M\} y_1 y_1}} U_{\{M\} \alpha x_2 y_1}, \quad (3.3.8)$$

$$Y_{\beta x_1 y_1} = \sqrt{\Sigma_{\{M\} y_1 y_1}} V_{\{M\} \beta x_1 y_1}. \quad (3.3.9)$$

一般に、ボンドの交換において特異値の階層性は緩やかになり、低ランク近似が一見悪くなる。しかし多くの場合、実用上はボンド次元をそれほど大きくとらなくとも、最終的に計算される自由エネルギーは十分な精度で求められる。

次に、手順 (d) と (e) において、水平方向の二つのボンドを“スクイザー (squeezer)” E と F の導入により繰り返す。後に述べるように、スクイザーの具体形は自由エネルギーを求める上では必要ない。 E と F により、新たなテンソル G と H を

$$G_{y_0 y_1 x'_0} = \sum_{\alpha, x_0, x_2} A_{y_0 x_0 \alpha} X_{\alpha x_2 y_1} E_{x_0 x_2 x'_0}, \quad (3.3.10)$$

$$H_{y_1 y_2 x'_1} = \sum_{\beta, x_1, x_3} D_{y_2 x_3 \beta} Y_{\beta x_1 y_1} F_{x_1 x_3 x'_1}. \quad (3.3.11)$$

と得る。

これにより、 y 方向に繰り返されたテンソル T' は手順 (f) で

$$T'_{y_0 y_2 x'_0 x'_1} = \sum_{y_1} G_{y_0 y_1 x'_0} H_{y_1 y_2 x'_1} \quad (3.3.12)$$

と得られる． x 方向の繰り込みも同様に行う．この y 方向， x 方向の繰り込みにより，系の格子サイズが半分になる．あとは同様に，繰り込まれたテンソルを入力として繰り返せばよい．

スクイザーの具体形は自由エネルギーを求める上では必要ない． G と H は特異値分解により

$$Q_{y_0 y_1 y_2 y_3} = \sum_{x_1 x_3 \alpha \beta} Y_{\beta y_1 x_1} D_{y_2 x_3 \beta} A_{y_0 x_1 \alpha} X_{\alpha x_3 y_3} \\ \approx \sum_{x'_1}^{\chi} \Sigma_{\{Q\}x'_1 x'_1} U_{\{Q\}y_1 y_2 x'_1} V_{\{Q\}y_0 y_3 x'_1}, \quad (3.3.13)$$

$$H_{y_1 y_2 x'_1} = \sqrt{\Sigma_{\{Q\}x'_1 x'_1} U_{\{Q\}y_1 y_2 x'_1}}, \quad (3.3.14)$$

$$G_{y_0 y_3 x'_1} = \sqrt{\Sigma_{\{Q\}x'_1 x'_1} V_{\{Q\}y_0 y_3 x'_1}}. \quad (3.3.15)$$

と直接得られるためである． E, F の具体形は系の磁化などの量を求める上では必要であるが，後の 3 次元 SU(2) ゲージ理論の解析では自由エネルギーを対象とするため，ここでは扱わない．

3.4 テンソルネットワーク表現

この節では，系の分配関数（経路積分）をテンソルネットワーク表現する例として，2次元イジング模型と，ゲージ場に対する一様サンプリング法 [44] を導入する．3.4.3 節では，我々が提案した一般の高次元ゲージ場の経路積分に対するテンソルネットワーク表現を導入する．

3.4.1 2次元イジング模型

2次元イジング模型の分配関数をテンソルネットワーク形式で表す．分配関数 Z はハミルトニアン $H = -\sum_{\langle x, y \rangle} s_x s_y$ を用いて

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} \\ = \sum_{\{s = \pm 1\}} \exp(\beta \sum_{\langle x, y \rangle} s_x s_y) \quad (3.4.1)$$

と与えられる．ここで $\sum_{\langle x, y \rangle}$ はサイト x と y が隣り合う最近接項についての和を表す．

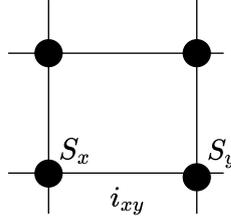


図 3.5 2次元イジング模型における新たな添字 i_{xy} の導入. i_{xy} はサイト間のボンドに位置する.

分配関数を次のように変形する：

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_s \prod_{\langle x,y \rangle} \exp(\beta s_x s_y) \\
&= \sum_s \prod_{\langle x,y \rangle} [\cosh(\beta s_x s_y) + \sinh(\beta s_x s_y)] \\
&= \sum_s \prod_{\langle x,y \rangle} [\cosh(\beta) + s_x s_y \sinh(\beta)] \\
&= (\cosh \beta)^{2V} \sum_s \prod_{\langle x,y \rangle} \sum_{i_{xy}=0}^1 (s_x s_y \tanh \beta)^{i_{xy}} \\
&= (\cosh \beta)^{2V} \sum_s \prod_{\langle x,y \rangle} \sum_{i_{xy}=0}^1 (s_x \sqrt{\tanh \beta} s_y \sqrt{\tanh \beta})^{i_{xy}}
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

ここで、 i_{xy} は便宜上導入した添字であり、後にテンソルネットワーク表現におけるテンソルの添字の役割を果たす。添字 i_{xy} は図 3.5 に示すように、サイト間のボンドに位置する。次に、分配関数を各格子点の積に置き換える：

$$\begin{aligned}
Z &= (\cosh \beta)^{2V} \sum_{\{i\}} \sum_{s_x} \prod_x (s_x \sqrt{\tanh \beta})^{i+j+k+l} \\
&= (\cosh \beta)^{2V} \sum_{\{i\}} \sum_{s_x} \prod_x (s_x \sqrt{\tanh \beta})^{i+j+k+l} \\
&= 2^V (\cosh \beta)^{2V} \sum_{\{i\}} \prod_x \underbrace{(\sqrt{\tanh \beta})^{i+j+k+l} \delta(\text{mod}(i+j+k+l, 2))}_{=T_{ijkl}} \\
&= 2^V (\cosh \beta)^{2V} \sum_{\dots, i, j, k, l, m, n, o, \dots} \dots T_{ijkl} T_{mnio} \dots
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

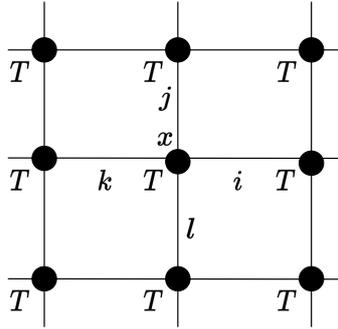


図 3.6 2次元イジング模型のテンソルネットワーク表現. 補助的に導入した自由度 i, j, k, l, \dots はそれぞれボンドに位置し, テンソル T の添字を表す.

ここで, 図 3.6 に示すように, 補助的に導入した添字 i, j, k, l, \dots は, それぞれサイト同士をつなぐボンドに位置し, テンソル T の添字を表す. テンソル T は元々のサイトと同じ位置にあると見なせ, テンソル T の数と元々の格子サイト数 (系の体積) は一致する. 3.2 節で述べたように, 系に並進対称性があることを反映して, テンソルネットワークは全てのテンソル T が同一で与えられる. 式 (3.4.3) が 2次元イジング模型のテンソルネットワーク表現の一例である. ここで与えられた T がテンソル繰り込み群における初期テンソルであり, 前節で述べたテンソル繰り込み群のアルゴリズムにおいて入力となる.

このように, 一般に分配関数をテンソルネットワーク表現する際には, 系の元々の自由度を足し上げ, 新たな離散自由度をテンソルの添字とするという手順をとる. 本質的には場の理論も同様に行える.

3.4.2 一様サンプリング法

本節では, 2次元ゲージ理論のテンソル繰り込み群による解析に用いられた一様サンプリング法を導入する. 一般に, 場の理論をテンソルネットワーク表示する際にも, 前節で扱ったイジング模型の例と同様に, 系の元々の自由度を足し上げ, 新たな離散自由度をテンソルの添字とするという手順をとる. 非自明な点は, 場の連続的な自由度をいかに離散的な自由度に置き換えるかということである. 典型的には, 場の積分を求積法により和で近似するという手法が用いられる^{*2}. 実際にスカラー場でガウス求積法によるテンソルネットワーク表示を用いた解析が 2次元系 [38, 39], 4次元系 [40, 41] でも成功を収めている. しかしながら, ゲージ場の積分に対する求積法は知られていないため, 別の手法が必

^{*2} 一般に, 場の理論をテンソルネットワーク表示する際には何らかの手法により積分を和で近似する必要がある. このため, イジング模型などの離散模型とは異なり繰り込む前にも系統誤差が生じる.

要となる。

ゲージ場をテンソルネットワーク表示する手法として、キャラクター展開を用いる方法 [30] が知られ、実際に 2 次元ゲージ場に対して適用された [45]。しかし、SU(N) ゲージ理論を扱う上で、キャラクター展開による方法は、高次元で N が 3 以上の高ランクの場合、単純には計算できない*3。そこで提案されたのが、群多様体上の一様分布から得たサンプルをテンソルネットワーク表示に用いる方法 [44] である。この一様サンプリング法を本節で導入する。この手法は次節で述べる我々の手法とは独立に提案されたが、我々の手法はこの一様サンプリング法の一般化とみなすこともできる。

d 次元 SU(N) ゲージ理論の分配関数は

$$Z = \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} e^{-S} \quad (3.4.4)$$

と定義される。 n は格子サイトを表し、 U の添字 (n, μ) はサイト n から方向 μ に伸びるリンクを指定する変数である。 μ は 1 から d までの値をとる。 $U_{n,\mu}$ はそれぞれのリンク上に定義された、SU(N) 行列の元であるリンク変数である。 $dU_{n,\mu}$ は群の作用に対して不変な Haar 測度であり、 $\int dU_{n,\mu} = 1$ と規格化されている。プラケット作用 S は、プラケット項 $U_{\mu\nu}(n) = U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger$ を用いて

$$S = \frac{\beta}{N} \sum_{n,\mu>\nu} \text{Re Tr}(1 - U_{\mu\nu}(n)) \quad (3.4.5)$$

と定義される。

$U_{n,\mu}$ 上の積分を、群多様体から一様に抽出したサンプルの集合 $G = \{U_1, U_2, \dots, U_K\}$ を用いて、

$$\int dU_{n,\mu} g(U_{n,\mu}, U_{n',\mu'}, \dots) \approx \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K g(U_i, U_{n',\mu'}, \dots) \quad (3.4.6)$$

と近似する。これにより、Haar 測度による経路積分は

$$Z \approx \text{Tr} \prod_n T_{i_n j_n k_n l_n} \quad (3.4.7)$$

とテンソルネットワーク表現される。初期テンソル T は

$$T_{ijkl} = \frac{1}{K^2} e^{-(\beta/N) \text{Re Tr}(1 - U_i U_j U_k^\dagger U_l^\dagger)} \quad (3.4.8)$$

*3 最近キャラクター展開による高次元に適用可能なテンソルネットワーク構成法が提案されており [58]、近い将来に高次元非可換ゲージ理論への応用が期待される。

と与えられる。ここで、 U_i, U_j, U_k, U_l はそれぞれ群多様体から一様に抽出した $SU(N)$ 行列であり、添字 i, j, k, l は 1 から K の値を取るサンプルのラベルである。

この手法は実際に 2 次元 $SU(2)$, $SU(3)$ ゲージ理論において有効性が実証された。しかし、3.5 節で述べる我々の解析により、一様サンプリング法は 3 次元 $SU(2)$ ゲージ理論においても強結合領域では有効であることが示された。

3.4.3 試行作用導入による高次元ゲージ場の経路積分のテンソルネットワーク表現

我々が提案した一般の高次元ゲージ場の経路積分をテンソルネットワーク表現する手法 [8] を導入する。前節と同様に、 $SU(N)$ ゲージ理論の作用 (3.4.5) を用いる。ここでは 3 次元を扱うが、高次元への拡張は単純にできる。

変分パラメータをもつ試行作用 S_v を、分配関数を変化させないように導入する：

$$Z = \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} e^{-(S-S_v)-S_v} . \quad (3.4.9)$$

ここで、試行作用 S_v は単一リンク作用の和

$$S_v = \sum_{n,\mu} \tilde{S}_v(U_{n,\mu}) \quad (3.4.10)$$

で与えられるものとし、単一リンク作用 $\tilde{S}_v(U(n,\mu))$ の分配関数

$$Z_v = \int dU e^{-\tilde{S}_v} \quad (3.4.11)$$

は何らかの手法で計算できるものとする。 $\tilde{S}_v(U(n,\mu))$ の最も単純な例は単一リンクのトレース

$$\tilde{S}_v(U) = -\frac{H}{N} \text{Re Tr } U , \quad (3.4.12)$$

である。 $SU(2)$ の場合、単一リンクの分配関数は

$$Z_v = 2 \frac{I_1(H)}{H} , \quad (3.4.13)$$

と計算できる。ここで、 I_1 は修正ベッセル関数である。次節で、式 (3.4.12) を $SU(2)$ ゲージ理論の解析に用いる。

次に, Z を

$$Z = Z_v^{3V} \langle e^{-(S-S_v)} \rangle_v \quad (3.4.14)$$

と表す. ここで, V は格子サイトの数であり, $\langle \dots \rangle_v$ は Boltzmann 重率 e^{-S_v} に対する統計平均を表す:

$$\langle \dots \rangle_v = \frac{1}{Z_v^{3V}} \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} \dots e^{-\sum_{n,\mu} \tilde{S}_v(U_{n,\mu})}. \quad (3.4.15)$$

K 個のリンク変数 U の配位を, Boltzmann 重率 $e^{-\tilde{S}_v(U)}$ で生成し, それぞれのリンク変数 $U_{n,\mu}$ についての積分を

$$\int dU_{n,\mu} g(U_{n,\mu}, U_{n',\mu'}, \dots) \approx \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K g(U_i, U_{n',\mu'}, \dots) \quad (3.4.16)$$

と近似する. 配位の生成は, 典型的にはモンテカルロ法のような数値的手法を用いる. ここで, U_i は集合 $G = \{U_1, U_2, \dots, U_K\}$ の要素である. 添字 i は 1 から K の値を取るサンプルのラベルであり, テンソルの添字として用いる. 式 (3.4.16) は式 (3.4.6) と同じ形だが, U の分布が一様分布ではなく, 試行作用による $e^{-\tilde{S}_v(U(n,\mu))}$ の分布に従う点異なる.

原理的には, もし生成する配位の個数 K を十分大きく取れば, 計算結果は \tilde{S}_v に依存しない. 例えば, $\tilde{S}_v = 0$ とすると, 前節で導入した Haar 測度による一様サンプリングに対応する. この手法は, 2次元ゲージ理論であれば K の値は小さくてもよいことが示されている [44]. しかしながら, K の値は初期テンソルのボンド次元と関係するため, K を大きく取るとは計算コストのために難しい. 実際次節で見ると, 現実にとれる K の値であれば, 3次元 SU(2) ゲージ理論で $\tilde{S}_v(U(n,\mu)) = 0$ という選択は β が小さい強結合領域でしか機能しない. 実用上は, TRG が効率的に働くような配位を生成する必要がある. 試行作用 $\tilde{S}_v(U(n,\mu))$ を適切に選び, 変分パラメータを最適化することで, 計算結果が変分パラメータに依存しないようにする.

プラケットの中心に位置するテンソルを

$$A_{ijkl} = \exp \left[\frac{\beta}{N} \text{Tr} \left(U_i U_j U_k^\dagger U_l^\dagger \right) - \frac{1}{4} \left(\tilde{S}_v(U_i) + \tilde{S}_v(U_j) + \tilde{S}_v(U_k) + \tilde{S}_v(U_l) \right) \right] \quad (3.4.17)$$

と構成する. exact blocking formula [30] に従い, テンソル B_{ijkl} を導入することで A_{ijkl} から 6 階のテンソルを構成する. B_{ijkl} はリンクに位置し,

$$B_{ijkl} = \delta_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{kl} \delta_{li} \quad (3.4.18)$$

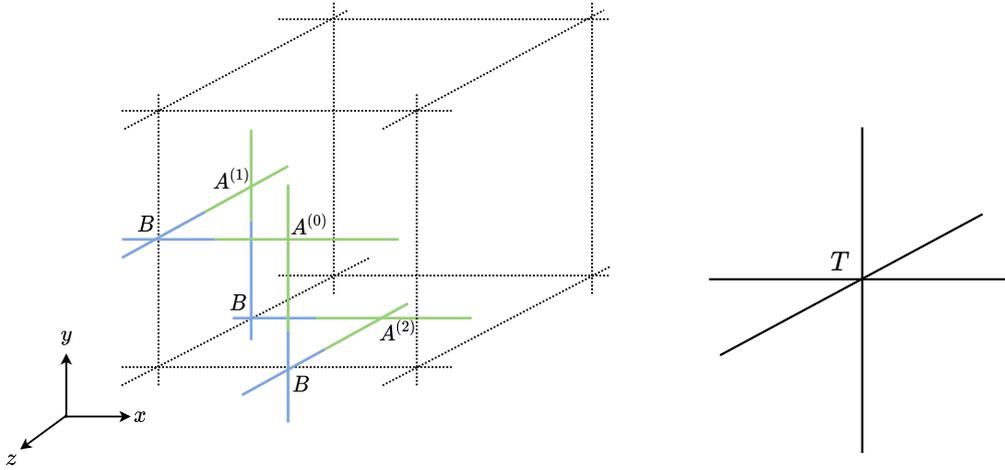


図 3.7 (左) プラケットに位置するテンソル A とリンクに位置するテンソル B . (右) 立方体の中心に位置するテンソル T . テンソルは $T = A^{(0)} \otimes A^{(1)} \otimes A^{(2)} \otimes B \otimes B \otimes B$ と与えられる.

