

静岡大学 博士論文

ツイステッド・ネマティック型液晶素子を用いた
空間光位相変調の理論と応用に関する研究

2005年11月

山内 真

概要

光は高速かつ空間的に並列に、大容量の情報を伝達することができる。通常この伝達は光の強度を用いてなされるが、レーザーは位相の揃った光波を発生するので、位相を用いた情報の伝達が可能となる。ホログラフィー、光干渉計等ではまさに、光の位相情報を干渉縞という形で記録、あるいは検出し、3次元像の観察や、高精度の計測を可能としている。しかしながらこれらの応用は現状では、ややフレキシビリティに欠けていると言わざるを得ない。

光波の位相を自在に操ることが可能な素子、すなわち実時間動作の空間光位相変調素子ができれば、応用面に格段の進歩をもたらすことが期待される。液晶素子は、空間的に高解像度でかつ実時間の動作が可能である。特にディスプレイ用のツイステッド・ネマティック (TN) 型液晶素子は、安価で入手可能であると共に、ビデオ信号によって容易にフレキシビリティの高い駆動が可能である。したがって、TN 型液晶素子を空間光位相変調素子として用いることができれば、広範な利用が期待される。しかしながら、ディスプレイ用の素子は明暗のコントラストが最大となるよう設計されており、その光学系をそのまま位相変調用には用いることはできない。本論文では、入出力光の偏光状態を変更することで、TN 型液晶素子を用いて位相変調を可能とする方法を述べる。

TN 型液晶素子内の光波は、その偏光状態を変化させながら伝搬する。そして出射光は一般に、入射光とは偏光状態が異なる。そのため出射光の位相遅れは、入射光と出射光の偏光状態を規定して初めて定義される量となる。見方を変えれば、入射光と出射光の偏光状態を変化させると、TN 型液晶素子自体の動作は同じでも、光学系全体としての位相変調特性は変化するということになる。ディスプレイ用の光学設計では、入射面における液晶分子ダイレクタ（液晶分子の長手方向）と平行な直線偏光を TN 型液晶素子に入射する。そして出射光のうち、出射面での液晶分子ダイレクタ（あるいはそれと垂直な方向）に平行な直線偏光成分のみを検出することにより、高コントラストの動作を可能としている。我々は逆に、TN 型液晶素子をビデオ信号で駆動した時、透過率の変化が少なく、かつ位相遅れの変化が大きくなるような入射光、出射光の偏光状態を見つけ出すことを考える。

TN 型液晶素子を透過する光線の偏光状態を調べるには、ジョーンズベクトルを用いた計算が便利である。本論文では、これまで用いられていた線型ジョーンズ行列モデルを発展させ、多層モデルを構築した。これまでも、液晶分子と素子基板との境界面における相互作用によって生じるエッジ効果を取りこんだ3層モデルが提案されているが、我々はこれを、一般的な多層モデルの特殊な場合と位置付け、両者が一致することを示した。多層モデルの層の厚さを0に近づけると同時に、層の数を無限大にすると、ジョーンズ行列の各要素と、液晶分子配向の間に成り立つ微分方程式が得られる。我々はそれを微分モデルとして定式化すると共に、新たにジョーンズ行列要素を極座標表示で表す角パラメーターを導入した。

TN 型液晶素子の透過率測定から、各ジョーンズ行列モデルでのパラメーターを計算する方法について検討した。その結果、TN 型液晶素子の物理パラメーターである全ツイスト角、全複屈折量、及び入射面ダイレクタが、透過率の測定結果のみからでは一意に得られないことが分かった。ただし、物理パラメーターのおおよその値が推定される場合については、数学的に得られた多数の解から、物理的に正しい唯一の解を決定できる場合があることを示した。また、多波長で

透過率測定を行うことが、解をただ一つに絞るために有効であることを示した。

TN 型液晶素子のパラメーター測定の結果に基づいて、位相変調を行うための光学系を吟味した。まず、入出力光として直線偏光のみを考えてシミュレーションを行い、偏光方向の最適化を行った。そして光干渉計を用いて位相遅れを測定した。その結果、微分モデルが最も良く位相遅れをシミュレーションできることが明らかとなった。次に往復光路での位相遅れの計算及び実験を行い、それらが一致することを確認した。最後に TN 型液晶素子の固有偏光の概念を取り入れ、負の固有偏光を用いれば、良好な位相変調特性が得られることを計算及び実験で示した。

TN 型液晶素子を空間光位相変調素子として用いて、動画ホログラフィーを達成する方法、及び移動テーブルの直線性を測定する方法を提案し、それぞれ空間光変調素子を用いるメリット、問題点等を整理して示した。

以上のように本論文では、TN 型液晶素子を空間光位相変調素子として用いるため、ジョーンズ行列モデルの構築、モデルで使用されるパラメーター測定方法、最適光学系の設計と実験的な検証、応用分野への取り組みという一連の研究結果を示した。本研究の成果に基づき、TN 型液晶素子が様々な分野で、空間光位相変調素子として用いられるようになることが期待される。

目次

概要	i
目次	iii
本論文で使用する主な記号	v
第1章 序論	1
1.1 研究の背景と目的	1
1.2 本論文の構成と概要	5
第2章 液晶素子のジョーンズ行列モデル	7
2.1 はじめに	7
2.2 座標系と光波のジョーンズ行列記法	8
2.2.1 光波の定義と位相遅れ	8
2.2.2 ジョーンズ計算	10
2.3 ツイステッド・ネマティック型液晶素子の基礎	14
2.3.1 液晶分子の性質と配向の分類	14
2.3.2 ツイステッド・ネマティック配向のダイレクタ分布	15
2.4 液晶素子のジョーンズ行列モデルの構築	20
2.4.1 線型モデル	20
2.4.2 多層モデル	24
2.4.3 微分モデル	30
2.5 第2章のまとめ	36
第3章 液晶素子のパラメーター決定	39
3.1 はじめに	39
3.2 パラメーター計算と不定性	40
3.2.1 透過率測定に基づくジョーンズ行列の計算方法と符号の不定性	40
3.2.2 ジョーンズ行列からの物理パラメーター計算方法とその不定性	43
3.2.3 動作状態における各モデルのパラメーター計算方法	46
3.3 パラメーター決定の実例	49
3.3.1 不定性の典型例	49
3.3.2 液晶素子のパラメーター決定	51
3.4 物理パラメーター計算における不定性の改善	63
3.4.1 波長変化の方法による不定性の改善	63
3.4.2 その他の方法による不定性の改善提案に対する考察	63
3.5 第3章のまとめ	69
第4章 位相変調光学系の最適化と位相変調特性の測定	71
4.1 はじめに	71
4.2 直線偏光を用いた光学系	72
4.2.1 直線偏光の偏角の最適化	72

4.2.2	透過型位相変調特性の測定	76
4.2.3	反射型位相変調特性の測定	80
4.3	固有偏光を用いた光学系.....	84
4.3.1	液晶素子の固有偏光	84
4.3.2	マッハツェンダー型干渉計を用いた位相変調特性の測定	86
4.3.3	共通光路型干渉計を用いた位相変調特性の測定	90
4.3.4	平均化固有偏光に対する考察.....	93
4.4	第4章のまとめ.....	98
第5章 液晶空間光変調素子の応用		101
5.1	はじめに.....	101
5.2	動画ホログラフィーへの応用.....	103
5.2.1	動画ホログラフィーを実現する光学系.....	103
5.2.2	情報論的考察.....	106
5.2.3	画質に関する考察.....	108
5.2.4	ホログラフィックアニメーションのデモンストレーション	115
5.3	直線計への応用	117
5.3.1	測定原理.....	117
5.3.2	実験及び結果.....	119
5.3.3	測定システムへの液晶素子の組み込み.....	121
5.4	第5章のまとめ.....	125
第6章 結論		127
謝辞		131
付録1 線型ジョーンズモデルの計算.....		132
付録2 2行2列ユニタリ行列の性質		134
付録3 透過率からジョーンズ行列要素を求める例		137
付録4 連立方程式(3-22)の解が無数にあることの証明		139
付録5 ニュートン・ラプソン法を用いた計算		140
参考文献		143
本研究に関する論文リスト.....		149
参考論文リスト		151

本論文で使用する主な記号

本論文の第2章から第4章では、混乱を避けるため、各種の量を表す記号、変数等を統一した。各章にまたがって使用されている主な記号を下記にまとめて示す。同じ文字でも大文字と小文字、ベクトルや行列を表す太字は違う量を指す。また誤解を生ずる恐れがない場合には、同じ記号が違う量を表すことがある。

座標系に関するもの

x, y, z 光波を記述する3次元直交座標系 光軸方向を z 軸正にとる

光波に関するもの

c	光速
λ	光の波長
f	光の振動数
ω	光の角振動数 $= 2\pi f$
k	波数 $= \frac{2\pi}{\lambda}$
i	虚数単位
\mathbf{E}	光波の電場ベクトル
\tilde{A}	光波の複素振幅
A	光波の実振幅 $= \tilde{A} $
\tilde{T}	光波の複素振幅透過率
T	光波の強度透過率 $= \tilde{T} ^2$
I	光波の強度
δ	位相遅れ
ε	楕円偏光の楕円率
χ	楕円率角

液晶に関するもの

n	媒質の屈折率, 液晶の実効屈折率
n_e	液晶の異常屈折率
n_o	液晶の常屈折率
ζ	液晶分子の方位角
η	液晶分子のチルト角
α_T	ツイステッド・ネマティック型液晶素子の全ツイスト角

ジョーンズ行列モデルに関するもの

d	液晶層の厚さ
\mathbf{J}	ツイステッド・ネマティック型液晶素子のジョーンズ行列
\mathbf{M}	ツイステッド・ネマティック型液晶素子ジョーンズ行列の主行列
f	位相項を除いた行列 \mathbf{J} の(1,1)要素の実数部
$-g$	位相項を除いた行列 \mathbf{J} の(1,1)要素の虚数部
h	位相項を除いた行列 \mathbf{J} の(1,2)要素の実数部
$-j$	位相項を除いた行列 \mathbf{J} の(1,2)要素の虚数部
a	主行列 \mathbf{M} の(1,1)要素の実数部
$-b$	主行列 \mathbf{M} の(1,1)要素の虚数部
c	主行列 \mathbf{M} の(1,2)要素 (実数)
ϕ_c	行列 \mathbf{J} の位相項の定数部分
β_T	ツイステッド・ネマティック型液晶素子の全複屈折量
ϕ_D	ツイステッド・ネマティック型液晶素子の入射面ダイレクタ
θ	ツイステッド・ネマティック型液晶素子の角パラメーター
ϕ	ツイステッド・ネマティック型液晶素子の角パラメーター

光学系に関するもの

ϕ	方位角
ϕ_P	偏光子の偏角
ϕ_A	検光子の偏角

第1章 序論

1.1 研究の背景と目的

光はエネルギーと情報を伝達する媒体である。自然界においては、太陽光が地上のあらゆる生命の源となっている。一方人工的な光源による照明により、我々は夜でも眼を通して物体を認識することができる。光は、前者では主にエネルギー伝達の役目を、後者では主に情報伝達の役目を果たしている。

光を光波と捉え、その振幅と位相を考えたとき、エネルギーとしての伝達に寄与するのは振幅の2乗である光の強度である。また振幅は、その時間的変化、及び空間的分布により情報を伝達する。一方光波の位相は、光が進む方向を表しており、情報の伝達のみならず寄与している。自然光の光波の位相は光子毎にランダムであり、情報伝達手段として用いることは難しいが、位相の揃った光波を発生させるレーザー光の出現によって、位相を用いた情報伝達が容易となった。ホログラフィーや光干渉計では、光波の位相を用いた情報伝達を実現しており、従来困難であった3次元像の観察や、高精度の計測を可能とした。ただし光の位相を直接検出することはできないので、位相による情報伝達では、干渉という手段を通して強度に変換した情報を検出する。

光波の振幅及び位相を変化させる光学素子は、それぞれ強度変調素子、位相変調素子と呼ばれる。光波の時間的、及び空間的変調に用いられる光学素子の例を表1-1に示す。開口は最も単純な強度変調素子と考えられ、開口を開閉することにより時間的変調が可能となり、また開口を多数並べることで空間的変調が可能となる。時間的な強度変調は特に近年、光通信技術として広く普及している。一方レンズ、ミラー、回折格子等の基本的な光学素子は、全て光路を偏向させる素子であり、光学的な位相変調素子と考えることができる。電気光学結晶や液晶には複屈折性があり、入射光の偏光状態を変化させる偏光変調素子を構成することができる。これら偏光変調素子では、入射光と出射光の偏光状態を規定することにより、一つの素子を強度変調素子としても位相変調素子としても用いることができる。このように表1-1に示した光変調素子は、様々な応用において有用な素子として用いられている。

表 1-1 各種光変調素子

	強度変調	位相変調
時間的変調	光チョッパー 電気光学素子 半導体レーザー直接変調 液晶素子	音響光学素子 電気光学素子 ピエゾミラー 液晶素子
空間的変調	開口 スライドフィルム 振幅型ホログラム 液晶素子	回折格子 マイクロミラーアレイ 位相型ホログラム 液晶素子

ここで注意しなければいけないのは、光の強度情報を伝達する際にも位相変調素子が使用可能であり、また逆に、強度変調素子を用いて光の位相情報を加工することが可能なことである。つまり、情報を担っているものが光の強度なのか位相なのかという事柄と、情報を伝達している光路中の素子が強度変調を行っているか、位相変調を行っているかということは区別して考える必要がある。光の強度を用いた情報伝達の例として結像を考える。強度変調素子であるピンホールを用いれば、ピンホールカメラの原理により結像作用を行うことができる。しかし、位相変調素子であるレンズによって結像を行う方がより一般的である。光の位相を用いた情報伝達の例には、ホログラムがある。ホログラフィーは最初に電子線顕微鏡の解像度を向上させるための手段として考案され¹⁾、レーザーの発明後は干渉縞として光の位相情報を記録し、立体情報を伝達する手段として発展した²⁾。ホログラムにおける位相情報の記録、再生は強度変調素子である振幅型ホログラムと、位相変調素子である位相型ホログラムのどちらにおいても可能である。

このように応用面においては、強度変調素子と位相変調素子のどちらを用いても所望する機能を発揮させることが可能な例は多い。しかしながら、光の利用効率の点で両者には大きな隔りがある。これは、強度変調においては必ず、吸収等による光のエネルギーロスがあるためである。例えば結像ではピンホールカメラより通常のカメラの方が像を明るくでき、また2値型の回折格子では、強度変調型の最大理論回折効率が6.25%であるのに対し³⁾、位相変調型では40.1%になる⁴⁾。つまり、同等の手間と費用をかけてある機能が達成されるならば、光の利用効率の点で、位相変調素子は強度変調素子よりも圧倒的に有利だといえる。

表1-1に示した通り液晶素子は、強度変調、位相変調、時間的変調、空間的変調の全ての変調を行うことが可能な素子であり、またそれらを組み合わせた変調光学系を構築することも可能である。これは、他の素子がほとんど全て単能な素子であるのに対し、液晶素子には複数の機能を融合させることが可能であることを意味しており、液晶素子が持つ著しい特徴となっている。例えば、液晶素子にフレネルレンズのパターンを描けばレンズと同等の機能を果たすが、液晶素子では機械的な駆動なしにその焦点距離を変化させることができる。このように、液晶素子は非常にフレキシビリティの高い制御を行うことが可能な素子であり、また高精細、低電圧駆動などの優れた性質があるため、様々な応用でキーデバイスとなる可能性を秘めた将来性の高い素子である。そしてできうるならば液晶素子を、光の利用効率の点で有利な位相変調素子として利用したいと考えるのは自然の理である。液晶素子を広範な技術に応用するために、その位相変調特性を理論的、実験的に解析することは極めて重要であり、本論文のメインテーマとなっている。

液晶分子は細長く、ある温度範囲において、液体ではあるが規則正しく分子配向する。配向した液晶層に光を通すと、光の電場ベクトルの振動方向によって光の進行速度が異なる。つまり、偏光状態によって屈折率が変化し、複屈折性を示す。液晶は配向状態により分類されるが、最も多く使用されているのがネマティック液晶である。ネマティック液晶を挟む基板にラビング処理を施し、ラビングの方向を入射側基板と出射側基板で90°程度回転させると、基板付近の液晶分子はラビングの方向に配向するので、液晶層の全体をみると液晶分子はらせん状に90°程度捻れた配向をするようになる。そのようなツイステッド・ネマティック (TN) 型の液晶素子では、素子を2枚の偏光子に挟むことにより光の強度変調が可能となり、ディスプレイ用の素子として広範に使用されている。

ネマティック液晶を用いて、空間的位相変調を行うことを考える。一つの方策は、ラビング

した基板を入射側と出射側で回転させることなく、平行配向（ホモジニアス）型とした液晶素子を用いることである。実際、空間光位相変調素子としての性能は、TN型の素子よりも平行配向型の素子の方が優れている。しかしながら平行配向型液晶素子は、製品として市場に供給されているものが少ないため入手困難であり、また特に高精細なものは非常に高価である。一方高精細なTN型液晶素子は、液晶プロジェクター用やビデオカメラのファインダー用の素子として量産されており、安価で容易に入手可能である。そのため、TN型液晶素子を位相変調素子として使用したいという要求が生じた。本論文の実験で使用した素子は全て液晶プロジェクター用に開発されたTN型液晶素子である。液晶プロジェクター用のTN型液晶素子は、動画像表示が可能のように十分応答性が速く、かつ特定の光学系においてコントラストが最大となるよう設計されている。そのような素子を、本来の使用目的とは異なる位相変調素子として用いるためには、本論文で示すような理論的、実験的解析が必要となる。

初期の液晶素子を用いた光学実験では、ヒューズ社の液晶ライトバルブ（Liquid crystal light valve）が光学的情報処理に使用された^{5,6)}。この素子は、 45° にツイストされたネマティック型液晶素子であり、光書き込み型の素子であった。その後液晶テレビが容易に入手可能となり、空間的な強度変調素子として光学的情報処理⁷⁻⁹⁾や、計算機ホログラムを用いた像再生¹⁰⁾に利用されるようになった。その後、平行配向型液晶素子を空間光位相変調素子として使用して、光学的情報処理^{11,12)}、光インターコネクション¹³⁻¹⁵⁾、ホログラフイー^{16,17)}に応用した報告がなされた。しかしながら高精細な平行配向型素子は依然として入手困難な状況にあり、TN型液晶素子を位相変調素子として使用する試みが行われるようになった。

空間光位相変調素子を応用面から考えた場合、次の位相変調特性が求められる。

- ① 0から 2π までの連続的な位相変調が可能であること。
- ② 透過率が一定で強度変調がなく、位相変調のみが可能であること。
- ③ 空間解像度が高いこと。

市販のTN型液晶素子を空間光位相変調素子として利用する場合には、③に関しては製品によって規定されてしまうので、使用者側ではより高精細な製品を選定すること以外工夫の余地はない。そのため、主に①と②を達成するように、様々な研究が行われてきた。Konfortiらは、TN型液晶素子に与える電圧を光学の閾値以下で駆動した場合、位相のみの変調を行うことが可能だと報告した¹⁸⁾。またBarnesらは、液晶層にかかるバイアス電圧を変化させた時、ビデオ信号によってどのような位相変調が可能かを調べた¹⁹⁾。その結果、光学の閾値以下のバイアス電圧では、閾値以上の時と比較して、ビデオ信号入力に対する出力光の位相変化が急峻となるが、最大位相変調量はほとんど増加しないことが分かった。市販のTN型液晶素子では通常、組み込まれている電気的回路を用いてビデオ信号で駆動するが、メーカー側で最適に調整されている駆動電圧を変化させても、位相変調特性の観点からは、性能の大幅な向上は期待できないということである。このため以後の研究では、TN型液晶素子の装置側には手を付けず、ジョーンズ行列を用いたTN型液晶素子の変調特性の解析、及び特定の入出力偏光状態での位相変調特性の測定が行われるようになった²⁰⁻²⁶⁾。

これらの先駆的な研究により、TN型液晶素子を空間光位相変調素子として、様々な光学応用に適用可能なことが示された。しかしながら、いくつかの問題点も同時に明らかになった。具体的には、用いる素子によって 2π の位相変調ができなかったり、大きな強度変調が付随して生じ

てしまったりすることである。これは、メーカー側で液晶プロジェクター用の素子開発が進み、空間解像度が高くなる一方、応答速度を高めるため、液晶層を薄くした製品を発表するようになったという事情による。液晶分子の外部電界に対する応答速度は、液晶層の厚さの 2 乗に比例して遅くなる^{27,28)}。したがって、ビデオレートでの駆動を実現するために、液晶層の薄層化は必要な改良措置であった。一方液晶素子による位相変調量は、液晶分子の配向によって生じる複屈折率と、液晶層の厚さの積である複屈折量に依存する。初期の TN 型液晶素子では液晶層が厚かったため、複屈折量も大きく、十分大きな量の位相変調を行うことができた。しかしながら新しい製品では液晶層が薄くなったため、複屈折量が小さくなり、位相変調量も小さくなった。その結果、新たに入手可能となった素子と、それまでに用いられていた素子を比較すると、上記位相変調特性のうち③の空間解像度で有利になる反面、①と②の位相変調特性の点で不利になった。そのため、初期の TN 型液晶素子で位相変調を行うのに有効だった方法、つまり液晶分子の長手方向に偏光した直線偏光を入射させる通常の光学系を用いる方法では、もはや①と②を同時に満足することはできなくなった。要するに、液晶層の薄い TN 型液晶素子では、本論文にあるような詳細な解析と光学系の最適化を行わなければ、良好な位相変調特性が得られないのである。

