現実事象と数学的抽象化を往還する数学的活動"塩山"の探究深化と高校数学の授業実践による検証

現実事象と数学的抽象化を往還する数学的活動“塩山”の探究深化と高校数学の授業実践による検証

Inquiry-Deepening of "Salt Mountains", a mathematical activity that goes back and forth between real-world phenomena and mathematical abstraction, and verifying it through practical high school mathematics classes

松永　泰弘[1]，松永　元輝[2]
Yasuhiro MATSUNAGA,　Genki MATSUNAGA

（令和 6 年 11 月 29 日受理）

ABSTRACT

In mathematics education, the process of discovering mathematical problems from real-life phenomena and mathematically solving those problems should be reflected in the learning process. In our previous study, we took up “Salt Mountains” from among the teaching materials of mathematical activities and conducted a class practice using the mathematical activity “Salt Mountains" for junior high school students. The results suggest that the teaching materials stimulate students' interest and promote multifaceted inquiry.

In this study, a theoretical analysis is conducted on the previously unexplored topic of "salt mountains formed on slopes" that has been explored by junior high school students, and a direction is indicated for deepening the inquiry. We verify activities that deepen inquiry in mathematical activities by analyzing students' worksheets and questionnaires in a high school mathematics class.

１．緒言

中央教育審議会答申 [1)]では，PISA2015 や TIMSS2015 の調査結果について，「数学的リテラシー，　科学的リテラシー共に，平均得点の高まりが見られ，中学生が数学を学ぶ楽しさや，学習する意義に対しても肯定的な回答をする割合の改善が見られた一方で，いまだ諸外国と比べると低い状況にある」とし，数学や理科の学習意欲の面で課題が存在していることを指摘した。また，同答申では，さらなる学習意欲の高まりのために探究的な学習の充実の必要性について，「探究的な学習は，学習に対する興味・関心・意欲の向上をはじめ，知識・技能の着実

[1] 技術教育系列
[2] 静岡県立南中央高等学校

な習得や思考力・判断力・表現力等の育成に有効である」とし，強い知的好奇心や自発的な研究態度，自ら課題を発見したり未知のものに挑戦したりする態度などを求めている。

これらの課題を解決するべく，中学校学習指導要領解説数学編[2]では，「数学的活動の一層の充実」として，数学科の見方・考え方を働かせて課題を解決する活動が求められている。また，数学科の目標としている資質・能力を育成していくためには，事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決し，解決過程を振り返って概念を形成し体系化する過程が重要であり，数学的に問題発見・解決する過程を取り入れることが求められている。数学的活動については，「具体物を操作して考えたり，データを収集して整理したりするなどの具体的な体験を伴う学習を充実すること」「事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決する過程を遂行すること」とあり，具体物を用いてデータを収集し数学的に処理する活動が求められている。また，数学的活動を通して，数量や図形の意味を実感をもってとらえたり，思考力，判断力，表現力等を高めたりできるようにするとともに，数学を学ぶことの楽しさや意義を実感できるようにするために，生徒が目的意識をもって主体的・対話的に取り組む活動となるような指導が求められている。

高等学校学習指導要領解説 数学編[3]では，数学科の目標の改善の 1 つとして「数学的活動の一層の充実」とある。数学科の目標としている資質・能力を育成するための学習過程としては目的意識をもって事象を数学化して自ら問題を設定し，その解決のために新しい概念や原理・法則を見いだしたり学んだりすることで，概念や原理・法則に支えられた知識及び技能を習得したり，思考力，判断力，表現力等を身に付けたり，統合的・発展的に考えて深い学びを実現したりすることである。数学的な問題発見・解決の過程では，主として日常生活や社会の事象に関わる過程と，数学の事象に関わる問題発見・解決の過程を考え，これらの各場面において言語活動を充実し，それぞれの過程を振り返り，評価・改善して学習の質を高めることを重視している。これは日常生活の中で起こりうる現実事象の問題や課題を数学を用いて考え解決することである。この現実事象の問題や課題を数学的活動で扱うことが望ましく，数学科においてはこれまで以上に数学と日常生活のつながりを意識した学習の実現が期待されている。

さらに，文部科学省「数理探究（仮称）に関する資料」[4]，「理数探究（仮称）に関する資料」[5]では，次期学習指導要領に含まれる新設科目の「理数探究基礎」・「理数探究」について，高度な思考力・判断力・表現力等を育成するための新たな教科・科目の在り方について検討するなかで，専門的な知識や技能の深化，総合化を図り，より高度な思考力・判断力・表現力の育成を図る目的で新設が検討されている科目案とある。数学と理科の知識や技能を総合的に活用して主体的な探究活動を行う新たな選択科目となる。数学と理科で育成された能力を統合し，課題の発見・解決に探究的に取り組み，高い教育効果が見込まれる。

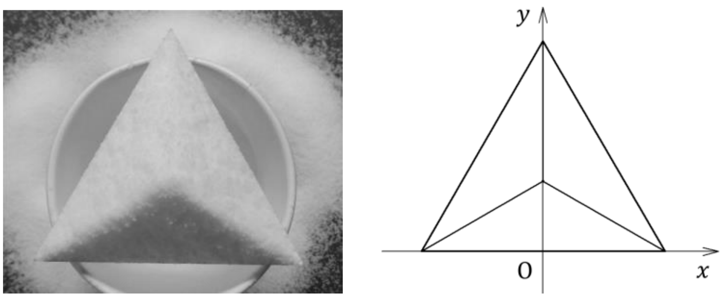
このような背景のもと，数学的活動について，「顕在的数学の潜在化」[6]，「応用指向の強調における構造指向と応用指向の協調」[7]などの研究がなされ，「現実と数学の往復」[8,9]が数学教育に欠けている過程であると提言されている。

そこで，本研究では，ものづくりの中に数学的活動を見出し，ものづくりの視点から数学を用いた探究活動へとアプローチする数学的ものづくり活動として粒子・粉体工学[10-12]の内容である塩山を取り上げる。塩山は，黒田[13]によって考案され，土台となる平面図形の平板に塩を最大限まで盛った時に形成される塩山の稜線，頂点を平板に投影した図形を探究する数学的活動である。早苗[14]は，塩山の稜線が形成される法則を明らかにした。矢崎[15]は，数学を

使った実験の一例として塩山を取り上げ，稜線の算出方法や，塩山に関連する学習内容を提示した。これらは，学習者が数学に興味・関心を持つことを目的として取り上げられている。松永・八木[16]らは，様々な形状の土台，粒子を用いた立体としての塩山を探究する活動を提案し，現実事象と数学的抽象化を往還する活動の流れを明らかにした。松永・守屋ら[17-19]は，中学生，高校生を対象に塩山を用いた活動を実施し，生徒の興味を引き出す教材であること，多面的な探究の促進につながることなどが示唆される結果を示した。本研究では，先行研究[19]において中学生対象に行った 1 年間の授業「探究」をもとに，生徒が探究した内容の中からこれまでに明らかにされていない「斜面上に形成される塩山」について理論的解析を行い，探究の深化について方向性を指し示す。さらに，斜面上に形成される塩山を例に探究を深化させる活動内容を明らかにする。数学的活動における探究を深化させる活動について，高校生対象に数学クラスでの授業実践により，生徒のワークシート，アンケートから検証する。