という形をとる. テンソル A とテンソル B の配置を図 3.7 に示す. テンソル A, B を用いて, 初期テンソル T は

$$T = A^{(0)} \otimes A^{(1)} \otimes A^{(2)} \otimes B \otimes B \otimes B. \quad (3.4.19)$$

と構成できる. K 依存性を改善するため, 三つの配位の集合 $G^{(0)}, G^{(1)}, G^{(2)}$ を用いて, それぞれについて配位 $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}$ を生成する*4. 図 3.7 に示すように, テンソル $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}$ はそれぞれ $(xy), (yz), (zx)$ 平面に位置し, テンソル T は立方体の中心に位置するボンド次元 K^2 の 6 階のテンソルである. したがって, 分配関数のテンソルネットワーク表現を

$$Z(K) = \left(e^{-\beta \frac{Z_v}{K}} \right)^{3V} \text{Tr}_{\otimes_n} T \quad (3.4.20)$$

と得る.

以下では, SU(2) の場合を考え, 試行作用として式 (3.4.12) を用いる. 初期テンソル T のボンド次元を K^2 から D に落とすべく, HOTRG の手法に従ってアイソメトリーを導入する. 初期テンソルのボンド次元打ち切り方法の詳細は付録 A に示す.

*4 偶奇サイトで異なる配位の集合を用いることもできる [44].

3.5 3次元 SU(2) ゲージ理論の数値解析結果

本節では格子上の 3次元 SU(2) ゲージ理論の我々の数値解析結果 [8] を示す. 前節で導入したテンソルネットワーク構築と, 3.3.2 節で導入した ATRG [52] を用いて, 自由エネルギー (密度) $F = (1/V) \log Z$ を計算する. 式 (3.4.12) の $N = 2$ の場合を試行作用 \tilde{S}_v として採用する. 以下では, 格子サイズ L を $L = 1024$ に固定する. 系の体積は $V = L^3$ である.

まず, モンテカルロ法によりボルツマン重率 $e^{-\tilde{S}_v(U(n,\mu))}$ で K 個の場の配位 U の集合を三つ生成する: $G^{(i)} = \{U_1^{(i)}, U_2^{(i)}, \dots, U_K^{(i)}\}$ ($i = 0, 1, 2$). 今, U は SU(2) 群の基本表現である. 次に, 前節で説明したように配位の集合 $G^{(i)}$ からテンソル $A^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2$) を構成する. 付録 A で説明するように, アイソメトリーを導入することで, ボンド次元を K^2 から D に落とすことで, 初期テンソル T を構築する. 最後に, ATRG を適用してボンド次元 D の初期テンソル T を繰り込み, 自由エネルギー $F = \frac{1}{V} \log Z$ を計算する. 自由エネルギーは本来, 試行作用 $\tilde{S}_v(U(n,\mu))$ の係数である変分パラメータ H に依存しない. よって, β を固定し, H を変化させて自由エネルギーのプラトーを探索する.

自由エネルギーの計算には, 統計誤差に加えて, 配位の個数 K とボンド次元 D の有限性に由来する系統誤差が生じる. 以下の結果で与えるエラーバーは, 全て 10 回の独立な試行から得たものである.

3.5.1 D, K 依存性

自由エネルギーの D, K 依存性を調べる. β の典型的な小さい・大きい値として, それぞれ $\beta = 1$, $\beta = 50$ で計算する. β は相互作用の大きさを表す結合定数 g と $\beta \propto \frac{1}{g^2}$ と関係づく. そのため, β が小さい領域は強結合領域, β が大きい領域は弱結合領域に対応する.

まず, D 依存性を調べる. $\beta = 1$ と $\beta = 50$ における自由エネルギーの D 依存性をそれぞれ図 3.8 の左と右に示す. ここで K は $K = 12$ に固定し, H の典型的な値として $H = 0.001$ と $H = 5$ の結果を示している. 図 3.8 (左) から, $H = 0.001$ の統計誤差は $H = 5$ の統計誤差よりもはるかに小さいことが分かり, $H = 0.001$ と $H = 5$ 双方について D の変化に対して安定していることが読み取れる. 図 3.8 (右) からわかる通り, $H = 20$ の場合の統計的誤差は $H = 1$ の場合よりもはるかに小さい. また, D の変化に対して $H = 20$ の結果は安定しているのに対し, $H = 1$ の場合は安定していない. これ

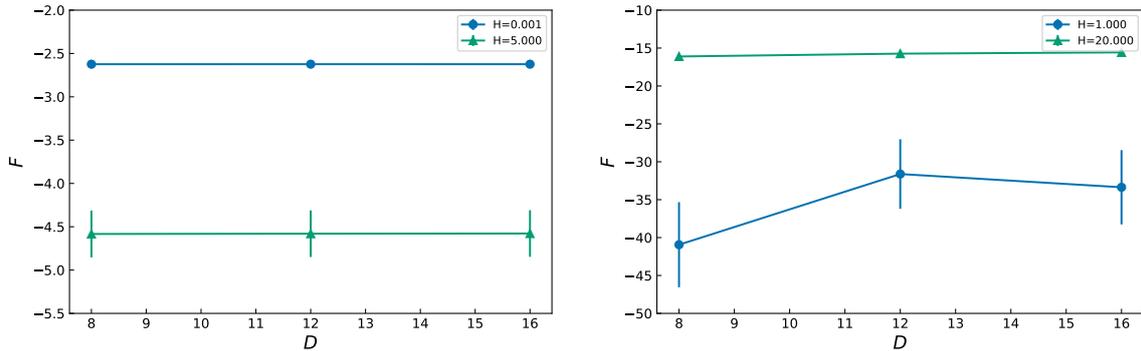


図 3.8 $K = 12$ における自由エネルギーの D 依存性について, $\beta = 1$ (左) と $\beta = 50$ (右) の結果を示す. 補助として, 同じ H の結果を結ぶ線を引いた. (左) 点と三角形はそれぞれ $H = 0.001$ と $H = 5$ の結果を表し, $H = 0.001$ の統計誤差はシンボルのサイズより小さい. (右) 点と三角形はそれぞれ $H = 1$ と $H = 20$ の結果を表し, $H = 20$ の統計誤差はシンボルのサイズより小さい.

らの結果は, 我々のアルゴリズムにおいて H を適切に調整することが不可欠であることを示唆している. 特に, H が適切に選択されている場合, 弱結合領域と強結合領域のどちらにおいてもボンド次元の値 $D = 12$ は十分であると考えられる.

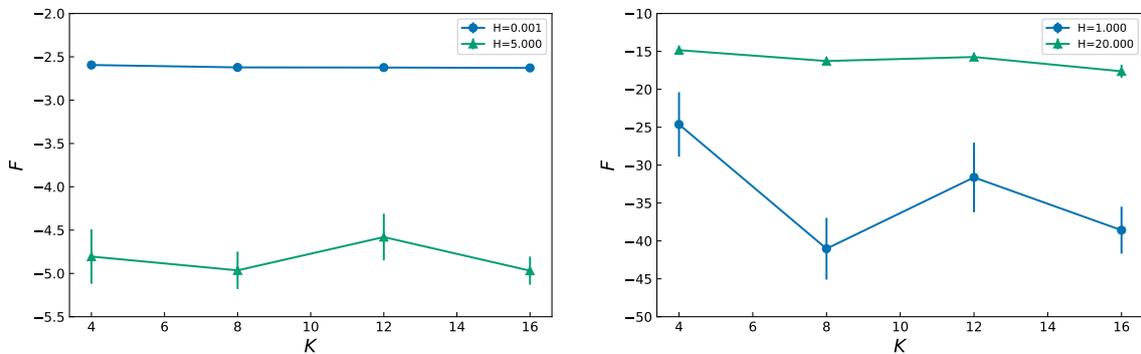


図 3.9 $D = 12$ における自由エネルギーの K 依存性について, $\beta = 1$ (左) と $\beta = 50$ (右) の結果を示す. 補助のために, 同じ H の値を結ぶ線を引いた. (左) 点と三角形がそれぞれ $H = 0.001$ と $H = 5$ の結果を表し, $H = 0.001$ の統計誤差はシンボルのサイズよりも小さい. (右) 点と三角形がそれぞれ $H = 1$ と $H = 20$ の結果を表し, $H = 20$ の統計誤差はシンボルのサイズよりも小さい.

次に, 配位の個数, つまりテンソルネットワーク表示におけるテンソル A のボンド次元を意味する K 依存性を調べる. $\beta = 1$ および $\beta = 50$ での自由エネルギーの K 依存性を, 図 3.9 の左右のパネルにそれぞれ示す. ボンド次元 D は $D = 12$ に固定し, H の

二つの代表的な値についての結果を示している. 図 3.9 (左) では, $H = 0.001$ の場合の統計的誤差が $H = 5$ の場合よりもはるかに小さいことが分かる. また, $H = 0.001$ の結果は K の変化に対して安定しているが, $H = 5$ の場合は安定していない. これは再び, 我々の試行作用を導入するアルゴリズムにおいて変分パラメータ H の調整が重要であることを示しており, 強結合領域においては $K = 16$ が十分であることが示唆される. 同様に, 図 3.9 (右) では, $H = 20$ の場合の統計的誤差が $H = 1$ の場合よりもはるかに小さいが, $K \leq 16$ の範囲において $H = 20$ の結果は完全に安定しているわけではない. 利用可能なメモリの制限のため, 以下の計算では $K = 16$ を採用する. 実際には, 3.5.2 節で示すように, $20 \leq \beta \leq 50$ における自由エネルギーの結果は, 弱結合展開と一致していることを 3.5.2 節で見る. したがって, $H \sim 20$ で $K \geq 16$ の場合の K 依存性は, 弱結合領域において大きくないと予想される. 上記の結果から, 以下の計算では $D = 12$ と $K = 16$ とパラメータを設定する.

3.5.2 自由エネルギー

図 3.10 に自由エネルギーの結果を示す. ここで, D と K は前節で述べたように $D = 12$, $K = 16$ に固定されている. $0 < H \leq 20$ の範囲で β の各値に対してプラトーを探索する. 自由エネルギーは $F = F(H_*)$ から得られる. ここで H_* はプラトーの中で最も統計誤差が小さい点である. H_* は β に依存することに注意する. $\beta = 1$ と $\beta = 50$ をそれぞれ典型的な β が小さな値と大きな値として選び, ここでの自由エネルギーの H 依存性を図 3.11 に示す. $\beta = 1$ の場合には $H \leq 0.6$ の領域に, $\beta = 50$ の場合には $H \leq 16$ の領域にプラトーがあることが分かる. $\beta \leq 7$ では $H_* = 0.001$ を, $\beta \geq 20$ では $H_* > 10$ を採用する.

自由エネルギーの強結合展開は

$$F(\beta) = -3\beta + \frac{3}{8}\beta^2 - \frac{3}{384}\beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6) \quad (3.5.1)$$

と与えられ, 図 3.10 で破線で表されている. プラケットの期待値の弱結合展開は $W_{1 \times 1} = e^{-1/\beta}$ [59] で与えられる. これより, 自由エネルギーの弱結合展開を得る:

$$F(\beta) = -3 \log \beta + C + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta}\right). \quad (3.5.2)$$

ここで C は積分定数である. 定数 C は $20 \leq \beta \leq 50$ の範囲のデータを $-3 \log \beta + C$ にフィットすることにより, $C = -5.8426$ と決定する. 弱結合展開は図 3.10 において点線で表されている. この結果は, 強結合・弱結合展開とそれぞれ強結合領域・弱結合領域で

一致する。しかし、 $7 \leq \beta \leq 19$ の領域では、明確なプラトーを見つけられなかった。この問題は K の値を大きくすることや試行作用の改善により解決できると期待される。

我々の結果は、高次元ゲージ理論の強結合領域においてランダムサンプリング法 [44] が機能することを示唆している。 K を十分に大きくすることができない場合、中間および弱結合領域では別の方法が必要となる。我々の方法はそのような方法の候補である。

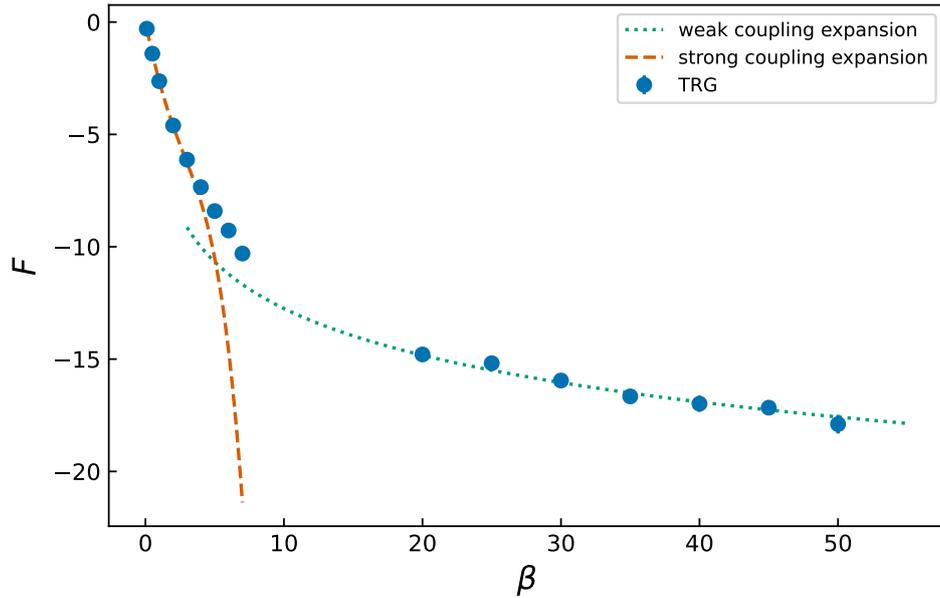


図 3.10 β に対する自由エネルギー F の数値結果。統計誤差はシンボルのサイズよりも小さい。強結合展開は破線で、弱結合展開は点線で表した。

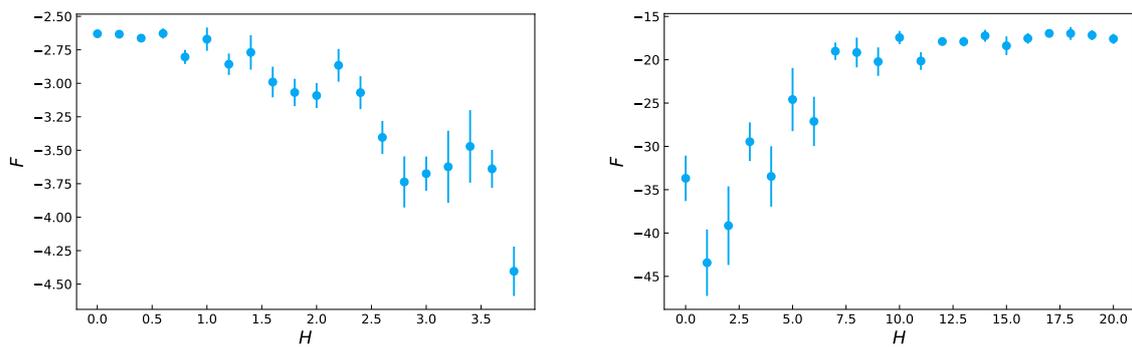


図 3.11 $\beta = 1$ (左)と $\beta = 50$ (右)における、自由エネルギー F の H 依存性。パラメータは $K = 16, D = 12$ ととった。

3.6 3D SU(2) TRG 結論と展望

我々はゲージ場に対する経路積分をテンソルネットワークとして表現する方法を提案した。我々の方法では、変分パラメータを持つ試行作用によって決定された重みで生成されるゲージ場の配位がテンソルの添字と対応する。これらの添字を持つ初期テンソルを構築して、様々な変分パラメータの値に対して TRG を実行し、結果がそれらのパラメータに対して不変となるように変分パラメータを固定した。高次元非可換ゲージ理論の TRG 研究の第一歩として、ATRG を使用して我々の方法で 3 次元 SU(2) ゲージ理論を研究した。3 次元以上の非可換ゲージ理論への TRG の適用は、我々の研究が初である。自由エネルギーの弱結合および強結合の解析結果と整合する数値結果を得ることに成功した。一様サンプリング法 ($H = 0$ に相当) が強結合領域で機能すること、および弱結合領域で H を非ゼロの値に調整する必要があることがわかった。この結果は、我々の方法が高次元ゲージ理論の研究に使用できることを示唆している。

弱結合および中間結合領域での K の変化に対する自由エネルギーの完全な安定性を確認し、中間結合領域でプラトーを見つけるためには、より大きな K での計算を実行するか、試行作用を改善する必要があると考えられる。本研究は符号問題が生じない実作用の系の解析であるため、化学ポテンシャルの導入といった複素作用系の解析は課題である。さらに物質場や、位相項、SU(3) を始めとする高ランクの非可換ゲージ群への拡張、4 次元への拡張によって、徐々に 4 次元有限密度 QCD へと近づけることが期待される。

さらに、AdS/CFT 対応における活用も考えられる。バルクの古典重力と対応する境界は強結合ゲージ場であり、さらに MERA を始めとするテンソルネットワークにより境界理論からの時空創発の可能性が示唆されている。我々が構築したネットワークは、このような境界のゲージ場を直接テンソルネットワークとして表す一例である。解析的には強結合領域を具体的に扱うのは難しいが、数値計算では比較的容易に強結合領域にアプローチできるという利点もある。よって、将来的には TRG と繰り込み群との関係をより明らかにすることで、境界のゲージ理論からバルクの重力理論の創発へと数値的にアプローチすることが可能になると期待できる。

第 4 章

波動汎関数に対する厳密繰り込み群

4.1 波動汎関数に対する厳密繰り込み群 背景

MERA や HaPPY code, Random tensor network など, 離散的な時空を表すテンソルネットワークモデルが知られている. AdS/CFT 対応において, バルクの方向は繰り込み群のスケールと対応する. 連続的な時空を得るためには, スケールを連続的にしなくてはならない. しかし一般に, 離散的なネットワークのスケールの連続極限は非自明である. そこで, 始めから連続的なスケールを持つネットワークとして, 連続テンソルネットワークが有用と考えられる. 連続テンソルネットワークの例として, 自由場において, MERA の連続版にあたる continuous MERA (cMERA) [60] が提案された. cMERA では情報計量的一种である Fisher 計量を時空の計量とみなすことで, CFT 極限において AdS 時空の導出に成功している. AdS/CFT 対応において古典重力と対応するのは強結合 large N ゲージ理論であるため, 非摂動論が不可欠である. しかし, 一般に cMERA で強結合理論において変分法の試行関数の設定は非自明である. MERA と cMERA はいずれも変分法を用いており, 繰り込み群を直接扱っていない. 我々は, 時空の創発の上で非摂動論が不可欠という点と, バルクの方向が繰り込み群のスケールと対応するという点から, 厳密繰り込み群を用いて連続テンソルネットワークを構築した [10]. 本章ではこの研究について述べる. 厳密繰り込み群 (Exact renormalization group, ERG)^{*1}は, 有効作用のスケール依存性を表す汎関数微分方程式を扱う非摂動論的手法である. ここでは, スカラー場理論における基底状態の波動汎関数が従う ERG 方程式を, Polchinski 方程式から導出する. 本章では, d 次元空間と 1 次元時間を持つ $(d+1)$ 次元の Euclid 時空上の

^{*1} 汎関数繰り込み群 (Functional renormalization group) と呼ばれる.