本論文の目的は、動画ホログラフィー、及び光干渉計への応用を念頭において、TN 型液晶素子による空間光位相変調技術を確立することである。そのためには、TN 型液晶素子を精密にモデル化し、素子の最適な使用方法を見出す必要がある。確立された空間光位相変調技術は、本論文で述べる以外の様々な応用にも適用可能となる。

なお液晶素子には、液晶分子ツイストのない平行配向型液晶素子、約 270° ツイストしたスーパーツイステッド・ネマティック型液晶素子、強誘電性液晶を用いた素子、スメクティック液晶を用いた素子等が存在するが、本論文で単に液晶素子と書き表した時は、液晶プロジェクター等で通常使用されている、液晶分子が約 90° ツイストされた TN 型液晶素子を指すものとする。

1.2 本論文の構成と概要

第1章は序論であり、本論文の研究を行うに至った背景、本研究の意義等を明らかにした。

第2章「液晶素子のジョーンズ行列モデル」では、TN型液晶素子のジョーンズ行列モデルについて述べる。ジョーンズ行列は、偏光素子を記述するのに便利な2行2列の複素行列であり、偏光状態を表すジョーンズベクトルとの演算により、素子を透過したときの偏光状態変化を計算できる。液晶素子のジョーンズ行列が知れば、液晶素子に対する入出力光を規定した時、どのような強度変調特性、及び位相変調特性が得られるかを計算することが可能となる。位相変調特性を得るためにはジョーンズ行列の位相項を知る必要があるが、位相項を直接測定することは困難なため、行列要素から間接的に計算される。この計算のために用いられるのがジョーンズ行列モデルである。これまでTN型液晶素子は、液晶層中の液晶分子のツイスト角が厚みに対して線形に変化し、チルト角が厚みに対して一定であるという近似を用いてジョーンズ行列モデルが構築されていた。しかしながらこのモデルは不完全であり、液晶素子の位相変調量は、干渉計を用いた実験により測定される値と、このモデルから得られる推定値との間に10%程度の誤差があった。そこで第2章では、ツイスト角、チルト角に対する近似をより精密化することにより、現実の液晶素子をより良く表すモデルの構築を試みる。得られたモデルの良否は、第4章において測定値と比較することにより検証される。

第3章「液晶素子のパラメーター決定」では、構築されたTN型液晶素子のジョーンズ行列モデルを用いて、透過率測定の結果からその行列要素を求める方法、及びその行列要素から液晶素子の物理パラメーターである全ツイスト角、全複屈折量、及び入射面での液晶分子ダイレクタを計算する方法について述べる。特に、数学的にはこれらのパラメーターが一意に決定できないことを示す。そして典型的な例と2つの実例を通して、その解の不定性の性質を調べる。さらに物理的な考察の助けを借りて、パラメーターを一意に決定することが可能かどうか吟味する。また、第2章で構築したいくつかのジョーンズ行列モデルを用いた場合に、計算される全複屈折量にどれ程の差異が生じるか計算機シミュレーションを行い、結果を示す。

第4章「位相変調光学系の最適化と位相変調特性の測定」では、得られたTN型液晶素子のモデル及び物理パラメーターを用いて、位相変調光学系を最適化する方法について述べる。具体的にはまず、液晶素子への入出力光として直線偏光のみを考え、シミュレーションによって強度変調特性、位相変調特性を調べて、位相変調光学系として最適な偏光方向を決定する。そしてマッハツェンダー型干渉計を用いて、最適化された光学系における位相変調特性を測定する。測定結果は、液晶素子のジョーンズ行列モデルに基づいて計算された結果と比較され、構築したモデルの良否判定が行われる。次に、往復光路での位相変調量について考察し、マイケルソン型干渉計での測定方法とその結果について述べる。最後に、ジョーンズ行列の固有値と固有ベクトルを用いた固有偏光状態を考える。固有偏光を入出力光にした場合の位相変調量は、マッハツェンダー型の干渉計で測定される。またより安定性の高い方法である、共通光路型干渉計での測定について述べる。共通光路型干渉計では、液晶素子をジョーンズ行列で表したときの固有値を、出射光の位相変化として直接測定することが可能となる。

第5章「液晶空間光変調素子の応用」では、TN型液晶素子を空間光位相変調素子として用いる応用について述べる。動画ホログラフィーへの応用ではまず、光学的観点及び情報論的観点か

ら動画ホログラフィーについて考察する．次に再生像の解像線数に着目し，実験結果が理論値よりも相当程度小さくなる原因を調べる．最後に，ホログラフィックアニメーションのデモンストレーション結果を示す．移動テーブルの直線性を測定する光干渉計への応用ではまず，回折格子からの回折光を利用した測定の原理を述べる．次に実験結果を示す．最後に，回折格子を空間光変調素子に代替することにより，どのような利点が生じるかを述べる．

第6章では本論文の結論を述べる．

第 2 章 液晶素子のジョーンズ行列モデル

2.1 はじめに

本論文においては、光を波動論の立場から取り扱い、計算の便利さから通常行われているよう、複素振幅を持った波として表す。この表記法は、多くの光学の教科書^{29,30)}で採用されているものと同じである。また、偏光状態等を計算するのに便利なジョーンズ計算を行う³¹⁾。ジョーンズ計算は、コヒーレントなレーザー光を用いて、多くの偏光素子からなる光学系での光波の伝搬を取り扱うのに便利な計算法であり、特に光の位相の関係を掴みやすい利点がある。ジョーンズベクトル及びジョーンズ行列の表式は、用いる電磁場の表式及び座標系(右手系, 左手系)によって異なるので、統一的な解釈が可能となるよう、本章の最初で記法を整理する。なお、ジョーンズ行列の本記法は文献^{32~34)}と同様である。本論文を書くにあたって参考とした教科書³⁵⁾の中には、記述法が異なるものもあるので注意を要する。

本章では次に、液晶そのものの物理的性質、及びそれを素子にしたときの振る舞い等に関して、基本的な事項をまとめた。特に、液晶分子がどのように配向し、その配向が外部電圧によってどのように変化するかということは、TN 型液晶素子をモデル化する上で知っておかなければならない重要事項である。

TN 型液晶素子のジョーンズ行列モデルは、一定の厚さを持った薄い位相板を積層した時のジョーンズ行列を計算することによって得られる。この際隣り合った位相板は皆同一の複屈折量を持つが、液晶分子のツイストにしたがって回転している。この回転量が一定な場合、すなわち液晶層の厚みに比例して液晶分子がツイストする場合のジョーンズ行列は広く知られており^{36,37)}、多くの研究者がそのモデルを用いている。本論文ではそのモデルを線型モデルと名付ける。液晶素子のスイッチがオフの状態では線型モデルは厳密に正しく、全てのモデルは線型モデルに一致する。スイッチがオンとなり、液晶層に電圧が印加された状態では、ツイストは必ずしも液晶層の厚みに比例しなくなり、また各位相板で複屈折量が等しいという仮定も成り立たなくなるので、線型モデルは液晶素子を正確に表現できなくなる。これら液晶分子のツイスト及び複屈折量の非線型性をできるだけ忠実にモデルに取り込むため、多層モデルが必要となる。また多層モデルの極限として微分モデルが得られる。

最後に、微分モデルを表すための便利な記法として、角パラメーターを導入する。本章の議論では、角パラメーターは単なる極座標による変数変換に過ぎないが、透過率測定からパラメーターを計算する際にもこの記法が便利なのが第 3 章で分かる。さらに第 4 章において固有偏光を考える時、角パラメーターの物理的意味が明らかとなる。

2.2 座標系と光波のジョーンズ行列記法

2.2.1 光波の定義と位相遅れ

右手系の直交座標系をとり，光の進行方向を z 軸正方向とする．このとき，真空中における波長 λ の単色光平面波の電場 \mathbf{E} は，以下の式で表される．

$$\mathbf{E}(t, z) = \text{Re}\{\tilde{\mathbf{A}} \exp[i(\omega t - kz)]\} \quad (2-1)$$

ただし，振幅 $\tilde{\mathbf{A}}$ におけるチルダ \sim の記号はこの量が複素数成分を持つことを表している．光の強度として観測可能な物理量は，その大きさである実振幅 $|\tilde{\mathbf{A}}|$ である．また， ω は光の角振動数

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad (2-2)$$

k は波数

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2-3)$$

である．ここで c は真空中の光速を表す．式(2-1)中の $\tilde{\mathbf{A}}$ は，ある時刻 t における位置 z での電場ベクトルの複素振幅を表しており，電磁波の電場ベクトルは進行方向に垂直なので x ，及び y 成分を持つ．それらを E_x ， E_y とすると

$$\begin{cases} E_x = A_x \exp(i\phi_x) \\ E_y = A_y \exp(i\phi_y) \end{cases} \quad (2-4)$$

と表すことができる．ここで， ϕ_x 及び ϕ_y は，原点で時刻 $t=0$ の時の光波の位相を表しており，それぞれ電場ベクトルの x 及び y 成分の初期位相である．時刻 $t=0$ の時の電場ベクトルの様子を図 2-1 に示す．

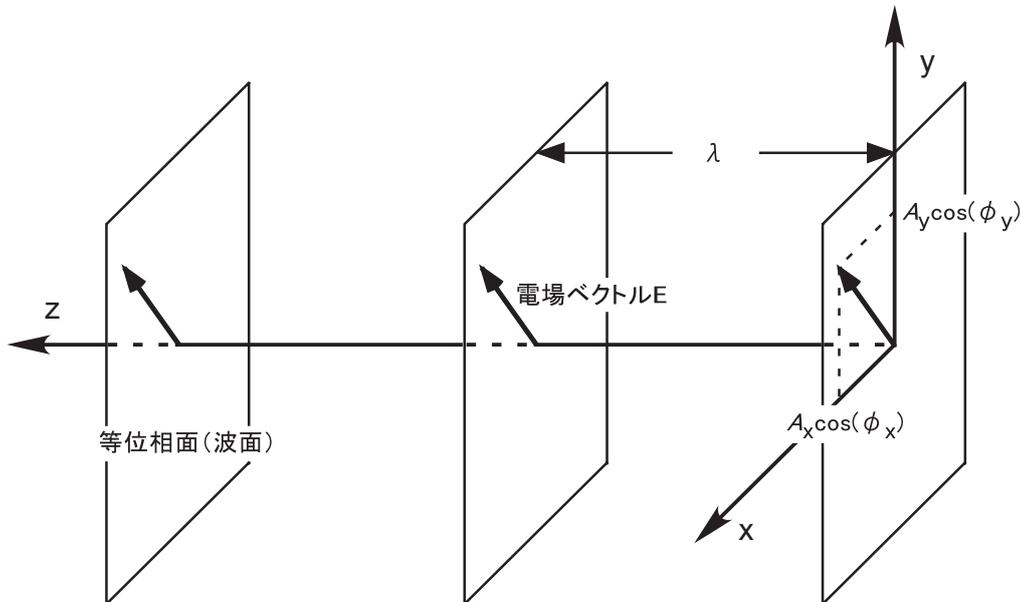


図 2-1 z 軸方向に伝播する単色光平面波の波面と電場ベクトル

この単色光平面波が真空中を伝播し、時刻 $t=t_1$ に $z=z_1$ に到達したとすると、式(2-1)中の位相項は $\omega t_1 - kz_1$ となるが、 $z_1=ct_1$ の関係を代入し、式(2-2)及び(2-3)を用いるとこの位相項は 0 となる。したがって、このとき電場ベクトルの位相は ϕ_x 及び ϕ_y となって、初期位相と等しくなる。この単色光平面波が、図 2-2 に示すように屈折率 n の等方的な媒質中を同様に進行した時の、時刻 $t=t_1$ 、位置 $z=z_1$ での電場ベクトルの位相を求める。この媒質中で光速度は c/n となるから、光は時刻 $t=t_1$ には位置 z_1 には到達せず、時刻 $t_1'=nz_1/c$ に到達する（時刻 t_1' での位置 z_1 の位相は ϕ_x 及び ϕ_y である）。時刻 t_1 での位置 z_1 における電場ベクトルの位相は、式(2-1)に t_1 及び z_1 を代入し、媒質中では光の角振動数 ω は変化しないが、波数 k が n 倍になることから

$$\omega t_1 - kz_1 + \phi_{x,y} = -\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)z_1 + \phi_{x,y} \quad (2-5)$$

となる。ここで $(n-1)z_1$ は、光が原点から位置 z_1 まで媒質中を進んだ時と真空中を進んだときの光路長差を表しており、その光路長差に対応する位相変化は

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)z_1 \quad (2-6)$$

である。

一般に、ある点を同位相で出発した光が別の点に到達した時、途中の媒質の屈折率が n であると光路長が n 倍長くなるため、真空中を進むのに比べて式(2-6)で表される量だけ位相が遅れる。そこでこの位相変化 δ を途中の媒質による位相遅れという。

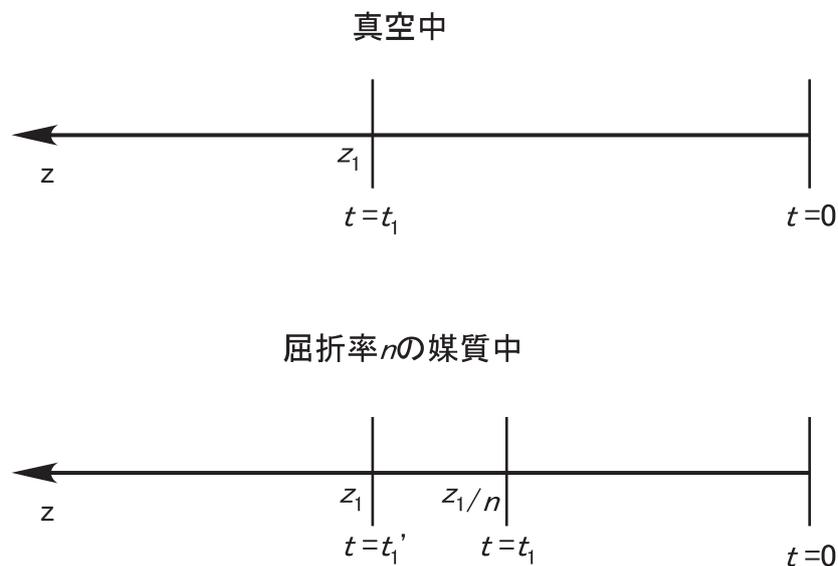


図 2-2 光が屈折率 n の媒質中を進んだときの様子

式(2-5)を見ると、光波の電場を式(2-1)で定義した時の位相遅れは、光波の電場ベクトルの位相項に負号を伴って現れることが分かる。つまり、ある電場ベクトルの位相項と別の電場ベクトルの位相項を比較する時、位相量の大きな方の位相が進んでおり、小さな方の位相が遅れているということが一目で分かる。この定義は、光波の位相における数値としての大きさと、進み、遅れという言葉が一致しているので分かりやすい。一方、単色光平面光波を

$$\mathbf{E}(t, z) = \text{Re}\left\{\tilde{\mathbf{A}} \exp[i(kz - \omega t)]\right\} \quad (2-7)$$

で定義することも可能であるが³⁵⁾、この定義を採用した場合に得られる式(2-5)に対応する式は

$$kz_1 - \omega t_1 + \phi_{x,y} = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)z_1 + \phi_{x,y} \quad (2-8)$$

となり、位相項に位相遅れが正の量として現れる。これは位相遅れという言葉と感覚的に矛盾するので本論文では採用せず、式(2-1)に統一した表現を用いることとする。このように、位相の進み、遅れと数式上の位相の正負との関係は、光波ベクトルの定義によって変化するので注意を要する。

2.2.2 ジョーンズ計算

レーザー光等のコヒーレントな光波の偏光状態、すなわち電場ベクトルの x 成分と y 成分の間の位相の関係を取り扱うには、ジョーンズ行列とジョーンズベクトルを用いた計算が便利である³¹⁻³⁴⁾。本論文ではこのジョーンズ計算を頻繁に行うため、ここでその計算法を整理する。

式(2-4)における x , y 成分を列ベクトルで表すと

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_x \exp(i\phi_x) \\ A_y \exp(i\phi_y) \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

となるが、これをジョーンズベクトルと呼ぶ。ジョーンズベクトルは一般に 2 次元の複素ベクトルである。偏光素子を透過する光の偏光状態や強度を計算したり、干渉縞の強度を表したりする際、光の絶対的な位相は通常問題とならないので x , y 成分の共通項は省略して位相差のみを残し、また絶対値を 1 に規格化すると(2-9)式は

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \exp(-i\Delta\phi) \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

となる。通常はこの基準化されたジョーンズベクトルを用いる。ここで $\Delta\phi$ は x , y 成分の位相差であり、直線偏光では 0、円偏光及び主軸が座標軸と一致した楕円偏光では $\pm 90^\circ$ である。主軸が座標軸と一致した楕円偏光の場合、 χ は楕円率の正接となり、楕円率角と呼ばれる。いろいろな偏光状態の時の基準化ジョーンズベクトルを表 2-1 にまとめる。ここでも、書物によって左右の偏光に対する定義が異なる^{30,35)}ので、注意を要する。本論文では、右ねじが進む向きと光の進行方向を合わせた時、ある瞬間の電場ベクトル先端が右ねじの山と一致するとき右回りの偏光と定義する。これは、光の進む向きを z 軸にとった時、 z 軸無限遠から見て、 $z=0$ の平面と電場ベクトル先端との交点が時間と共に右回り（時計回り）に回転するような偏光状態である。この交点の軌跡を参照面跡と呼び、表 2-1 に示す形となる。

表 2-1 代表的なジョーンズベクトル（楕円偏光については、楕円率 ε を常に正にとった場合を示す。楕円率の正負によって回り方を表すことも可能であり、その場合は全ての楕円偏光は下記右楕円偏光の表式で表され、 $-1 < \varepsilon < 0$ の時左楕円偏光、 $0 < \varepsilon < 1$ の時右楕円偏光となる。）

偏光の名称	偏光の参照面跡	基準化ジョーンズベクトル
x 軸方向の直線偏光		$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
y 軸方向の直線偏光		$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
x 軸から 45° 方向の直線偏光		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
x 軸から -45° 方向の直線偏光		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
一般の直線偏光 (x 軸となす角 ψ)		$\begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$
右円偏光		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
左円偏光		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$
長軸が x 軸方向で楕円率 ε の右楕円偏光		$\begin{pmatrix} \cos \chi \\ i \sin \chi \end{pmatrix}$ ただし $\chi = \tan^{-1} \varepsilon$
長軸が x 軸方向で楕円率 ε の左楕円偏光		$\begin{pmatrix} i \cos \chi \\ \sin \chi \end{pmatrix}$ ただし $\chi = \tan^{-1} \varepsilon$

ジョーンズ計算においては、入射光線をジョーンズベクトルで表し、光学素子を表すジョーンズ行列にそれをかけることで出射光線のジョーンズベクトルを得る。行列の積の順序は通常の数学における計算と合うよう、一番右側に入射光を表すジョーンズベクトルを置き、以下光が進行する順番に、左側へ向かって光学素子を表すジョーンズ行列を配置する。ジョーンズ行列は、一般に 2 行 2 列の複素行列となる。また、入射光の偏光状態に係わらず常に強度透過率が 1、すなわち光を吸収しない光学素子のジョーンズ行列の行列式は ± 1 である。出射光の強度や偏光状態を計算する目的においては、出射光の x, y 成分の相対的位相差だけが問題であり、両成分に共通な絶対的な位相の変化は無視することができる。絶対位相の変化を無視して標準的な形とした、代表的な位相光学素子のジョーンズ行列を表 2-2 に示す。表 2-2 中、位相板に対するジョーンズ行列は、その速い軸を x 軸方向としたとき、x 軸方向の位相が y 軸方向に対して $\Delta \phi$ 進むことが分かる。すなわち位相板では、速い軸方向の偏光成分が、遅い軸方向の偏光成分よりも位相が進む。このようにすると、速い、遅いという用語と、位相の進み、遅れといった言葉の意味が合うので分かりやすい。

表 2-2 代表的なジョーンズ行列

偏光素子と記号	軸の方向等と記号	ジョーンズ行列
偏光子 P	透過軸 0° P ₀	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
	透過軸 90° P ₉₀	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	透過軸 45° P ₄₅	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
	透過軸-45° P ₋₄₅	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
	透過軸 ψ P _{ψ}	$\begin{pmatrix} \cos^2 \psi & \sin \psi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi \end{pmatrix}$
位相板	x 軸方向に対して y 軸方向の 位相遅れが $\Delta \phi$	$\begin{bmatrix} \exp(i\frac{\Delta\phi}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-i\frac{\Delta\phi}{2}) \end{bmatrix}$
1/4 波長板 Q	速い軸 0° Q ₀	$\begin{bmatrix} \exp(i\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & \exp(-i\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$ 又は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
	速い軸 90° Q ₉₀	$\begin{bmatrix} \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$ 又は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
	速い軸 45° Q ₄₅	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
	速い軸-45° Q ₋₄₅	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$
1/2 波長板 H	速い軸 0° または 90° H ₀	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
	速い軸 45° または-45° H ₄₅	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
等方性媒質 T	強度透過率 T	$\sqrt{T} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
回転 R	回転角 ψ R (ψ)	$\begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$
鏡 V	z 軸及び x 軸反転	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ 又は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (H ₀ と同じ)

表 2-2 において, \mathbf{R} は座標軸を角 ψ だけ回転する行列を表している. つまり, あるジョーンズベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ があるとき, そのジョーンズベクトルを角 ψ だけ傾いた $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 座標系でみると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \mathbf{R}(\psi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-11)$$

となる. また, 軸方向が x 軸に対して 0° の光学素子に対するジョーンズ行列 \mathbf{J}_0 が分かっている時, 軸方向が ψ だけ回転した素子に対するジョーンズ行列 \mathbf{J}_ψ は

$$\mathbf{J}_\psi = \mathbf{R}(-\psi) \mathbf{J}_0 \mathbf{R}(\psi) \quad (2-12)$$

により計算することができる. 例えば, 速い軸が 0° の $1/2$ 波長板のジョーンズ行列から速い軸が 90° の $1/2$ 波長板のジョーンズ行列を求めると,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{90} &= \mathbf{R}(-90) \mathbf{H}_0 \mathbf{R}(90) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-13)$$

となる. x, y 成分に共通な負符号は, 速い軸が 0° の場合と 90° の場合で 180° の絶対的な位相差があることを表しているが, それを無視した標準的な形のジョーンズ行列では, 両者は等しくなることが分かる.