２．数学的活動「塩山」

塩山は，黒田[13]によって考案され，土台となる平面図形の板に塩を最大限まで盛ったときに形成される塩山の稜線，頂点を平板に投影した図形を探究する数学的活動である(図 1)。本章では，塩山の数学的活動と探究の深化の内容について明らかにする。



(a) 形成される塩山　　　(b) 塩山と稜線平面図

図１　正三角形平板の土台と塩山稜線

2.1　「塩山」における数学的活動

塩山の形成原理は，境界が存在する平面図形の土台上に塩を盛ることで，円錐が重なり合いながら連続して形成される。ある点を中心に塩を盛っていくときに，円錐形状を保ちながら，底面の円の半径および頂点の高さが大きくなっていき，底面の円が土台の境界に接した時点で円錐形状の塩山は最大限の大きさとなる。土台に盛られた塩山は，このように形成された塩山円錐の集合体と考えることができ，塩山の稜線は境界からの距離が等しい点の集合となる。

拡張された塩山教材[16]は，大気中および水中で土台（境界・壁）に塩（粉体・粒体）を盛ったときに形成される立体（図 2）を探究する教材である。生徒は自分が考えた土台の形を製作し，数学的抽象化（現実事象の具体的な問題から共通のパターンや本質的な特徴を取り出し，一般化するプロセス）を行い数学的推論（論理的に結論を導くプロセス）のもとに仮説をたて塩山形状を予想する。塩を盛って実物の塩山の安息角や形状（高さ，等高線，体積，質量）を測定し，検証する。仮説と具体物の具体的量（現実事象）が異なる場合には，具体的量と一致する正解を説明できる新たな数学的推論を組み立て直す。新たな土台で新たな塩山に挑戦し，

図 2　サンドピクチャー（左）とソルトピラミッド（右）[20]

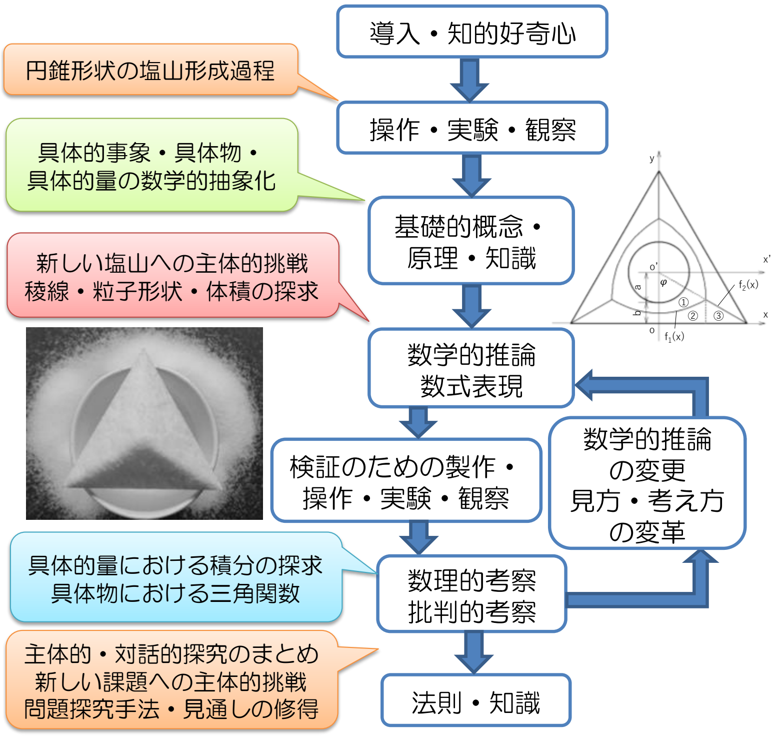


図 3　現実事象と数学的抽象化を往還する数学的活動「塩山」の枠組み [16]

塩山形成の法則に接近していく過程を繰り返し，知識を形成していく。すなわち，現実事象と数学的抽象化を往還する数学的活動が出現する（図 3）。また，探究活動の内容は数学に限定されず，理科「粒子の落下高さと安息角の実験」，技術「樹脂ペレットを用いたプラスチック成型」，工学「粉体の物理的特性の測定･操作」，美術「サンドピクチャー（図 2 左）・サンドアートの制作」，数学「立体の数式表現」など STEAM 教育の各分野の学びと結びついた探究に発展する内容となる。また，中学生，高校生対象の実践から，生徒の興味を引き出し，多面的な探究の促進につながることが示唆されている教材である。

2.2　「塩山」における探究の深化と「傾いた土台に形成される塩山」

　数学的活動「塩山」は研究者と教員，生徒の探究によって無限に拡張される。静岡大学附属中学 3 年生対象に実施された探究の授業では，土台を重ねた場合，土台に段差があった場合，土台に壁が取り付けられた場合などを探究のテーマとして取り上げ，探究の深化が見られた。

本研究では，探究の深化の一例として，傾いた土台に形成される塩山を例に数学的活動を明らかにする。

塩山形成原理の数学的表現は，「① 一点から塩を盛っていくときに形成される直円錐の集合体，もしくは，② 境界から粒子固有の安息角αで立ち上がる立体」として定義される。これらの平面上に形成される塩山形成原理の 2 通りの数学的表現を，斜面上に形成される塩山に拡張する。傾いた土台に対して「静止摩擦係数は傾きに対して十分大きい」という仮定を設ける。このとき，斜面上に形成される塩山は円錐を斜面で切り取った斜楕円錐の集合体となり，斜面上に形成される塩山形成原理の数学的表現は，「① 一点から塩をもっていくときに形成される斜楕円錐の集合体，もしくは，② 境界から粒子固有の安息角αで立ち上がる立体（②は同じ表現）」として定義される。