理論を考える。

4.2 記法

本章の記法を以下にまとめる。時間方向の座標のパラメータを τ とし、積分は以下の記法を使用する：

$$\int_p \equiv \int \frac{d^{d+1}p}{(2\pi)^{d+1}}, \quad \int_{\vec{p}} \equiv \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}, \quad \int_\tau \equiv \int d\tau. \quad (4.2.1)$$

ここで、 p は $d+1$ 次元の運動量を表し、 \vec{p} は p の d 次元空間部分を表す。また、簡略記法

$$\tilde{\delta}(\vec{p}) = (2\pi)^d \delta(\vec{p}) \quad (4.2.2)$$

を導入し、空間の体積 V を

$$V = \tilde{\delta}(0) \quad (4.2.3)$$

と定義する。以下では、場 $\phi(p)$ と $\phi(\tau, \vec{p})$ を用い、これらは Fourier 変換により、

$$\phi(p) = \phi(E, \vec{p}) = \int d\tau \phi(\tau, \vec{p}) e^{-iE\tau}. \quad (4.2.4)$$

と結びつく。 E はエネルギー ($E = p_0$) を表す。

4.3 波動汎関数に対する ERG 方程式

4.3.1 Polchinski 方程式

スカラー場について、作用の相互作用項のスケール依存性を表す Polchinski 方程式 [61] をレビューする。まず、有効カット Λ の微小変化で分配関数 $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_\Lambda}$ は不変と要請する：

$$-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \int \mathcal{D}\phi e^{-S_\Lambda[\phi]} = 0. \quad (4.3.1)$$

有効作用 S_Λ のスケール依存性が

$$-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} e^{-S_\Lambda[\phi]} = \int_p \frac{\delta}{\delta \phi(p)} \left[G_\Lambda[\phi](p) e^{-S_\Lambda[\phi]} \right] \quad (4.3.2)$$

となるとき、要請 (4.3.1) が満たされる。ここで、 Λ は有効カットオフであり、 $G_\Lambda[\phi](p)$ は連続的なブロッキング（粗視化）の手続きに対応する UV 正則化と呼ばれる。

典型的には、 $G_\Lambda[\phi](p)$ は以下の形をとる：

$$G_\Lambda[\phi](p) = \frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(p) \frac{\delta}{\delta\phi(-p)} (S_\Lambda - 2\hat{S}). \quad (4.3.3)$$

ここで、 $\dot{C}_\Lambda \equiv -\Lambda \partial_\Lambda C_\Lambda$ は UV 正則化を組み込んだ ERG 積分核であり、 \hat{S} は粗視化手続きを示す seed action と呼ばれる。Polchinski 方程式は seed action \hat{S} を有効作用の自由項 S_0 に設定することに対応する：

$$\hat{S} = S_0 = \int_p \frac{1}{2} \phi(p) C_\Lambda^{-1}(p) \phi(-p). \quad (4.3.4)$$

このとき、 S_0 は式 (4.3.3) を用いて、ERG の一般的な構造を示す式 (4.3.2) を満たすことが容易に確認できる。式 (4.3.2) は以下のようなになる：

$$-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} e^{-S_\Lambda[\phi]} = \int_p \frac{\delta}{\delta\phi(p)} \left[\frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(p) \left\{ \frac{\delta}{\delta\phi(-p)} (S_\Lambda - 2S_0) \right\} e^{-S_\Lambda[\phi]} \right]. \quad (4.3.5)$$

有効作用を自由部分と相互作用部分に

$$S_\Lambda = S_0 + S_{\text{int}} \quad (4.3.6)$$

と分解することで、式 (4.3.5) より Polchinski 方程式の典型的な表式

$$-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} e^{-S_{\text{int}}} = -\frac{1}{2} \int_p \dot{C}_\Lambda(p) \frac{\delta^2}{\delta\phi(p)\delta\phi(-p)} e^{-S_{\text{int}}} \quad (4.3.7)$$

を得る。

4.3.2 波動汎関数に対する ERG 方程式

基底状態の波動汎関数に対する ERG 方程式を、Polchinski 方程式 (4.3.5) から導出する。扱うのは任意の次元における、任意の相互作用をもったスカラー場理論である。まず、基底状態の波動汎関数 $\Psi_\Lambda[\varphi]$ が経路積分で

$$\Psi_\Lambda[\varphi] = \int_{\phi(0, \vec{p}) = \varphi(\vec{p})} \mathcal{D}\phi e^{-\int_{-\infty}^0 d\tau L_\Lambda[\phi]} \quad (4.3.8)$$

と表される。ここで L_Λ は有効ラグランジアンであり、場 $\phi(\tau, \vec{p})$ には $\tau = 0$ で $\varphi(\vec{p})$ となるという境界条件が課されている：

$$\phi(0, \vec{p}) = \varphi(\vec{p}). \quad (4.3.9)$$

L_Λ が実数と仮定することで、 $\Psi_\Lambda[\varphi]$ もまた実数となる。これは、 $\Psi_\Lambda[\varphi]$ が次のようにも表現されることを意味する：

$$\Psi_\Lambda[\varphi] = \int_{\phi(0, \vec{p}) = \varphi(\vec{p})} \mathcal{D}\phi e^{-\int_0^\infty d\tau L_\Lambda[\phi]} . \quad (4.3.10)$$

式 (4.3.8) と (4.3.10) から、波動汎関数 $\Psi_\Lambda[\varphi]$ の二乗は有効作用 $S_\Lambda = \int_{-\infty}^\infty d\tau L_\Lambda$ を用いて

$$\Psi_\Lambda^2[\varphi] = \int \mathcal{D}\phi \prod_{\vec{p}} \delta[\phi(0, \vec{p}) - \varphi(\vec{p})] e^{-S_\Lambda[\phi]} \quad (4.3.11)$$

と表せる。式 (4.3.11) の両側に $-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda}$ を作用させると、左辺は

$$2\Psi_\Lambda \left(-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Psi_\Lambda \right) . \quad (4.3.12)$$

となる。

右辺については、式 (4.3.5) を用いて

$$\int \mathcal{D}\phi \prod_{\vec{k}} \delta[\phi(0, \vec{k}) - \varphi(\vec{k})] \int_p \frac{\delta}{\delta\phi(p)} \left[\frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(p) \left\{ \frac{\delta}{\delta\phi(-p)} (S_\Lambda - 2S_0) \right\} e^{-S_\Lambda} \right] \quad (4.3.13)$$

と得られる。式 (4.3.4) を式 (4.3.13) に代入し、時間方向を座標表示 (実空間表示) に変換すると、

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\phi \prod_{\vec{k}} \delta[\phi(0, \vec{k}) - \varphi(\vec{k})] \\ & \quad \times \int_{\tau, \tau', \vec{p}} \left[-\frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(\tau - \tau', \vec{p}) \frac{\delta^2}{\delta\phi(\tau, \vec{p}) \delta\phi(\tau', -\vec{p})} e^{-S_\Lambda[\phi]} \right] \\ & \quad - \int \mathcal{D}\phi \prod_{\vec{k}} \delta[\phi(0, \vec{k}) - \varphi(\vec{k})] \\ & \quad \times \int_{\tau, \tau', \tau'', \vec{p}} \frac{\delta}{\delta\phi(\tau, \vec{p})} \left[\dot{C}_\Lambda(\tau - \tau', \vec{p}) C_\Lambda^{-1}(\tau' - \tau'', \vec{p}) \phi(\tau'', \vec{p}) e^{-S_\Lambda[\phi]} \right] . \quad (4.3.14) \end{aligned}$$

となる。式 (4.3.14) の最初の行が、 $\tau = \tau' = 0$ を除いて全微分の積分であること、また

2 行目も $\tau = 0$ を除いて同様であることに注意すると、以下の式を得る：

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}\phi \prod_{\vec{k}} \delta[\phi(0, \vec{k}) - \varphi(\vec{k})] \\
& \quad \times \int_{\tau, \tau', \vec{p}} \left[-\frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(0, \vec{p}) \frac{\delta^2}{\delta\phi(0, \vec{p}) \delta\phi(0, -\vec{p})} e^{-S_\Lambda[\phi]} \right] \\
& - \int \mathcal{D}\phi \prod_{\vec{k}} \delta[\phi(0, \vec{k}) - \varphi(\vec{k})] \\
& \quad \times \int_{\tau', \tau'', \vec{p}} \frac{\delta}{\delta\phi(0, \vec{p})} \left[\dot{C}_\Lambda(-\tau', \vec{p}) C_\Lambda^{-1}(\tau' - \tau'', \vec{p}) \phi(\tau'', \vec{p}) e^{-S_\Lambda[\phi]} \right]. \quad (4.3.15)
\end{aligned}$$

$C_\Lambda(\tau, \vec{p})$ が、カットオフ Λ に依存しない関数 f を用いて

$$C_\Lambda(\tau, \vec{p}) = f(\tau, \vec{p}) g_\Lambda(\vec{p}). \quad (4.3.16)$$

と分解されると仮定する。すなわち、運動量の空間成分のみが UV カットオフを持つ。これにより、次の式が示唆される：

$$\int_{\tau''} \dot{C}_\Lambda(\tau - \tau'', \vec{p}) C_\Lambda^{-1}(\tau'' - \tau', \vec{p}) = \delta(\tau - \tau') \frac{\dot{g}_\Lambda(\vec{p})}{g_\Lambda(\vec{p})} = \delta(\tau - \tau') \frac{\dot{C}_\Lambda(0, \vec{p})}{C_\Lambda(0, \vec{p})}. \quad (4.3.17)$$

式 (4.3.17) を式 (4.3.15) に代入し、 $\phi(0, \vec{p})$ に関して部分積分を行い、関係式

$$\frac{\delta}{\delta\phi(0, \vec{p})} \prod_{\vec{k}} \delta[\phi(0, \vec{k}) - \varphi(\vec{k})] = -\frac{\delta}{\delta\varphi(\vec{p})} \prod_{\vec{k}} \delta[\phi(0, \vec{k}) - \varphi(\vec{k})] \quad (4.3.18)$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_{\vec{p}} \dot{C}_\Lambda(0, \vec{p}) \frac{\delta^2}{\delta\varphi(\vec{p}) \delta\varphi(-\vec{p})} \int \mathcal{D}\phi \prod_{\vec{k}} \delta[\phi(0, \vec{k}) - \varphi(\vec{k})] e^{-S_\Lambda[\phi]} \\
& - \int_{\vec{p}} \frac{\delta}{\delta\varphi(\vec{p})} \left[\frac{\dot{C}_\Lambda(0, \vec{p})}{C_\Lambda(0, \vec{p})} \varphi(\vec{p}) \int \mathcal{D}\phi \prod_{\vec{k}} \delta[\phi(0, \vec{k}) - \varphi(\vec{k})] e^{-S_\Lambda[\phi]} \right] \quad (4.3.19)
\end{aligned}$$

を得る。さらに、式 (4.3.11) を用いて、式 (4.3.19) を以下のように書き換える：

$$\begin{aligned}
& -\Psi_\Lambda \int_{\vec{p}} \dot{C}_\Lambda(0, \vec{p}) \left\{ \frac{\delta^2 \Psi_\Lambda}{\delta\varphi(\vec{p}) \delta\varphi(-\vec{p})} + \frac{1}{\Psi_\Lambda} \frac{\delta\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(\vec{p})} \frac{\delta\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(-\vec{p})} \right\} \\
& - 2\Psi_\Lambda \int_{\vec{p}} \frac{\dot{C}_\Lambda(0, \vec{p})}{C_\Lambda(0, \vec{p})} \varphi(\vec{p}) \frac{\delta\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(\vec{p})} - \Psi_\Lambda^2 V \int_{\vec{p}} \frac{\dot{C}_\Lambda(0, \vec{p})}{C_\Lambda(0, \vec{p})}. \quad (4.3.20)
\end{aligned}$$

最後に、式 (4.3.12) と式 (4.3.20) を組み合わせることで、基底状態の波動汎関数 $\Psi_\Lambda[\varphi]$ に対する ERG 方程式が

$$\begin{aligned} -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Psi_\Lambda = & -\frac{1}{2} \int_{\vec{p}} \dot{C}_\Lambda(0, \vec{p}) \left\{ \frac{\delta^2 \Psi_\Lambda}{\delta \varphi(\vec{p}) \delta \varphi(-\vec{p})} + \frac{1}{\Psi_\Lambda} \frac{\delta \Psi_\Lambda}{\delta \varphi(\vec{p})} \frac{\delta \Psi_\Lambda}{\delta \varphi(-\vec{p})} \right\} \\ & - \int_{\vec{p}} \frac{\dot{C}_\Lambda(0, \vec{p})}{C_\Lambda(0, \vec{p})} \varphi(\vec{p}) \frac{\delta \Psi_\Lambda}{\delta \varphi(\vec{p})} - \frac{V}{2} \Psi_\Lambda \int_{\vec{p}} \frac{\dot{C}_\Lambda(0, \vec{p})}{C_\Lambda(0, \vec{p})} \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

と導かれる。この式が本研究の主な結果である。

MERA の場合、波動関数をスケール方向に多層化することで、離散的な AdS 時空を構成していると解釈されたが、あくまで変分法であり、直接繰り込み群を用いていない。式 (4.3.21) は、波動汎関数のスケール依存性を繰り込み群から直接得ている。そのため、AdS/CFT 対応の性質である繰り込み群の構造を直接反映した連続テンソルネットワークを定義していると解釈される。今の場合、境界理論が任意の次元における任意の相互作用をもったスカラー場であり、繰り込み群によってバルクが創発しているという描像が期待される。この描像を直接確かめることは Fisher 計量などにより時空の構造を調べる [60] ことで将来的に可能になると考えられる。一般に、式 (4.3.21) を直接解くことは困難である。以降では自明解である Gauss 解と、摂動解を求めることでこの式の正当性を確かめる。

4.3.3 Gauss 解

式 (4.3.21) で、Gauss 形式

$$\Psi_0[\varphi] = \mathcal{N}_\Lambda \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\vec{p}} \varphi(\vec{p}) \mathcal{M}_\Lambda(\vec{p}) \varphi(-\vec{p}) \right]. \quad (4.3.22)$$

の解を求める。この解は、 $S_\Lambda = S_0$ の場合に対応する。Gauss 形式 (4.3.22) を ERG 方程式 (4.3.21) に代入することで、規格化定数 \mathcal{N}_Λ と積分核 $\mathcal{M}_\Lambda(\vec{p})$ のフロー方程式が得られる：

$$-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \ln \mathcal{N}_\Lambda = \frac{V}{2} \int_{\vec{p}} \dot{C}_\Lambda(0, \vec{p}) (\mathcal{M}_\Lambda(\vec{p}) - C^{-1}(0, \vec{p})), \quad (4.3.23)$$

$$-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \mathcal{M}_\Lambda(\vec{p}) = 2 \dot{C}_\Lambda(0, \vec{p}) \mathcal{M}_\Lambda(\vec{p}) (\mathcal{M}_\Lambda(\vec{p}) - C^{-1}(0, \vec{p})). \quad (4.3.24)$$

式 (4.3.24) の一般解は

$$\mathcal{M}_\Lambda(\vec{p}) = \frac{1}{2C_\Lambda(0, \vec{p}) + \alpha(\vec{p})C_\Lambda^2(0, \vec{p})}, \quad (4.3.25)$$

である． $\alpha(\vec{p})$ は \vec{p} の任意の関数である．ここで， S_0 が $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で標準的な自由場理論の作用に還元されると仮定する：

$$S_0|_{\Lambda \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \int_p \phi(p)(p^2 + m^2)\phi(-p) . \quad (4.3.26)$$

すなわち $C_\infty(p) = 1/(p^2 + m^2)$ であり，これは $C_\infty(0, \vec{p}) = 1/(2\omega_{\vec{p}})$ を意味する．ここで $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ である．一方，作用が式 (4.3.26) によって与えられるとき，基底状態の波動汎関数は式 (4.3.22) によって与えられ， $\mathcal{M}_\Lambda(\vec{p}) = \omega_{\vec{p}}$ となる [62]．したがって，境界条件 $\mathcal{M}_\infty(\vec{p}) = \omega_{\vec{p}}$ を課し，式 (4.3.25) で $\alpha(\vec{p}) = 0$ を固定する．その後，式 (4.3.23)

$$\mathcal{N}_\Lambda = N_0 \exp \left[-\frac{V}{4} \int_{\vec{p}} \ln C_\Lambda(0, \vec{p}) \right] \quad (4.3.27)$$