2.3 ツイステッド・ネマティック型液晶素子の基礎

2.3.1 液晶分子の性質と配向の分類

液晶は、流動性という液体の性質をもっているが、物性的には結晶のような異方性を兼ね備えた物質である³⁸⁾。液晶は一般に、細長い分子あるいは板状の分子から構成されており、流動性を保ちながらも規則正しい分子配向をするため、異方性を発現すると考えられている。液晶は1888年に発見され、その後1930年前後にかけてその構造に関する基礎的研究がなされた。1960年代頃から液晶の電氣的、光学的性質が詳しく研究され始めると共に、ディスプレイ素子としての工学的応用が始まった。液晶ディスプレイには、小型、薄型、軽量、高解像度、省電力等の優れた特徴があるため、また半導体技術、あるいは情報通信機器との融合により、今ではディスプレイ素子として確固たる地位を築いている。

液晶分子はその配列の仕方によって、ネマティック液晶、スメクティック液晶、コレステリック液晶の三つに分類される。このうち、ディスプレイ素子への応用には、ネマティック液晶が一番多く用いられている。ネマティック液晶は細長い分子であり、その分子長鎖の方向を揃えて配向している。ただし、分子の重心位置関係はランダムである。ある領域で、平均的な分子の配向方向をダイレクタという。なお、個々の液晶分子の分子長鎖は、ダイレクタと完全に平行ではなく、ある程度ゆらぎがある。本論文で理論的解析の対象とし、実験に用いているのは、液晶ディスプレイ用に液晶層中でのダイレクタが約90°回転しているツイステッド・ネマティック液晶である。

液晶分子は、ダイレクタ方向の比誘電率 $\epsilon_{//}$ とそれに垂直な成分 ϵ_{\perp} とは一般に異なり、電氣的、光学的な異方性を有している。電氣的には、誘電異方性 $\epsilon_{//} - \epsilon_{\perp}$ が正の時（このときp型の液晶という）、液晶分子に電界を印加すると、ダイレクタは電界の方向と平行になる。誘電異方性が負の時（n型液晶）では、ダイレクタが電界と垂直になるように並ぶ。光学的には、ほとんどのネマティック液晶においては、光の偏光面、つまり光の電場振動方向が液晶分子ダイレクタと平行な場合の屈折率は、垂直の場合の屈折率に比べて大きくなる。前者の屈折率を異常屈折率といって n_e で表し、後者を常屈折率といって n_o で表す。結晶光学的にみると、ネマティック液晶はそのダイレクタが一定の領域では、複屈折率が正の一軸性結晶と同等と考えることができる。

液晶を数ミクロンの間隔を保った平行なガラス基板の間に封入すると、界面からの影響を受けていくつかの特有な配向状態を示す。具体的な配向状態には、図2-3に示すように(a)ダイレクタが基板に平行となるホモジニアス配向、(b)ダイレクタが基板に対して垂直方向を向いたホメオトロピック配向、(c)ダイレクタが中間的な方向を向くチルト配向、(d)ホモジニアス配向とホメオトロピック配向とを組み合わせたハイブリッド配向、(e)ホモジニアス配向におけるダイレクタが基板に垂直な軸の周りに捩れたツイスト配向がある。これらの配向は、各基板界面の表面処理（ラビング処理）によって得られる。基板界面と液晶分子との相互作用はきわめて強く、外部電界の影響により液晶層内部の分子配向が変化した場合でも、界面付近では液晶分子配向は変化しない。2.4節で導く液晶素子のジョーンズ行列モデルでは、モデルによってこの界面での液晶分子配向の取り扱い方が異なっており、位相遅れの計算値に違いが生じる要因となっている。

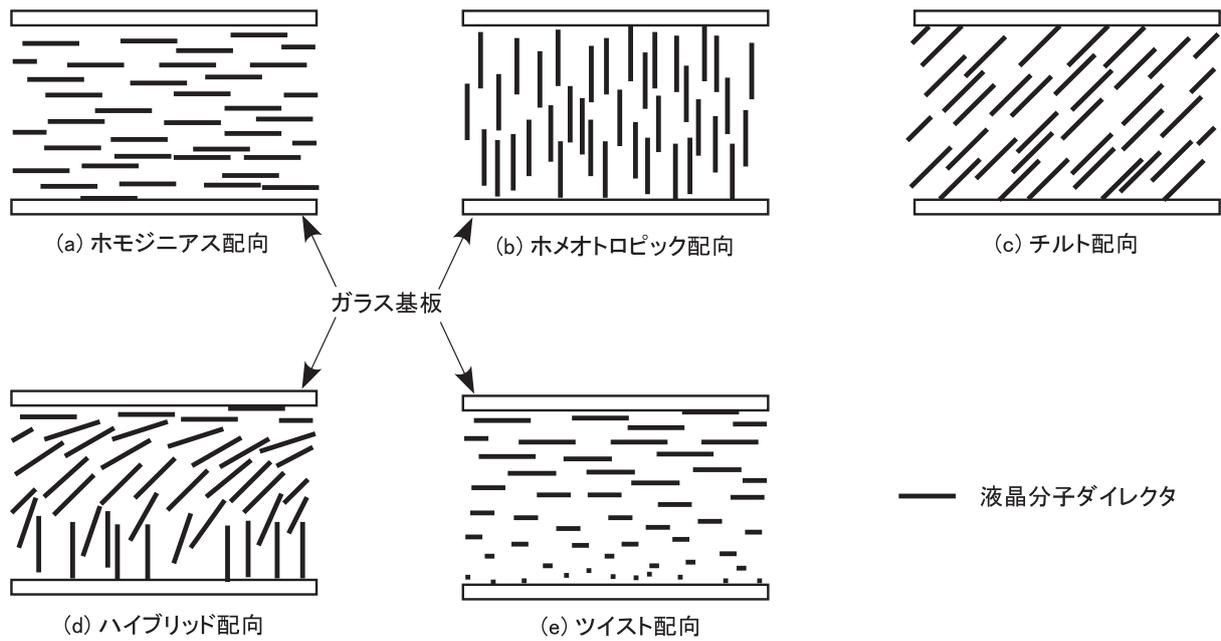


図 2-3 液晶分子ダイレクタの配向

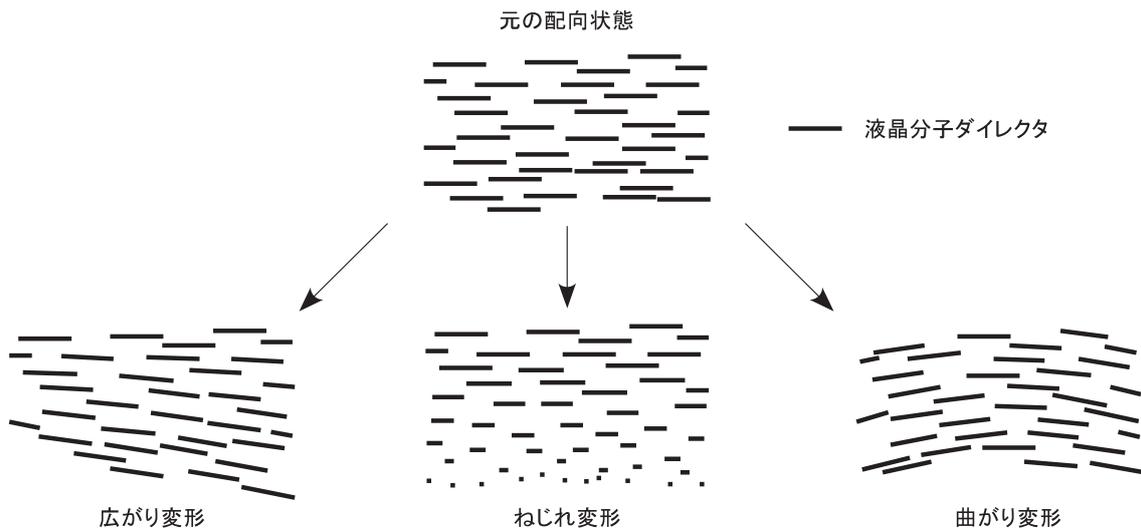


図 2-4 ネマティック液晶の広がり，ねじれ，曲がり変形

2.3.2 ツイステッド・ネマティック配向のダイレクタ分布

液晶分子の分子長鎖がほぼダイレクタに揃う性質は，その状態のときに内部エネルギーが一番低くなり，安定な状態になるためだと考えられる．したがって，その安定な状態から変形が起こると，変形に対して復元力が働く．ネマティック液晶では，ダイレクタ方向の平行移動に対してはこの復元力が働かないため，復元力が働く変形は，図 2-4 に示す通り広がり，ねじれ，及び曲がりの 3 つとなる．いま，原点 O におけるダイレクタ単位ベクトルを \mathbf{n} とする． \mathbf{n} の変形に対するエネルギー密度を g とすると，

$$g = \frac{1}{2} K_{11} (\text{div } \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} K_{22} (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} K_{33} |\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}|^2 \quad (2-14)$$

と表される^{38,39)}。ここで g はフランクの自由エネルギーと呼ばれ、 K_{11} 、 K_{22} 、 K_{33} はそれぞれ広がり、ねじれ、曲がり変形に対する弾性定数であり、フランクの弾性定数と呼ばれる。

実用上重要でかつ本論文で対象とするのは、液晶層を挟む上下の基板間で配向方向がねじれている場合で、この配向をツイステッド・ネマティック配向と呼び、自然な状態では図 2-3(e)に示すような配向状態となる。この液晶層に電界 \mathbf{E} が作用した時、ダイレクタがどのように変化するかを調べる。簡単のため、①基板と液晶層の界面では液晶分子は全く動かない、②電気伝導や変形に伴う誘電率の空間分布の変化は無視する、③定常状態を考える、④ダイレクタの変化による液晶分子の流れ（バックフロー効果）は無視する、の 4 つを仮定する。図 2-5 に示すように液晶層の厚み方向に z 軸をとり、液晶層は $z = -d/2$ と $z = d/2$ の間にあるとする。入射面 $z = -d/2$ において、ダイレクタベクトル \mathbf{n} が x 方向となるように右手系の直交座標系をとる。入射面でのダイレクタが任意の方向の時は、最終的な結果に対し、座標系の回転を施せば良い。ダイレクタを x - y 面に投影したとき、 x 軸となす角を方位角と呼び、 $\zeta(z)$ で表す。座標系のとり方及び $z=0$ の面に対する対称性から、

$$\begin{aligned} \zeta\left(-\frac{d}{2}\right) &= 0 \\ \zeta(0) &= \frac{\alpha_T}{2} \\ \zeta\left(\frac{d}{2}\right) &= \alpha_T \end{aligned} \tag{2-15}$$

である。ここで α_T を全ツイスト角と呼び、液晶と基板界面では強い相互があるためダイレクタが変化しないと仮定しているので、電界の大きさによって変化しない定数となる。また、 $\zeta(z) - \alpha_T/2$ は z の奇関数である。

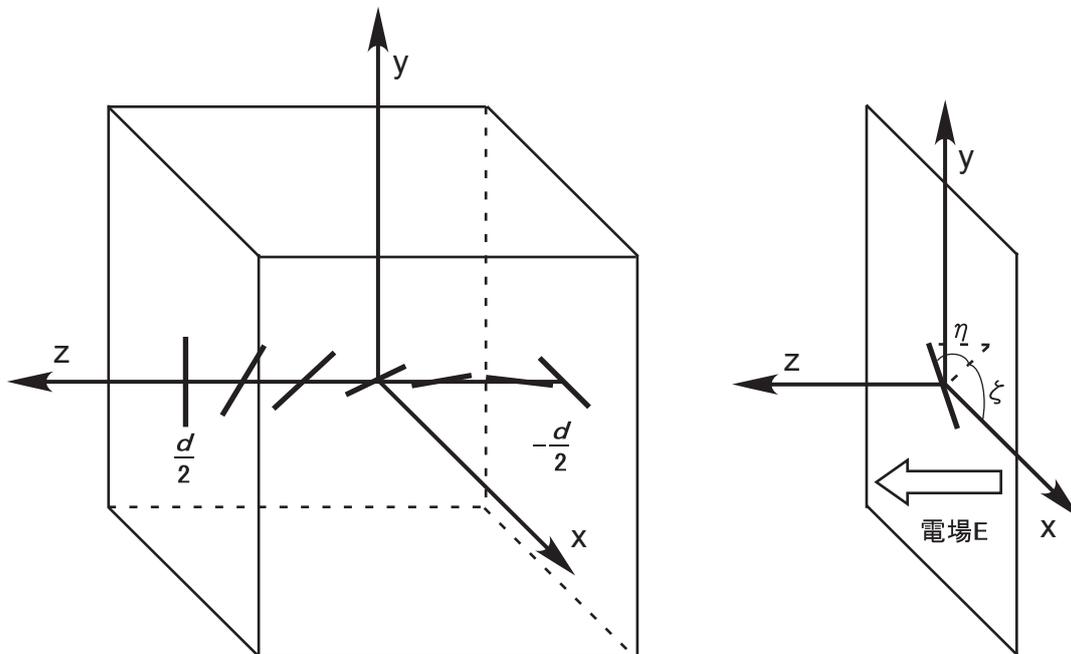


図 2-5 ツイステッド・ネマティック液晶セルのダイレクタ分布

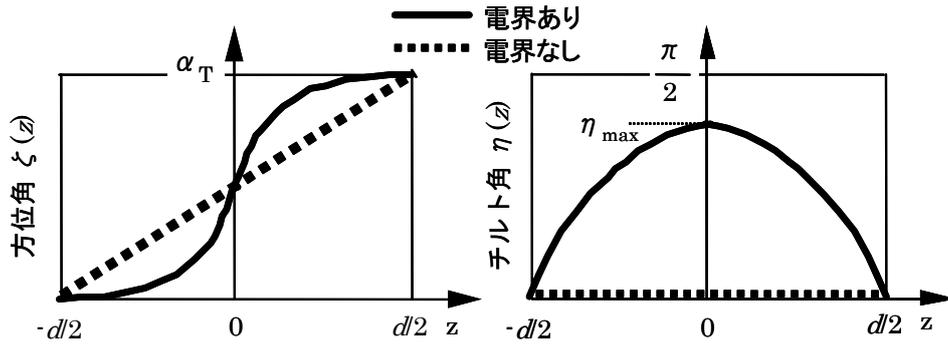


図 2-6 ツイステッド・ネマティック液晶ダイレクタの方位角 $\zeta(z)$ 及びチルト角 $\eta(z)$ の分布

ダイレクタが x - y 面となす角をチルト角と呼び、 $\eta(z)$ で表す。方位角と同様の強い相互作用と対称性の要請から、

$$\begin{aligned} \eta\left(-\frac{d}{2}\right) &= 0 \\ \eta(0) &= \eta_{\max} \\ \eta\left(\frac{d}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (2-16)$$

であり、 $-d/2 \leq z \leq d/2$ において $\eta(z)$ は常に正である。また、 $\eta(z)$ は z の偶関数であって、 $z=0$ において最大値 η_{\max} をとる。方位角 $\zeta(z)$ 及びチルト角 $\eta(z)$ の分布の様子を、図 2-6 に模式的に示す。

液晶層に電界がかかっていないとき、ダイレクタは

$$\mathbf{n}(z) = [\cos \zeta(z), \sin \zeta(z), 0] \quad (2-17)$$

であるが、 z 方向の電界により

$$\mathbf{n}(z) = [\cos \zeta(z) \cos \eta(z), \sin \zeta(z) \cos \eta(z), \sin \eta(z)] \quad (2-18)$$

のように変化する。 z 方向の電界 \mathbf{E} (大きさ E) により液晶層内に生じるエネルギー密度 g_E は、

$$\begin{aligned} g_E &= -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{//} (E \sin \eta)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} (E \cos \eta)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} E^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_{//} - \varepsilon_{\perp}) E^2 \sin^2 \eta \end{aligned} \quad (2-19)$$

である。ここで、 ε_0 は真空の誘電率である。電界があるときの自由エネルギーは、式(2-14)と式(2-19)との和となる。式(2-14)の \mathbf{n} に式(2-18)を代入し、また式(2-19)の定数項を除くと、自由エネルギーは

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2} (K_{11} \cos^2 \eta + K_{33} \sin^2 \eta) \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \cos^2 \eta (K_{22} \cos^2 \eta + K_{33} \sin^2 \eta) \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_{//} - \varepsilon_{\perp}) E^2 \sin^2 \eta \end{aligned} \quad (2-20)$$

となる。この内部エネルギーが最小となるように液晶分子は配列するはずであるから、変分法により式(2-20)を最小にする条件を求める。式(2-20)のオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta} - \frac{d}{dz} \left[\frac{\partial g}{\partial (d\zeta/dz)} \right] = 0 \quad (2-21)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} - \frac{d}{dz} \left[\frac{\partial g}{\partial (d\eta/dz)} \right] = 0 \quad (2-22)$$

よりそれぞれ

$$\frac{d}{dz} \left[\cos^2 \eta (K_{22} \cos^2 \eta + K_{33} \sin^2 \eta) \frac{d\zeta}{dz} \right] = 0 \quad (2-23)$$

$$\begin{aligned} & (K_{11} \cos^2 \eta + K_{33} \sin^2 \eta) \frac{d^2 \eta}{dz^2} + \sin \eta \cos \eta (K_{33} - K_{11}) \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 \\ & + \sin \eta \cos \eta \left[2K_{22} \cos^2 \eta + K_{33} (\sin^2 \eta - \cos^2 \eta) \right] \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^2 + \varepsilon_0 (\varepsilon_{//} - \varepsilon_{\perp}) E^2 \sin \eta \cos \eta = 0 \end{aligned} \quad (2-24)$$

を得る.

まず電界のない初期配向状態に近い状態

$$\begin{cases} \zeta(z) = \frac{\alpha_T}{d} z + \frac{\alpha_T}{2} \\ \eta(z) \cong 0 \end{cases} \quad (2-25)$$

での解を求める. 式(2-23)及び(2-24)に式(2-25)を代入してまとめると,

$$K_{11} \frac{d^2 \eta}{dz^2} + \left[(2K_{22} - K_{33}) \left(\frac{\alpha_T}{d} \right)^2 + \varepsilon_0 (\varepsilon_{//} - \varepsilon_{\perp}) E^2 \right] \eta = 0 \quad (2-26)$$

が得られるが, これは式(2-15)及び(2-16)の境界条件の元で直ちに解くことが可能であり,

$$\eta(z) = \eta_{\max} \cos \mu z \quad (2-27)$$

となる. ここで $\eta_{\max}=0$ は初期配向であり, 式(2-26)の自明な解でもある. また,

$$\mu = \sqrt{\frac{(2K_{22} - K_{33}) (\alpha_T/d)^2 + \varepsilon_0 (\varepsilon_{//} - \varepsilon_{\perp}) E^2}{K_{11}}} \quad (2-28)$$

である. 式(2-26)が自明な解以外の解を持つためには, $\eta(d/2)=0$ を満たすために, 電界 E に関して条件が加わる. 具体的には, ある閾値電界 E_c (大きさ E_c) があり, 電界が閾値電界以下では式(2-26)は自明な解しか持たず, これはダイレクタの配向変化がまったく起こらないことを意味する. 式(2-27)において $\eta(d/2)=0$ を満足させるため $\mu = \pi/d$ とすると, 式(2-28)よりそのような閾値電界は

$$E_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_{11} + (K_{33} - 2K_{22}) (\alpha_T/\pi)^2}{\varepsilon_0 (\varepsilon_{//} - \varepsilon_{\perp})}} \quad (2-29)$$

と求められる. このように, ある閾値を越える電界で初めて配向が変化する現象を, フレデリクス転移と呼ぶ.