図 4 に角度θ傾いた斜面に円錐の一部として形成される斜楕円錐を示す。

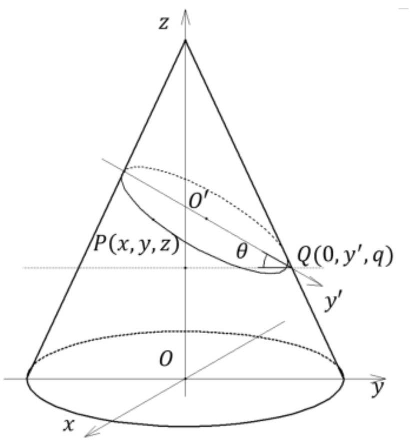


図 4　角度θ傾いた斜面に円錐の一部として形成される斜楕円錐

円錐の高さをh，底面の円の半径をaとすると，円錐の数式表現は

$$x^2+y^2=\frac{a^2(h-z)^2}{h^2} \tag{1}$$

で与えられ，高さzの位置にある断面としての円の方程式となる。

つぎに，斜楕円錐の楕円底面において，楕円中心を原点O'とし，傾いた面上に軸y'をとる。楕円底面上で最も低い位置にある点をQ，点Qのz座標をqとする。楕円上の点Pのy'座標は，yを用いて次式で与えられる。

$$y'=\frac{y}{\cos\theta}-\frac{a(h-q)}{h}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}-\frac{1}{\cos\theta}\right) \tag{2}$$

ただし，αは安息角である。x,yが満足する方程式(1)に式(2)を代入すると，底面境界の方程式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{h-q}{\tan\alpha}\sqrt{\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\theta+\alpha)}}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{(h-q)\cos\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}\right)^2}=1 \tag{3}$$

を得る。このとき，楕円の長軸短軸比γは次式で与えられる。

$$\gamma=\frac{\cos\alpha\tan\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}\sqrt{\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin(\alpha-\theta)}}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\sin(\theta+\alpha)\sin(\alpha-\theta)}} \tag{4}$$

以上の解析から，一点から塩をもっていくときに形成される斜楕円錐の形状が明らかになった。

つぎに，具体的な土台として，導入の最初に用いる正三角形の土台について考える。正三角形の土台を水平に置いた場合と正三角形の底辺を回転軸として 10°傾けた場合について，塩を盛る実験を行い，写真を撮影し比較する。土台に垂直な方向から撮影した塩山の写真を図 5 に示す。塩山の頂点は，土台を水平面上に置いた時に比べて，三角形の頂点に近づいていることがわかる。正三角形の土台に投影された塩山（図 6 左図）の頂点Pの座標について考える。正三角形の底辺を回転軸として土台を角度θ傾けた場合，塩山の形状を真横から見た図 6 右図において，塩山の立ち上がり角は土台左端で安息角αとなるが，土台右端では安息角と異なる。安息角は塩山の水平断面上の立ち上がり角であるため，図 6 右図における三角形土台の頂点での角度φは安息角αと異なる値をとる。この角度φを求めることは非常に複雑であるため（頂点Pの座標も同様），解析による式の導出については本論文では割愛する。

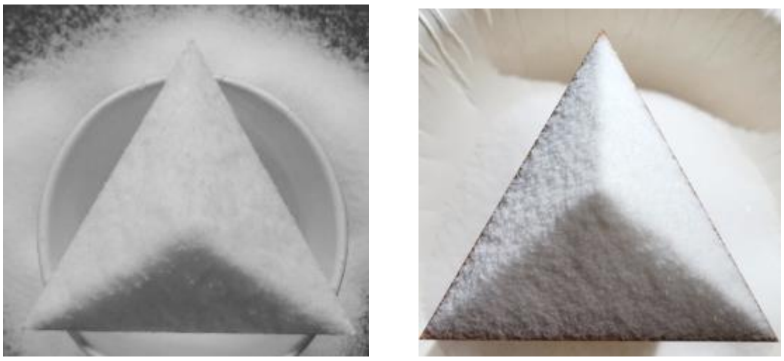


**図 5　真上から撮影した水平面上の正三角形土台に形成された塩山（左）と
土台に垂直な方向から撮影した 10°傾いた正三角形土台の塩山（右）**

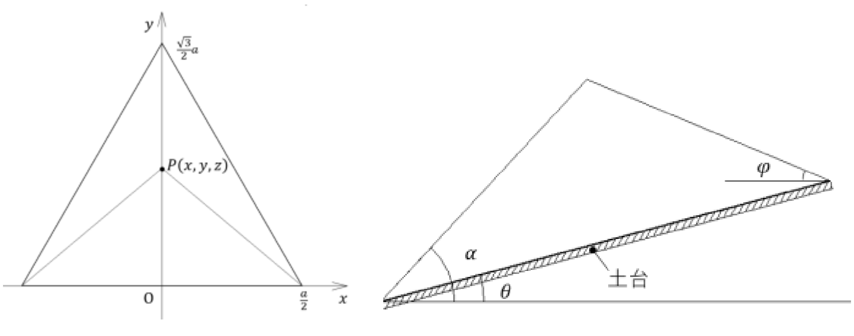


図 6　正三角形の土台に投影した稜線と座標軸（左）と塩山を真横から見た形状（右）

ただし，半径aの円形土台を傾けたときに形成される塩山は，塩山の形状を真横から見た図 7 右図において，塩山の立ち上がり角は土台両端で安息角αとなるため（円形土台の直径両端で塩山の水平断面上の立ち上がり角になることによる），塩山頂点を土台に垂直に投影した点のy座標は容易に求まり

$$y = a\cos(\alpha - \theta)\left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} + 2\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right) \tag{5}$$

となる。また，土台下端から頂点までの鉛直方向の高さhは次式で与えられる。

$$h = a\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos\alpha} \tag{6}$$

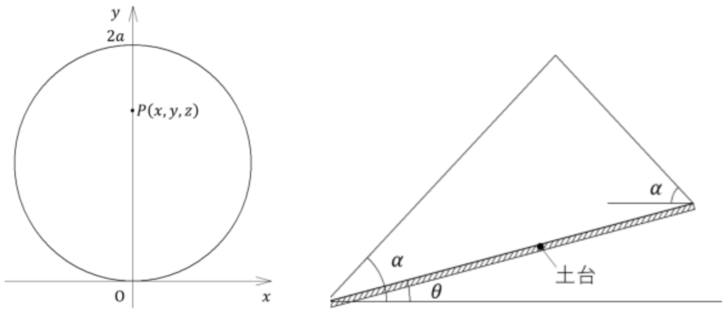


図７　円形の土台に投影した塩山頂点および座標軸（左）と塩山を真横から見た形状（右）

前述の通り，傾いた土台上に形成される塩山の数式表現は非常に複雑となるため，図（CAD）を用いた塩山形状の探究について明らかにする。

安息角$\alpha = 45°$とし，斜面の角度$\theta = 15°$，$\theta = 30°$に対する斜楕円錐の作図を図 8 に示す。斜楕円錐は安息角$\alpha = 45°$の円錐を角度θで切り取った立体となる。式(3)で与えられる斜楕円錐の底面は，長軸および短軸の長さを図学的に求めることで，描くことができる。斜面の角度に対する，楕円底面の扁平率（$1 - 1/\gamma$，γ：長軸短軸比）と頂点の位置は異なり，斜面の角度が大きいほど楕円底面の扁平率は大きくなり，斜楕円錐の頂点の底面への投影点は楕円長軸の端点に近づくことがわかる。