と解ける．ここで N_0 は任意の定数である． \mathcal{N}_Λ の境界条件は $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限での規格化条件 $1 = \int \mathcal{D}\varphi |\Psi_0[\varphi]|^2$ を要求することによって課す．これは N_0 を 1 に固定する．したがって，式 (4.3.21) の Gauss 解が得られる：

$$\Psi_0[\varphi] = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\vec{p}} \varphi(\vec{p}) \frac{1}{2C_\Lambda(0, \vec{p})} \varphi(-\vec{p}) - \frac{V}{4} \int_{\vec{p}} \ln C_\Lambda(0, \vec{p}) \right] . \quad (4.3.28)$$

次節では， $S_\Lambda = S_0$ の自由な場合に直接経路積分を計算することにより，上記の結果が得られる．

4.3.4 波動汎関数の相互作用部分に対する ERG 方程式

基底状態の波動汎関数を

$$\Psi_\Lambda[\varphi] = e^{I[\varphi]} \Psi_0[\varphi] \quad (4.3.29)$$

とパラメータ化する． $I[\varphi]$ は，波動汎関数への相互作用の寄与を表していると解釈できる．式 (4.3.28) および (4.3.29) を式 (4.3.21) に代入すると， I に対する ERG 方程式が

$$-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} I = -\frac{1}{2} \int_{\vec{p}} \dot{C}(0, \vec{p}) \left[\frac{\delta^2 I}{\delta \varphi(\vec{p}) \delta \varphi(-\vec{p})} + \frac{\delta I}{\delta \varphi(\vec{p})} \frac{\delta I}{\delta \varphi(-\vec{p})} \right] \quad (4.3.30)$$

と得られる．これは基底状態の波動汎関数の相互作用部分に対する非摂動的な汎関数微分方程式であり，Polchinski 方程式 (4.3.7) の対応物である．

次節では，次の C_Λ を用いる：

$$C_\Lambda(p) = \frac{K(\vec{p}^2/\Lambda^2)}{p^2 + m^2} , \quad C_\Lambda(0, \vec{p}) = \frac{K(\vec{p}^2/\Lambda^2)}{2\omega_{\vec{p}}} . \quad (4.3.31)$$

これは式 (4.3.16) に示されるように、運動量の空間成分についてのみカットオフをもつという性質を持つ。\$K(x)\$ はカットオフ関数であり、運動量の大きさがカットオフよりも大きい成分を切り捨てる働きをもつ。つまり、\$K(0) = 1\$ であり、\$x < 1\$ のとき \$K(x) \sim 1\$ であり、\$x > 1\$ のとき \$K(x)\$ は急速に減衰する。この場合、\$\dot{C}_\Lambda(0, \vec{p})\$ は次のように与えられる：

$$\dot{C}_\Lambda(0, \vec{p}) = \frac{\dot{K}(\vec{p}^2/\Lambda^2)}{2\omega_{\vec{p}}} . \quad (4.3.32)$$

ここで、\$\dot{K}(\vec{p}^2/\Lambda^2) = -\Lambda\partial_\Lambda K(\vec{p}^2/\Lambda^2)\$ である。後に、ERG 方程式 (4.3.21) の摂動論による検証 (4.5 節) で式 (4.3.30) を用いる。

4.4 波動汎関数の摂動論

基底状態の波動汎関数 (4.3.8) を摂動一次まで計算することで、ERG 方程式 (4.3.21) の正当性を検証する。取り扱いを簡単にするため、時間方向に赤外カットオフ \$T\$ を導入したのち、\$T \to \infty\$ の極限をとる：

$$\Psi_\Lambda[\varphi] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\phi(0, \vec{p}) = \varphi(\vec{p})} \mathcal{D}\phi e^{-\int_{-T}^0 d\tau L_\Lambda} . \quad (4.4.1)$$

\$\tau = 0\$ での境界条件 (4.3.9) に加えて、\$\tau = -T\$ で任意の境界条件を課することができる。ここでは便宜上、条件

$$\phi(-T, \vec{p}) = 0 \quad (4.4.2)$$

を課す。有効ラグランジアン \$L_\Lambda\$ は、自由部分 \$L_0\$ と相互作用部分 \$L_{\text{int}}\$ から \$L_\Lambda = L_0 + L_{\text{int}}\$ と構成される。自由部分 \$L_0\$ は、式 (4.3.4) の \$S_0\$ から \$C_\Lambda\$ の表式 (4.3.31) を用いて

$$L_0 = \int_{\vec{p}} \frac{1}{2} K_{\vec{p}}^{-1} [\partial_\tau \phi(\tau, \vec{p}) \partial_\tau \phi(\tau, -\vec{p}) + \omega_{\vec{p}}^2 \phi(\tau, \vec{p}) \phi(\tau, -\vec{p})] \quad (4.4.3)$$

と読み取れる。ここで、次の記法を導入した：

$$K_{\vec{p}} = K(\vec{p}^2/\Lambda^2) . \quad (4.4.4)$$

相互作用部分 \$L_{\text{int}}\$ は質量カウンター項 (mass counter term) と \$\phi^4\$ 相互作用項から構成されるとする：

$$\begin{aligned} L_{\text{int}} &= \frac{\delta m^2}{2} \int_{\vec{p}} \phi(\tau, \vec{p}) \phi(\tau, -\vec{p}) \\ &+ \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}_1 \dots \vec{p}_4} \phi(\tau, \vec{p}_1) \phi(\tau, \vec{p}_2) \phi(\tau, \vec{p}_3) \phi(\tau, \vec{p}_4) \tilde{\delta}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4) . \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

波動汎関数の摂動は、ラグランジアンの自由項の周りで展開することで、

$$\begin{aligned}
\Psi_\Lambda[\varphi] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\phi(0, \vec{p}) = \varphi(\vec{p})} \mathcal{D}\phi e^{-\int_{-T}^0 d\tau (L_0 + L_{\text{int}})} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\phi(0, \vec{p}) = \varphi(\vec{p})} \mathcal{D}\phi e^{-\int_{-T}^0 d\tau L_0} \left[1 - \int_{-T}^0 d\tau L_{\text{int}} + \dots \right] \\
&= \Psi_0[\varphi] \left[1 - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\phi(0, \vec{p}) = \varphi(\vec{p})} \mathcal{D}\phi e^{-\int_{-T}^0 d\tau L_0} \int_{-T}^0 d\tau L_{\text{int}} + \dots \right] \\
&= \Psi_0[\varphi] e^I
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

と書ける。ここで、式 (4.3.29) と同様のパラメータ化を用いた。第一項が自由場についての波動汎関数

$$\Psi_0[\varphi] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\phi(0, \vec{p}) = \varphi(\vec{p})} \mathcal{D}\phi e^{-\int_{-T}^0 d\tau L_0} \tag{4.4.7}$$

であり、第二項が摂動一次の項である。まず自由場についての波動汎関数を計算する。

摂動展開を実行するために、 $\phi(\tau, \vec{p})$ を自由部分 L_0 の古典解 $\phi_c(\tau, \vec{p})$ 周りで展開すると、

$$\phi(\tau, \vec{p}) = \phi_c(\tau, \vec{p}) + \chi(\tau, \vec{p}) \tag{4.4.8}$$

を得る。すなわち、 $\phi_c(\tau, \vec{p})$ は運動方程式

$$\partial_\tau^2 \phi_c(\tau, \vec{p}) = \omega_{\vec{p}}^2 \phi_c(\tau, \vec{p}) . \tag{4.4.9}$$

を満たす。ここで、境界条件 (4.3.9) および (4.4.2) が満たされるように、

$$\phi_c(0, \vec{p}) = \varphi(\vec{p}) , \quad \phi_c(-T, \vec{p}) = 0 , \quad \chi(0, \vec{p}) = 0 , \quad \chi(-T, \vec{p}) = 0 \tag{4.4.10}$$

とおく。運動方程式 (4.4.9) および条件 (4.4.10) から、 $\phi_c(\tau, \vec{p})$ は

$$\begin{aligned}
\phi_c(\tau, \vec{p}) &= \frac{e^{\omega_{\vec{p}}(\tau+T)} - e^{-\omega_{\vec{p}}(\tau+T)}}{e^{\omega_{\vec{p}}T} - e^{-\omega_{\vec{p}}T}} \varphi(\vec{p}) \\
&\xrightarrow{T \rightarrow \infty} e^{\omega_{\vec{p}}\tau} \varphi(\vec{p})
\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

と与えられ、 $\chi(\tau, \vec{p})$ はフーリエ展開により、

$$\chi(\tau, \vec{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{T}\tau\right) \chi_n(\vec{p}) . \tag{4.4.12}$$

となる．古典解周りの展開 (4.4.8) を L_0 に代入し，運動方程式 (4.4.9) および条件 (4.4.10) を用いると，次の結果が得られる：

$$\begin{aligned} \int_{-T}^0 d\tau L_0 &= \frac{1}{2} \int_{\vec{p}} K_{\vec{p}}^{-1} \phi_c(\tau, \vec{p}) \partial_\tau \phi_c(\tau, \vec{p})|_{\tau=0} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-T}^0 d\tau \int_{\vec{p}} K_{\vec{p}}^{-1} \chi(\tau, -\vec{p}) (-\partial_\tau^2 + \omega_{\vec{p}}^2) \chi(\tau, \vec{p}) . \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

基底状態の波動汎関数は式 (4.4.6) で与えたようにパラメータ化されている．最初に，波動汎関数の摂動最低次が式 (4.4.7) で与えられることに注意する．古典解 (4.4.11) と式 (4.4.13) の最初の項から，

$$\Psi_0[\varphi] = N_0 \exp \left(- \int_{\vec{p}} \frac{1}{2} K_{\vec{p}}^{-1} \omega_{\vec{p}} \varphi(\vec{p}) \varphi(-\vec{p}) \right) , \quad (4.4.14)$$

を得る．ここで N_0 は規格化定数であり，条件 $1 = \int \mathcal{D}\varphi |\Psi_0[\varphi]|^2$ から

$$N_0 = \exp \left[\frac{V}{4} \int_{\vec{p}} \log(2K_{\vec{p}}^{-1} \omega_{\vec{p}}) \right] . \quad (4.4.15)$$

と決定できる．式 (4.4.14) と式 (4.4.15) は，Gauss 解 (4.3.28) と一致する．

次に，波動汎関数への相互作用の寄与 $I[\varphi]$ を摂動論的に計算する．そのために，外線と内線がそれぞれ φ と χ の伝播関数を表す Feynman 図を用いる．式 (4.4.12) と式 (4.4.13) から， χ の伝播関数は

$$\begin{aligned} \langle \chi(\tau, \vec{p}) \chi(\tau', \vec{p}') \rangle &= \sum_n \sin \left(\frac{n\pi}{T} \tau \right) \sin \left(\frac{n\pi}{T} \tau' \right) \frac{2}{T} \frac{K_{\vec{p}} \tilde{\delta}(\vec{p} + \vec{p}')}{\omega_{\vec{p}}^2 + \left(\frac{n\pi}{T} \right)^2} \\ &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{K_{\vec{p}}}{2\omega_{\vec{p}}} \left(e^{-\omega_{\vec{p}}|\tau - \tau'|} - e^{\omega_{\vec{p}}(\tau + \tau')} \right) \tilde{\delta}(\vec{p} + \vec{p}') \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

と得られる．古典解周りの展開 (4.4.8) と古典解 (4.4.11) を L_{int} に代入することで， φ と χ の相互作用頂点を読み取ることができる．ここでは δm^2 の相互作用を黒い点の頂点で， λ の相互作用を plain な頂点で表す． $I[\varphi]$ は，真空泡図 (bubble diagram) を除く接続図 (connected diagram) の合計と， $1 = \int \mathcal{D}\varphi |\Psi[\varphi]|^2$ の規格化条件によって決定される定数

から構成される。摂動一次に注目すると、必要な接続図は次のように与えられる：

$$\text{---}\bullet\text{---} = -\frac{\delta m^2}{2} \int_{\vec{p}} \varphi(\vec{p}) \varphi(-\vec{p}) \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}}, \quad (4.4.17)$$

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = -\frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}_1 \vec{p}_2} \varphi(\vec{p}_1) \varphi(-\vec{p}_1) \frac{3K_2}{2\omega_1(\omega_1 + \omega_2)}, \quad (4.4.18)$$

$$\text{---}\times\text{---} = -\frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}_1 \dots \vec{p}_4} \varphi_1 \dots \varphi_4 \frac{\tilde{\delta}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4)}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4}. \quad (4.4.19)$$

ここで、略記 $\varphi(\vec{p}_i) = \varphi_i$, $K(\vec{p}_i^2/\Lambda^2) = K_i$, $\omega_{\vec{p}_i} = \omega_i$ を用いた。

規格化条件を用いて $I[\varphi]$ 内の定数を固定した後、基底状態の波動汎関数の摂動一次に対して以下のように最終結果を得る：

$$\Psi_{\Lambda}[\varphi] = e^{I[\varphi]} \Psi_0[\varphi], \quad (4.4.20)$$

$$\begin{aligned} I[\varphi] = & -\frac{\delta m^2}{2} \int_{\vec{p}} \varphi(\vec{p}) \varphi(-\vec{p}) \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \\ & -\frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}_1 \vec{p}_2} \varphi(\vec{p}_1) \varphi(-\vec{p}_1) \frac{3K_2}{2\omega_1(\omega_1 + \omega_2)} \\ & -\frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}_1 \dots \vec{p}_4} \varphi_1 \dots \varphi_4 \frac{\tilde{\delta}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4)}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4} + \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

ここで、規格化定数 \mathcal{C} は条件 $1 = \int \mathcal{D}\varphi |\Psi[\varphi]|^2$ から

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}} \frac{6K_{\vec{p}}}{2\omega_{\vec{p}}} \right\} \int_{\vec{k}} \frac{K_{\vec{k}} V}{4\omega_{\vec{k}}^2} - \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}_1, \vec{p}_2} \frac{3K_1 K_2 V}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2)}. \quad (4.4.22)$$

と決定できる。ここで議論した経路積分による摂動展開の定式化は、高次の摂動に対しても直接的かつ体系的に適用できる。

4.5 摂動論による検証

この節では、基底状態の波動汎関数に対する ERG 方程式 (4.3.21) の妥当性を検証するために、基底状態の波動汎関数 (4.4.20) が ERG 方程式 (4.3.21) を満たすことを摂動一次の範囲で示す。4.3.3 節の分析により、波動汎関数 (4.4.20) の自由項 Ψ_0 が ERG 方程式 (4.3.21) を満たすことが保証されている。よって、摂動の一次の範囲で検証するには、式

(4.4.20) の $I[\varphi]$ が相互作用項についての ERG 方程式 (4.3.30) を満たすことを確かめればよい.

相互作用項についての ERG 方程式 (4.3.30) は摂動一次で

$$-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} I = - \int_{\vec{p}} \frac{\dot{K}_{\vec{p}}}{4\omega_{\vec{p}}} \frac{\delta^2 I}{\delta\varphi(\vec{p})\delta\varphi(-\vec{p})} \quad (4.5.1)$$

となる. 式 (4.4.20) の I を式 (4.5.1) の左辺に代入すると,

$$\begin{aligned} -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} I = & - \left\{ \frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}} \frac{6\dot{K}_{\vec{p}}}{2\omega_{\vec{p}}} \right\} \int_{\vec{k}} \left[\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \varphi(\vec{k})\varphi(-\vec{k}) - \frac{K_{\vec{k}}V}{4\omega_{\vec{k}}^2} \right] \\ & + \left\{ \frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}} \frac{6K_{\vec{p}}}{2\omega_{\vec{p}}} \right\} \int_{\vec{k}} \frac{\dot{K}_{\vec{k}}V}{4\omega_{\vec{k}}^2} \\ & + \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{k}_i} \frac{3}{\omega_1 + \omega_2} \frac{\dot{K}_2}{2\omega_2} \phi(\vec{k}_1)\phi(-\vec{k}_1) \\ & + \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{k}_i} \frac{3}{\omega_1 + \omega_2} \frac{\dot{K}_2}{2\omega_2} \left(-\frac{\dot{K}_1V}{2\omega_1} \right) \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

となり, 右辺は

$$\begin{aligned} - \int_{\vec{p}} \frac{\dot{K}_{\vec{p}}}{4\omega_{\vec{p}}} \frac{\delta^2 I}{\delta\varphi(\vec{p})\delta\varphi(-\vec{p})} = & \left\{ \frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}} \frac{6K_{\vec{p}}}{2\omega_{\vec{p}}} \right\} \int_{\vec{k}} \frac{\dot{K}_{\vec{k}}V}{4\omega_{\vec{k}}^2} \\ & + \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{k}_i} \frac{3}{\omega_1 + \omega_2} \frac{\dot{K}_2}{2\omega_2} \phi(\vec{k}_1)\phi(-\vec{k}_1) \\ & + \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{k}_i} \frac{3}{\omega_1 + \omega_2} \frac{\dot{K}_2}{2\omega_2} \left(-\frac{\dot{K}_1V}{2\omega_1} \right) \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

となる. 付録 B に示すように, Polchinski 方程式から δm^2 のフロー方程式は

$$\frac{\delta \dot{m}^2}{2} = -\frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}} \frac{6\dot{K}_{\vec{p}}}{2\omega_{\vec{p}}} \quad (4.5.4)$$

と得られる. 式 (4.5.2) は式 (4.5.3) と一致することが分かる. よって, 式 (4.4.20) の $\Psi_\Lambda = e^I \Psi_0$ は ERG 方程式 (4.3.21) を満たす. 以上より, 我々が構築した一般のスカラー場理論における非摂動論的な ERG 方程式 (4.3.21) は, ϕ^4 理論の摂動一次の範囲で正当であることが確かめられた.