閾値電界以上の電界がかかったとき, 方位角 ζ 及びチルト角 η がどのように変化するかについて

ては、個別のパラメータに関して数値的に式(2-23)及び(2-24)を解くことになる。図 2-7 はその一例であり、代表的な液晶である MBBA(N-(4-methoxy benzylidene)-4'-butylaniline)を用いて、液晶層厚さ $10\ \mu\text{m}$ 、比誘電率 $\varepsilon_{\parallel}=3.06$ 及び $\varepsilon_{\perp}=2.37$ (屈折率は波長 633nm において $n_e=1.75$ 及び $n_o=1.54$)、フランクの弾性定数の比が $K_{11}/K_{33}=0.79$ 及び $K_{22}/K_{33}=0.48$ 、全ツイスト角 $\alpha_T=90^\circ$ の場合について、7つの電界における角度分布が求められている⁴⁰⁾。対称性を考慮し、また図 2-7 を参照すると、方位角 ζ 及びチルト角 η の z 方向の分布に関して定性的に次のことが言える⁴¹⁾。

- 1) 方位角 ζ は、グラフの中心に関して点対称である。
- 2) チルト角 η は、液晶層の中央に関して線対称である。
- 3) チルト角 η は、電界が弱い時は正弦状の分布をしており、電界が強くなるにつれて、中央部における最大値 η_{\max} が大きくなって 90° に近づくと共に、肩をはった分布となる。
- 4) 方位角 ζ は、中央部におけるチルト角 η_{\max} が 30° 程度になるまではほとんど変化しない。

これらの定性的な性質を知ることは、ツイステッド・ネマティック型液晶素子のジョーンズ行列モデルの精密化に際して大いに役立つ。

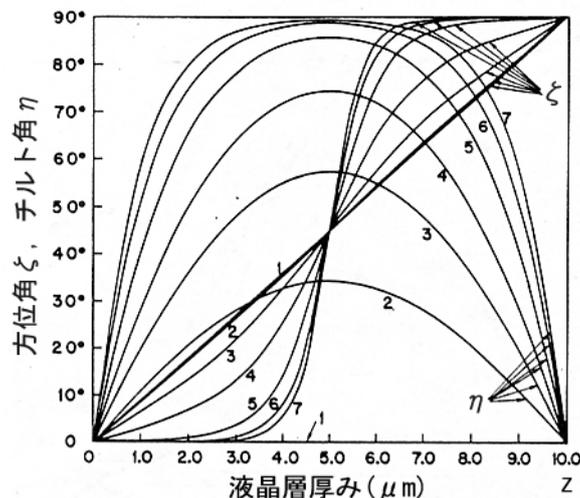


図 2-7 液晶層内での方位角 ζ 及びチルト角 η の分布 (文献 40 より転載)。

材料 : MBBA(N-(4-methoxy benzylidene)-4'-butylaniline)

液晶層厚さ : $10\ \mu\text{m}$

比誘電率 : $\varepsilon_{\parallel}=3.06$ 及び $\varepsilon_{\perp}=2.37$ (屈折率 : 波長 633nm において $n_e=1.75$ 及び $n_o=1.54$)

フランクの弾性定数 : $K_{11}/K_{33}=0.79$ 及び $K_{22}/K_{33}=0.48$

全ツイスト角 : $\alpha_T=90^\circ$

E/E_c : (1)<1, (2)1.083, (3)1.295, (4)1.69, (5)2.56, (6)3.42, (7)4.12

2.4 液晶素子のジョーンズ行列モデルの構築

2.4.1 線型モデル

本節では、ジョーンズ行列を用いた TN 型液晶素子のモデル化を行う。具体的には、液晶セルを薄い平板に分けて各平板を位相板と考え、位相板の集合体として液晶セル全体のジョーンズ行列を導く。本項ではまず、液晶分子ダイレクタ分布が光軸に沿って線型に変化する場合を考える。この場合は、行列の積を実行することが可能となるので、ジョーンズ行列モデルを具体的な表式として求めることができる³⁶⁾。ただし、文献によっては左手系の座標系を用いているので^{36,37)}、右手系を用いている本論文と符号が異なることがある。

前節と同様に、光軸方向の厚さ d のツイステッド・ネマティック液晶セルを考え、液晶セルの中心に座標原点をとる。この液晶セルを図 2-8 に示すように厚さ $d/2N$ の $2N$ 層に分割し、各層においては方位角 ζ 及びチルト角 η が一定と仮定する。

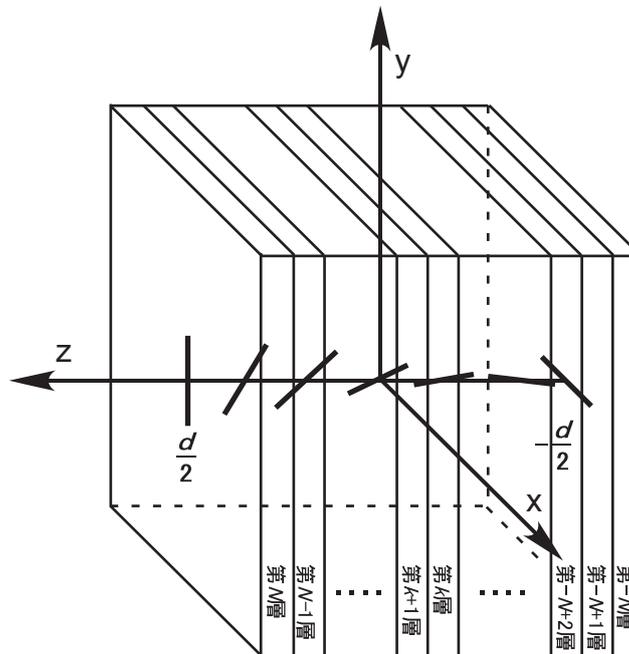


図 2-8 2N 層に分割された液晶セル

まず、第 k 層における方位角を ζ_k 、チルト角を η_k として、第 k 層におけるジョーンズ行列を求めよう。そのためには、第 k 層における実効的な屈折率を知る必要がある。ネマティック液晶は、局所的には一軸性の光学結晶と同様だと考えることができ、ダイレクタ方向に振動する電界に対しては異常屈折率 n_e 、ダイレクタと垂直な方向に振動する電界に対しては、常屈折率 n_o を持つ。第 k 層において、ダイレクタを x - y 面に投影し、その方向が x' 軸となるよう座標軸を z 軸回りに方位角 ζ_k だけ回転する。このようにして得られた x' - y' - z 座標系を、ダイレクタ方向と x'' 軸が一致するよう、 y' 軸の回りにチルト角 η_k だけ回転する。この時の屈折率楕円体の $y'=0$ 断面を図 2-9 に示す。 x'' - y' - z 座標系での屈折率楕円体を考えると、それぞれの座標軸が第 k 層の主軸方向となるので、

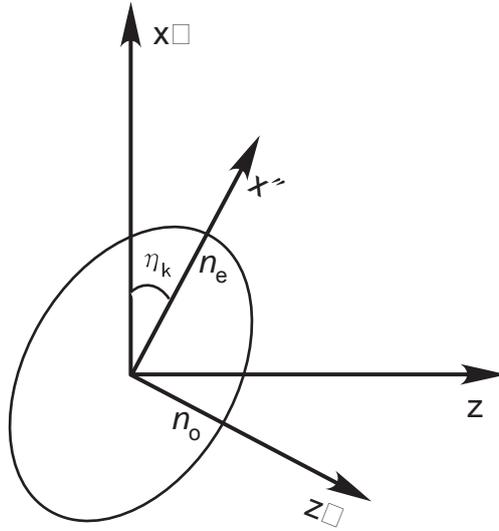


図 2-9 液晶セル中第 k 層において、チルト角 η_k だけ回転した屈折率楕円体の断面

$$\frac{x''^2}{n_e^2} + \frac{y'^2}{n_o^2} + \frac{z'^2}{n_o^2} = 1 \quad (2-30)$$

となる． $y'=0$ の面を考えると， x'' - z' 系から x' - z 系への座標変換は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ z' \end{pmatrix} &= \mathbf{R}(\eta_k) \begin{pmatrix} x' \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' \cos \eta_k + z \sin \eta_k \\ -x' \sin \eta_k + z \cos \eta_k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-31)$$

となり，式(2-31)を式(2-30)に代入して $y'=0$ ， $z \neq 0$ とすると

$$x'^2 \left(\frac{\cos^2 \eta_k}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \eta_k}{n_o^2} \right) = 1 \quad (2-32)$$

を得る．この時 x' 軸と屈折率楕円体の交点が， x' - y' - z 座標系における x' 方向に振動する電界ベクトルに対する屈折率を与えるから，その屈折率を $n(\eta)$ とすると

$$\frac{1}{n^2(\eta_k)} = \frac{\cos^2 \eta_k}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \eta_k}{n_o^2} \quad (2-33)$$

となる．

第 k 層では， x' - y' - z 座標系で見て， x' 方向の屈折率は式(2-33)により与えられる． y' 方向の屈折率は n_o となるので，第 k 層はそれぞれの屈折率と液晶層の厚さから決まる位相遅れを持った位相板と考えることができる．したがって， x' - y' - z 座標系で見た第 k 層のジョーンズ行列 \mathbf{J}_k' は

$$\mathbf{J}'_k(\eta_k) = \begin{Bmatrix} \exp\left[-i\frac{\pi d}{\lambda N}n(\eta_k)\right] & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\pi d}{\lambda N}n_o\right) \end{Bmatrix} \quad (2-34)$$

となる。x-y-z 座標系で見た第 k 層のジョーンズ行列 \mathbf{J}_k は、式(2-34)に ζ_k の回転を施せば良いから

$$\mathbf{J}_k(\zeta_k, \eta_k) = \mathbf{R}(-\zeta_k)\mathbf{J}'_k(\eta_k)\mathbf{R}(\zeta_k) \quad (2-35)$$

となる。

$$\phi_N = \frac{\pi d}{\lambda N}n_o \quad (2-36)$$

$$\beta_k = \frac{\pi d}{2\lambda N}[n(\eta_k) - n_o] \quad (k=-N, -N+1, \dots, -1, 1, \dots, N-1, N) \quad (2-37)$$

とおくと、式(2-35)は

$$\mathbf{J}_k(\zeta_k, \eta_k) = \exp[-i(\phi_N + \beta_k)]\mathbf{R}(-\zeta_k) \begin{bmatrix} \exp(-i\beta_k) & 0 \\ 0 & \exp(i\beta_k) \end{bmatrix} \mathbf{R}(\zeta_k) \quad (k=-N, -N+1, \dots, -1, 1, \dots, N-1, N) \quad (2-38)$$

となる。

液晶セル全体のジョーンズ行列 \mathbf{J}_L は、各層のジョーンズ行列の積である。表式の都合上、第-1層と第1層との間に、厚さ0の層があると考え、

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{単位行列}) \quad (2-39)$$

$$\beta_0 = 0 \quad (2-40)$$

とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_L &= \prod_{k=-N}^{-1} \mathbf{J}_k \\ &= \exp\left[-i\left(\phi_c + \sum_{k=-N}^{-1} \beta_k\right)\right] \prod_{k=-N}^{-1} \mathbf{R}(-\zeta_k) \begin{bmatrix} \exp(-i\beta_k) & 0 \\ 0 & \exp(i\beta_k) \end{bmatrix} \mathbf{R}(\zeta_k) \end{aligned} \quad (2-41)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} \phi_c &= 2N\phi_N \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}n_o d \end{aligned} \quad (2-42)$$

である。

液晶セルに電界がかかっていないとき（初期状態）では、液晶分子ダイレクタの光軸（z 軸）方向の分布は、図 2-6 に破線で示したように、方位角 $\zeta(z)$ 及びチルト角 $\eta(z)$ を用いて、

$$\zeta(z) = \frac{\alpha_T}{d}z + \frac{\alpha_T}{2} \quad (2-43)$$

$$\eta(z) = 0 \quad (2-44)$$

と表すことができる．ここで α_T は全ツイスト角であり， $-d/2 \leq z \leq d/2$ である．この液晶セルに電界 E をかけると，ダイレクタの分布は図 2-7 のようになるが，簡単のため方位角 $\zeta(z)$ は式(2-43)のままで変化しないと仮定する．またチルト角 $\eta(z)$ は

$$\eta(z) = \eta_L \quad (2-45)$$

のように，電界の大きさによって変化するが， z に対しては一定値をとると仮定する．この時，第 k 層での方位角 ζ_k ，及びチルト角 η_k は，

$$\zeta_k = \frac{\alpha_T}{2N}k + \frac{\alpha_T}{2} \quad (2-46)$$

$$\eta_k = \eta_L \quad (\text{一定値}) \quad (2-47)$$

となる．式(2-46)及び(2-47)を式(2-41)に代入すると

$$\mathbf{J}_L = \exp[-i(\phi_c + \beta_L)]\mathbf{R}(-\alpha_T) \left\{ \begin{bmatrix} \exp\left(-i\frac{\beta_L}{2N}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\beta_L}{2N}\right) \end{bmatrix} \mathbf{R}\left(\frac{\alpha_T}{2N}\right) \right\}^{2N} \quad (2-48)$$

となる．ここで β_L は液晶セル全体での複屈折量

$$\beta_L = \frac{\pi}{\lambda}[n(\eta_L) - n_0]d \quad (2-49)$$

である．式(2-48)中の行列の $2N$ 乗の項は，付録 1 に示すようにチェビシエフの恒等式⁴²⁾を用いて陽に計算することが可能であり，計算後分割数 $2N$ を無限大にする極限をとることにより，線型モデルでの液晶セル全体のジョーンズ行列

$$\mathbf{J}_L(\alpha_T, \beta_L) = \exp[-i(\phi_c + \beta_L)]\mathbf{R}(-\alpha_T) \begin{bmatrix} \cos \gamma - i\frac{\beta_L}{\gamma} \sin \gamma & \frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma \\ -\frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma & \cos \gamma + i\frac{\beta_L}{\gamma} \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

を得る．ただし

$$\gamma = \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_L^2} \quad (2-51)$$

とした．このように，液晶分子ダイレクタの方位角が，液晶層の厚さ方向に対して線型に変化し，またチルト角が一定と仮定すれば，液晶セルのジョーンズ行列は式(2-50)のように比較的簡単な形に求めることができる．位相項 ϕ_c は，この液晶層の常屈折率に対するリターデーションを表しており，液晶層にかかる電圧や方位角，チルト角の分布によらない定数である．したがって線型モデルでは，ジョーンズ行列は全ツイスト角 α_T と全複屈折量 β_L のみの関数となる．

入射面 $z = -d/2$ での液晶分子ダイレクタの方位角（以後入射面ダイレクタと呼ぶ）が， x 軸と ψ_0 の角度をなしている時は，式(2-50)に座標系の回転変換を施せば良いから，求めるジョーンズ行列の表式は

$$\mathbf{J}_L(\alpha_T, \beta_L, \psi_D) = \exp[-i(\phi_c + \beta_L)] \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D) \begin{bmatrix} \cos \gamma - i \frac{\beta_L}{\gamma} \sin \gamma & \frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma \\ -\frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma & \cos \gamma + i \frac{\beta_L}{\gamma} \sin \gamma \end{bmatrix} \mathbf{R}(\psi_D) \quad (2-52)$$

となる。

2.4.2 多層モデル

(1) 多層モデルの一般的表式

前節では、液晶素子中のダイレクタ方位角が液晶層の厚さ方向に対して線型に変化し、かつチルト角が一定と仮定すると、液晶素子を表すジョーンズ行列は式(2-50)あるいは式(2-52)のようになることが分かった。本項では、実際のダイレクタ分布をより良く近似するため、多層に分けた液晶各層においては上記の仮定が成り立つが、全体的には方位角及びチルト角が線型でない分布を持った時でも適用可能なジョーンズ行列を導く^{43,44)}。

多層モデルでの方位角及びチルト角の分布を図 2-10 に示す。液晶層は線型モデルと同様に $2N$ 枚の等厚薄層に分け、計算の都合上中心に厚さ 0 の層があると考えて $2N+1$ 層とする。液晶層は、前節と同様 $-d/2 \leq z \leq d/2$ にあり、中心層を除く各層は厚さ $d/2N$ である。

方位角とチルト角の対称性に関して、次の仮定をおく

$$\zeta(z) = \alpha_T - \zeta(-z) \quad (2-53)$$

$$\eta(z) = \eta(-z) \quad (\text{偶関数}). \quad (2-54)$$

ここで、 α_T は全ツイスト角を表す。また、第 k 層 ($-N \leq k \leq N$) での入射面ダイレクタ及びチルト角をそれぞれ ζ_k 及び η_k とする。第 k 層での全ツイスト角 α_k は、入射面ダイレクタ ζ_k を用いて、

$$\alpha_k = \zeta_{k+1} - \zeta_k \quad (2-55)$$

となる。ただし、便宜上 $\zeta_{N+1} = \alpha_T$ とする。また線型モデルと同様の計算が可能となるよう、

$$\phi_k = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 \frac{d}{2N} \quad (k = -N, -N+1, \dots, -1, 1, \dots, N-1, N) \quad (2-56)$$

$$\phi_0 = 0 \quad (2-57)$$

$$\beta_k = \frac{\pi}{\lambda} [n(\eta_k) - n_0] \frac{d}{2N} \quad (k = -N, -N+1, \dots, -1, 1, \dots, N-1, N) \quad (2-58)$$

$$\beta_0 = 0 \quad (2-59)$$

と定義する。第 k 層のジョーンズ行列を \mathbf{J}_k とすれば、線型モデルでの計算結果より、

$$\mathbf{J}_k(\alpha_k, \beta_k) = \exp[-i(\phi_k + \beta_k)] \mathbf{R}(-\alpha_k) \mathbf{M}_k(\alpha_k, \beta_k) \quad (2-60)$$

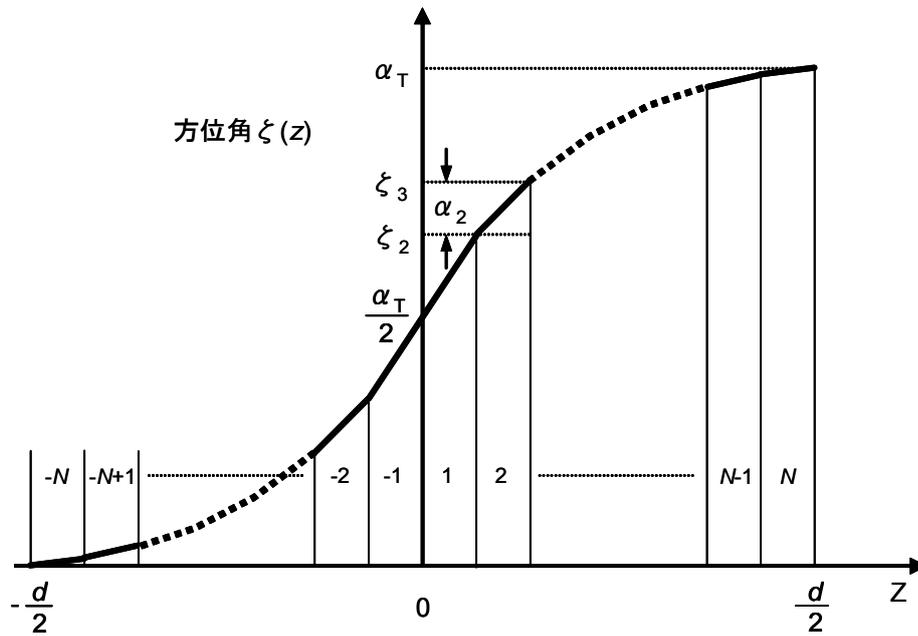
となる。ただし、

$$\mathbf{M}_k(\alpha_k, \beta_k) = \begin{pmatrix} \cos \gamma_k - i \frac{\beta_k}{\gamma_k} \sin \gamma_k & \frac{\alpha_k}{\gamma_k} \sin \gamma_k \\ -\frac{\alpha_k}{\gamma_k} \sin \gamma_k & \cos \gamma_k + i \frac{\beta_k}{\gamma_k} \sin \gamma_k \end{pmatrix} \quad (2-61)$$

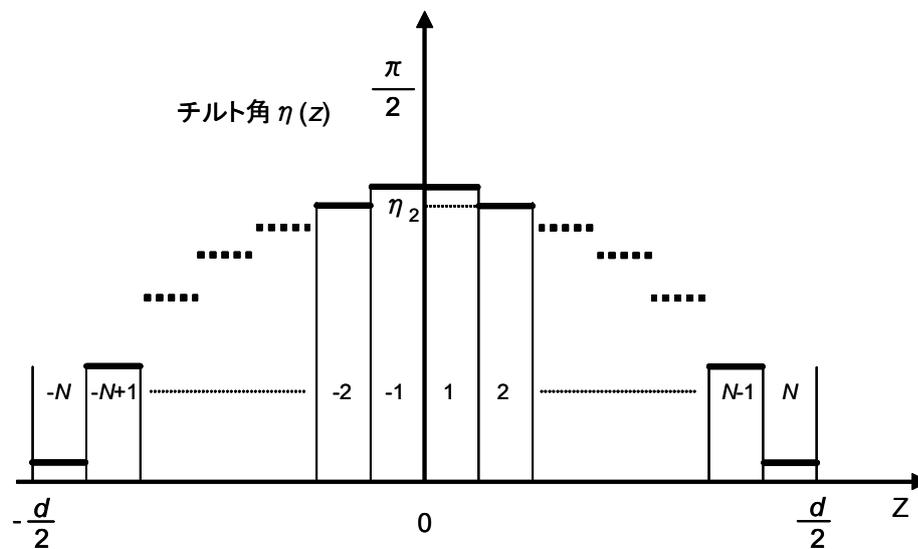
$$\gamma_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \quad (2-62)$$

とした。液晶セル全体のジョーンズ行列 \mathbf{J}_{MN} は、各層のジョーンズ行列の積であるから

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{MN} &= \prod_{k=N}^{-N} \mathbf{R}(-\zeta_k) \mathbf{J}_k \mathbf{R}(\zeta_k) \\ &= \exp\left[-i \sum_{k=-N}^N (\phi_k + \beta_k)\right] \prod_{k=N}^{-N} \mathbf{R}(-\alpha_k - \zeta_k) \mathbf{M}_k(\alpha_k, \beta_k) \mathbf{R}(\zeta_k) \quad (2-63) \\ &= \exp[-i(\phi_c + \beta_{MN})] \mathbf{R}(-\alpha_T) \prod_{k=N}^{-N} \mathbf{M}_k(\alpha_k, \beta_k) \end{aligned}$$



(a)



(b)

図 2-10 多層モデルでの(a)方位角及び(b)チルト角分布

となる。ここで、

$$\beta_{MN} = \frac{\pi d}{\lambda N} \sum_{k=1}^N [n(\eta_k) - n_0] \quad (2-64)$$