解析解と図学的解法の正当性を確かめるために，塩山底面の楕円の縦軸横軸比γに対して，解析解式(3)と図学的解法図 8 を比較する。解析解と図学的解法の縦軸横軸比γの値を表 1 に示す。4 桁の有効数字で一致し，解析解と図学的解法の正当性を確かめることができる。

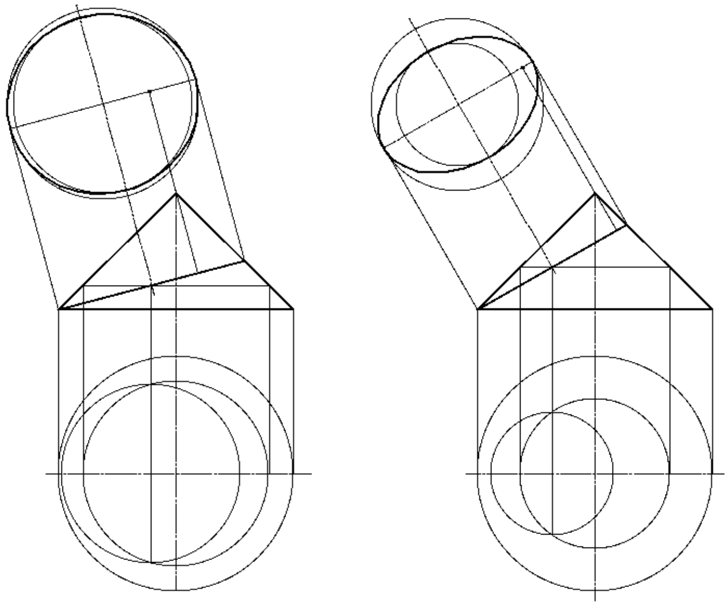


図８　傾いた斜面に形成される斜楕円錐の正面図と平面図および頂点（左：$\theta = 15°$，右：$\theta = 30°$）

表 1 解析解と図学的解法における楕円の縦軸横軸比γの比較

θ	解析解 式(3)	図学的解法 図 8
$15°$	1.074554	1.074493
$30°$	1.414126	1.414219

つぎに，具体的な形状の土台での塩山形状について考える。円および長方形の土台において，安息角$\alpha = 45°$，斜面の角度$\theta = 30°$に対する塩山形状の作図を図 9 に示す。ただし，長方形の縦横比は斜楕円錐底面の縦軸横軸比γに等しいものを採用した。塩山は斜楕円錐の集合体であるため，図 8 で作図した楕円と頂点の位置を用い，縦軸横軸比γが一定で境界に接する大きさの異なる楕円を土台に描くことで，斜楕円錐の頂点の位置の連続線として稜線を作図することができる。円形の土台に対する塩山は頂点だけでなく稜線が現れることがわかる。また，縦横比が斜楕円錐底面の縦軸横軸比γに等しい長方形の土台では，頂点が 1 点となることがわかる。これは長方形の 4 辺が縦軸横軸比γの楕円に接しているためである。

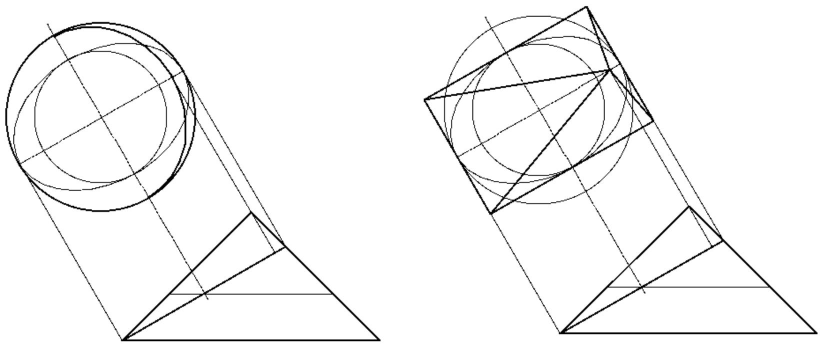


図 9 角度$\theta = 30°$傾いた土台に形成される塩山の正面図と平面図および稜線（左：円，右：長方形）

数学的活動「塩山」における探究の深化として「傾いた土台に形成される塩山」の探究内容を数学的仮説，解析解の導出，図学的解法の点から明らかにした。数学的活動「塩山」においては，「傾いた土台に形成される塩山」だけでなく，「水中（液体中）の粉体」「2 つの図形が重なるように結合した土台に形成される塩山」「高低差（段差）のある土台に形成される塩山」「砂時計と時間」など，探究を深化しうるテーマで明らかにされていない内容が多く存在し，更なる発展の可能性が明らかになったといえる。

3. 高校数学における授業実践

高校数学の授業において現実事象と数学的抽象化を往還する数学的活動「塩山」の授業実践を行い，数学的活動の探究の深化について検証した。

3.1 授業の概要

授業実践を実施する高校は静岡県立の単位制高校とし，多様な生徒の集団を対象に実施した。本授業には文科省から 2 名，県の教育委員会から 2 名，計 4 名の学外から参加した。授業の概要を以下に示す。

テーマ	：塩山の稜線を探究しよう！
日時	：2023 年 10 月 25 日(水) 12:40-14:10，80 分
学校	：静岡県立静岡中央高校
授業者	：数学教員 (著者 2)
クラス	：数学 3 年生，6 名
参観者	：文科省教科調査官 2 名，県教育委員会高校教育課 2 名，学校長，副校長，教頭，他オンライン参加教員数名