4.6 波動汎関数に対する ERG 方程式 結論と展望

本章では我々が研究した、波動汎関数に対する厳密繰り込み群について議論した。Polchinski 方程式に基づいて、 $d + 1$ 次元の一般のスカラー場理論における基底状態の波動汎関数が従う非摂動論的な ERG 方程式を導いた。さらに、この方程式の正当性を ϕ^4 理論の摂動一次まで検証した。

本章の冒頭で述べたように、この ERG 方程式は波動汎関数の連続的なスケールに対する依存性を決定することから、一種の連続テンソルネットワークを定義していると解釈できる。方程式の解を用いれば、異なるエネルギーをもつ二つの状態の内積から Fisher 計量を計算できる。文献 [60, 63] で議論されているように、Fisher 計量を時空の計量と同一視することで、バルク時空の計量が導けると期待される。また、ERG 方程式の解から、相互作用がある場合に各スケールにおけるエンタングルメントエントロピーの計算も望まれる。解を求める上では、厳密繰り込み群で用いられる微分展開による近似などが有効と考えられる。

本研究では、扱う理論をスカラー場に限定した。非摂動論を直接扱ったという点に我々の研究の特色があるが、AdS/CFT 対応を議論する上では、ゲージ理論を考えることが重要である。最近のゲージ理論の厳密繰り込み群に関する発展は文献 [64] で扱われており、このような研究が我々の定式化をゲージ場へと発展させる上で有用であると考えられる。

第5章

繰り込み群と量子誤り訂正

我々は4章で述べたように、厳密繰り込み群に基づく連続テンソルネットワークを構築した。このネットワークが実際に AdS/CFT 対応を記述しているかを確かめるためには、エンタングルメント構造など、具体的な方程式の解が必要となる。しかしながら、実際にこの方程式を解析的に解くことは困難である。

2.4 節で述べたように、AdS/CFT 対応は量子誤り訂正と関係付けられるべきである。よって、このネットワークが AdS/CFT 対応を表しているならば、量子誤り訂正の性質を持つはずである。繰り込み群と量子誤り訂正の関係の研究は文献 [65] が先駆的である。離散的な例として、実空間繰り込み群の一種である古典的スピントロッキングや、連続的な例として cMERA [60] の特殊な場合である magic cMERA [66] について、誤り訂正条件 (2.6.5) が議論されている。

本章では繰り込み群と量子誤り訂正の関係に関する、我々の研究 [11] について述べる。具体的には、4章で導出した波動汎関数に対する ERG 方程式の、 ϕ^4 理論の摂動解を用いて、繰り込み群のフローによって符号化が実現される例を構築する。我々の手法は特定のネットワークに依存せず、基底状態の繰り込み群のフローから直接符号化するという点において、より一般的である。

まず 5.1 節でコヒーレント状態の符号化を議論する。5.2 節と 5.3 節でそれぞれ自由スカラー場、 ϕ^4 理論の摂動論を扱う。コヒーレント状態を IR から UV にフローさせて量子誤り訂正条件を導くことにより、符号部分空間が構成されることを示す。以降では、空間方向の運動量 \vec{p} を単に p と記述する。UV, IR, 有効エネルギースケールをそれぞれ Λ_{UV} , Λ_{IR} , Λ とする。変数の添字にこれらの記号がつくときは、対応するエネルギースケールにおける量を意味する。4章で導入した、カットオフ関数 $K_p = K(p/\Lambda)$ を正則化に用いる。以降、全ての量は有効スケール Λ によって無次元化されている。

5.1 コヒーレント状態の符号化

q 準位系のコヒーレント状態

$$|rf_0\rangle_\Lambda = \exp \left[-r \int_p f_0(-p) \left(a_\Lambda^\dagger(-p) - a_\Lambda(p) \right) \right] |\Psi\rangle_{\Lambda_{UV}} \quad (5.1.1)$$

の符号化を考える． $|\Psi\rangle$ は基底状態であり， f_0 は任意の実関数， $r = 0, 1, \dots, q-1$ は準位である． $a_\Lambda, a_\Lambda^\dagger$ は以下の代数から定義される生成消滅演算子である*¹：

$$[a_{\Lambda,p}, a_{\Lambda,p'}^\dagger] = \tilde{\delta}(p-p'), \quad [a_{\Lambda,p}, a_{\Lambda,p'}] = 0, \quad [a_{\Lambda,p}^\dagger, a_{\Lambda,p'}^\dagger] = 0, \quad (5.1.2)$$

$$a_{\Lambda,p} |\Psi\rangle_\Lambda = 0. \quad (5.1.3)$$

状態 (5.1.1) は幅が十分小さくなる時，つまり $\int_p |f_0(p)|^2$ が十分大きいときに直交条件を近似的に満たす：

$$\Lambda \langle rf_0 | r'f_0 \rangle_\Lambda = \exp \left[-\frac{1}{2} (r-r')^2 \int_p |f_0(p)|^2 \right] \quad (5.1.4)$$

$$\sim \delta_{rr'}. \quad (5.1.5)$$

このようにコヒーレント状態は文献 [65] で議論されているように，幅が十分小さいときにデルタ関数となるため，誤り訂正条件 (2.6.5) を考える上で扱いやすい．

一般に，符号部分空間は符号化前の空間よりも広い空間であるため，繰り込み群としては，IR から UV へのフロー（繰り込み群の“逆のフロー”）が符号化と考えるのが自然である．すなわち，UV スケールにおける基底状態 $|\Psi\rangle_{\Lambda_{UV}}$ から有効スケール Λ における基底状態 $|\Psi\rangle_\Lambda$ へのフローを記述する演算子 U が与えられたとする：

$$U(\Lambda, \Lambda_{UV}) |\Psi\rangle_{\Lambda_{UV}} = |\Psi\rangle_\Lambda. \quad (5.1.6)$$

ここで $U(\Lambda, \Lambda_{UV})$ は微小変換の積として

$$U(\Lambda, \Lambda_{UV}) = T \exp \left[\int_\Lambda^{\Lambda_{UV}} \frac{d\Lambda'}{\Lambda'} X_{\Lambda'} \right] \quad (5.1.7)$$

と書けると仮定する．ここで T は

$$T(X_\Lambda X_{\Lambda'}) = \begin{cases} X_\Lambda X_{\Lambda'} & \text{for } \Lambda < \Lambda' \\ X_{\Lambda'} X_\Lambda & \text{for } \Lambda > \Lambda' \end{cases} \quad (5.1.8)$$

*¹ 一般のスカラー場において式 (5.1.2), (5.1.3) を満たす生成消滅演算子が存在するかは非自明である．次節以降で扱う自由場と摂動一次の範囲では定義できる．

と定義される順序演算子である．cMERA [60, 67] の文脈においては，反 Hermite 演算子 X_Λ は繰り込み群のフローに従ってエンタングルメントを除去する働きをもつことから，ディスエンタングラーと呼ぶのが自然である．

$-\Lambda\partial_\Lambda$ を式 (5.1.6) の両辺に作用させ，式 (5.1.7) を用いることで，

$$-\Lambda\partial_\Lambda |\Psi\rangle_\Lambda = X_\Lambda |\Psi\rangle_\Lambda . \quad (5.1.9)$$

を得る．原理的には，ERG 方程式 (4.3.21) から X_Λ が得られる．ここでは扱わないが，摂動論から X_Λ の具体形を得ることは可能である [11]．

q 準位系の符号化を，基底状態の繰り込み群の逆のフロー (Hermite 共役) から

$$|rf_0\rangle_{\Lambda_{UV}} = U^\dagger |rf_0\rangle_{\Lambda_{IR}} \quad (5.1.10)$$

と定義する．符号部分空間は UV スケールで定義されている．生成消滅演算子のフローを，演算子 U (5.1.6) を用いて

$$\begin{aligned} a_\Lambda(p) &= U(\Lambda, \Lambda_{UV}) a_{\Lambda_{UV}}(p) U^\dagger(\Lambda, \Lambda_{UV}) \\ a_\Lambda^\dagger(p) &= U(\Lambda, \Lambda_{UV}) a_{\Lambda_{UV}}^\dagger(p) U^\dagger(\Lambda, \Lambda_{UV}) \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

と定義する．等価な式として，

$$\begin{aligned} -\Lambda\partial_\Lambda a_{\Lambda,p} &= [X_\Lambda, a_{\Lambda,p}] , \\ -\Lambda\partial_\Lambda a_{\Lambda,p}^\dagger &= [X_\Lambda, a_{\Lambda,p}^\dagger] . \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

も用いることができる．式 (5.1.2) と (5.1.3) は式 (5.1.11), (5.1.12) によってフローしても成立する．

エラーの集合を IR スケール近傍で定義されたコヒーレント演算子

$$D_\Lambda[g] = \exp \left[\int_p g(-p) (a_\Lambda(p) - a_\Lambda^\dagger(-p)) \right] \quad (5.1.13)$$

で与える．ここで g は任意の実関数である．

生成消滅演算子から新たな演算子

$$a_{+,\Lambda}(p) = a_\Lambda(p) + a_\Lambda^\dagger(-p) \quad (5.1.14)$$

$$a_{-,\Lambda}(p) = a_\Lambda^\dagger(p) - a_\Lambda(-p) \quad (5.1.15)$$

を定義する．この演算子のフロー方程式は，式 (5.1.11) より，

$$-\Lambda\partial_\Lambda a_\Lambda^\pm = [X_\Lambda, a_{\Lambda,p}^\pm] . \quad (5.1.16)$$

と得られる.

エラー $\{D[g]\}$ に対して符号部分空間 $\text{span}(\{|rf_0\rangle_{\Lambda_{UV}}\})$ が耐性があるかどうかは, 量子誤り訂正条件 (2.6.5) で判定できる. 今の場合,

$$D^\dagger[g]D[h] = \exp \left[\int_p (h(-p) - g(-p)) a_{-, \Lambda} \right] \quad (5.1.17)$$

$$= D[h - g] \quad (5.1.18)$$

となり, エラーの積が一つのエラーで書けるため, $\lim_{\Lambda \rightarrow \Lambda_{IR}} \Lambda_{UV} \langle r' f_0 | D_\Lambda[g] | r f_0 \rangle_{\Lambda_{UV}}$ を評価すればよい.

以降では摂動論を考え, $|\Psi\rangle_\Lambda, X_\Lambda, a_{\Lambda,p}, a_{\Lambda,p}^\pm$ を摂動係数 α で以下のように展開する:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_\Lambda &= |\Psi^{(0)}\rangle_\Lambda + \alpha |\Psi^{(1)}\rangle_\Lambda + \alpha^2 |\Psi^{(2)}\rangle_\Lambda + \dots, \\ X_\Lambda &= X_\Lambda^{(0)} + \alpha X_\Lambda^{(1)} + \alpha^2 X_\Lambda^{(2)} + \dots, \\ a_{\Lambda,p} &= a_{\Lambda,p}^{(0)} + \alpha a_{\Lambda,p}^{(1)} + \alpha^2 a_{\Lambda,p}^{(2)} + \dots, \\ a_{\Lambda,p}^\pm &= a_{\Lambda,p}^{\pm(0)} + \alpha a_{\Lambda,p}^{\pm(1)} + \alpha^2 a_{\Lambda,p}^{\pm(2)} + \dots. \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

5.2 自由場

摂動 0 次として, Hamiltonian $H_{0,\Lambda}$ が

$$H_{0,\Lambda} = \int_p \omega_{\Lambda,p} a_{\Lambda,p}^{(0)\dagger} a_{\Lambda,p}^{(0)} + \frac{V}{2} \int_p \omega_{\Lambda,p}, \quad (5.2.1)$$

$$\begin{aligned} a_{\Lambda,p}^{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\omega_{\Lambda,p}}{K_p}} \varphi(p) + \sqrt{\frac{K_p}{\omega_{\Lambda,p}}} \frac{\delta}{\delta\varphi(-p)} \right), \\ a_{\Lambda,p}^{(0)\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\omega_{\Lambda,p}}{K_p}} \varphi(-p) - \sqrt{\frac{K_p}{\omega_{\Lambda,p}}} \frac{\delta}{\delta\varphi(p)} \right) \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

で与えられる自由スカラー場を考える. ここで, $\omega_{\Lambda,p} = \sqrt{p^2 + m^2/\Lambda^2}$ である.

ERG 方程式 (4.3.5) の自由解 (4.4.14) を用いると,

$$-\Lambda \partial_\Lambda \Psi_\Lambda^{(0)} = -\frac{1}{4} \int_p \frac{\dot{\omega}_{\Lambda,p}}{\omega_{\Lambda,p}} a_{\Lambda,-p}^{(0)\dagger} a_{\Lambda,p}^{(0)\dagger} \Psi_\Lambda^{(0)}. \quad (5.2.3)$$

を得る. X_Λ の反 Hermite 性を考慮し, $a_{\Lambda,p}^{(0)} \Psi_\Lambda^{(0)} = 0$ を用いると,

$$X_\Lambda^{(0)} = -\frac{1}{4} \int_p \frac{\dot{\omega}_{\Lambda,p}}{\omega_{\Lambda,p}} \left(a_{\Lambda,-p}^{(0)\dagger} a_{\Lambda,p}^{(0)\dagger} - a_{\Lambda,p}^{(0)} a_{\Lambda,-p}^{(0)} \right), \quad (5.2.4)$$

と読み取れる.

生成消滅演算子のスケール則は式 (5.2.4) から

$$a_{+,\Lambda}^{(0)}(p) = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda,p}}{\omega_{\Lambda_{UV},p}}} a_{+,\Lambda_{UV}}^{(0)}(p) \quad (5.2.5)$$

$$a_{-,\Lambda}^{(0)}(p) = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} a_{-,\Lambda_{UV}}^{(0)}(p) \quad (5.2.6)$$

と計算できる.

誤り訂正条件は以下のように計算できる:

$$\begin{aligned} & \Lambda_{UV} \langle r' f_0 | D_\Lambda[g] | r f_0 \rangle_{\Lambda_{UV}} \\ &= \Lambda_{UV} \langle r' f_0 | \exp \left[\int_p g(-p) a_{-,\Lambda}^{(0)}(p) \right] | r f_0 \rangle_{\Lambda_{UV}} \\ &= \Lambda_{UV} \langle r' f_0 | \exp \left[\int_p g(-p) \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} a_{-,\Lambda_{UV}}^{(0)}(p) \right] | r f_0 \rangle_{\Lambda_{UV}} \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int_p \left(-2(r-r') \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} g(-p) f_0(p) + \frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}} |g(p)|^2 \right) \right] \\ & \quad \cdot \Lambda_{UV} \langle r' f_0 | r f_0 \rangle_{\Lambda_{UV}} \cdot \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

IR 極限 $\Lambda \ll m$ をとると, $\omega_{\Lambda,p} \gg \omega_{\Lambda_{UV},p}$ となるため, 式 (5.2.7) の指数部分は十分小さくなる. よって, $\int_p |f_0(p)|^2$ が十分大きいとき, 近似的な誤り訂正条件

$$\Lambda_{UV} \langle r' f_0 | D_\Lambda[g] | r f_0 \rangle_{\Lambda_{UV}} \sim \Lambda_{UV} \langle r' f_0 | r f_0 \rangle_{\Lambda_{UV}} \quad (5.2.8)$$

を得る^{*2} ^{*3}. よって自由場の場合に, IR スケール近傍で定義されたエラー $\{D_\Lambda[g]\}$ に対して, UV スケールで定義された符号部分空間 $\text{span}(\{|r f_0\rangle_{\Lambda_{UV}}\})$ が耐性をもつことが示された. 一方, IR スケールにおけるエラーは IR スケールで定義されたコヒーレント状態に対して耐性をもたないことが示せる. IR スケール近傍におけるエラーに対して, コヒーレント状態を UV スケールにフローさせることで符号化が実現しているのである.

^{*2} 近似的誤り訂正条件 (2.6.5) は直交基底に対して成り立つ式であるが, 一般に非直交基底を用いると (5.2.8) のように拡張できる.

^{*3} $\int_p |f_0(p)|^2 \rightarrow \infty$ のとき, $\Lambda_{UV} \langle r' f_0 | r f_0 \rangle_{\Lambda_{UV}} \rightarrow \delta_{rr'}$ となり, この場合誤り訂正条件は IR 極限をとらずとも厳密に成立する. これは自由場のみの性質である.

5.3 摂動論

4.4 節で導入した ϕ^4 理論の摂動一次で誤り訂正条件が成り立つことを示す。波動関数の摂動一次の項を

$$\Psi_{\Lambda}^{(1)} = A_{\Lambda} \Psi_{\Lambda}^{(0)} \quad (5.3.1)$$

と置く。ERG 方程式 (4.3.5) の摂動解 (4.4.20) より、

$$\begin{aligned} A_{\Lambda} = & -\frac{\lambda}{4!} \int_{k_1, \dots, k_4} \frac{\tilde{\delta}(k_1 + \dots + k_4)}{\omega_{\Lambda, k_1} + \dots + \omega_{\Lambda, k_4}} \prod_{i=1}^4 \sqrt{\frac{K_{k_i}}{2\omega_{\Lambda, k_i}}} a_{\Lambda, k_i}^{\dagger} \\ & - \left(\frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_p \frac{6K_p}{2\omega_{\Lambda, p}} \right) \int_k \frac{1}{2\omega_{\Lambda, k}} \frac{K_k}{2\omega_{\Lambda, k}} a_{\Lambda, k}^{\dagger} a_{\Lambda, -k}^{\dagger} \\ & - (\text{Hermitian conjugate}) . \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

である。 A_{Λ} は反 Hermite 演算子である。式 (5.1.9) を展開すると、

$$-\Lambda \partial_{\Lambda} \Psi_{\Lambda}^{(0)} = X_{\Lambda}^{(0)} \Psi_{\Lambda}^{(0)} , \quad (5.3.3)$$

$$-\Lambda \partial_{\Lambda} \Psi_{\Lambda}^{(1)} = X_{\Lambda}^{(0)} \Psi_{\Lambda}^{(1)} + X_{\Lambda}^{(1)} \Psi_{\Lambda}^{(0)} . \quad (5.3.4)$$

となる。式 (5.3.1), (5.3.3) を式 (5.3.4) に代入することで、

$$-\Lambda \partial_{\Lambda} A_{\Lambda} = X_{\Lambda}^{(1)} + [X_{\Lambda}^{(0)}, A_{\Lambda}] . \quad (5.3.5)$$

を得る。

式 (5.1.12) より、生成消滅演算子のスケール則を以下のように計算できる：

$$-\Lambda \partial_{\Lambda} a_{\Lambda, p}^{(0)} = [X_{\Lambda}^{(0)}, a_{\Lambda, p}^{(0)}] , \quad (5.3.6)$$

$$-\Lambda \partial_{\Lambda} a_{\Lambda, p}^{(1)} = [X_{\Lambda}^{(1)}, a_{\Lambda, p}^{(0)}] + [X_{\Lambda}^{(0)}, a_{\Lambda, p}^{(1)}] . \quad (5.3.7)$$

また、以下の関係が示せる：

$$a_{\Lambda, p}^{(1)} = [A_{\Lambda}, a_{\Lambda, p}^{(0)}] . \quad (5.3.8)$$

次に、エラー演算子

$$D_{\Lambda}[g] = \exp \left[\int_p g(-p) a_{-, \Lambda}(p) \right] \quad (5.3.9)$$

$$= \exp \left[\int_p g(-p) \left(a_{-, \Lambda}^{(0)}(p) + \alpha a_{-, \Lambda}^{(1)}(p) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) \right] \quad (5.3.10)$$

を計算する.