とした。

式(2-63)中にある行列 \mathbf{M}_k の積は、 $N > 2$ ではかなりややこしい式となるので、直接書き下す代わりにまず、 \mathbf{M}_k の各要素を数列と捉えて数列間に成り立つ漸化式を導く。式(2-53)及び(2-54)の対称性の仮定に従えば、各層での全ツイスト角及び全複屈折量に対する対称性

$$\alpha_{-k} = \alpha_k \quad (2-65)$$

$$\beta_{-k} = \beta_k \quad (2-66)$$

が容易に導かれる。式(2-62)の定義から明らかなように、この時

$$\gamma_{-k} = \gamma_k \quad (2-67)$$

である。したがって、式(2-61)よりジョーンズ行列 \mathbf{M}_k に対して

$$\mathbf{M}_{-k} = \mathbf{M}_k \quad (2-68)$$

となることが分かる。この対称性を利用するため、まず、 $2k+1$ 個の行列の積である

$$\mathbf{L}_k = \prod_{j=k}^{-k} \mathbf{M}_j \quad (2-69)$$

を定義する。次に、行列 \mathbf{M}_k 及び \mathbf{L}_k の各行列要素を

$$\mathbf{M}_k = \begin{pmatrix} p_k - iq_k & s_k \\ -s_k & p_k + iq_k \end{pmatrix} \quad (2-70)$$

$$\mathbf{L}_k = \begin{pmatrix} a_k - ib_k & c_k \\ -c_k & a_k + ib_k \end{pmatrix} \quad (2-71)$$

とする。液晶素子に吸収がないと仮定すれば、素子を表すジョーンズ行列の行列式は ± 1 となるから、式(2-70)及び(2-71)の行列式も ± 1 である。したがって、次式で表される規格化条件が成り立つ。

$$p_k^2 + q_k^2 + s_k^2 = 1 \quad (2-72)$$

$$a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 = 1 \quad (2-73)$$

$k=0$ とおくと、 \mathbf{M}_0 は厚さが 0 の液晶層と仮定したのでそのジョーンズ行列は単位行列であるから、 \mathbf{L}_0 も単位行列である。したがって行列 \mathbf{L} の各要素に対する初期値は

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ b_0 &= 0 \\ c_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2-74)$$

である。 $k=1$ の時は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_1 &= \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_0 \mathbf{M}_{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \gamma_1 - i \frac{\beta_1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 & \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 \\ -\frac{\alpha_1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 & \cos \gamma_1 + i \frac{\beta_1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma_1 - i \frac{\beta_1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 & \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 \\ -\frac{\alpha_1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 & \cos \gamma_1 + i \frac{\beta_1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\gamma_1 - i \frac{\beta_1}{\gamma_1} \sin 2\gamma_1 & \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \sin 2\gamma_1 \\ -\frac{\alpha_1}{\gamma_1} \sin 2\gamma_1 & \cos \gamma_1 + i \frac{\beta_1}{\gamma_1} \sin 2\gamma_1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2-75}$$

となる．式(2-75)は，方位角及びチルト角に対して線型モデルの仮定が成り立つ時，液晶素子の厚さが 2 倍になると，それに応じて全ツイスト角及び全複屈折量が共に 2 倍になることに符合している．また式(2-75)のように， \mathbf{L}_{k-1} を \mathbf{M}_k と \mathbf{M}_{-k} とで挟んだ形の積では，行列の(1,2)及び(2,1)要素の虚数成分は生じない．TN 型液晶素子のジョーンズ行列はユニタリ行列であり，付録 2 に示す通り，虚数成分が生じない性質は一般的なユニタリ行列に対して同様に成り立つ．

ジョーンズ行列 \mathbf{L}_k の各行列要素に対する漸化式は，

$$\mathbf{L}_{k+1} = \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{L}_k \mathbf{M}_{-k-1} \tag{2-76}$$

を計算することにより

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k+1}^2 - q_{k+1}^2 - s_{k+1}^2 & -2p_{k+1}q_{k+1} & -2p_{k+1}s_{k+1} \\ 2p_{k+1}q_{k+1} & p_{k+1}^2 - q_{k+1}^2 + s_{k+1}^2 & -2q_{k+1}s_{k+1} \\ 2p_{k+1}s_{k+1} & -2q_{k+1}s_{k+1} & p_{k+1}^2 + q_{k+1}^2 - s_{k+1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \tag{2-77}$$

となる．

式(2-77)を元にすれば，層数 N が小さいいくつかの場合について，多層モデルの具体的表式を求めることができる．

(2) $N=2$ の場合 (3 層モデル)

$N=2$ の時は，ダイレクタ方位角及びチルト角の分布は図 2-11 のようになり，実際上は液晶層を 3 層に分けたときのモデルとなる．ただし，中心層の厚さは縁の層の厚さの 2 倍である．式(2-63)の表式に従えば，この時のジョーンズ行列は \mathbf{J}_{M2} と表されるが，本論文ではこのモデルを 3 層モデルと呼ぶ．式(2-75)より

$$\begin{cases} a_1 = \cos 2\gamma_1 \\ b_1 = \frac{\beta_1}{\gamma_1} \sin 2\gamma_1 \\ c_1 = \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \sin 2\gamma_1 \end{cases} \tag{2-78}$$

となり，また定義により

$$\begin{cases} p_2 = \cos \gamma_2 \\ q_2 = \frac{\beta_2}{\gamma_2} \sin \gamma_2 \\ s_2 = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \sin \gamma_2 \end{cases} \quad (2-79)$$

であるから、 $k=1$ として式(2-77)に代入すると

$$\begin{cases} a_2 = \cos 2\gamma_1 \cos 2\gamma_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2}{\gamma_1 \gamma_2} \sin 2\gamma_1 \sin 2\gamma_2 \\ b_2 = \frac{\beta_2}{\gamma_2} \cos 2\gamma_1 \sin 2\gamma_2 + \frac{\sin 2\gamma_1}{\gamma_1} \left[\beta_1 + \frac{2\beta_2(\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2)}{\gamma_2^2} \sin^2 \gamma_2 \right] \\ c_2 = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left[\cos 2\gamma_1 \sin 2\gamma_2 - \frac{2(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2)}{\gamma_1 \gamma_2} \sin 2\gamma_1 \sin^2 \gamma_2 \right] + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \sin 2\gamma_1 \end{cases} \quad (2-80)$$

となる。したがって 3 層モデルのジョーンズ行列 \mathbf{J}_{M2} は、式(2-63)において $N=2$ とおき、 a_2 、 b_2 、及び c_2 を用いて

$$\mathbf{J}_{M2} = \exp[-i(\phi_c + \beta_{M2})] \mathbf{R}(-\alpha_T) \begin{pmatrix} a_2 - ib_2 & c_2 \\ -c_2 & a_2 + ib_2 \end{pmatrix} \quad (2-81)$$

となる。

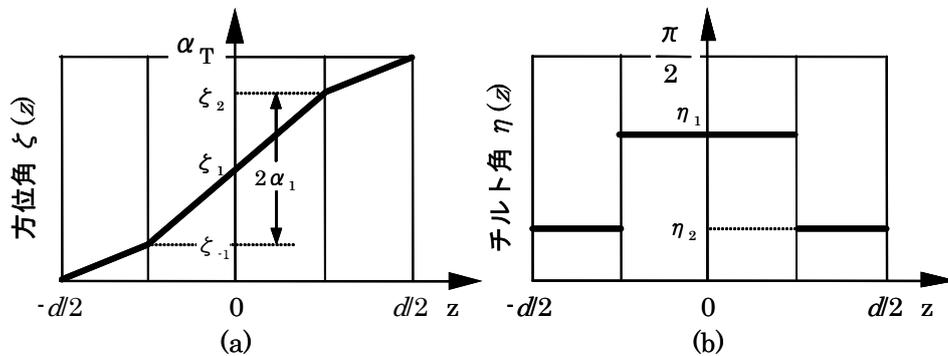


図 2-11 3 層モデルにおける(a)方位角及び(b)チルト角分布

(3) 5 層以上の場合と単純 3 層モデル

$N=3$ の時は実質上 5 層のモデルとなるが、まず式(2-80)を用いて a_2 、 b_2 、及び c_2 を計算し、式(2-77)において $k=2$ とおいて a_3 、 b_3 、及び c_3 の計算を進めることになる。ただし、各層の厚さが変わることに応じて、 α_k 、 β_k 、 γ_k 、及び p_k 、 q_k 、 s_k も変化するので注意が必要である。5 層モデルについて、ジョーンズ行列を陽に書き下すことは可能であるが、大変複雑な式となる。

本章で構築したジョーンズ行列モデルを用いて素子の位相変調量を決定するという我々の目的においては、方位角とチルト角の z 方向分布を決定することが必要である。第 3 章で詳しく述べるが、実際にはある特定のグレイレベルにおいて、実験的に決定できる TN 型液晶素子の独立な

パラメーターは 2 つだけである。したがって、両角度分布に対し、数学的にはそれぞれ一つの条件しか設定することはできない。多層モデルでは、層の数が増えると、独立に設定しなければならない物理パラメーター ζ_k , η_k (あるいは α_k , β_k) の数が増える。しかしながら条件の数が限られているので、適当な仮定を置かなければ図 2-10 のような、方位角とチルト角の多層の分布を決定することはできないことになる。したがって、表式が複雑になることと合わせて考えると、これ以上層数を増やしたモデルを書き下していくことにはあまりメリットがないと考えられる。

TN 型液晶素子による位相変調量のシミュレーションの精密化においては、液晶分子と基板界面との相互作用によって生じる縁の影響を考慮することが重要である。したがって、実際上有用なのは、3 層モデルにおいて各層の厚みを柔軟に変化させ、線型モデルでは表現できない縁の効果を取り込むことである。これを多層モデルで実現させるため、縁の影響を受ける層の厚みを $d/2N$ とし、縁以外の内側の層では線型モデルと同様のダイレクタ分布になっていると考える。具体的には、図 2-12 に示すような方位角、及びチルト角分布を考える。この時内側の層全体におけるジョーンズ行列は、単にツイスト角及び複屈折量が各層におけるものの $2(N-1)$ 倍になったものとなる。したがって、式(2-78)と同様に

$$\begin{cases} a_{N-1} = \cos 2(N-1)\gamma_1 \\ b_{N-1} = \frac{\beta_1}{\gamma_1} \sin 2(N-1)\gamma_1 \\ c_{N-1} = \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \sin 2(N-1)\gamma_1 \end{cases} \quad (2-82)$$

となる。また縁の層では式(2-79)と同様に

$$\begin{cases} p_N = \cos \gamma_N \\ q_N = \frac{\beta_N}{\gamma_N} \sin \gamma_N \\ s_N = \frac{\alpha_N}{\gamma_N} \sin \gamma_N \end{cases} \quad (2-83)$$

となる。

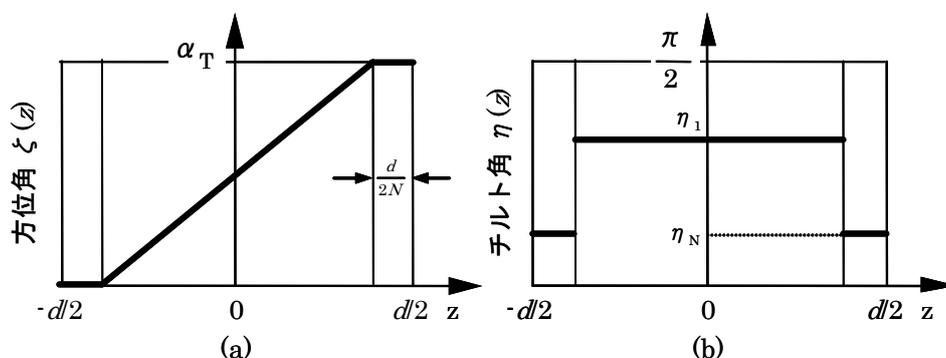


図 2-12 縁の影響を考慮した 3 層モデルにおける(a)方位角及び(b)チルト角分布

これらの値を， $k=N-1$ とした式(2-77)に代入すると

$$\begin{cases} a_N = \cos \gamma_c \cos 2\gamma_N - \frac{\alpha_1 \alpha_N + \beta_1 \beta_N}{\gamma_1 \gamma_N} \sin \gamma_c \sin 2\gamma_N \\ b_N = \frac{\beta_N}{\gamma_N} \cos \gamma_c \sin 2\gamma_N + \frac{\sin \gamma_c}{\gamma_1} \left[\beta_1 + \frac{2\beta_N (\alpha_1 \alpha_N - \beta_1 \beta_N)}{\gamma_N^2} \sin^2 \gamma_N \right] \\ c_N = \frac{\alpha_N}{\gamma_N} \left[\cos \gamma_c \sin 2\gamma_N - \frac{2(\alpha_1 \alpha_N + \beta_1 \beta_N)}{\gamma_1 \gamma_N} \sin \gamma_c \sin^2 \gamma_N \right] + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \sin \gamma_c \end{cases} \quad (2-84)$$

となる．ただし $\gamma_c = 2(N-1)\gamma_1$ とおいた．縁の影響を考慮した 3 層モデルのジョーンズ行列 \mathbf{J}_{MN} は，式(2-84)の a_N ， b_N ，及び c_N を用いて

$$\mathbf{J}'_{MN} = \exp[-i(\phi_c + \beta_{MN})] \mathbf{R}(-\alpha_T) \begin{pmatrix} a_N - ib_N & c_N \\ -c_N & a_N + ib_N \end{pmatrix} \quad (2-85)$$

と表すことができる．

式(2-85)は，入射面ダイレクタが \mathbf{x} 軸と平行な場合の縁の影響を考慮した 3 層モデルのジョーンズ行列を表している．入射面ダイレクタが ψ_D の時は，座標系の回転変換を施せば良いから，求めるジョーンズ行列の表式は

$$\mathbf{J}'_{MN} = \exp[-i(\phi_c + \beta_{MN})] \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D) \begin{pmatrix} a_N - ib_N & c_N \\ -c_N & a_N + ib_N \end{pmatrix} \mathbf{R}(\psi_D) \quad (2-86)$$

となる．

特に，両縁の層で液晶分子が全くツイストしないときは $\alpha_N = 0$ 及び $\gamma_N = \beta_N$ となるので，式(2-84)は

$$\begin{cases} a_N = \cos \gamma_c \cos 2\beta_N - \frac{\beta_1}{\gamma_1} \sin \gamma_c \sin 2\beta_N \\ b_N = \cos \gamma_c \sin 2\beta_N + \frac{\beta_1}{\gamma_1} \sin \gamma_c \cos 2\beta_N \\ c_N = \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \sin \gamma_c \end{cases} \quad (2-87)$$

と簡略化される⁴⁵⁻⁴⁷⁾．式(2-87)は比較的簡単な形をしているため取り扱いが容易であり，また両縁での複屈折量 β_N を独立に取り扱うことにより，液晶素子全体の位相変調量が透過率測定から計算できる．計算された位相変調量と測定された位相変調量は，線型モデルに比べて良く一致すると報告されている^{46,47)}．

2.4.3 微分モデル

本項では，前項で得られた多層モデルの結果の極限を取るにより，TN 型液晶素子を表すジョーンズ行列の各要素に対する微分方程式を導く⁴⁴⁾．具体的には式(2-63)において，液晶層全体の厚みを一定に保ったまま，層の分割数 N を無限大とする．

微分モデルにおけるジョーンズ行列を \mathbf{J}_D とすると,

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_D &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{J}_{MN} \\ &= \exp \left[-i \left(\phi_c + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \beta_k \right) \right] \mathbf{R}(-\alpha_T) \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=N}^{-N} \mathbf{M}_k(\alpha_k, \beta_k)\end{aligned}\quad (2-88)$$

となる. 位相項に含まれる複屈折量の和の極限は積分となり, これを全複屈折量 β_T で表す. 分割された液晶層の厚みを $\Delta z = d/2N$ とおけば

$$\begin{aligned}\beta_T &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \beta_k \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi d}{\lambda N} \sum_{k=1}^N [n(\eta_k) - n_0] \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} \{n[\eta(k\Delta z)] - n_0\} \Delta z \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^{d/2} \{n[\eta(z)] - n_0\} dz\end{aligned}\quad (2-89)$$

となる. 被積分関数は, 複屈折率 $\Delta n = n_e - n_o$ が小さいとき, Δn の 2 乗以上の高次項を無視すると, 式(2-33)を用いて

$$\begin{aligned}n[\eta(z)] - n_0 &= \frac{n_e n_o}{\sqrt{n_o \cos^2 \eta(z) + n_e \sin^2 \eta(z)}} - n_0 \\ &\approx \Delta n \cos^2 \eta(z)\end{aligned}\quad (2-90)$$

となるから, 全複屈折量は

$$\beta_T = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n \int_0^{d/2} \cos^2 \eta dz \quad (2-91)$$

となる.

式(2-88)における行列の積の項を考える. 前項で行った定義により

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=N}^{-N} \mathbf{M}_k(\alpha_k, \beta_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{L}_N \quad (2-92)$$

であり, 行列 \mathbf{L}_k の各行列要素 a_k , b_k , 及び c_k については式(2-77)で表される漸化式の関係がある.

ここで, 極限計算が可能となるよう, ツイスト角 α , 複屈折量 β 等のパラメーターを, 方位角 $\zeta(z)$ 及びチルト角 $\eta(z)$ の関数として再定義する.

$$\begin{aligned}\alpha(z) &= \zeta(z) - \zeta(-z) \\ &= 2\zeta(z) - \alpha_T\end{aligned}\quad \text{ただし } 0 \leq z \leq \frac{d}{2}, \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha(d/2) = \alpha_T \quad (2-93)$$

$$\beta(z) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n \int_0^z \cos^2 \eta dz \quad \text{ただし } 0 \leq z \leq \frac{d}{2}, \quad \beta(0) = 0, \quad \beta(d/2) = \beta_T \quad (2-94)$$

$$\gamma(z) = \sqrt{\alpha^2(z) + \beta^2(z)} \quad \text{ただし } 0 \leq z \leq \frac{d}{2}, \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma\left(\frac{d}{2}\right) = \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2} \quad (2-95)$$

方位角とツイスト角，及びチルト角と複屈折量の関係は，図 2-13 の通りとなる。

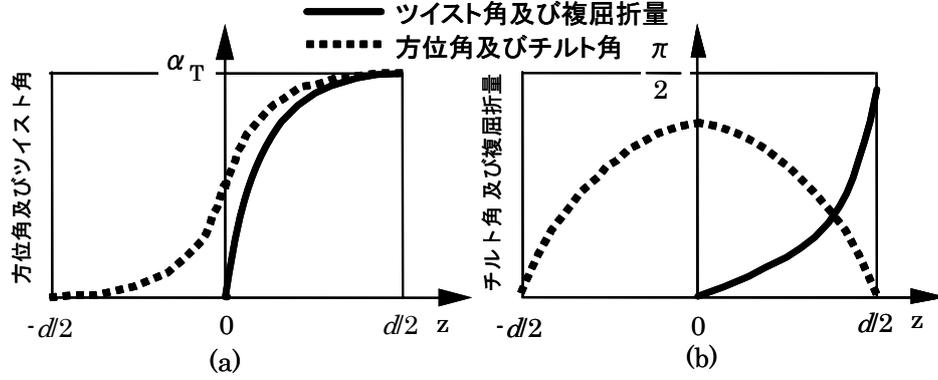


図 2-13 式(2-93)及び(2-94)で定義されるツイスト角及び複屈折量の分布

これらの量を用いて行列 \mathbf{M} の各要素を表すために，厚さ Δz の薄い液晶層に対するツイスト角及び複屈折量等を

$$\Delta\alpha(z) = \alpha(z + \Delta z) - \alpha(z) \quad (2-96)$$

$$\Delta\beta(z) = \beta(z + \Delta z) - \beta(z) \quad (2-97)$$

$$\Delta\gamma(z) = \gamma(z + \Delta z) - \gamma(z) \quad (2-98)$$

と定義する．これらの関数を用いて，行列 \mathbf{M} の各要素を z の連続関数とみなす．すなわち式(2-79)と同様に

$$\begin{cases} p(z) = \cos \Delta\gamma(z) \\ q(z) = \frac{\Delta\beta(z)}{\Delta\gamma(z)} \sin \Delta\gamma(z) \\ s(z) = \frac{\Delta\alpha(z)}{\Delta\gamma(z)} \sin \Delta\gamma(z) \end{cases} \quad \text{ただし } 0 \leq z \leq \frac{d}{2} \quad (2-99)$$

とする．行列 \mathbf{L}_k の各行列要素を，添え字のついた離散的な量ではなく， z の連続関数と考え，式(2-77)で表される漸化式を少し書き換えると

$$\frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} a(z + \Delta z) - a(z) \\ b(z + \Delta z) - b(z) \\ c(z + \Delta z) - c(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta z} \begin{bmatrix} p^2 - q^2 - s^2 - 1 & -2pq & -2ps \\ 2pq & p^2 - q^2 + s^2 - 1 & -2qs \\ 2ps & -2qs & p^2 + q^2 - s^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(z) \\ b(z) \\ c(z) \end{bmatrix} \quad (2-100)$$

が得られる．

$\Delta z \rightarrow 0$ の極限をとることにより，式(2-100)左辺はそれぞれ行列要素の z 微分となる．以下右辺の極限を計算する．右辺 3×3 行列の(1,1)要素は

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{p^2 - q^2 - s^2 - 1}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \Delta\gamma}{\Delta z} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-101)$$

(2,2)要素は

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{p^2 - q^2 + s^2 - 1}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \Delta \gamma}{\Delta z} \left(-1 - \frac{\Delta \beta}{\Delta \gamma} + \frac{\Delta \alpha}{\Delta \gamma} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-102)$$