授業の流れを以下に示す。

(1) 導入：円錐状の塩山，富士山，山の尾根の写真を提示し，塩山の稜線を探究する興味を引き出す

(2) 予想：土台の形状で塩山の稜線を予想し，その理由について考える

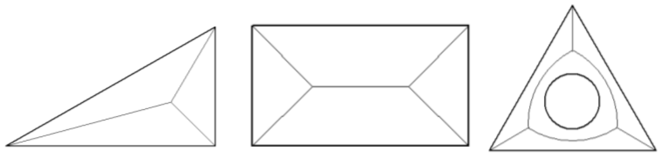
課題 1：正三角形

課題 2：直角三角形，長方形

課題 3：四角形

課題 4：円孔を有する正三角形

課題 5：傾いた土台（円・正三角形）



(3) 話し合い：各自の予想について話し合う

(4) 実験：用意された土台(MDF)，受け皿，紙コップで実験する

(5) 考察･分析：実験結果について，予想した稜線と比較しながら，なぜそのようになるのか考察･分析する

(6) 解説：教員が解説する

【ワークシートに沿って，(2)～(6)を課題 1～5 に対して繰り返す】

(7) まとめ：現実事象と数学的抽象化を往還する数学的活動の授業のまとめとして，以下の 3 点を共有する

・現実の事象を数学の問題として捉える

・数学的な仮説を立て，現実の事象で検証する

・検証から仮説を見直し，新たな問題を見出す

(8) アンケート：4 件法によるアンケートを実施

3.2　ワークシートの分析

ワークシートにおける生徒の予想と理由および結果と考察を表 2-1，2-2 に示す。

最初の塩山稜線（課題 1 正三角形の土台）の予想は，授業の導入において境界のない水平面上で実験し塩山の成長過程を観察した後で予想を立てている。その際に，塩山という立体の稜線や頂点を平面に投影したときにできる図形に対して，数学的問題として捉え，数学的抽象化を行ったことになる。課題 1 で，重心，外心，内心が一致する正三角形の土台を用いたことで，5 名の生徒が正しい稜線を描いている。塩山の成長過程を観察したため，円錐状の塩山と同様に正三角形の土台上の塩山は三角錐を形成し，頂点は重心となるという数学的仮説を立て，重心と土台の頂点を結ぶ線を稜線の投影として予想している。立体として最も高く塩が盛られていることから重心と連想したことが想像でき，また，三角形の五心（重心，内心，外心，垂心，傍心）の中で重心は中点連結定理とも関連し，最も重要な学習内容となっていることから，曖昧な根拠のもとに「頂点は重心となる」という数学的仮説を立てたと考えられる。また，

結果および考察では，2 名の生徒が重心という言葉を使用し「重心に塩が多く集まる」「重心が高くなる」と考察している。この結論は，正三角形の土台に形成される塩山（現実事象）では矛盾しない一致を得たこと（現実事象での検証）になるが，正しい結論は，頂点の投影点は正三角形の内心であり，正解にはたどり着いていないことがわかる。この結論は，次の課題 2（直角三角形の土台）で検証する際に誤りであったことが証明され，課題 1，2 の結果（現実事象）と矛盾しない数学的仮説を立てる必要が生じることになる。

課題 2（直角三角形，長方形）の直角三角形の土台では，1 名のみが角の二等分線と記述し正解を予想し，残り 5 名の生徒が重心または中線という言葉を使用して説明し，間違った予想を立てている。また，長方形の土台では，6 名全員が対角線と予想している。理由には「重心に塩が多く盛られる」「重心が頂点と考えたから」と記述があり，課題 1 において，数学的仮説「塩山は錐を形成する」「塩山頂点の投影点は重心となる」が検証されたという結論に基づいていることがわかる。結果および考察では，全員が「角の二等分線」，うち 2 名が「内心」と記述している。長方形については，「交点と交点を結ぶ」「辺に平行な長さ」と記述している。生徒たちにとっては，正解と思っていた結論（２つの数学的仮説の立証）が覆される結果となったが，課題 1 の結果とも矛盾しない新たな数学的仮説に到達していることがわかる。解説で，角の二等分線や内心となること，塩山が円錐の集合体であることが共有され，その後の課題 3（四角形）では全員の予想が正解となった。そこでは，交点の高さの違いに言及している記述が出現した。

表 2-1　ワークシートにおける予想と理由および結果と考察（課題 1～3）

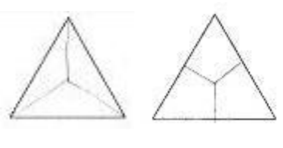
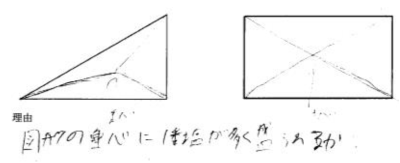
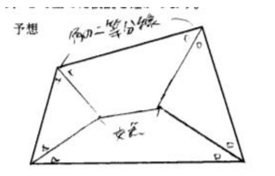
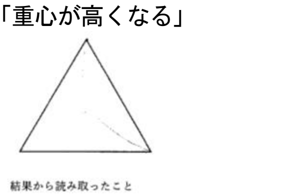
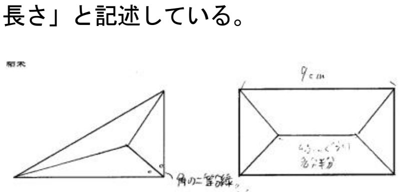
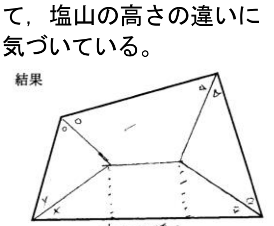
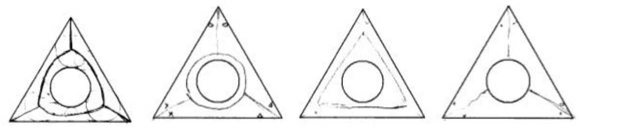
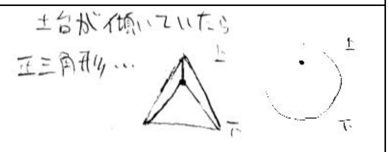
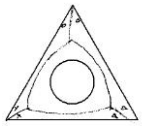
土台形状	課題 1 正三角形	課題 2 直角三角形・長方形	課題 3 四角形
予想 理由	5 名の生徒が正しい稜線を，また，1 名が辺の中点から稜線を描いている。	1 名のみが正解し角の二等分線と記述し，5 名の生徒が重心または中線という言葉を使用し，予想の理由を記述している。長方形は，6 名全員が対角線と予想している。「重心に塩が多く盛られる」「重心が頂点と考えたから」	6 名全員が角の二等分線を書き，２つの交点を直線で結んでいる。
予想図			
結果 考察	2 名の生徒が重心という言葉を使用して，考察している。「重心に塩が多く集まる」「重心が高くなる」	全員が「角の二等分線」，2 名が「内心」と記述している。長方形については，「交点と交点を結ぶ」「辺に平行な長さ」と記述している。	2 名の生徒が，角の二等分線の 2 つの交点について，塩山の高さの違いに気づいている。

表 2-2　ワークシートにおける予想と理由および結果と考察（課題 4〜3）

土台形状	課題 4 円孔を有する正三角形	課題 5 傾いた土台（正三角形・円）
予想 理由	2 名の生徒が内接円を描くなど正しい稜線を描いている。残り 4 名は頂点から角の二等分線を書いているが，三角形の辺と円孔の間の稜線を円(2 名)，三角形(1 名)，なし(1 名)で描いている。	5 名の生徒が頂点の位置がずれることを予想し，2 名が楕円と記述している。
予想図		
結果考察	3 名の生徒が，三角形の辺と円孔の間の稜線について，放物線と記述している。 	（実験を実施していない）