以下では, 4.5 節と同様の略記 $\omega_{\Lambda, p_i} = \omega_{\Lambda, i}$, $K_{p_i} = K_i$ を用いる. $a_{-, \Lambda}^{(1)}(p)$ は $a_{-, \Lambda}^{(0)}(p)$ を用いると, 以下のように書ける:

$$\begin{aligned}
a_{-, \Lambda}^{(1)}(p) = & -\frac{\lambda}{4!} \int_{k_1 k_2 k_3} \left(\prod_{i=1}^3 \sqrt{\frac{K_i}{2\omega_{\Lambda, i}}} \right) \sqrt{\left(\frac{K_p}{2\omega_{\Lambda, p}} \right)} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda, 1} \omega_{\Lambda, 2} \omega_{\Lambda, 3}}{\omega_{\Lambda_{UV}, 1} \omega_{\Lambda_{UV}, 2} \omega_{\Lambda_{UV}, 3}}} \\
& \times a_{+, \Lambda_{UV}}^{(0)}(-k_1) a_{+, \Lambda_{UV}}^{(0)}(-k_2) a_{+, \Lambda_{UV}}^{(0)}(-k_3) \\
& - \frac{\lambda}{8} \int_{k_1 k_2 k_3} \left(\prod_{i=1}^3 \sqrt{\frac{K_i}{2\omega_{\Lambda, i}}} \right) \sqrt{\left(\frac{K_p}{2\omega_{\Lambda, p}} \right)} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda, 1} \omega_{\Lambda, 2}}{\omega_{\Lambda_{UV}, 1} \omega_{\Lambda_{UV}, 2}}} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, 3}}{\omega_{\Lambda, 3}}} \\
& \times a_{+, \Lambda_{UV}}^{(0)}(-k_1) a_{+, \Lambda_{UV}}^{(0)}(-k_2) a_{+, \Lambda_{UV}}^{(0)}(-k_3) \\
& - \frac{\lambda}{4} \int_k \frac{1}{2\omega_{\Lambda, p} + 2\omega_{\Lambda, k}} \frac{K_p}{2\omega_{\Lambda, p}} \frac{K_k}{2\omega_{\Lambda, k}} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda, p}}{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}} a_{+, \Lambda_{UV}}^{(0)}(p) \\
& - \left(\frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_q \frac{6K_q}{2\omega_{\Lambda, q}} \right) \frac{K_p}{2\omega_{\Lambda, p}^2} a_{-, \Lambda_{UV}}^{(0)}(p). \tag{5.3.11}
\end{aligned}$$

次に, $a_{-, \Lambda}$ が $a_{\pm, \Lambda_{UV}}^{(0)}$ で表せることを考慮し, 以下のように書く:

$$\begin{aligned}
a_{-, \Lambda}(p) & \sim a_{-, \Lambda}^{(0)}(p) + \alpha a_{-, \Lambda}^{(1)}\left(p; a_{+, \Lambda}^{(0)}, a_{+, \Lambda}^{(0)}\right) \\
& = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} a_{-, \Lambda_{UV}}^{(0)}(p) + \alpha a_{-, \Lambda}^{(1)}\left(p; \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda, p}}{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}} a_{+, \Lambda_{UV}}^{(0)}, \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} a_{-, \Lambda_{UV}}^{(0)}\right). \tag{5.3.12}
\end{aligned}$$

ここで, $a_{-, \Lambda_{UV}}^{(0)} = a_{-, \Lambda_{UV}} - \alpha a_{-, \Lambda_{UV}}^{(1)}$ であることと, 摂動一次の範囲で第二項の $a_{-, u}^{(1)}$ において $a^{(0)}$ を a に置き換えてもよいことを用いると,

$$\begin{aligned}
a_{-, \Lambda}(p) & \sim \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} \left\{ a_{-, \Lambda_{UV}}(p) - \alpha a_{-, 0}^{(1)}\left(p; a_{+, \Lambda_{UV}}^{(0)}, a_{-, \Lambda_{UV}}^{(0)}\right) \right\} \\
& + \alpha a_{-, u}^{(1)}\left(p; \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda, p}}{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}} a_{+, \Lambda_{UV}}^{(0)}, \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} a_{-, \Lambda_{UV}}^{(0)}\right) \\
& = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} a_{-, \Lambda_{UV}}(p) + \alpha \left\{ a_{-, \Lambda}^{(1)}\left(p; \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda, p}}{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}} a_{+, \Lambda_{UV}}, \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} a_{-, \Lambda_{UV}}\right) \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} a_{-, \Lambda_{UV}}^{(1)}\left(p; a_{+, \Lambda_{UV}}, a_{-, \Lambda_{UV}}\right) \right\} \tag{5.3.13}
\end{aligned}$$

と表せる.

第二項を評価すると、以下を得る：

$$\begin{aligned}
& a_{-, \Lambda}^{(1)} \left(p; \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda, p}}{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}} a_{+, \Lambda_{UV}}, \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} a_{-, \Lambda_{UV}} \right) - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} a_{-, \Lambda_{UV}}^{(1)} (p; a_{+, \Lambda_{UV}}, a_{-, \Lambda_{UV}}) \\
&= -\frac{\lambda}{4!} \int_{k_1 k_2 k_3} \frac{\tilde{\delta}(k_1 + \cdots + p)}{\omega_{\Lambda, 1} + \cdots + \omega_{\Lambda, p}} \left(\prod_{i=1}^3 \sqrt{\frac{K_i}{2\omega_{u, i}}} \right) \sqrt{\frac{K_p}{2\omega_{\Lambda, p}}} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, 1} \omega_{\Lambda_{UV}, 2} \omega_{\Lambda_{UV}, 3}}{\omega_{\Lambda, 1} \omega_{\Lambda, 2} \omega_{\Lambda, 3}}} \\
&\quad \times a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_1) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_2) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_3) \\
&\quad - \frac{\lambda}{8} \int_{k_1 k_2 k_3} \frac{\tilde{\delta}(k_1 + \cdots + p)}{\omega_{\Lambda, 1} + \cdots + \omega_{\Lambda, p}} \left(\prod_{i=1}^3 \sqrt{\frac{K_i}{2\omega_{u, i}}} \right) \sqrt{\frac{K_p}{2\omega_{\Lambda, p}}} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda, 1} \omega_{\Lambda, 2}}{\omega_{\Lambda_{UV}, 1} \omega_{\Lambda_{UV}, 2}}} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, 3}}{\omega_{\Lambda, 3}}} \\
&\quad \times a_{+, \Lambda_{UV}}(-k_1) a_{+, \Lambda_{UV}}(-k_2) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_3) \\
&\quad - \frac{\lambda}{4} \int_k \frac{1}{2\omega_{\Lambda, p} + 2\omega_{u, k}} \frac{K_p}{2\omega_{\Lambda, p}} \frac{K_k}{2\omega_{u, k}} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda, p}}{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}} a_{+, \Lambda_{UV}}(p) \\
&\quad - \left(\frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_q \frac{6K_q}{2\omega_{\Lambda, q}} \right) \frac{K_p}{2\omega_{u, p}^2} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} a_{-, \Lambda_{UV}}(p) \\
&\quad - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} \left[-\frac{\lambda}{4!} \int_{k_1 k_2 k_3} \frac{\tilde{\delta}(k_1 + \cdots + p)}{\omega_{\Lambda_{UV}, 1} + \cdots + \omega_{\Lambda_{UV}, p}} \left(\prod_{i=1}^3 \sqrt{\frac{K_i}{2\omega_{\Lambda_{UV}, i}}} \right) \sqrt{\frac{K_p}{2\omega_{\Lambda_{UV}, p}}} \right. \\
&\quad \times a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_1) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_2) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_3) \\
&\quad - \frac{\lambda}{8} \int_{k_1, k_2, k_3} \frac{\tilde{\delta}(k_1 + \cdots + p)}{\omega_{\Lambda_{UV}, 1} + \cdots + \omega_{\Lambda_{UV}, p}} \left(\prod_{i=1}^3 \sqrt{\frac{K_i}{2\omega_{\Lambda_{UV}, i}}} \right) \sqrt{\frac{K_p}{2\omega_{\Lambda_{UV}, p}}} \\
&\quad \times a_{+, \Lambda_{UV}}(-k_1) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_2) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_3) \\
&\quad - \frac{\lambda}{4} \int_k \frac{1}{2\omega_{\Lambda_{UV}, p} + 2\omega_{\Lambda_{UV}, k}} \frac{K_p}{2\omega_{\Lambda_{UV}, p}} \frac{K_k}{2\omega_{\Lambda_{UV}, k}} a_{+, \Lambda_{UV}}(p) \\
&\quad \left. - \left(\frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_q \frac{6K_q}{2\omega_{\Lambda_{UV}, q}} \right) \frac{K_p}{2\omega_{0, p}^2} a_{-, \Lambda_{UV}}(p) \right] \\
&= -\frac{\lambda}{4!} \int_{k_1 k_2 k_3} C_1(k_1, k_2, k_3; p) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_1) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_2) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_3) \\
&\quad - \frac{\lambda}{8} \int_{k_1 k_2 k_3} C_2(k_1, k_2, k_3; p) a_{+, \Lambda_{UV}}(-k_1) a_{+, \Lambda_{UV}}(-k_2) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_3) \\
&\quad - \frac{\lambda}{4} \int_k C_3(k; p) a_{+, \Lambda_{UV}}(p) \\
&\quad - C_4(p) a_{-, \Lambda_{UV}}(p). \tag{5.3.14}
\end{aligned}$$

ここで, C_1, C_2, C_3, C_4 を以下のように定義した:

$$\begin{aligned}
& C_1(k_1, k_2, k_3; p) \\
&= \tilde{\delta}(k_1 + \cdots + p) \left(\frac{1}{\omega_{\Lambda,1} + \cdots + \omega_{\Lambda,p}} \left(\prod_{i=1}^3 \sqrt{\frac{K_i}{2\omega_{u,i}}} \right) \sqrt{\frac{K_p}{2\omega_{\Lambda,p}}} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},1}\omega_{\Lambda_{UV},2}\omega_{\Lambda_{UV},3}}{\omega_{\Lambda,1}\omega_{\Lambda,2}\omega_{\Lambda,3}}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\omega_{\Lambda_{UV},1} + \cdots + \omega_{\Lambda_{UV},p}} \left(\prod_{i=1}^3 \sqrt{\frac{K_i}{2\omega_{\Lambda_{UV},i}}} \right) \sqrt{\frac{K_p}{2\omega_{\Lambda_{UV},p}}} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} \right), \tag{5.3.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_2(k_1, k_2, k_3; p) \\
&= \tilde{\delta}(k_1 + \cdots + p) \left(\frac{1}{\omega_{\Lambda,1} + \cdots + \omega_{\Lambda,p}} \left(\prod_{i=1}^3 \sqrt{\frac{K_i}{2\omega_{u,i}}} \right) \sqrt{\frac{K_p}{2\omega_{\Lambda,p}}} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda,1}\omega_{\Lambda,2}}{\omega_{\Lambda_{UV},1}\omega_{\Lambda_{UV},2}}} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},3}}{\omega_{\Lambda,3}}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\omega_{\Lambda_{UV},1} + \cdots + \omega_{\Lambda_{UV},p}} \left(\prod_{i=1}^3 \sqrt{\frac{K_i}{2\omega_{\Lambda_{UV},i}}} \right) \sqrt{\frac{K_p}{2\omega_{\Lambda_{UV},p}}} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} \right), \tag{5.3.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_3(k; p) \\
&= \frac{1}{2\omega_{\Lambda,p} + 2\omega_{u,k}} \frac{K_p}{2\omega_{\Lambda,p}} \frac{K_k}{2\omega_{u,k}} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda,p}}{\omega_{\Lambda_{UV},p}}} - \frac{1}{2\omega_{\Lambda_{UV},p} + 2\omega_{\Lambda_{UV},k}} \frac{K_p}{2\omega_{\Lambda_{UV},p}} \frac{K_k}{2\omega_{\Lambda_{UV},k}} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}}, \tag{5.3.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_4(p) \\
&= \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} \left[\left(\frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_q \frac{6K_q}{2\omega_{\Lambda,q}} \right) \frac{K_p}{2\omega_{u,p}^2} - \left(\frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_q \frac{6K_q}{2\omega_{\Lambda_{UV},q}} \right) \frac{K_p}{2\omega_{0,p}^2} \right]. \tag{5.3.18}
\end{aligned}$$

これを用いると, エラー演算子 $D[g]$ は

$$D[g] = \exp \left[\int_p g(-p) a_{-,u}(p) \right] = \exp [X + \alpha Y], \tag{5.3.19}$$

と書ける．ここで，

$$X = \int_p g(-p) \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} a_{-, \Lambda_{UV}}(p), \quad (5.3.20)$$

$$\begin{aligned} Y &= \int_p g(-p) \left(a_{-,u}^{(1)} \left(p; \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda,p}}{\omega_{\Lambda_{UV},p}}} a_{+, \Lambda_{UV}}, \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} a_{-, \Lambda_{UV}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} a_{-,0}^{(1)} \left(p; a_{+, \Lambda_{UV}}, a_{-, \Lambda_{UV}} \right) \right) \\ &= \int_p g(-p) \left\{ -\frac{\lambda}{4!} \int_{k_1 k_2 k_3} C_1(k_1, k_2, k_3; p) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_1) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_2) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_3) \right. \\ &\quad - \frac{\lambda}{8} \int_{k_1 k_2 k_3} C_2(k_1, k_2, k_3; p) a_{+, \Lambda_{UV}}(-k_1) a_{+, \Lambda_{UV}}(-k_2) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_3) \\ &\quad - \frac{\lambda}{4} \int_k C_3(k; p) a_{+, \Lambda_{UV}}(p) \\ &\quad \left. - C_4(p) a_{-, \Lambda_{UV}}(p) \right\} \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

である．Baker-Campbell-Hausdorff 公式により，摂動一次の範囲で

$$D[g] = \exp[X + \alpha Y] = (1 + \alpha Z) e^X, \quad (5.3.22)$$

を得る． Z は以下で与えられる：

$$Z = Y + \frac{1}{2} [X, Y] - \frac{1}{12} [X, [X, Y]] . \quad (5.3.23)$$

交換子は以下のように計算できる：

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \int_{p, \ell} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} g(-p) g(-\ell) \\
&\times \left[a_{-, \Lambda_{UV}}(p), \right. \\
&\quad - \frac{\lambda}{4!} \int_{k_1 k_2 k_3} C_1(k_1, k_2, k_3; \ell) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_1) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_2) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_3) \\
&\quad - \frac{\lambda}{8} \int_{k_1 k_2 k_3} C_2(k_1, k_2, k_3; \ell) a_{+, \Lambda_{UV}}(-k_1) a_{+, \Lambda_{UV}}(-k_2) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_3) \\
&\quad - \frac{\lambda}{4} \int_k C_3(k; p) a_{+, \Lambda_{UV}}(p) \\
&\quad \left. - C_4(p) a_{-, \Lambda_{UV}}(p) \right]
\end{aligned} \tag{5.3.24}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\lambda}{2} \int_{p, \ell, k_2 k_3} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} g(-p) g(-\ell) C_2(p, k_2, k_3; \ell) a_{+, \Lambda_{UV}}(-k_2) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_3) \\
&\quad - \frac{\lambda}{2} \int_{p, k} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} g(-p) g(p) C_3(k; -p),
\end{aligned} \tag{5.3.25}$$

$$\begin{aligned}
[X, [X, Y]] &= \left[\left(\int_q g(-q) \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, q}}{\omega_{\Lambda, q}}} a_{-, \Lambda_{UV}}(q) \right), \right. \\
&\quad - \frac{\lambda}{2} \int_{p, \ell, k_2 k_3} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} g(-p) g(-\ell) C_2(p, k_2, k_3; \ell) \\
&\quad \times a_{+, \Lambda_{UV}}(-k_2) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k_3) \\
&\quad \left. - \frac{\lambda}{2} \int_{p, k} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} g(-p) g(p) C_3(k; -p) \right] \\
&= -\lambda \int_{p, q, \ell, k} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, q} \omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, q} \omega_{\Lambda, p}}} g(-p) g(-\ell) g(-q) C_2(p, q, k; \ell) a_{-, \Lambda_{UV}}(-k).
\end{aligned} \tag{5.3.26}$$

また、 $\left| r f_0 - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} g \right\rangle_{\Lambda_{UV}}$ を次のように定義する：

$$\left| r f_0 - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV}, p}}{\omega_{\Lambda, p}}} g \right\rangle_{\Lambda_{UV}} = e^X |r f_0\rangle_{\Lambda_{UV}}. \tag{5.3.27}$$