(3,3)要素は

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{p^2 + q^2 - s^2 - 1}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \Delta \gamma}{\Delta z} \left(-1 + \frac{\Delta \beta}{\Delta \gamma} - \frac{\Delta \alpha}{\Delta \gamma} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-103)$$

(1,2)及び(2,1)要素は

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2pq}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \beta \sin 2\Delta \gamma}{\Delta \gamma \Delta z} \\ &= 2 \frac{d\beta}{dz} \end{aligned} \quad (2-104)$$

(1,3)及び(3,1)要素は

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2ps}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha \sin 2\Delta \gamma}{\Delta \gamma \Delta z} \\ &= 2 \frac{d\alpha}{dz} \end{aligned} \quad (2-105)$$

(2,3)及び(3,2)要素は

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2qs}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2\Delta \alpha \Delta \beta \sin^2 \Delta \gamma}{(\Delta \gamma)^2 \Delta z} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-106)$$

となる。これらをまとめると、式(2-100)の極限は

$$\begin{cases} \frac{da}{dz} = -2 \frac{d\beta}{dz} b - 2 \frac{d\alpha}{dz} c \\ \frac{db}{dz} = 2 \frac{d\beta}{dz} a \\ \frac{dc}{dz} = 2 \frac{d\alpha}{dz} a \end{cases} \quad \text{ただし } 0 \leq z \leq \frac{d}{2} \quad (2-107)$$

という連立微分方程式となる。微分モデルにおけるジョーンズ行列 \mathbf{J}_D は、行列要素関数 $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ の $z=d/2$ の時の値を用いて

$$\mathbf{J}_D = \exp[-i(\phi_c + \beta_T)] \mathbf{R}(-\alpha_T) \begin{bmatrix} a(d/2) - ib(d/2) & c(d/2) \\ -c(d/2) & a(d/2) + ib(d/2) \end{bmatrix} \quad (2-108)$$

と表すことができる。ただし、行列要素関数 $a(z)$, $b(z)$, 及び $c(z)$ は式(2-107)の連立微分方程式により TN 型液晶素子のツイスト角及び複屈折量（あるいは方位角とチルト角）と結びついている。

式(2-108)は、入射面ダイレクタが \mathbf{x} 軸と平行な場合の微分モデルのジョーンズ行列を表している。入射面ダイレクタが ϕ_D の時は、線形モデル及び多層モデルの場合と同様に座標系の回転変換を施し、求めるジョーンズ行列の表式は

$$\mathbf{J}_D = \exp[-i(\phi_c + \beta_T)] \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D) \begin{bmatrix} a^{(d/2)} - ib^{(d/2)} & c^{(d/2)} \\ -c^{(d/2)} & a^{(d/2)} + ib^{(d/2)} \end{bmatrix} \mathbf{R}(\psi_D) \quad (2-109)$$

となる。

式(2-108)あるいは(2-109)における行列要素関数の初期値は、式(2-74)と同様に

$$\begin{aligned} a(0) &= 1 \\ b(0) &= 0 \\ c(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2-110)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \left. \frac{da}{dz} \right|_{z=0} &= 0 \\ \left. \frac{db}{dz} \right|_{z=0} &= 2 \left. \frac{d\beta}{dz} \right|_{z=0} \\ \left. \frac{dc}{dz} \right|_{z=0} &= 2 \left. \frac{d\alpha}{dz} \right|_{z=0} \end{aligned} \quad (2-111)$$

である。方位角及びチルト角の分布が線型モデルの仮定と同様の時、式(2-107)の連立微分方程式は容易に解くことが可能であり、結果はもちろん線型モデルと一致する。しかしながら、それ以外の場合、式(2-107)の連立微分方程式を解くことは容易ではない。

実際の方位角及びチルト角の分布は式(2-23)及び(2-24)にしたがって決まるので、液晶材料に対するフランクの弾性定数が分かれば図 2-7 のように数値的に求めることは可能である。しかしながら、市販の液晶素子に対しては通常、用いている液晶材料は非公開であってその弾性定数は不明である。したがって方位角及びチルト角は、実験的に求められた液晶素子のジョーンズ行列要素からその分布を求めることになる。特に、液晶層にかかる電界が比較的小さい場合は、チルト角の分布は初期配向に近い状態であり、式(2-27)のように余弦関数で近似される。方位角を逆正接関数、チルト角を正弦関数で近似した報告⁴⁸⁾もある。式(2-27)を式(2-91)に代入して全複屈折量を求めると

$$\begin{aligned} \beta_T &= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n \int_0^{d/2} \cos^2(\eta_{\max} \cos \mu z) dz \\ &= \frac{\pi d}{2\lambda} \Delta n [1 + J_0(2\eta_{\max})] \\ &= \frac{\beta_{\max}}{2} [1 + J_0(2\eta_{\max})] \end{aligned} \quad (2-112)$$

となる。ここで、 J_0 は0次のベッセル関数であり、また液晶層に電界のかかっていない初期配向状態での全複屈折量を β_{\max} とした。この結果は、液晶層にかかる電界が比較的小さい場合は良い近似を与えるが、液晶素子をビデオ信号により駆動した時、グレイレベルの全範囲に亘る複屈折量変化を正確に計算することはできない。

式(2-107)は、TN型液晶素子のジョーンズ行列の各行列要素に対する連立微分方程式である。ジョーンズ行列の規格化の条件式(2-72)及び(2-73)を用いれば、角パラメーターを用いた変数変換により、変数を3つから2つに、したがって微分方程式も2つにすることが可能である。具体的には角パラメーター θ 及び ϕ を用いて、

$$a(z) = \cos \theta(z) \tag{2-113}$$

$$b(z) = \sin \theta(z) \cos \phi(z) \tag{2-114}$$

$$c(z) = \sin \theta(z) \sin \phi(z) \tag{2-115}$$

となる。この変数変換は、図 2-14 に示すように、行列要素関数 $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ の極座標による表現である。これらの式を式(2-107)に代入すると、角パラメーターに対する連立微分方程式

$$\left(\begin{array}{l} \frac{d\theta}{dz} = 2 \sin \phi \frac{d\alpha}{dz} + 2 \cos \phi \frac{d\beta}{dz} \\ \tan \theta \frac{d\phi}{dz} = 2 \cos \phi \frac{d\alpha}{dz} - 2 \sin \phi \frac{d\beta}{dz} \end{array} \right. \tag{2-116}$$

が得られる。

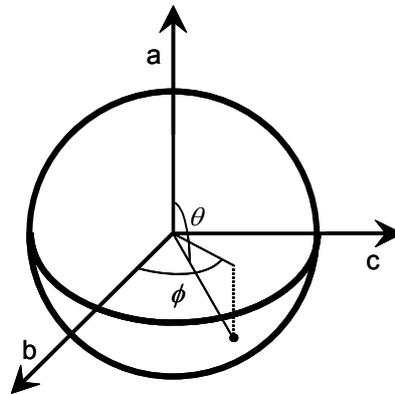


図 2-14 ジョーンズ行列要素関数と角パラメーターとの関係

2.5 第2章のまとめ

本章では、ツイステッド・ネマティック型液晶素子を表すジョーンズ行列を、液晶層中のダイレクタ角分布の仮定の違いにより、線形モデル、多層モデル、微分モデルの形に求めた。特に計算の容易さから、応用上多層モデルにおいては縁の影響のみを考慮し、さらに両縁層でのツイストが無いものと単純化した3層モデルが（以後単純3層モデルと呼ぶ）、微分モデルにおいては、角パラメーターによって表現したモデルが重要であるので、ここでまとめて記述する。

全ツイスト角 α_T 、入射面ダイレクタ ϕ_D である TN 型液晶素子のジョーンズ行列は一般に、

$$\mathbf{J}_X = \exp[-i(\phi_c + \beta_T)] \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D) \mathbf{M}_X \mathbf{R}(\psi_D) \quad (2-117)$$

という形に表すことができる。ここで、 ϕ_c は定数の位相項、 β_T は全複屈折量、行列の添え字 X は、モデルの種類（線形モデル：L、単純3層モデル：S、微分モデル：D）である。定数である位相項 ϕ_c は、変調特性に関与しないので、次章以降では無視する。全複屈折量に関しては、各モデルの導出時にはそれぞれ表式が異なっていたが、式(2-89)の積分形の表式を用いればそれらを全て含むことができるので、次章以後ではそれらを区別せず β_T で表すことにする。また行列 \mathbf{M} は各モデルの核となる部分であり、今後主行列と呼ぶ。表式上はモデルによって異なるのは主行列のみであるが、実際には実験から主行列を求め、主行列の行列要素から全複屈折量を計算するので、全複屈折量の計算値は用いるモデルによって異なる。

線形モデルの主行列は、

$$\mathbf{M}_L(\beta_T) = \begin{bmatrix} \cos \gamma - i \frac{\beta_T}{\gamma} \sin \gamma & \frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma \\ -\frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma & \cos \gamma + i \frac{\beta_T}{\gamma} \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (2-118)$$

である。ただし、 γ は式(2-51)で表される量である。線形モデルの全複屈折量 β_T は、式(2-49)で計算される。液晶素子をビデオ信号で駆動する場合、全ツイスト角 α_T 、及び入射面ダイレクタ ϕ_D は、信号のグレイレベルによって変化しない。したがって、線形モデルの場合、式(2-118)に陽に表したように、グレイレベルの変化に対して変化する量は、全複屈折量 β_T のみである。

単純3層モデルの主行列は、両縁の厚みがそれぞれ液晶層全体の厚みの $1/2N$ の時、縁以外の部分での複屈折量を β_c 、縁の部分での複屈折量を β_N とすると、

$$\mathbf{M}_S(\beta_c, \beta_N) = \begin{bmatrix} \cos \gamma_c \cos 2\beta_N - \frac{\beta_c}{\gamma_c} \sin \gamma_c \sin 2\beta_N - i \left(\cos \gamma_c \sin 2\beta_N + \frac{\beta_c}{\gamma_c} \sin \gamma_c \cos 2\beta_N \right) & \\ & -\frac{\alpha_T}{\gamma_c} \sin \gamma_c \\ & \frac{\alpha_T}{\gamma_c} \sin \gamma_c \\ \cos \gamma_c \cos 2\beta_N - \frac{\beta_c}{\gamma_c} \sin \gamma_c \sin 2\beta_N + i \left(\cos \gamma_c \sin 2\beta_N + \frac{\beta_c}{\gamma_c} \sin \gamma_c \cos 2\beta_N \right) & \end{bmatrix} \quad (2-119)$$

となる。ただし

$$\gamma_C = \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_C^2} \quad (2-120)$$

である。全複屈折量は、

$$\beta_T = \beta_C + 2\beta_N \quad (2-121)$$

となる。単純3層モデルでは、実験的に求められた主行列の行列要素から、式(2-119)を用いて縁以外の部分での複屈折量 β_C 、及び縁部分での複屈折量 β_N の2つのパラメーターを求めることにより、液晶素子に与えるビデオ信号に対する全複屈折量の変化を求めることができる。

微分モデルでの主行列は、角パラメーターを用いて

$$\mathbf{M}_D(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \theta - i \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta + i \sin \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2-122)$$

と表すことができる。ビデオ信号に対する全複屈折量の変化を求めるにはまず、実験的にビデオ信号に対する角パラメーター θ 、 ϕ の変化を求め、次に式(2-116)の連立微分方程式を用いて各ビデオ信号における液晶分子のツイスト角及びチルト角分布を求める。最後に式(2-91)の積分を実行して全複屈折量を求める。

第3章 液晶素子のパラメータ決定

3.1 はじめに

本章では、前章で構築したジョーンズ行列モデルを用いてツイステッド・ネマティック型液晶素子の位相変調特性をシミュレートすることを考え、その際必要となるパラメーターを透過率の測定からどのように決定するかを述べる。具体的には、液晶素子を偏光子及び検光子で挟んだ光学系により、偏光子及び検光子の偏角を適切に設定して透過率を測定する。偏角の設定方法としては、平行ニコル及びクロスニコルの光学系による方法⁴⁹⁾と、我々の提案である独立な設定を行う方法^{50,51)}がある。

まず、液晶素子のオフの状態、つまり液晶層に外部電界のない状態で、物理パラメーターである全ツイスト角 α_T 、全複屈折量 β_T 、及び入射面ダイレクタ ϕ_D を決定する。オフ状態では前章で述べた全てのモデルは一致するので、一番簡単な線型モデルの表式を用いてこれらパラメーターの値を決定することができる。しかしながら、ここで得られるパラメーターの値は一意的ではなく不定性がある⁵²⁾。特に、入射面ダイレクタ ϕ_D は 90° の不定性がある⁵³⁾。この不定性の問題を解決するために、いくつかの波長で透過率測定を行う方法⁵²⁾、及び全複屈折量が特定の値となる場合（アディアバティック点）を利用する方法^{54,55)}が提案されている。本章では、一般的な観点から不定性の問題を取り扱い⁵⁶⁾、これらの方法を検証すると共にその有効性を吟味する。

液晶素子がオンの状態、すなわちビデオ信号のグレイレベルにより駆動された状態においても、同様の光学系を用いた透過率測定から、その状態でのパラメーターを計算することができる。ただしこの場合は、用いるモデルによってそのパラメーターが異なる。線型モデルでは、全複屈折量の変化のみを考える。単純3層モデルでは各層の厚みが増えるので、中央部分での複屈折量と縁の部分での複屈折量を独立に考える必要がある。微分モデルでは、2つの角パラメーターを計算することが有効である。

3.2 パラメータ計算と不定性

3.2.1 透過率測定に基づくジョーンズ行列の計算方法と符号の不定性

ツイステッド・ネマティック型液晶素子を表すジョーンズ行列 \mathbf{J} を、透過率の測定から決定することを考える^{50,51,56}。前章での議論から明らかなように、素子内での吸収がないと仮定すると、ジョーンズ行列 \mathbf{J} は位相項と 2 行 2 列のユニタリ行列との積となるから、

$$\mathbf{J} = \exp(-i\beta_T) \begin{pmatrix} f - ig & h - ij \\ -h - ij & f + ig \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

の形に書くことができる。ここで、 β_T は入射光の偏光状態に係わらず、液晶素子によってもたらされる位相遅れを表しているが、透過率の測定から直接には決定できない量である。 f , g , h , 及び j は、各行列要素の実数及び虚数成分を表している。式(3-1)の行列式が 1 となることから

$$f^2 + g^2 + h^2 + j^2 = 1 \quad (3-2)$$

の規格化条件が導かれる。

図 3-1 に示すように、液晶素子を偏光子及び検光子で挟み、その透過光強度を測定する実験系を考える。偏光子及び検光子の透過軸方位角（以後偏角と呼ぶ）をそれぞれ ψ_P 及び ψ_A とする。液晶素子への入射光は ψ_P 方向の直線偏光であるから、その強度を 1 とすると、ジョーンズベクトルを用いて

$$\begin{pmatrix} \cos\psi_P \\ \sin\psi_P \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

となる。検光子からの出射光は、 ψ_A 方向の直線偏光となるので

$$\exp(-i\beta_T) \tilde{T}_{\psi_P, \psi_A} \begin{pmatrix} \cos\psi_A \\ \sin\psi_A \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

となる。ここで、 $\tilde{T}_{\psi_P, \psi_A}$ は、図 3-1 の光学系での複素振幅透過率を表す。この複素振幅透過率は、

表 2-2 に示した透過軸 ψ の偏光子に対するジョーンズ行列 \mathbf{P}_ψ 、及び式(3-1)を用いて

$$\exp(-i\beta_T) \tilde{T}_{\psi_P, \psi_A} \begin{pmatrix} \cos\psi_A \\ \sin\psi_A \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{\psi_A} \mathbf{J} \begin{pmatrix} \cos\psi_P \\ \sin\psi_P \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

の方程式から求めることができ、計算結果は

$$\tilde{T}_{\psi_P, \psi_A} = f \cos(\psi_P - \psi_A) + h \sin(\psi_P - \psi_A) - i [g \cos(\psi_P + \psi_A) + j \sin(\psi_P + \psi_A)] \quad (3-6)$$

となる。図 3-1 の光学系での強度透過率を T_{ψ_P, ψ_A} とすると

$$T_{\psi_P, \psi_A} = f^2 \cos^2(\psi_P - \psi_A) + fh \sin[2(\psi_P - \psi_A)] + h^2 \sin^2(\psi_P - \psi_A) + g^2 \cos^2(\psi_P + \psi_A) + gj \sin[2(\psi_P + \psi_A)] + j^2 \sin^2(\psi_P + \psi_A) \quad (3-7)$$

となる.

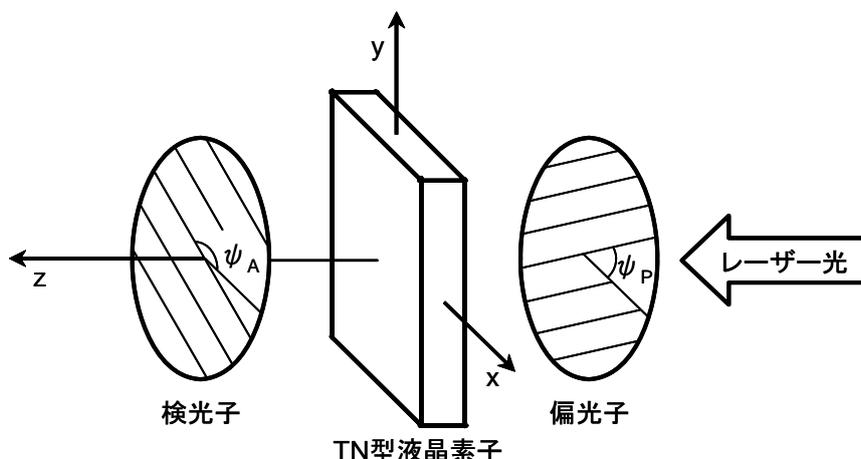


図 3-1 透過率測定的光学系配置

式(3-7)を見て分かる通り，強度透過率は，液晶素子のジョーンズ行列要素と，偏光子及び検光子の偏角に依存した三角関数の積となる．特にジョーンズ行列要素への依存をみると，各要素の 2 乗あるいは各要素の積のみが現れることが分かる．したがって，直線偏光のみを使用した透過率測定を行って液晶素子のジョーンズ行列を実験的に求めようとするとき，行列要素の絶対値は求まるが，その符号は一意的には定まらない．

式(3-1)のジョーンズ行列要素であるパラメータ $f, g, h,$ 及び j の符号の関係を調べる．各パラメータの符号が独立であれば，符号の組み合わせは合計 $2^4=16$ 個の可能性がある．しかしながら，式(3-7)により fh 及び gj の符号を決定することは可能であるので， f と h 及び g と j の符号は独立ではなく，それら積の符号を用いて組み合わせを分類できる．表 3-1 にまとめたように，各パラメータが独立の場合の 16 個の組み合わせ C1 から C16 は，4 個ずつの組み合わせを含んだ 4 つのグループとなる．このように，直線偏光を用いた透過率測定のみでは，各グループ内の 4 つの符号組み合わせが可能となり，これを一意的に決定することはできない．

直線偏光のみでなく，一般の偏光状態を許す透過率測定を行った場合，この不定性はどうか検討する．今，2 つの TN 型液晶素子があり，それぞれのジョーンズ行列が

$$\mathbf{J}_1 = \exp(-i\beta_T) \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

及び

$$\mathbf{J}_2 = \exp(-i\beta_T) \begin{pmatrix} -j_{11} & -j_{12} \\ -j_{21} & -j_{22} \end{pmatrix} \quad (3-9)$$

であるとする．

表 3-1 液晶素子のジョーンズ行列各要素の符号の関係とグループ

		$gj \geq 0$		$gj < 0$	
		$g \geq 0, j \geq 0$	$g \leq 0, j \leq 0$	$g > 0, j < 0$	$g < 0, j > 0$
$fh \geq 0$	$f \geq 0, h \geq 0$	C1	C2	C5	C6
	$f \leq 0, h \leq 0$	C3	C4	C7	C8
$fh < 0$	$f > 0, h < 0$	C9	C10	C13	C14
	$f < 0, h > 0$	C11	C12	C15	C16

この 2 つの液晶素子に、ある偏光状態を持つ光

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} \quad (3-10)$$

を入射した時の出射光をそれぞれ \mathbf{E}_1 及び \mathbf{E}_2 とすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{J}_1 \mathbf{E} \\ &= \exp(-i\beta_T) \begin{pmatrix} j_{11}\tilde{E}_x + j_{12}\tilde{E}_y \\ j_{21}\tilde{E}_x + j_{22}\tilde{E}_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \mathbf{J}_2 \mathbf{E} \\ &= \exp[-i(\beta_T + \pi)] \begin{pmatrix} j_{11}\tilde{E}_x + j_{12}\tilde{E}_y \\ j_{21}\tilde{E}_x + j_{22}\tilde{E}_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-12)$$

となる。式(3-11)及び(3-12)を見れば明らかなように、この 2 つの出射光は、位相が 180° ずれているが、その偏光状態は全く変わらない。したがって、絶対的な位相の測定を行わず、強度のみを測定する限り、この 2 つの出射光を区別することはできない。よって、どのような偏光状態の光波を用いても、ジョーンズ行列要素を一意的に決定することはできない。ただし、直線偏光の場合、符号組み合わせの候補が 4 つだったことに比べて、一般の偏光状態を用いた測定では、符号組み合わせの候補を 2 つに減らすことが可能となる。