課題 4（円孔を有する正三角形）では円孔を設けたことにより，新たな問題が出現し，予想で間違いを引き出した。課題 2 の解説で塩山が円錐の集合体であることを共有したため，2 名の生徒が内接円を描くなど正しい稜線を描いている。残り 4 名は頂点から角の二等分線を書いているが，三角形の辺と円孔の間の稜線を円(2 名)，三角形(1 名)，なし(1 名)で描いている。結果および考察では，角の 2 等分線と放物線に近い曲線が描かれていた。質問項目「三角形の辺と円孔の間の稜線はどのような曲線か？」に対して，3 名の生徒が，放物線と記述している。また，課題 4 の実験の後でアリジゴクの写真を示したことで理解が深まったという記述があった。

ワークシートの分析から，塩山という立体の稜線や頂点を平面に投影したときにできる図形に対して，数学的抽象化を行った数学的問題に取り組み，数学的仮説を立て，現実事象で立証し，正解と間違いを繰り返していることが明らかとなった。また，その過程では，立証したはずの数学的仮説が覆され，現実事象と矛盾しない新たな仮説を立てることに取り組んでいることが明らかとなった。さらに，塩山が円錐の集合体であること，稜線が土台図形の角の二等分線となること，が共有された後でも，新たな課題で間違う様子が見られ，新たな知見を獲得していることが明らかとなった。

3.3　生徒アンケートの分析

授業実践一週間後の授業において，4 件法によるアンケートを実施した。アンケート結果を図 10，自由記述と記述内容の分析を表 3 に示す。

「① 塩山の授業はたのしかった」は，全員がそう思うと回答している。「今までの知識を活かしながら予想できた」「結果が予想と違っておもしろかった」「予想することと，なぜその結果になるのか考えることが難しかったが，解説を聞いて理解することができた」の記述があり，予想と実験を繰り返しても，予想で間違いを引き出すように土台形状と課題の順番に手立てを設けたため，新たな土台で新たな塩山に挑戦する度に，塩山形成の法則の理解を深めていることがわかる。また，「聞いたこと，やったことのない内容だった」「難しく考えなくてよかったので，数学の苦手な自分でもたのしく取り組めた」の記述から，これまでの授業にな

い新奇性を感じ，自分で考え知識を活かして予想していく積極的な姿勢が読み取れる。

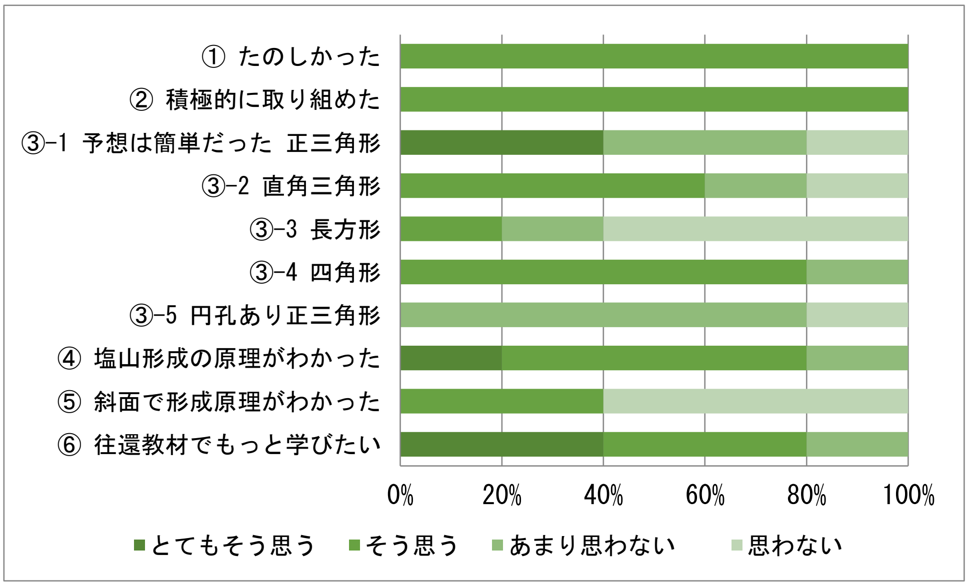


図 10　4 件法によるアンケート結果［n=5］

表 2　アンケート項目における自由記述と記述内容の分析

項目	記述内容	記述内容の分析
① 塩山の授業はたのしかった	「今までの知識を活かしながら予想できた」「結果が予想と違っておもしろかった」「難しく考えなくてよかったので，数学の苦手な自分でもたのしく取り組めた」「予想することと，なぜその結果になるのか考えることが難しかったが，解説を聞いて理解することができた」「聞いたこと，やったことのない内容だった」	これまでの授業にない新奇性を感じ，自分で考え知識を活かして予想でき，予想を裏切る結果におもしろさを感じていることがわかる。
② 塩山の数学的活動に積極的に取り組めた	「稜線が中心線なのか角の二等分線なのか話し合えた」「前の結果を踏まえて次の予想を立てることができた」「考えるだけでなく，実際に塩を盛り，自分で取り組む機会が多かった」「実験に参加し，自分の意見を述べることができたから」「内容に興味が持てた」	議論できること，自ら実験で確かめること，結果から次の予想を立てられること，などが積極的な活動につながることがわかる。
③ 塩山稜線の予測は簡単だった	「正三角形は外心も重心も内心も一点に集まっていて予想しやすかった」「正三角形で角の二等分線であることに気づいたため，その後は簡単に予想できた」「最初の方はどうして実験結果のように形成されるか全くわかっていなかった」「図形の問題が苦手」	正三角形の土台を導入として用いたことは，生徒が簡単だと思う，本質にも到達しうることが明らかとなり，塩山の形成を実験で理解することにとって適しているといえる。
④ 塩山の立体が形成される原理がわかった	「角の二等分線上が辺からの距離が等しく安定することがわかった」「解説を聞いた後，予想するときに考えることができた」「解説を聞いて理解できた」	教員による実験結果の解説により，理解が深められていることが分かる。
⑤ 斜面に形成される塩山の原理がわかった	「難しい」「解説を聞いた後，予想するときに考えることができた(④と同じ)」「解説を聞いて理解できた(④と同じ)」	理解に難しい内容であるが，理解できたと感じている生徒もいたことがわかる。
⑥ 往還する教材で数学をもっと学びたい	「日常生活の当たり前のことを，数学を用いて知ってみたい」「興味深かったから」「数学が実際にどのように活用されているかを知ることで，理解が深まると思う」	日常生活の中の数学や数学の活用を知りたい，興味深い，さらにそれによって理解が深まると感じている。