これと交換子の計算結果を用いて誤り訂正条件を計算すると、以下を得る：

$$\begin{aligned}
& \Lambda_{UV} \langle r' f_0 | D[g] | r f_0 \rangle_{\Lambda_{UV}} \\
&= \Lambda_{UV} \left\langle r' f_0 \left| r f_0 - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} g \right. \right\rangle_{\Lambda_{UV}} \\
&\quad + \alpha \Lambda_{UV} \left\langle r' f_0 \left| \left(Y + \frac{1}{2} [X, Y] - \frac{1}{12} [X, [X, Y]] \right) \left| r f_0 - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} g \right. \right. \right\rangle_{\Lambda_{UV}} \\
&= \Lambda_{UV} \left\langle r' f_0 \left| r f_0 - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} g \right. \right\rangle_{\Lambda_{UV}} \\
&\quad \times \left[1 + \alpha \left\{ -\frac{\lambda}{4!} \int_{p,k_1,k_2,k_3} g(-p) C_1(k_1, k_2, k_3; p) \right. \right. \\
&\quad \quad \times \left\{ (r - r')^3 f_0(-k_1) f_0(-k_2) f_0(-k_3) \right. \\
&\quad \quad \quad - 3(r - r')^2 \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},3}}{\omega_{\Lambda,3}}} f_0(-k_1) f_0(-k_2) g(-k_3) \\
&\quad \quad \quad + 3(r - r') \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},2\omega_{\Lambda_{UV},3}}}{\omega_{\Lambda,2}\omega_{\Lambda,3}}} f_0(-k_1) g(-k_2) g(-k_3) \\
&\quad \quad \quad \left. \left. - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},1}}{\omega_{\Lambda,1}}} g(-k_1) \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},2}}{\omega_{\Lambda,2}}} g(-k_2) \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},3}}{\omega_{\Lambda,3}}} g(-k_3) \right\} \right. \\
&\quad + \frac{\lambda}{8} \int_{p,k_1,k_2} g(-p) C_1(k_1, k_2, -k_1 - k_2; p) \left\{ (r - r') f_0(-k_2) - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},2}}{\omega_{\Lambda,2}}} g(-k_2) \right\} \\
&\quad - \frac{\lambda}{8} \int_{p,k_1,k_2,k_3} g(-p) C_2(k_1, k_2, k_3; p) \left\{ (r - r')(r^2 + r'^2) f_0(-k_1) f_0(-k_2) f_0(-k_3) \right. \\
&\quad \quad - 2(r^2 - r'^2) \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},1}}{\omega_{\Lambda,1}}} g(-k_1) f_0(-k_2) f_0(-k_3) \\
&\quad \quad - (r + r')^2 \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},3}}{\omega_{\Lambda,3}}} f_0(-k_1) f_0(-k_2) g(-k_3) \\
&\quad \quad + 2(r + r') \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},2\omega_{\Lambda_{UV},3}}}{\omega_{\Lambda,2}\omega_{\Lambda,3}}} f_0(-k_1) g(-k_2) g(-k_3) \\
&\quad \quad + (r - r') \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},1\omega_{\Lambda_{UV},2}}}{\omega_{\Lambda,1}\omega_{\Lambda,2}}} g(-k_1) g(-k_2) f_0(-k_3) \\
&\quad \quad \left. \left. - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},1\omega_{\Lambda_{UV},2\omega_{\Lambda_{UV},3}}}}{\omega_{\Lambda,1}\omega_{\Lambda,2}\omega_{\Lambda,3}}} g(-k_1) g(-k_2) g(-k_3) \right\} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{4} \int_{p,k_1,k_2,k_3} g(-p) C_2(k_1, k_2, -k_1 - k_2; p) \left\{ (r + r') f_0(-k_2) - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},2}}{\omega_{\Lambda,2}}} g(-k_2) \right\} \\
& - \frac{\lambda}{8} \int_{p,k_1,k_2,k_3} g(-p) C_2(k_1, -k_1, k_3; p) \left\{ (r - r') f_0(-k_3) - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},3}}{\omega_{\Lambda,3}}} g(-k_3) \right\} \\
& - \frac{\lambda}{4} \int_{p,k} g(-p) C_3(k; p) \left\{ (r + r') f_0(p) - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} g(p) \right\} \\
& - \int_p g(-p) C_4(p) \left\{ (r - r') f_0(p) - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} g(p) \right\} \\
& - \frac{\lambda}{4} \int_{p,l,k_2,k_3} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} g(-p) g(-l) C_2(p, k_2; k_3, l) \\
& \times \left\{ (r^2 - r'^2) f_0(-k_2) f_0(-k_3) - (r + r') \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},3}}{\omega_{\Lambda,3}}} f_0(-k_2) g(-k_3) \right. \\
& \quad \left. - (r - r') \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},2}}{\omega_{\Lambda,2}}} f_0(-k_3) g(-k_2) + \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},2} \omega_{\Lambda_{UV},3}}{\omega_{\Lambda,2} \omega_{\Lambda,3}}} g(-k_2) g(-k_3) \right\} \\
& + \frac{\lambda}{12} \int_{p,q,\ell,k} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},q} \omega_{\Lambda_{UV},p}}{\omega_{\Lambda,q} \omega_{\Lambda,p}}} g(-p) g(-\ell) g(-q) C_2(p, q; k, \ell) \\
& \times \left\{ (r - r') f_0(-k) - \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_{UV},k}}{\omega_{\Lambda,k}}} g(-k) \right\} \left. \right\}. \tag{5.3.28}
\end{aligned}$$

IR 極限をとることで、 C_1, C_2, C_3, C_4 の項は無視できる。以上から、誤り訂正条件

$${}_{\Lambda_{UV}} \langle r' f_0 | D[g] | r f_0 \rangle_{\Lambda_{UV}} \sim {}_{\Lambda_{UV}} \langle r' f_0 | r f_0 \rangle_{\Lambda_{UV}} \tag{5.3.29}$$

を得る。これは、摂動一次においても、コヒーレント状態の IR から UV への繰り込み群のフローによって符号化が実現していることを意味する。

5.4 繰り込み群と量子誤り訂正 結論と展望

本章では、自由スカラー場と ϕ^4 理論の摂動一次について、繰り込み群の逆のフローにより、コヒーレント演算子に対して耐性をもつような符号化が実現することを示した。つまり、4 章で構築した連続テンソルネットワークは、摂動論の範囲で量子誤り訂正の性質をもつと言える。

今後の課題は、より一般の状態に対して同様に繰り込み群のフローによって量子誤り訂正符号を構成することである。また、非摂動論を扱うことで、我々が構築した連続テンソルネットワークが非摂動論においても量子誤り訂正の性質をもつことを示したい。最近では、厳密繰り込み群の逆のフローとベイズ推定が対応するという議論 [68, 69] や、機械学

習における拡散モデルとの対応の議論 [70] がされている. このような幅広い分野との関連性, ないし普遍性に着目することで, 量子誤り訂正と繰り込み群の関係のより一般的な理解が得られると考えられる.

第 6 章

結論

6.1 まとめ

本論文では, AdS/CFT 対応において境界理論からバルク重力をテンソルネットワークによって記述するための我々の研究について述べた. AdS/CFT 対応の性質のうち,

- 笠-高柳公式 (ホログラフィックエンタングルメントエントロピー公式)
- 繰り込み群の構造
- 量子誤り訂正符号

に着目した. 今までにはそれぞれが部分的な理解にとどまるという問題と, 扱われている系の多くがトイモデルという問題があった. これらを統一的に理解し, トイモデルから脱却してゲージ理論を扱うため, テンソルネットワークの枠組みを骨子とした.

まず, ゲージ理論をテンソルネットワークで直接扱うべく, 3 章で, 一般のゲージ理論に対してテンソルネットワーク表示を行う定式化である試行作用を用いる方法を提案した [8, 9]. さらにこのテンソルネットワーク表示を用いて, テンソル繰り込み群によって 3 次元 SU(2) ゲージ理論を解析した. 3 次元以上の非可換ゲージ理論への TRG の適用は本研究が初である. 自由エネルギーの解析結果は, 強結合展開と弱結合展開から得られる結果と整合した. 現在取りうるボンド次元において, 中間領域で収束する結果は得られなかった. この問題はアルゴリズムの改良による, より大きいボンド次元での計算や, 試行作用の関数形の最適化によって解決すると思われる. この研究は AdS/CFT 対応において重要なゲージ理論を直接扱うという点において意義がある. 将来的には, テンソル繰り込み群によって数値的に創発する時空の記述へと至ることが期待される. 波及効果としては, 有限密度 QCD への応用が考えられる. 現状では, スカラー場とフェルミオン場につ

いて 4 次元系での解析が行われている。非可換ゲージ場の 3 次元での解析に成功したことから、本研究有限密度 QCD の第一原理計算に向けた一歩となったと言える。

次に、4 章では、厳密繰り込み群から連続テンソルネットワークを構築するという我々の研究 [10] について述べた。一般の相互作用を持つ任意次元のスカラー場理論において、波動汎関数のスケール依存性を表す ERG 方程式を導いた。バルクの方向が繰り込み群のスケールを表すことから、この方程式が、AdS/CFT 対応を記述する連続テンソルネットワークを定義していると解釈される。今の場合、境界理論としてスカラー場を考えていることに相当する。さらに、この ERG 方程式の整合性を ϕ^4 理論の摂動一次の範囲で確認した。

5 章では、繰り込み群と量子誤り訂正との関係についての我々の研究 [11] について述べた。4 章で導いた厳密繰り込み群方程式の ϕ^4 理論における摂動一次の解を用いて、コヒーレント状態を考えて繰り込み群の逆のフローにより、誤り訂正条件を導くことを示した。符号部分空間は UV スケールで定義されたコヒーレント状態を考え、エラー演算子は IR スケールの近傍で定義されたコヒーレント演算子である。IR でのエラー演算子は IR の状態においては訂正できない。繰り込み群で状態を UV にフローさせることにより、IR でのエラー演算子が UV での符号部分空間について誤り訂正条件を満たす。これは、摂動的スカラー場理論において繰り込み群の逆のフローにより、量子誤り訂正符号を構成する例を示したものである。

6.2 展望

以上のように、ゲージ理論とテンソルネットワーク、繰り込み群、量子誤り訂正との関係を議論した。展望としては、まずテンソル繰り込み群を高次元、高ランクのゲージ理論に適用することが挙げられる。我々が提案した手法をより改良してより一般のゲージ理論を扱うことで、より一般の境界理論を第一原理計算により解析し、数値的アプローチにより時空創発を記述できることが期待される。

さらには、厳密繰り込み群に基づく連続テンソルネットワークについて解の構造を議論することで、エンタングルメント構造を調べる必要がある。笠-高柳公式の構造が見出だせれば、我々のネットワークが AdS/CFT 対応を記述することが示せると考えられる。さらには、より直接的に時空の計量が議論できると期待される。解が得られれば異なるスケール同士の状態の内積により、Fisher 計量が計算できる。このような情報計量からバルク時空が AdS 時空や、漸近的 AdS 時空が導けると考えられる。

繰り込み群と誤り訂正との関係については、現状では本論文で扱ったのはコヒーレント

状態であるため、AdS/CFT 対応との関係が明快でない。そこで、CFT 状態を議論したいと考えている。さらにここで扱ったのは摂動論であるため、非摂動論への拡張も展望である。拡張ができれば、厳密繰り込み群に基づく連続テンソルネットワークが量子誤り訂正としての性質をもつことが示されたことになる。このネットワークが実際にバルク再構成を記述することが示唆されると考えられる。さらに、5 章の議論より、将来的には繰り込み群の枠組みで量子誤り訂正理論の構築ができると考えられる。

これらの研究により、AdS/CFT 対応の性質を備えた離散/連続テンソルネットワークにより、将来的に境界のゲージ理論からバルクの幾何を記述することが展望である。連続テンソルネットワークは連続幾何を直接扱える。一方、離散ネットワークでは数値計算による第一原理計算が可能である。これらの利点を活かして離散 (数値計算)/連続 (解析) の両輪でアプローチすることで、AdS/CFT 対応のメカニズム解明に一步踏み出すことが期待できる。

付録 A

3次元 SU(2) ゲージ理論の初期テンソル構成方法

3章で用いたテンソル繰り込み群における初期テンソル構成法の詳細を示す。3.4.3節で導入したように、それぞれボンド次元 K をもつ三つの A テンソル $\{A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}\}$ と、三つの B テンソルがある。これら六つのテンソルから6階初期テンソル T を厳密に構成すると、メモリコストは $\mathcal{O}((K^2)^6)$ となる。この高コストを抑えるため、アイソメトリーを導入して初期テンソルのボンド次元を K^2 から D に落とす。図 A.1 に示すように、Higher-order TRG [31] の適用によりアイソメトリーを計算してボンド間に挿入し、 x, y, z 方向をそれぞれ粗視化する。

まず、 x 方向にアイソメトリーを導入するため、実行列 $M \equiv A^{(0)} \otimes A^{(1)} \otimes B$ を高次特異値分解 (higher-order singular value decomposition) する。 M は“行”が図 A.2 に示すように、 $A^{(0)}$ と $A^{(2)}$ の右側の添字から構成され、“列”はその他の添字から構成される。

次に、Hermite 行列 MM^\dagger を計算し、

$$MM^\dagger = U_R \Lambda_R (U_R)^\dagger \quad (\text{A.1})$$

として MM^\dagger の正準変換を行う。ここで Λ_R は、対角要素が MM^\dagger の固有値である対角行列である。同様にして図 A.1 の左側の添字を“行”として扱う行列から、 U_L を得る。 U_R と U_L の切断誤差 ϵ_R と ϵ_L は以下のように評価できる：

$$\epsilon_{R(L)} = \sum_{i>D} (\Lambda_{R(L)})_{ii} . \quad (\text{A.2})$$

U_R と U_L の間で切断誤差が小さい方を U_x として採用する。 y 方向および z 方向の U_y

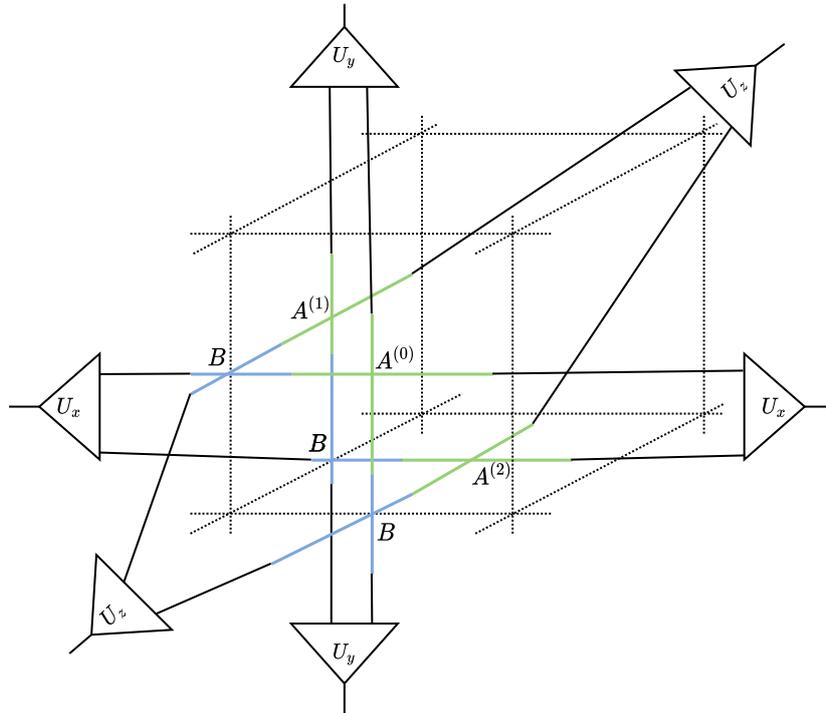


図 A.1 x, y, z 方向に対するアイソメトリー U_x, U_y, U_z .

および U_z も同様にして計算できる. y 方向については $M = A^{(0)} \otimes A^{(1)} \otimes B$ を使い, z 方向については $M = A^{(1)} \otimes A^{(2)} \otimes B$ を用いて各方向のアイソメトリーが得られる. 最後に, 図 A.1 に示すように, $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, B, B, B, U_x, U_y, U_z$ を縮約することで, ボンド次元が D の 6 階初期テンソル T を得る. テンソル繰り込み群の打ち切りボンド次元は, 初期テンソルの打ち切りボンド次元と同じ値 D を用いる.

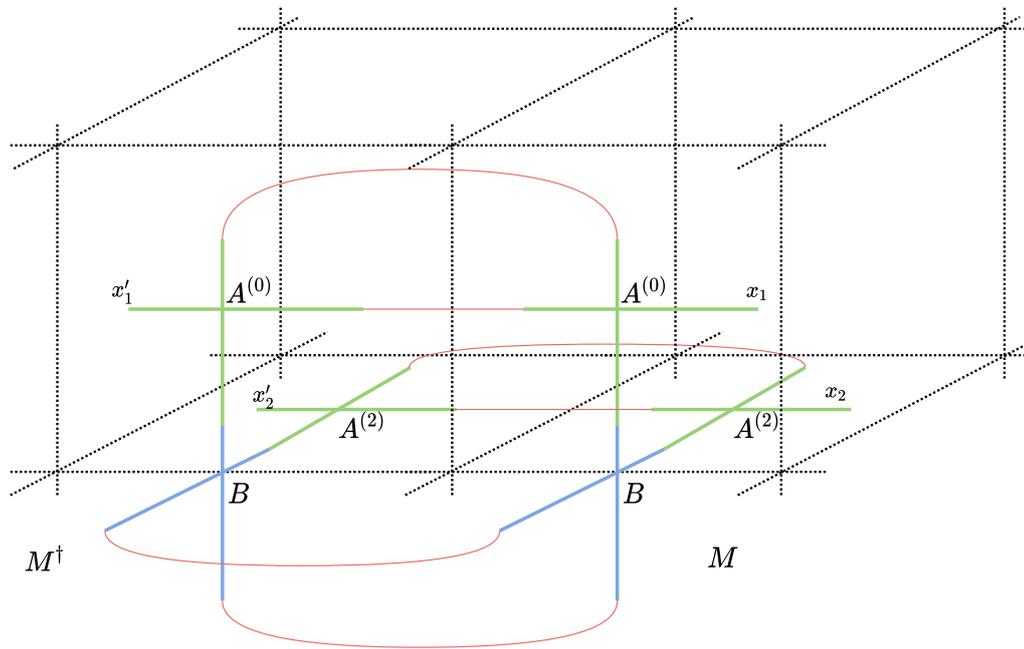


図 A.2 x 方向に対する粗視化. $A^{(0)}$ と $A^{(2)}$ の添字 (x_1, x_2) を行列 M の行として扱い, 残りの添字は列として扱う. 赤い線で表した縮約を行い, MM^\dagger を計算する.