偏光子及び検光子偏角の具体的な例を挙げる。まず、平行ニコルの場合 $\phi_P = \phi_A$ を考える。この時の透過率は、式(3-7)に偏角を代入して

$$\begin{aligned} T_{\psi_P, \psi_P} &= f^2 + g^2 \cos^2(2\psi_P) + gj \sin(4\psi_P) + j^2 \sin^2(2\psi_P) \\ &= f^2 + [g \cos(2\psi_P) + j \sin(2\psi_P)]^2 \\ &= f^2 + [\sqrt{g^2 + j^2} \cos(2\psi_P - \psi_I)]^2 \end{aligned} \quad (3-13)$$

となる。ただし、

$$\psi_I = \tan^{-1} \frac{j}{g} \quad (3-14)$$

とした．一方，クロスニコルの場合は， $\psi_A = \psi_P + 90^\circ$ とすれば，

$$\begin{aligned} T_{\psi_P, \psi_P + 90^\circ} &= h^2 + g^2 \sin^2(2\psi_P) - gj \sin(4\psi_P) + j^2 \cos^2(2\psi_P) \\ &= h^2 + [g \sin(2\psi_P) - j \cos(2\psi_P)]^2 \\ &= h^2 + \left[\sqrt{g^2 + j^2} \sin(2\psi_P - \psi_I) \right]^2 \end{aligned} \quad (3-15)$$

となる．式(3-13)及び(3-15)を見れば分かる通り，これらの透過率は共に，偏光子の偏角 ϕ_P を変化させることにより正弦状に変化する．また，それぞれの正弦曲線の平均値と振幅から，ジョーンズ行列要素 f , g , h , 及び j の 2 乗の値を求めることができる．Soutar と Lu は，例えばクロスニコルの場合に透過率の極小値を与える角度を測定すれば，

$$2\psi_P - \psi_I = k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3-16)$$

が成り立つことから ψ_I が求まることを利用し，そこから液晶素子の物理パラメータを求めた⁴⁹⁾．この方法は，偏角を変化させるステップを細かくすることにより測定精度を上げることが可能である．しかしながら，式(3-13)及び(3-15)に fh の項がないため， f と h の符号を独立に扱わなければならない．このため，入出力光として任意の直線偏光の組み合わせを考えた場合に比べてジョーンズ行列要素の不定性が 2 倍に増え，符号組み合わせの候補は 8 つとなる．

偏光子と検光子の偏角を適切に組み合わせ，解析的にジョーンズ行列要素を求めることを考える．求める変数の数は， f , g , h , 及び j の 4 つである．しかし，式(3-2)の正規化条件があるため，独立な変数はこのうちの 3 つのみである．したがって，3 つの偏角の組に対する透過率を測定し，式(3-7)にそれらの測定値を代入して実験式を得れば，それらを連立方程式として解くことができる．これら偏角の組は，連立方程式が 1 次従属となって解が不定にならないという条件で，実験上の都合で任意に設定することができる．例えば偏角の組 (ϕ_P, ϕ_A) は， $(0^\circ, 0^\circ)$, $(30^\circ, 60^\circ)$, $(45^\circ, -45^\circ)$, $(30^\circ, 30^\circ)$ の 4 つに対し透過率を測定し，ジョーンズ行列要素を求めることができる．3 つではなく，4 つの偏角の組で測定を行うのは，できるだけ簡単な計算でジョーンズ行列要素を求め，かつ不定性をより少なくするためである．具体的な連立方程式の解法を付録 3 に示す．また実験結果は 3.3.2 項で述べる．

3.2.2 ジョーンズ行列からの物理パラメータ計算方法とその不定性

前項で見たように，符号の不定性は残るものの，透過率測定から TN 型液晶素子のジョーンズ行列は位相項を除いて決定することができた．位相項は，干渉計を用いて直接位相遅れを測定するか，第 2 章で構築したジョーンズ行列モデルを用いて，行列要素から計算することにより決定する．本項では，液晶素子がオフ状態の時，実験的に得られたジョーンズ行列要素から，線型モデルを用いて物理パラメータである全ツイスト角，全複屈折量，及び入射面ダイレクタを計算する方法を述べる．また，その計算における解の不定性を明らかにする．

線型モデルでは，液晶素子のジョーンズ行列は，式(2-52)で表される．式(2-52)右辺と式(3-1)右辺からそれぞれ位相項を除いた部分を等しいとおくことにより，

$$\frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma \sin \alpha_T + \cos \gamma \cos \alpha_T = f \quad (3-17)$$

$$\frac{\beta_T}{\gamma} \sin \gamma \cos(\alpha_T + 2\psi_D) = g \quad (3-18)$$

$$\frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma \cos \alpha_T - \cos \gamma \sin \alpha_T = h \quad (3-19)$$

$$\frac{\beta_T}{\gamma} \sin \gamma \sin(\alpha_T + 2\psi_D) = j \quad (3-20)$$

が得られる。また式(3-20)/(3-18)を実行すれば直ちに

$$\psi_D = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{j}{g} - \frac{\alpha_T}{2} \quad (3-21)$$

が得られる。上式より明らかなように、ジョーンズ行列の実数要素である f 及び h から、全ツイスト角 α_T と全複屈折量 β_T が求まり、虚数要素である g 及び j から、入射面ダイレクタ ϕ_D を計算することができる。電源オフ状態での全複屈折量は、液晶素子の最大複屈折量 β_{\max} となる。

式(3-17)及び(3-19)を、全ツイスト角 α_T 及び全複屈折量 β_T に対する連立方程式とみなして書き下すと、

$$\begin{cases} \frac{\alpha_T}{\sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2}} \sin \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2} \sin \alpha_T + \cos \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2} \cos \alpha_T = f \\ \frac{\alpha_T}{\sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2}} \sin \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2} \cos \alpha_T - \cos \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2} \sin \alpha_T = h \end{cases} \quad (3-22)$$

となる。連立方程式(3-22)は解析的に解くことはできないので、ニュートン・ラプソン法等の解法を用いて数値的に解くこととなる。実は、連立方程式(3-22)は、測定値の一つの組(f , h)に対し無限個の解を持つ。これは定性的には、全複屈折量 β_T が大きい時、式(3-22)は両式とも分数部分のある左辺第1項が小さな量となって左辺第2項が支配的な式となるため、全ツイスト角 α_T に対し三角関数のように変化し、周期的な解を持つようになるからと説明できる。厳密な証明は付録4に示す。実際には、全ツイスト角及び全複屈折量のおおよその値は知れていることが多く、それほど大きな値ではない。しかしながら次節で明らかになるように、物理的に矛盾のない範囲にいくつもの解が存在し、さらにそれらの解が近い値を持つ場合がある。そのような場合、たとえ全ツイスト角及び全複屈折量の近似値が分かっていたとしても、それらを式(3-22)から一意的に決定することはできない。

前項で議論したジョーンズ行列要素の符号の不定性と、物理パラメーターとの関係について整理しておくことは有用である。まず f 及び h の符号と全ツイスト角 α_T 及び全複屈折量 β_T の符号の関係について調べる。全複屈折量 β_T は、式(2-91)を見ても明らかなように加算的な量であって、常に正である。全ツイスト角 α_T の絶対値はおおよそ 90° であるが、そのツイストの向きは明らかではなく、したがってその正負は不明である。 α_T に対して $\sin \alpha_T$ は奇関数、 $\cos \alpha_T$ は偶関数であるから、式(3-22)において変数 f は α_T の偶関数、変数 h は α_T の奇関数であることが分かる。したがって、ある測定値の一つの組(f , h)に対し(α_T , β_T)が式(3-22)の解ならば、測定値の他の組(f , $-h$)に対して($-\alpha_T$, β_T)は式(3-22)を満たす。

入射面ダイレクタ ϕ_D は,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi_D \leq \frac{\pi}{2} \quad (3-23)$$

の範囲で測定するものとする。したがって、式(3-21)における逆正接関数は、その主値をとるのではなく、

$$-\pi + \alpha_T \leq \tan^{-1} \frac{j}{g} \leq \pi + \alpha_T \quad (3-24)$$

の範囲で決定する必要がある。つまり、 j/g の値が同じでも、 g 及び j それぞれの値の正負によって、逆正接関数の値は 180° だけ異なる可能性がある。これは、入射面ダイレクタ ϕ_D に 90° の不定性が生じることを意味している。また、式(3-21)から明らかなように、入射面ダイレクタの値は、全ツイスト角の値によっても変化する。

これらの関係を、表 3-1 に対応させて、ジョーンズ行列要素の正負に対してまとめたのが表 3-2 である。表 3-2 では、全てのジョーンズ行列要素が正の場合の解、及び f と h が共に負で、 g と j が共に正の場合の解を基本解として、それぞれ $(\alpha_p, \beta_p, \phi_{Dp})$ 及び $(\alpha_q, \beta_q, \phi_{Dq})$ ($p, q=1, 2, 3, \dots$) とした。全ツイスト角及び全複屈折量の値の範囲を制限しなければ、それぞれの基本解の数は無限個ある。しかしながら実際には、3.3 節でみるように、典型的な液晶素子では基本解の数は 10 個程度に絞ることができる。ジョーンズ行列要素の符号組み合わせが他の場合の解は、全てこの 2 つの基本解のどちらかを用いて表すことが可能である。例えば、直線偏光のみを用いて透過率測定をした場合を考える。測定の結果、 $fh > 0, gj > 0$ だったとしよう。この時は、表 3-1 において、グループ 1 である C1 から C4 の 4 つの符号の組み合わせが可能である。表 3-2 の対応する部分を見ると、 f と h が共に正の時は C1 あるいは C2 であるから、全ツイスト角と全複屈折量の決定に g と j の値の正負は関係しないことが分かる。ただし、入射面ダイレクタに関しては 90° の不定性がある。さらに一般の楕円偏光を許して透過率を測定する追加実験をしたとしよう。この時、符号の組み合わせは C1 と C4、あるいは C2 と C3 のどちらかに絞られる。したがって、追加実験により入射面ダイレクタの不定性がなくなることが分かる。逆に、透過率測定が平行ニコル及びクロスニコルのみを用いて行われたものであれば、前項で述べたように fh の符号が決まらないので、グループ 1 に加え、グループ 3 に属する C9 から C12 も符号組み合わせの候補として考えなければならない。この時は、表 3-2 の対応する箇所を参照することにより、一般の直線偏光を用いた測定と比較して、全ツイスト角の符号が決まらなくなることが分かる。

このように、一般の偏光状態を用いた測定では、ジョーンズ行列要素の符号組み合わせはかなり絞られるので、基本解の数がそのまま物理パラメーターに対する不定性となる。直線偏光のみを用いた測定では、入射面ダイレクタが 90° の不定性を持つので、物理パラメーターの不定性は、基本解の数の 2 倍となる。平行ニコル及びクロスニコルのみを用いた測定では、さらに全ツイスト角の正負に対する不定性が加わるため、物理パラメーターに対する不定性は、基本解の数の 4 倍となる。

表 3-2 液晶素子のジョーンズ行列各要素の符号と物理パラメーターの不定性の関係

		$gj \geq 0$		$gj < 0$	
		$g \geq 0, j \geq 0$	$g \leq 0, j \leq 0$	$g > 0, j < 0$	$g < 0, j > 0$
$fh \geq 0$	$f \geq 0, h \geq 0$	$\alpha_p, \beta_p, \psi_{Dp}$	$\alpha_p, \beta_p, \psi_{Dp} + \frac{\pi}{2}$	$\alpha_p, \beta_p, -\alpha_p - \psi_{Dp}$	$\alpha_p, \beta_p, \frac{\pi}{2} - \alpha_p - \psi_{Dp}$
	$f \leq 0, h \leq 0$	$\alpha_q, \beta_q, \psi_{Dq}$	$\alpha_q, \beta_q, \psi_{Dq} + \frac{\pi}{2}$	$\alpha_q, \beta_q, -\alpha_q - \psi_{Dq}$	$\alpha_q, \beta_q, \frac{\pi}{2} - \alpha_q - \psi_{Dq}$
$fh < 0$	$f > 0, h < 0$	$-\alpha_p, \beta_p, \alpha_p + \psi_{Dp}$	$-\alpha_p, \beta_p, \alpha_p + \psi_{Dp} + \frac{\pi}{2}$	$-\alpha_p, \beta_p, -\psi_{Dp}$	$-\alpha_p, \beta_p, \frac{\pi}{2} - \psi_{Dp}$
	$f < 0, h > 0$	$-\alpha_q, \beta_q, \alpha_q + \psi_{Dq}$	$-\alpha_q, \beta_q, \alpha_q + \psi_{Dq} + \frac{\pi}{2}$	$-\alpha_q, \beta_q, -\psi_{Dq}$	$-\alpha_q, \beta_q, \frac{\pi}{2} - \psi_{Dq}$

3.2.3 動作状態における各モデルのパラメーター計算方法

本項では、線型モデル、単純3層モデル、及び微分モデルを用いて、液晶素子動作状態でのパラメーターの計算方法について述べる。前項で述べたように、全ツイスト角及び入射面ダイレクタは液晶素子がオフの状態では測定され、動作状態においてもその値は変化しない。液晶素子動作状態では、液晶素子に入力するビデオ信号のグレイレベルの関数としてそれ以外のパラメーターを決定する。具体的には、前章 2.5 節でまとめた表式にしたがって、線型モデルでは全複屈折量の物理パラメーターを、単純3層モデルでは中央部分での複屈折量と縁の部分での複屈折量を、微分モデルでは角パラメーターを計算する手順について述べる。合わせて、各モデルにおける全複屈折量の計算方法も示す。

式(2-117)と式(3-1)の規格化された行列部分を等しいとおくことにより、TN型液晶素子ジョーンズ行列モデルの主行列は、

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_X &= \mathbf{R}(\alpha_T + \psi_D) \begin{pmatrix} f - ig & h - ij \\ -h - ij & f + ig \end{pmatrix} \mathbf{R}(-\psi_D) \\ &= \begin{pmatrix} a_g - ib_g & c_g \\ -c_g & a_g + ib_g \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-25)$$

となる。ここで、 α_T と ψ_D はそれぞれ液晶素子がオフ状態で測定された全ツイスト角と入射面ダイレクタであり、 f, g, h, j は液晶素子が動作状態の時、あるグレイレベルに対して透過率測定から計算されたジョーンズ行列要素である。式(3-25)1行目右辺を計算すると、その(1,2)及び(2,1)要素の虚数項は0となり、2行目の形になる。ここで、グレイレベルによって変化する量であることを陽に表すため、実験的に得られた主行列の各要素に g の添え字を付加した。

線形モデルの場合には、式(2-118)と式(3-25)を等しいとおくことにより

$$\cos \gamma = a_g \quad (3-26)$$

$$\frac{\beta_T}{\gamma} \sin \gamma = b_g \quad (3-27)$$

$$\frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma = c_g \quad (3-28)$$

が得られるので、全複屈折量 β_T は解析的に簡単に求めることが可能であり、例えば

$$\beta_T = \frac{b_g}{c_g} \alpha_T \quad (3-29)$$

となる。

単純 3 層モデルでは、式(2-119)と式(3-25)を等しいとおくことにより

$$\cos \gamma_c \cos 2\beta_N - \frac{\beta_c}{\gamma_c} \sin \gamma_c \sin 2\beta_N = a_g \quad (3-30)$$

$$\cos \gamma_c \sin 2\beta_N + \frac{\beta_c}{\gamma_c} \sin \gamma_c \cos 2\beta_N = b_g \quad (3-31)$$

$$\frac{\alpha_T}{\gamma_c} \sin \gamma_c = c_g \quad (3-32)$$

が得られる。まず、式(3-32)を変形して β_c を書き下すと

$$\frac{\sin \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_c^2}}{\sqrt{\alpha_T^2 + \beta_c^2}} = \frac{c_g}{\alpha_T} \quad (3-33)$$

となるが、式(3-33)は変数として β_c のみを含んだ方程式であるので、ただちに中央部分での複屈折量 β_c を求めることができる。次に式(3-30)、(3-31)をまとめ、式(3-33)を代入すると

$$2\beta_N = \tan^{-1} \frac{\alpha_T \cos \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_c^2}}{c_g \beta_c} - \tan^{-1} \frac{a_g}{b_g} \quad (3-34)$$

となり、縁部分での複屈折量 β_N が得られる。単純 3 層モデルでの全複屈折量は、 $\beta_c + 2\beta_N$ である。

微分モデルにおいては、式(2-122)と式(3-25)を等しいとおくことにより

$$\cos \theta = a_g \quad (3-35)$$

$$\sin \theta \cos \phi = b_g \quad (3-36)$$

$$\sin \theta \sin \phi = c_g \quad (3-37)$$

が得られるので、

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} a_g \\ &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{b_g^2 + c_g^2}}{a_g} \end{aligned} \quad (3-38)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c_g}{b_g} \quad (3-39)$$

となる。ただし、角パラメーターの変域については注意が必要である。具体的には次節で示すが、不定性無く求められた電源オフ状態の時の角パラメーターの値が分かっているので、その値と連続的に繋がるように式(3-38)及び(3-39)の逆正接関数を解いて電源オン状態での角パラメーターを決定する。

このようにジョーンズ行列要素の実験値から角パラメーター θ 、 ϕ は容易に求まるが、それらから全複屈折量を直接求めることはできない。そこで、以下の手順により全複屈折量を計算する。

- 1) 液晶層内での液晶分子ダイレクタ方位角、及びチルト角の分布を仮定する。
- 2) 方位角の仮定より式(2-93)によりツイスト角の分布を、またチルト角の仮定より式(2-94)により複屈折量の分布を求める。
- 3) それらの微分値を式(2-116)の微分方程式に代入し、角パラメーターに対する微分値を求める。
- 4) それを数値的に積分することにより、仮定した分布に対する角パラメーターを求める。
- 5) 求めた角パラメーターと、式(3-38)、(3-39)により計算された実験値を比較し、それらが等しくなるように方位角及びチルト角の分布を最適化する。

実際には、各グレイレベルに対して実験値が 2 つなので、最適化するパラメーターは 2 つしかとることができない。そこで、方位角の分布を 1 つのパラメーターで最適化し、チルト角を 1 つのパラメーターで最適化することとなる。前章で述べた通り、方位角及びチルト角は、フランクの弾性定数に関係した微分方程式である式(2-23)及び(2-24)にしたがって変化しており、一般にその微分方程式は解析的には解けない。したがって、方位角及びチルト角の分布を 1 つのパラメーターを持った関数で正確に表すことはできない。しかしながら、2.3.2 項で述べたように、方位角及びチルト角分布の定性的な性質は分かるので、近似的な関数形を仮定することは可能である。具体的な近似関数と最適化パラメーターは 3.3.2 項に示す。

3.3 パラメータ決定の実例

3.3.1 不定性の典型例

前節で議論した不定性の性質を調べるため、ここでいくつかの例を取り上げる。本項では、液晶素子の物理パラメータである全ツイスト角 α_T 、全複屈折量 β_T 、及び入射面ダイレクタ ϕ_D を求めるため、液晶素子はオフ状態とする。初めに、通常用いられる典型的な TN 型液晶素子として、ツイスト角 $\alpha_T=90^\circ$ 、全複屈折量 $\beta_T=180^\circ$ 、入射面ダイレクタ $\phi_D=0^\circ$ の仮想的な液晶素子があるとする。式(2-52)により計算すると、透過率測定によって得られるジョーンズ行列要素は

$$\begin{cases} f = -0.162 \\ g = 0 \\ h = 0.932 \\ j = -0.324 \end{cases} \quad (3-40)$$

となるはずである。しかしながら、一般の楕円偏光を用いる実験を行っても、それぞれの行列要素が反対符号を取る可能性を否定できないはずであるから、

$$\begin{cases} f = 0.162 \\ g = 0 \\ h = -0.932 \\ j = 0.324 \end{cases} \quad (3-41)$$

の場合についても調べる必要がある。式(3-40)、(3-41)それぞれの場合について、連立方程式(3-22)の解を求めよう。式(3-22)は非線型連立方程式であり、一般的な解法はないので、付録 5 に示すような、ニュートン・ラプソン法等の数値解法を用いるのが良策である。具体的には、

$$\frac{\alpha_T}{\sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2}} \sin \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2} \sin \alpha_T + \cos \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2} \cos \alpha_T = -0.162 \quad (3-42)$$

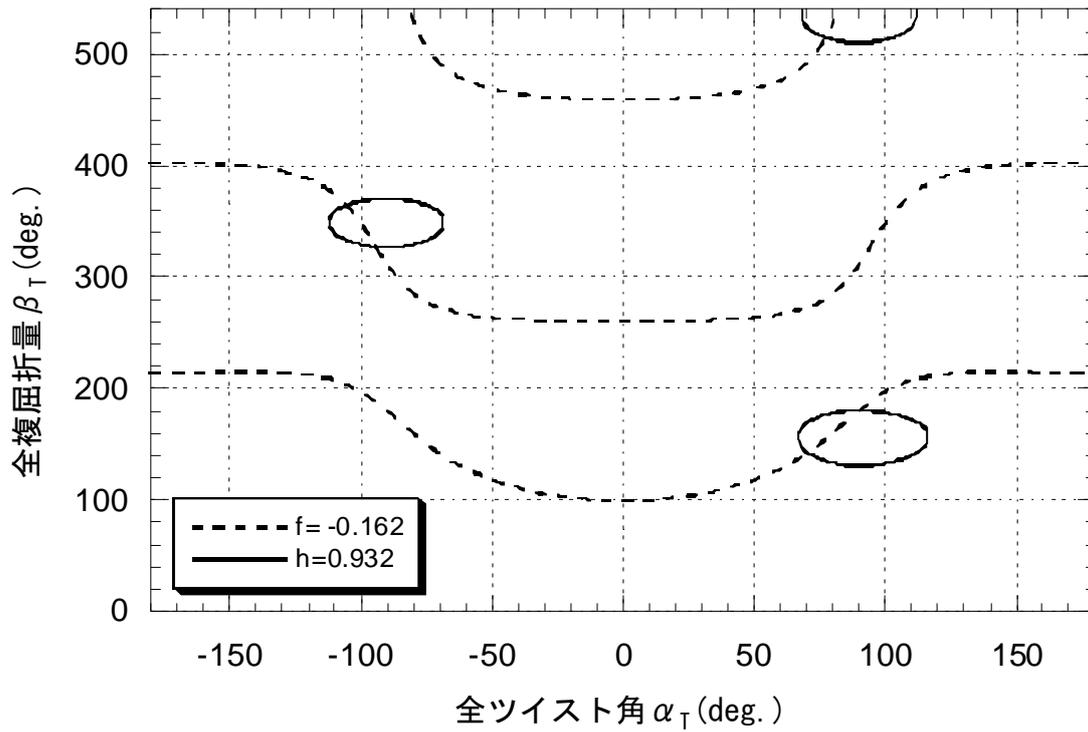
$$\frac{\alpha_T}{\sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2}} \sin \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2} \cos \alpha_T - \cos \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2} \sin \alpha_T = 0.932 \quad (3-43)$$