「② 塩山の数学的活動に積極的に取り組めた」は，全員がそう思うと回答している。「話し合えた」「前の結果を踏まえて次の予想を立てることができた」「考えるだけでなく，実際に･･･自分で取り組む機会が多かった」「実験に参加し，自分の意見を述べることができたから」「内容に興味が持てた」の記述があり，話し合い，考えることができたこと，実験を伴ったこと，内容に対する興味が積極的な取り組みを生み出したことがわかる。ただし，この設問において，「数学的活動」とは「具体物を操作して考えたり，データを収集して整理したりするなどの具体的な体験を伴い」「事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決する過程を遂行する」活動であるが，生徒にとっては，塩山を盛って実際に確かめる活動，もしくは，それを繰り返すこと（課題 1~5）により正しい認識に近づいていく活動（授業の活動）を「数学的活動」と捉えていると考えられる。

「③ 塩山稜線の予測は簡単だった」では，予想で間違いを引き出すように土台形状と課題の順番を準備したため，ばらつく結果となった。また，「正三角形は外心も重心も内心も一点に集まっていて予想しやすかった」「正三角形で角の二等分線であることに気づいたため，その後は簡単に予想できた」とあるように，正三角形の土台を導入の最初で用いたことにより，生徒は簡単だと感じること，塩山形成原理の本質にも到達しうることが明らかとなり，正三角形の土台は塩山教材の導入に適していることがわかる。

「④ 塩山の立体が形成される原理がわかった」「⑤ 斜面に形成される塩山の原理がわかった」は，肯定的な意見がそれぞれ 80%，40%となり，斜面に形成される塩山の理解は難しいと感じている。「角の二等分線上が辺からの距離が等しく安定することがわかった」「解説を聞いて理解できた」とある一方で，斜面に形成される塩山については「難しい」という記述が見られた。

「⑥ 現実と数学を行き来して深めていく教材で数学をもっと学びたい」は，「とてもそう思う」が 40%，肯定的な意見が 80%となり，現実事象と数学的抽象化を往還する数学的活動を通じて学びたいと感じている。「日常生活の当たり前のことを，数学を用いて知ってみたい」「数学が実際にどのように活用されているかを知ることで，理解が深まると思う」「興味深かったから」という記述が見られ，日常生活の中の数学や数学の活用を知りたい，興味深い，さらにそれによって理解が深まると感じていることがわかる。

生徒アンケートからは，予想と実験を繰り返す中でも，予想で間違いが引き出され，新たな土台で新たな塩山に挑戦する度に，塩山形成の法則の理解を深めていることが明らかとなった。また，予想と実験を繰り返しながら，内容に対する興味が高まり積極的な取り組みを生み出したことが明らかとなった。

3.4　参観者アンケートの分析

授業を参観した県教育委員会高校教育課 2 名，学校長，副校長，教頭の 5 名の内 4 名からアンケートに対する回答を得た。4 件法によるアンケート結果を図 11 に示す。

「① 塩山の授業はたのしそうだった」「② 塩山の数学的活動に積極的に取り組めていた」では，全員が肯定的な回答であった。「生徒の表情がとてもよかった」「実習的に作業をしたことで，より具体的な概念を考えることができた様子が見られた」「グループ内で実演し，意見交換することでたのしさを感じていた」「まず仮説を立て，自分たちの手で実際に試すことで，全生徒が集中していた」「これまでの学習内容を踏まえた上で塩山稜線の予測ができていたと

感じた」の記述があり，予想，話し合い，実験，考察・分析，解説の授業の構成により，たのしさを伴う積極的な関わりが現れ，具体的な概念を考え，学習内容を踏まえた予測を指摘している。

「③ 塩山稜線の予測は簡単そうだった」「④ 塩山の立体が形成される原理を理解していた」「⑤ 斜面に形成される塩山の原理を理解していた」に関する記述では，「学んだ知識をうまく活用していた」「うまく予測できていた」「意欲をもって取り組んでおり，「わかった」と明るい表情を見せてくれた」「原理を理解できていたことで四角形の予測につながっていた」とあり，学んだ知識を活用して予測し，理解していると判断している。一方で，「四角形については正しく予測していた生徒が多かったが，孔の開いた図形については悩んでいる様子だった」「説明を聞いている生徒の様子から個人差があるように感じた」など難しい課題に対する予想や実験結果の理解に個人差があることを指摘している記述もあった。

「⑥ 現実と数学を行き来して深めていく教材開発が数学にとって重要である」は，全員がそう思うと回答している。「具体的なイメージがわきにくい数学的事象に対して，今回の授業展開はとても興味深く感じられた」「単なる計算でなく，原理の理解が深まると感じた」「論理的思考や複眼思考のために有効だと思う」の記述があり，予想から解説までの流れを繰り返すことで，原理の理解が深まるだけでなく，論理的思考や複眼思考のために有効であると指摘していることがわかる。

参観者アンケートの結果から，数学的活動教材「塩山」が，予想，話し合い，実験，考察・分析，解説の授業の構成により，たのしさを伴う積極的な関わりが現れ，具体的な概念を考え，学習内容を踏まえた予測を行いながら学ぶことのできる教材であることが明らかとなった。また，現実事象と数学的抽象化を往還する数学的活動は，原理の理解が深まるだけでなく，論理的思考や複眼思考を育むために有効であり，このような数学的活動教材開発の重要性が明らかとなった。

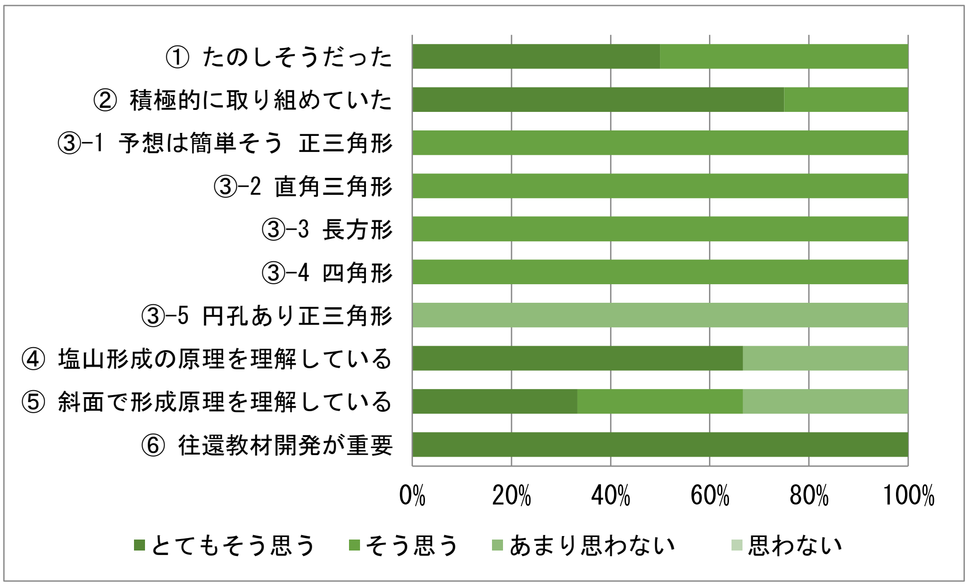


図 11 4 件法によるアンケート結果［n=4］

また，参観者の授業に関する感想（自由記述）では，「問いから予想して実演しグループで話し合い解決していくという探究的授業展開で主体性を感じました」「数学における探究的な学びを初めて見学し大変勉強になりました」「演習というイメージを覆すような取り組みの授業であったと思う。数学的活動として探究の要素が多く，他の活動（教科）でも活かすことができるのではないかと思う。高校教育では忘れがちな興味・関心の幅を広げることと，思考を深める学習の例となることを願っている。」「この授業では仮説，実証，結果のサイクルが上手に回っており，とても面白く拝見いたしました。県教育委員会では，すべての授業で探究的な学びを行う高校の設置を検討しています。今回の授業はその点でも大変参考になりました。」の記述があり，探究の在り方に留まらず，授業や高校の在り方にまで広げた意見が出されている。