付録 B

δm^2 のフロー方程式

δm^2 のフロー方程式を, Polchinski 方程式 (4.3.7) から摂動一次の範囲で導く. C_Λ の定義 (4.3.31) を用いると, Polchinski 方程式 (4.3.7) は

$$-\Lambda \frac{\partial S_{\text{int}}}{\partial \Lambda} = -\frac{1}{2} \int_p \frac{\dot{K}_{\vec{p}}}{2\omega_{\vec{p}}} \left(\frac{\delta^2 S_{\text{int}}}{\delta\phi(p)\delta\phi(-p)} - \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta\phi(p)} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta\phi(-p)} \right). \quad (\text{B.1})$$

と書ける. S_{int} は式 (4.4.5) より,

$$S_{\text{int}} = \frac{\delta m^2}{2} \int_k \phi(k)\phi(-k) + \frac{\lambda}{4!} \int_{k_i} (2\pi)^{d+1} \delta(\Sigma_{i=1}^4 k_i) \prod_{i=1}^4 \phi(k_i). \quad (\text{B.2})$$

と読み取れる. 式 (B.2) を Polchinski 方程式 (B.1) に代入し, ϕ^2 項に着目すると, 式 (B.1) の左辺は

$$\frac{\delta \dot{m}^2}{2} \int_k \phi(k)\phi(-k) \quad (\text{B.3})$$

となり, 右辺からは

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_p \frac{\dot{K}_{\vec{p}}}{2\omega_{\vec{p}}} \frac{\delta^2}{\delta\phi(p)\delta\phi(-p)} \left\{ \frac{\lambda}{4!} \int_{k_i} (2\pi)^{d+1} \delta(\Sigma_{i=1}^4 k_i) \prod_{i=1}^4 \phi(k_i) \right\} \\ & = -\frac{\lambda}{4} \int_k \frac{\dot{K}_{\vec{p}}}{2\omega_{\vec{k}}} \phi(k)\phi(-k) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

を得る. 式 (B.1) の第二項からは, λ よりも大きいオーダーの項が出るため, 摂動一次では効かない. よって, 式 (B.3), (B.4) より, λ の一次までの δm^2 のフロー方程式は

$$\frac{\delta \dot{m}^2}{2} = -\frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}} \frac{6\dot{K}_{\vec{p}}}{2\omega_{\vec{p}}} \quad (\text{B.5})$$

と得られる.

謝辞

本博士論文に関わった全ての人々に感謝する。特に、指導教官であり共同研究者である土屋麻人教授には、常日頃から親身に指導、助言いただき、熱心に議論に付き合っていたことに深く感謝する。共同研究者である山代和志氏、田中豪太氏、那須亮太氏に感謝する。ゼミなどで議論を共にした研究室のメンバーに感謝する。また、本研究の数値計算は名古屋大学のスーパーコンピュータ「不老」を利用して実施した。最後に、私を支えてくれた家族に感謝する。

参考文献

- [1] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity”, *Int. J. Theor. Phys.*, **38**, 1113–1133 (1999), hep-th/9711200.
- [2] S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT”, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 181602 (2006), hep-th/0603001.
- [3] G. Vidal, “Entanglement Renormalization”, *Phys. Rev. Lett.*, **99**(22), 220405 (2007), cond-mat/0512165.
- [4] B. Swingle, “Entanglement Renormalization and Holography”, *Phys. Rev. D*, **86**, 065007 (2012), arXiv:0905.1317.
- [5] A. Almheiri, X. Dong, and D. Harlow, “Bulk Locality and Quantum Error Correction in AdS/CFT”, *JHEP*, **04**, 163 (2015), arXiv:1411.7041.
- [6] F. Pastawski, B. Yoshida, D. Harlow, and J. Preskill, “Holographic quantum error-correcting codes: Toy models for the bulk/boundary correspondence”, *JHEP*, **06**, 149 (2015), arXiv:1503.06237.
- [7] P. Hayden, S. Nezami, X.-L. Qi, N. Thomas, M. Walter, and Z. Yang, “Holographic duality from random tensor networks”, *JHEP*, **11**, 009 (2016), arXiv:1601.01694.
- [8] T. Kuwahara and A. Tsuchiya, “Toward tensor renormalization group study of three-dimensional non-Abelian gauge theory”, *PTEP*, **2022**(9), 093B02 (2022), arXiv:2205.08883.
- [9] T. Kuwahara and A. Tsuchiya, “Toward tensor renormalization group study of three-dimensional non-Abelian gauge theory”, *PoS, LATTICE2022*, 021 (2023).
- [10] T. Kuwahara, G. Tanaka, A. Tsuchiya, and K. Yamashiro, “Exact renormalization group for wave functionals”, *PTEP*, **2023**(3), 033B03 (2023),

- arXiv:2211.05534.
- [11] T. Kuwahara, R. Nasu, G. Tanaka, and A. Tsuchiya, “Quantum error correction realized by the renormalization group in scalar field theories” (1 2024), arXiv:2401.17795.
 - [12] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy”, *Phys. Rev. D*, **7**, 2333–2346 (1973).
 - [13] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes”, *Commun. Math. Phys.*, **43**, 199–220, [Erratum: *Commun. Math. Phys.* 46, 206 (1976)] (1975).
 - [14] S. R. White, “Density matrix formulation for quantum renormalization groups”, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 2863–2866 (1992).
 - [15] M. Levin and C. P. Nave, “Tensor renormalization group approach to 2D classical lattice models”, *Phys. Rev. Lett.*, **99**(12), 120601 (2007), cond-mat/0611687.
 - [16] Z.-C. Gu and X.-G. Wen, “Tensor-entanglement-filtering renormalization approach and symmetry-protected topological order”, *Physical Review B*, **80**(15) (October 2009).
 - [17] T. Kennedy and S. Rychkov, “Tensor RG Approach to High-Temperature Fixed Point”, *J. Statist. Phys.*, **187**(3), 33 (2022), arXiv:2107.11464.
 - [18] T. Kennedy and S. Rychkov, “Tensor Renormalization Group at Low Temperatures: Discontinuity Fixed Point” (10 2022), arXiv:2210.06669.
 - [19] X. Lyu, R. G. Xu, and N. Kawashima, “Scaling dimensions from linearized tensor renormalization group transformations”, *Phys. Rev. Res.*, **3**(2), 023048 (2021), arXiv:2102.08136.
 - [20] A. Ueda and M. Oshikawa, “Finite-size and finite bond dimension effects of tensor network renormalization”, *Physical Review B*, **108**(2) (July 2023).
 - [21] A. Ueda and M. Yamazaki, “Fixed-point tensor is a four-point function” (7 2023), arXiv:2307.02523.
 - [22] G. Evenbly and G. Vidal, “Tensor network renormalization”, *Phys. Rev. Lett.*, **115**, 180405 (Oct 2015).
 - [23] G. Evenbly and G. Vidal, “Tensor network renormalization yields the multi-scale entanglement renormalization ansatz”, *Physical Review Letters*, **115**(20) (November 2015).
 - [24] D. Harlow and D. Stanford, “Operator Dictionaries and Wave Functions in AdS/CFT and dS/CFT” (4 2011), arXiv:1104.2621.
 - [25] A. Hamilton, D. N. Kabat, G. Lifschytz, and D. A. Lowe, “Holographic represen-

- tation of local bulk operators”, Phys. Rev. D, **74**, 066009 (2006), hep-th/0606141.
- [26] E. Knill and R. Laflamme, “A Theory of quantum error correcting codes”, Phys. Rev. Lett., **84**, 2525–2528 (2000), quant-ph/9604034.
- [27] G. Parisi, “ON COMPLEX PROBABILITIES”, Phys. Lett. B, **131**, 393–395 (1983).
- [28] J. R. Klauder, “Coherent State Langevin Equations for Canonical Quantum Systems With Applications to the Quantized Hall Effect”, Phys. Rev. A, **29**, 2036–2047 (1984).
- [29] E. Witten, “Analytic Continuation Of Chern-Simons Theory”, AMS/IP Stud. Adv. Math., **50**, 347–446 (2011), arXiv:1001.2933.
- [30] Y. Liu, Y. Meurice, M. P. Qin, J. Unmuth-Yockey, T. Xiang, Z. Y. Xie, J. F. Yu, and H. Zou, “Exact Blocking Formulas for Spin and Gauge Models”, Phys. Rev. D, **88**, 056005 (2013), arXiv:1307.6543.
- [31] Z. Y. Xie, J. Chen, M. P. Qin, J. W. Zhu, L. P. Yang, and T. Xiang, “Coarse-graining renormalization by higher-order singular value decomposition”, Physical Review B, **86**(4) (jul 2012).
- [32] Y. Shimizu and Y. Kuramashi, “Grassmann tensor renormalization group approach to one-flavor lattice Schwinger model”, Phys. Rev. D, **90**(1), 014508 (2014), arXiv:1403.0642.
- [33] Y. Shimizu and Y. Kuramashi, “Critical behavior of the lattice Schwinger model with a topological term at $\theta = \pi$ using the Grassmann tensor renormalization group”, Phys. Rev. D, **90**(7), 074503 (2014), arXiv:1408.0897.
- [34] Y. Shimizu and Y. Kuramashi, “Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition in lattice Schwinger model with one flavor of Wilson fermion”, Phys. Rev. D, **97**(3), 034502 (2018), arXiv:1712.07808.
- [35] N. Butt, S. Catterall, Y. Meurice, R. Sakai, and J. Unmuth-Yockey, “Tensor network formulation of the massless Schwinger model with staggered fermions”, Phys. Rev. D, **101**(9), 094509 (2020), arXiv:1911.01285.
- [36] S. Takeda and Y. Yoshimura, “Grassmann tensor renormalization group for the one-flavor lattice Gross–Neveu model with finite chemical potential”, PTEP, **2015**(4), 043B01 (2015), arXiv:1412.7855.
- [37] S. Akiyama, Y. Kuramashi, T. Yamashita, and Y. Yoshimura, “Restoration of chiral symmetry in cold and dense Nambu–Jona-Lasinio model with tensor

- renormalization group”, *JHEP*, **01**, 121 (2021), arXiv:2009.11583.
- [38] D. Kadoh, Y. Kuramashi, Y. Nakamura, R. Sakai, S. Takeda, and Y. Yoshimura, “Tensor network analysis of critical coupling in two dimensional ϕ^4 theory”, *JHEP*, **05**, 184 (2019), arXiv:1811.12376.
- [39] D. Kadoh, Y. Kuramashi, Y. Nakamura, R. Sakai, S. Takeda, and Y. Yoshimura, “Investigation of complex ϕ^4 theory at finite density in two dimensions using TRG”, *JHEP*, **02**, 161 (2020), arXiv:1912.13092.
- [40] S. Akiyama, D. Kadoh, Y. Kuramashi, T. Yamashita, and Y. Yoshimura, “Tensor renormalization group approach to four-dimensional complex ϕ^4 theory at finite density”, *JHEP*, **09**, 177 (2020), arXiv:2005.04645.
- [41] S. Akiyama, Y. Kuramashi, and Y. Yoshimura, “Phase transition of four-dimensional lattice ϕ^4 theory with tensor renormalization group”, *Phys. Rev. D*, **104**(3), 034507 (2021), arXiv:2101.06953.
- [42] M. Asaduzzaman, S. Catterall, and J. Unmuth-Yockey, “Tensor network formulation of two dimensional gravity”, *Phys. Rev. D*, **102**(5), 054510 (2020), arXiv:1905.13061.
- [43] A. Bazavov, S. Catterall, R. G. Jha, and J. Unmuth-Yockey, “Tensor renormalization group study of the non-Abelian Higgs model in two dimensions”, *Phys. Rev. D*, **99**(11), 114507 (2019), arXiv:1901.11443.
- [44] M. Fukuma, D. Kadoh, and N. Matsumoto, “Tensor network approach to 2D Yang-Mills theories” (7 2021), arXiv:2107.14149.
- [45] M. Hirasawa, A. Matsumoto, J. Nishimura, and A. Yosprakob, “Tensor renormalization group and the volume independence in 2D $U(N)$ and $SU(N)$ gauge theories”, *JHEP*, **12**, 011 (2021), arXiv:2110.05800.
- [46] Y. Kuramashi and Y. Yoshimura, “Three-dimensional finite temperature \mathbb{Z}_2 gauge theory with tensor network scheme”, *JHEP*, **08**, 023 (2019), arXiv:1808.08025.
- [47] S. Akiyama and Y. Kuramashi, “Tensor renormalization group study of (3+1)-dimensional \mathbb{Z}_2 gauge-Higgs model at finite density”, *JHEP*, **05**, 102 (2022), arXiv:2202.10051.
- [48] S. Akiyama and Y. Kuramashi, “Critical endpoint of (3+1)-dimensional finite density \mathbb{Z}_3 gauge-Higgs model with tensor renormalization group”, *JHEP*, **10**, 077 (2023), arXiv:2304.07934.

-
- [49] D. Kadoh, Y. Kuramashi, Y. Nakamura, R. Sakai, S. Takeda, and Y. Yoshimura, “Tensor network formulation for two-dimensional lattice $\mathcal{N} = 1$ Wess-Zumino model”, JHEP, **03**, 141 (2018), arXiv:1801.04183.
- [50] H. Kawauchi and S. Takeda, “Tensor renormalization group analysis of CP(N-1) model”, Phys. Rev. D, **93**(11), 114503 (2016), arXiv:1603.09455.
- [51] S. Akiyama and D. Kadoh, “More about the Grassmann tensor renormalization group”, JHEP, **10**, 188 (2021), arXiv:2005.07570.
- [52] D. Adachi, T. Okubo, and S. Todo, “Anisotropic Tensor Renormalization Group”, Phys. Rev. B, **102**(5), 054432 (2020), arXiv:1906.02007.
- [53] D. Kadoh and K. Nakayama, “Renormalization group on a triad network” (12 2019), arXiv:1912.02414.
- [54] D. Kadoh, H. Oba, and S. Takeda, “Triad second renormalization group”, JHEP, **04**, 121 (2022), arXiv:2107.08769.
- [55] Y. Kuramashi and Y. Yoshimura, “Tensor renormalization group study of two-dimensional U(1) lattice gauge theory with a θ term”, JHEP, **04**, 089 (2020), arXiv:1911.06480.
- [56] X. Luo and Y. Kuramashi, “Tensor renormalization group approach to (1+1)-dimensional SU(2) principal chiral model at finite density”, Phys. Rev. D, **107**(9), 094509 (2023), arXiv:2208.13991.
- [57] E. Arai, H. Ohki, S. Takeda, and M. Tomii, “All-mode renormalization for tensor network with stochastic noise”, Phys. Rev. D, **107**(11), 114515 (2023), arXiv:2211.13107.
- [58] A. Yosprakob, “Reduced tensor network formulation for non-Abelian gauge theories in arbitrary dimensions” (11 2023), arXiv:2311.02541.
- [59] V. F. Muller and W. Ruhl, “Small Coupling (Low Temperature) Expansions of Gauge Field Models on a Lattice. Part 2. Expansions for the Gauge Group SU(2), the Regularization Problem of the Temporal Gauge Green’s Function” (5 1980).
- [60] M. Nozaki, S. Ryu, and T. Takayanagi, “Holographic Geometry of Entanglement Renormalization in Quantum Field Theories”, JHEP, **10**, 193 (2012), arXiv:1208.3469.
- [61] J. Polchinski, “Renormalization and Effective Lagrangians”, Nucl. Phys. B, **231**, 269–295 (1984).

-
- [62] B. Hatfield, *Quantum field theory of point particles and strings*, (CRC Press, 2018).
- [63] J. J. Fernandez-Melgarejo and J. Molina-Vilaplana, “The large N limit of icMERA and holography”, *JHEP*, **04**, 020 (2022), arXiv:2107.13248.
- [64] H. Sonoda and H. Suzuki, “Gradient flow exact renormalization group”, *PTEP*, **2021**(2), 023B05 (2021), arXiv:2012.03568.
- [65] K. Furuya, N. Lashkari, and M. Moosa, “Renormalization group and approximate error correction”, *Phys. Rev. D*, **106**(10), 105007 (2022), arXiv:2112.05099.
- [66] Y. Zou, M. Ganahl, and G. Vidal, “Magic entanglement renormalization for quantum fields” (6 2019), arXiv:1906.04218.
- [67] J. Haegeman, T. J. Osborne, H. Verschelde, and F. Verstraete, “Entanglement Renormalization for Quantum Fields in Real Space”, *Phys. Rev. Lett.*, **110**(10), 100402 (2013), arXiv:1102.5524.
- [68] D. S. Berman and M. S. Klinger, “The Inverse of Exact Renormalization Group Flows as Statistical Inference” (12 2022), arXiv:2212.11379.
- [69] D. S. Berman, M. S. Klinger, and A. G. Stapleton, “Bayesian renormalization”, *Mach. Learn. Sci. Tech.*, **4**(4), 045011 (2023), arXiv:2305.10491.
- [70] J. Cotler and S. Rezchikov, “Renormalizing Diffusion Models” (8 2023), arXiv:2308.12355.