４．結言

本研究では，先行研究[19]において中学生対象に行った１年間の授業「探究」をもとに，生徒が探究した内容の中からこれまでに明らかにされていない「斜面上に形成される塩山」について理論的解析を行い，探究の深化について明らかにした。さらに，数学的活動における探究を深化させる活動について，高校生対象に数学クラスでの授業実践により，生徒のワークシート，アンケートから検証した。本研究で明らかになったことを以下に示す。

・傾いた土台上に形成される塩山を，「① 一点から塩をもっていくときに形成される斜楕円錐の集合体，もしくは，② 境界から粒子固有の安息角で立ち上がる立体（②は同じ表現）」として明らかにした。

・斜面上に形成される斜楕円錐について，図（CAD）を用いて斜楕円錐の正面図と平面図および頂点を求め、さらに、円および長方形の土台上に形成される塩山形状（稜線および頂点）を明らかにした。

・生徒のワークシートの分析から，塩山という立体の稜線や頂点を平面に投影したときにできる図形に対して，数学的抽象化を行った数学的問題に取り組み，数学的仮説を立て，現実事象で立証していること，そして、その過程では，立証したはずの数学的仮説が覆され，現実事象と矛盾しない新たな仮説を立てることに取り組んでいることが明らかとなった。さらに，塩山形成の原理（塩山が円錐の集合体であること，稜線が土台図形の角の二等分線となること）が共有された後も，新たな課題で間違う様子が見られ，正解と間違いを繰り返しながら，新たな知見を獲得していることが明らかとなった。

・生徒のアンケート結果から，予想と実験を繰り返す中で，予想で間違いが引き出され，新たな土台で新たな塩山に挑戦する度に，塩山形成の法則の理解を深めていること，内容に対する興味が高まり積極的な取り組みを生み出したことが明らかとなった。

・参観者のアンケート結果から，数学的活動教材「塩山」が，予想，話し合い，実験，考察・分析，解説の授業の構成により，たのしさを伴う積極的な関わりが現れ，具体的な概念を考え，学習内容を踏まえた予測を行いながら学ぶことのできる教材であることが明らかとなった。また，現実事象と数学的抽象化を往還する数学的活動は，原理の理解が深まるだけでなく，論理的思考や複眼思考を育むために有効であり，このような数学的活動教材開発の重要性が明らかとなった。

・参観者の授業に関する感想（自由記述）から，今回の授業が数学的活動の探究の在り方の範

疇に留まらず，すべての教科の授業や高校の在り方にまで広げた展望を指し示す取り組みであったことが明らかとなった。

本研究は，松永泰弘研究基金の助成を受けたものである。

参考文献

1) 文部科学省：中央教育審議会　幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について(答申)(中教審第 197 号) (2016)
2) 文部科学省：中学校学習指導要領解説　数学編 (2018)
3) 文部科学省：高等学校学習指導要領解説 数学編 (2018)
4) 文部科学省：数理探究（仮称）に関する資料 (2015) http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/070/siryo/__icsFiles/afieldfile/2015/12/11/1363093_10_1.pdf（2024 年 11 月確認）
5) 文部科学省：理数探究（仮称）に関する資料 (2016) http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/siryo/__icsFiles/afieldfile/2016/05/11/1370455_12.pdf （2024 年 11 月確認）
6) Yves Chevallard : IMPLICIT MATHEMATICS: Their Impact on Social Needs and Demands, Mathematisation and Demathematisation: Social, Philosophical, and Educational Ramifications, Gellert & Jablonka(Eds.), Sense Publishers, pp.57-65 (2007)
7) 阿部好貴：数学的リテラシーという視点からの教授・学習内容の考察－関数領域に焦点を当てて－，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第 18 巻，第 1 号，pp.23-29 (2012)
8) 池田敏和：モデルを志向した数学教育の展開－「応用指向 vs 構造指向」を超えて－，東洋館出版社 (2017)
9) 石川雅章：事象と数学を相互作用的に解釈することの困難性と課題－数学化サイクルとモデル志向の視点から－，日本科学教育学会研究会研究報告，Vol.32，No. 5，pp.83-88 (2017)
10) 大坪建：粉粒体の集合特性の役割－安息角に関する実験法則について－，粉体工学研究会誌，Vo.2，No.1，pp.179-188 (1965)
11) 蓑嶋裕典，尾谷賢，内山智幸，篠原邦夫，高屋敷一仁，浦哲也：粒子形状による粉体物性の変化，北海道立工業試験場報告，No.295，pp.129-136 (1996)
12) 椿淳一郎・鈴木道隆・神田良照：粒子・粉体工学，日刊工業新開社 (2002)
13) 黒田俊郎：塩が教える幾何学，西三数学サークル (2000)
14) 早苗雅史：数学玉手箱，デザインエッグ社(2016)
15) 矢崎成俊：実験数学読本　真剣に遊ぶ数理実験から大学数学へ，日本評論社(2016)
16) 松永泰弘，八木涼，松永元輝，大西俊弘：理数探究における数学的ものづくり活動教材"塩山"の開発，静岡大学教育学部研究報告 教科教育学編，第 49 号，pp.115-127 (2017)
17) 松永泰弘，守屋太雅，松永元輝：高校数学における塩山を用いた数学的活動と授業実践，日本産業技術教育学会誌，第 63 巻，第 2 号，pp.229-237 (2021)
18) 松永泰弘，守屋太雅，古田このみ：高校数学における塩山を用いた探究活動の授業実践，静岡大学教育学部研究報告 教科教育学篇，第 54 号，pp.95-108 (2022)
19) 松永泰弘，守屋太雅：現実事象と数学的抽象化を往還する数学的探究活動”塩山”，静岡大

学教育学部研究報告 人文・社会・自然科学篇，第 74 号，pp.46-60 (2023)
20) Bonaire: Salt Pyramids & South Coast
https://travel2unlimited.com/bonaire-salt-pyramids-south-coast/（2024 年 11 月確認）