となるが、この連立方程式は 3.2.2 項で説明したように無限個の解を持つ。我々が知りたいのは、現実の TN 型液晶素子として矛盾のない範囲に何個の解が存在するか、またそれを物理的洞察により一意に決定することが可能かどうかということである。解の密度（個数）を調べるためにまず、全ツイスト角 α_T を変化させたとき、それぞれの式を満たす全複屈折量 β_T の軌跡（解曲線あるいはゼロ等高線）を求めた。その軌跡を α_T - β_T 平面上にプロットしたのが図 3-2(a)である。ただし、現実的なパラメータの範囲として

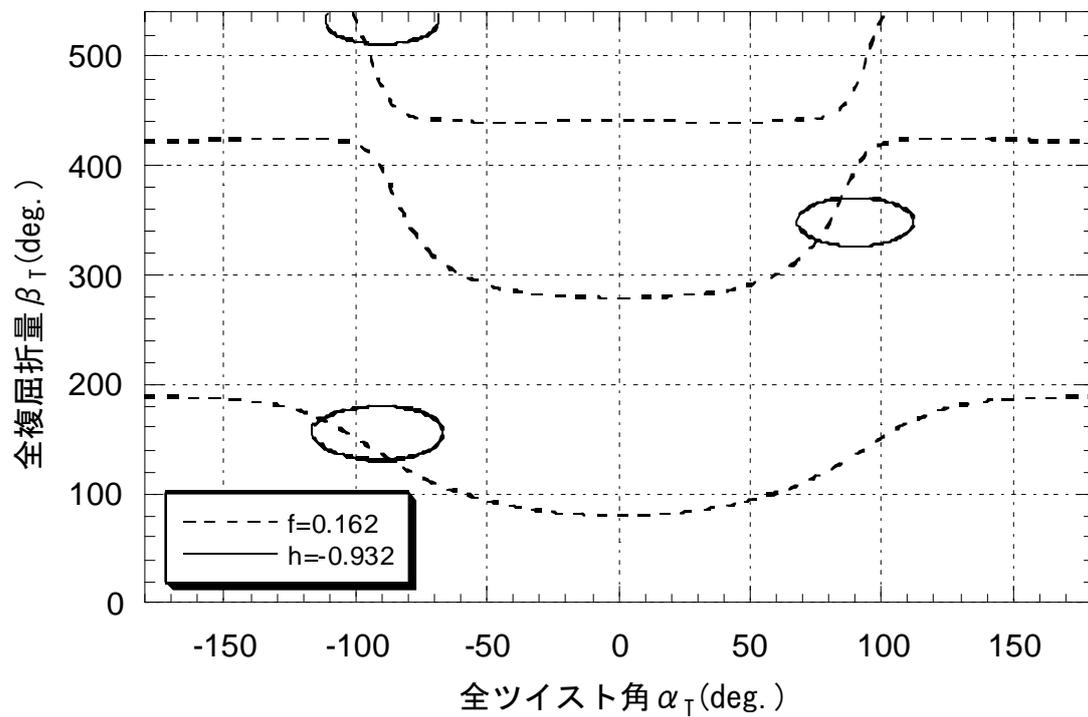
$$-180^\circ \leq \alpha_T \leq 180^\circ \quad (3-44)$$

$$0 \leq \beta_T \leq 540^\circ \quad (3-45)$$

を仮定し、数値解法の初期値をその範囲内にとって数値解を求めた。図の実線と点線の交点は式(3-42)と式(3-43)を同時に満足するから、連立方程式(3-22)の解となる。



(a)



(b)

図 3-2 典型的な例における連立方程式(3-22)の解. (a)ジョーンズ行列要素の符号が正しい時.
(b)符号が正しくない時. 式(3-44), (3-45)の範囲にそれぞれ 5 個の解がある.

図を見て明らかなように, このパラメーター範囲で 5 つの解がある. 一つの全ツイスト角 α_T , 全複屈折量 β_T の組に対し, 入射面ダイレクタ ϕ_D は式(3-20)より導かれる式

$$\sin(\alpha_T + 2\psi_D) = 1 \quad (3-46)$$

により、式(3-23)の範囲で一意的に定まる。ただし、透過率測定に直線偏光しか用いなかった場合は、ジョーンズ行列要素 j の符号が決まらないため、式(3-46)左辺=-1 の可能性を否定できなくなり、 90° の不定性が残る。同様に式(3-42)左辺=0.162, 式(3-43)左辺=-0.932 について図 3-2(b)にプロットする。この場合も、解は 5 つである。以上典型的な仮想素子の場合、可能な解の個数は合計 10 個となる。これら 10 個の具体的な値を表 3-3 にまとめて示す。この仮想素子の場合、例えばツイスト角の絶対値が $90^\circ \pm 5^\circ$ のように分かっている場合でも、表 3-3 によればそのような解は正しい解の他に 3 個あることが分かる。

表 3-3 典型的な液晶素子の例における、透過率測定から得られる物理パラメーターの候補 ($\alpha_T=90^\circ$, $\beta_T=180^\circ$ が正しい解)

連立方程式(3-22)の解 $f = -0.162, h = 0.932$ の時		連立方程式(3-22)の解 $f = 0.162, h = -0.932$ の時	
α_T (deg.)	β_T (deg.)	α_T (deg.)	β_T (deg.)
-106	365	-113	169
-94	327	-96	512
70	142	-87	131
77	515	76	332
90	180	85	370

3.3.2 液晶素子のパラメーター決定

(1) セイコーエプソン製液晶素子の物理パラメーター決定

実際の TN 型液晶素子についてオフ状態で透過率測定の実験を行い、その物理パラメーターを計算した。使用した液晶素子は、セイコーエプソン製 VPJ-2000 ビデオプロジェクター赤色用のものと、ソニー製 LCX012AL である。それぞれの液晶素子の仕様を表 3-4 に示す。両素子共に画素ピッチが小さく、画素数の多い高精細な液晶素子であることが分かる。本項ではセイコーエプソン製液晶素子の測定例を示す。セイコーエプソン製液晶素子の外観は、図 3-3 の通りである。

まず、図 3-4 に示す光学系を用いて透過率測定を行った。波長 633nm の He-Ne レーザーからの直線偏光ビームを、 $1/4$ 波長板によりほぼ円偏光にして、偏光子に入射する。このようにすることで、偏光子を回転しても液晶素子に入射するレーザー光強度の変動が少なくなり、測定精度が向上する。偏光子及び検光子の偏角は、付録 3 に示した計算が可能となるよう、それぞれ (0° , 0°), (30° , 60°), (45° , -45°), 及び (30° , 30°) に設定した。偏光子の偏角が ψ_P , 検光子の偏角が ψ_A の時の透過光強度をそれぞれ I_{ψ_P, ψ_A} としたとき、透過率は

$$T_{\psi_P, \psi_A} = \frac{I_{\psi_P, \psi_A}}{I_{\psi_P, \psi_A} + I_{\psi_P, \psi_A + 90}} \quad (3-47)$$

表 3-4 実験に用いた高精細 TN 型液晶素子の仕様

	セイコーエプソン製 VPJ-2000	ソニー製 LCX012AL
型	ツイステッド・ネマティック 透過型	ツイステッド・ネマティック 透過型
駆動方式	電気アドレス アクティブマトリックス	電気アドレス アクティブマトリックス
大きさ	対角 1.32 インチ 26.9mm(横)×20.2mm(縦)	対角 1.3 インチ 26mm(横)×20mm(縦)
画素数	480(横)×440(縦)	640(横)×480(縦)
画素ピッチ	56 μ m (横)×46 μ m (縦)	41 μ m (横)×42 μ m (縦)

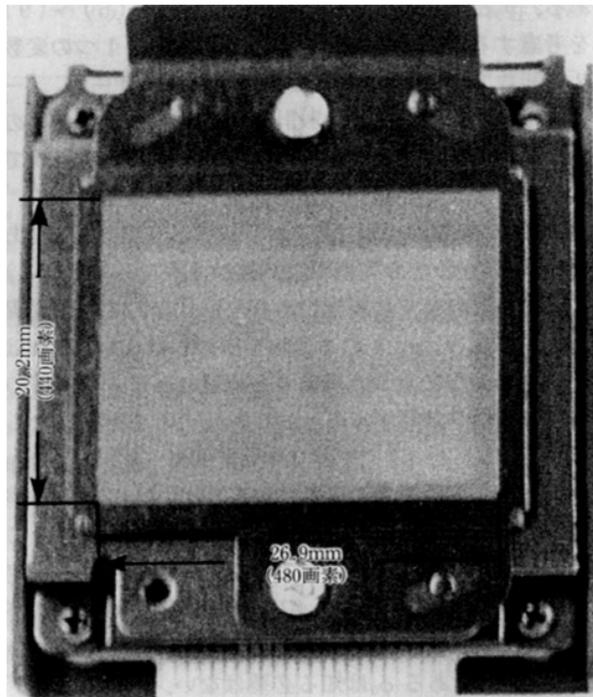


図 3-3 セイコーエプソン製 VPJ-2000 用液晶素子の外観

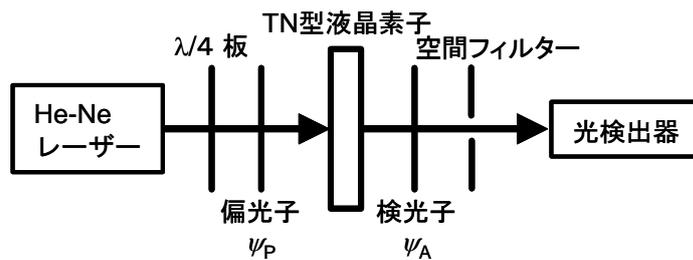


図 3-4 液晶素子の透過率測定の実験配置

により計算した。測定結果は、

$$T_{0,0} = 0.2416 \quad (3-48)$$

$$T_{30,60} = 0.3085 \quad (3-49)$$

$$T_{45,-45} = 0.4625 \quad (3-50)$$

$$T_{30,30} = 0.5187 \quad (3-51)$$

であった。これらの値から、付録 3 に示した手順にしたがって行列要素の絶対値を求めると、

$$|f| = 0.4856 \quad (3-52)$$

$$|g| = 0.0765 \quad (3-53)$$

$$|h| = 0.6758 \quad (3-54)$$

$$|j| = 0.5493 \quad (3-55)$$

となる。また、行列要素の積を求めると、

$$fh = 0.3281 \quad (3-56)$$

$$gj = 0.0638 \quad (3-57)$$

となった。これらの積が正であることから、この液晶素子のジョーンズ行列要素の符号の関係は表 3-1 におけるグループ 1 の場合であって、ジョーンズ行列要素 f と h 、及び g と j はそれぞれ符号が等しいことが分かる。これらの結果から、セイコーエプソン製液晶素子の物理パラメーターは、

1) $f, h, g, j \geq 0$ のとき (表 3-1 における C1)

$$f = 0.4856, \quad g = 0.0765, \quad h = 0.6758, \quad j = 0.5493 \quad (3-58)$$

2) $f, h \geq 0, \quad g, j \leq 0$ のとき (表 3-1 における C2)

$$f = 0.4856, \quad g = -0.0765, \quad h = 0.6758, \quad j = -0.5493 \quad (3-59)$$

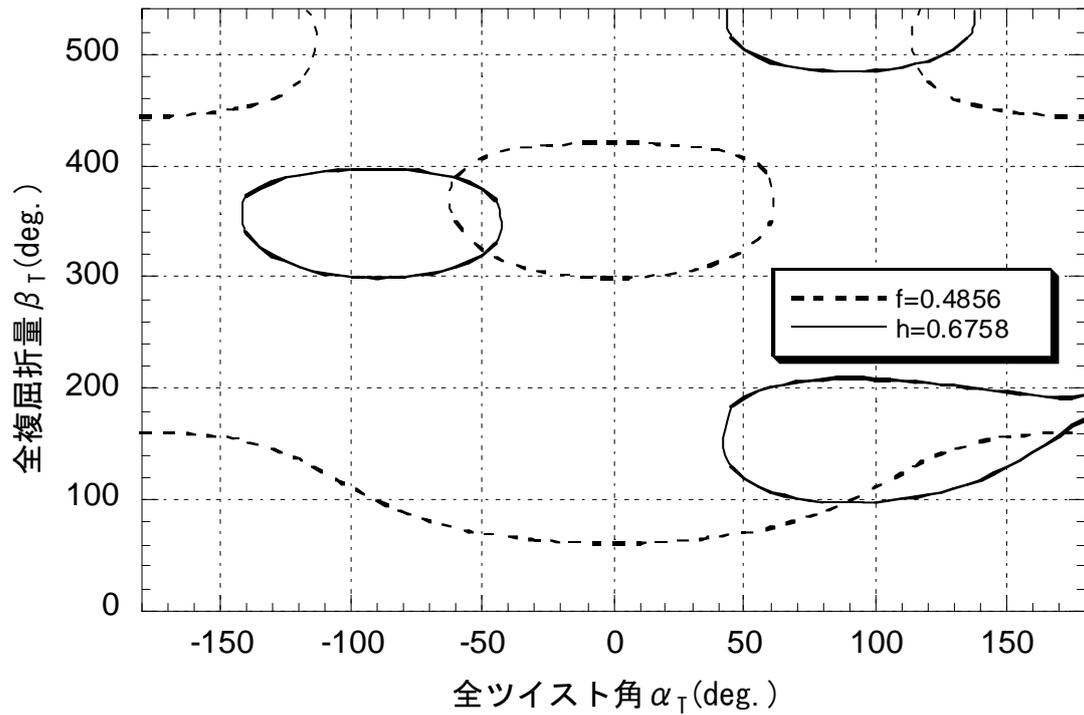
3) $f, h \leq 0, \quad g, j \geq 0$ のとき (表 3-1 における C3)

$$f = -0.4856, \quad g = 0.0765, \quad h = -0.6758, \quad j = 0.5493 \quad (3-60)$$

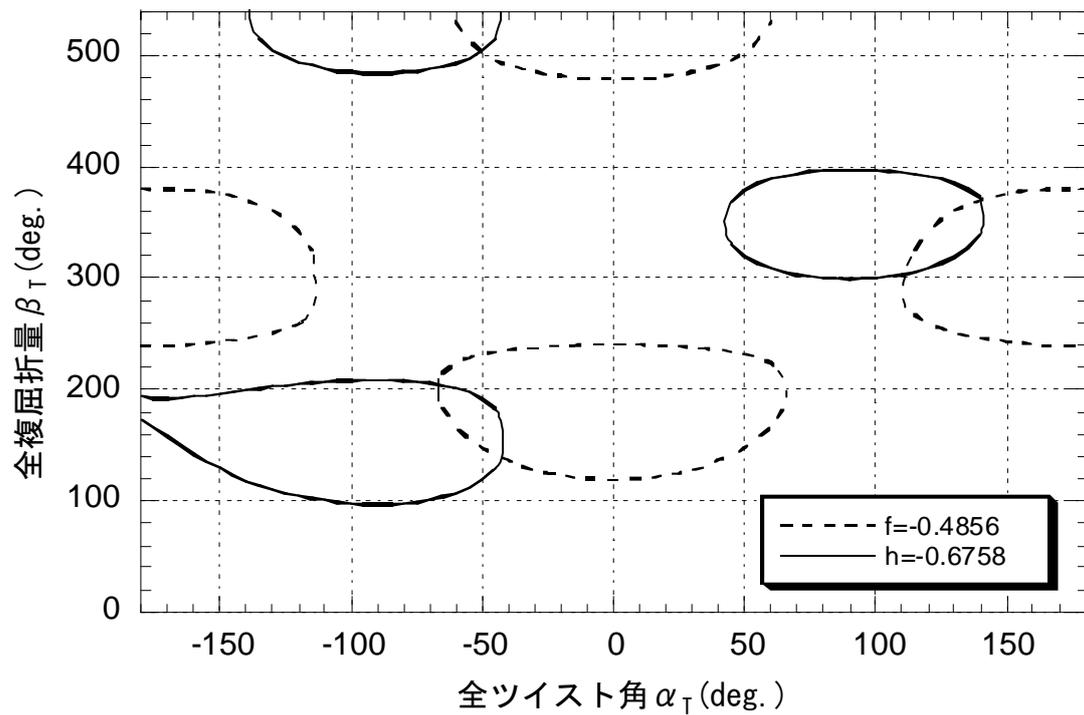
4) $f, h, g, j \leq 0$ のとき (表 3-1 における C4)

$$f = -0.4856, \quad g = -0.0765, \quad h = -0.6758, \quad j = -0.5493 \quad (3-61)$$

の 4 つの場合を考えて計算することとなる。全ツイスト角 α_T と全複屈折量 β_T は、式(3-22)の連立方程式を解くことによって得られる。図 3-2 と同様にそれぞれの式の解をプロットすると、図 3-5 の通りとなり、式(3-44)及び(3-45)で表される物理パラメーターの範囲において、 $f, h \geq 0$ の時と $f, h \leq 0$ 時それぞれ 5 個の解があることが分かる。具体的な値は表 3-5 に示す。例えば全ツイスト角の絶対値が $90^\circ \pm 5^\circ$ のように分かっているならば、この場合にはただ一つの解のみがその条件を満たすので、全ツイスト角と全複屈折量は不定性無く



(a)



(b)

図 3-5 セイコーエプソン製液晶素子に対する連立方程式(3-22)の解. (a) $f, h \geq 0$ で符号が正しい時. (b) $f, h \leq 0$ で符号が正しくない時. 図 3-2 と同様, この範囲にそれぞれ 5 個の解がある.

$$\alpha_T = 88.4^\circ \quad (3-62)$$

$$\beta_T = 97.3^\circ \quad (3-63)$$

と求めることができる. この場合, 式(3-58)あるいは(3-59)の可能性だけが残りに, 式(3-60)及び(3-61)

ではないと判断できる。

前項に示した典型的な例では、式(3-22)の連立方程式から、全ツイスト角と全複屈折量を一意的に決定することは困難であったが、本例においては、たまたま全ツイスト角の絶対値がほぼ 90° であるという予備知識があればそれらを一意的に決定することができた。図 3-2 及び図 3-5 から、 f あるいは h が一定の場合の解曲線が小さな閉曲線になるとき、全ツイスト角と全複屈折量の値が近い 2 つの解が存在しがちであることが分かる。そのような時には、たとえ予備知識があっても一意的な解を選択することは困難になる。

一方、入射面ダイレクタ ϕ_D は式(3-21)より計算されるが、ジョーンズ行列要素の符号が式(3-58)の場合の解

$$\psi_D = -3.2^\circ \quad (3-64)$$

及び式(3-59)の場合の解

$$\psi_D = 86.8^\circ \quad (3-65)$$

の 2 つの可能性があり、一意的に決定することはできない。この不定性は、3.2 節で議論した通り、直線偏光の入出力光を用いた透過率測定の実験から物理パラメータを求めたために生じたものであり、入出力光として一般の楕円偏光まで用いた場合には、この不定性を解消することができる。ただし実際には、一般の楕円偏光を用いた透過率測定は測定精度の点で難があるので、入射面ダイレクタの不定性は、何かしらの追加実験により取り除いた方がよい。ここで追加実験には、例えば次章で述べる固有偏光を用いた実験が有効である。具体的には、TN 型液晶素子の主ジョーンズ行列の固有ベクトルがジョーンズ行列となるような楕円偏光である固有偏光を求め、固有偏光の長軸を入射面ダイレクタと一致させて入射した時、全ツイスト角だけ回転した固有偏光が出射することを利用する。この追加実験の結果、我々が用いたセイコーエプソン製液晶素子の入射面ダイレクタは、式(3-64)であることが分かった。

表 3-5 セイコーエプソン製液晶素子における、透過率測定から得られる物理パラメータの候補 ($\alpha_T=88.4^\circ$, $\beta_T=97.3^\circ$ が正しい解)

連立方程式(3-22)の解 $f=0.4856, h=0.6758$ の時		連立方程式(3-22)の解 $f=-0.4856, h=-0.6758$ の時	
α_T (deg.)	β_T (deg.)	α_T (deg.)	β_T (deg.)
-60.2	389.5	-66.9	205.1
-48.5	322.3	-50.5	503.6
88.4	97.3	-42.5	138.2
116.6	491.6	111.5	304.0
171.2	160.0	140.3	370.7

(2) セイコーエプソン製液晶素子のグレイレベルに対する複屈折量の測定

液晶素子が動作状態のとき、3.2.3 項の手順にしたがい、素子に与えるビデオ信号のグレイレベルに対する全複屈折量を求める。透過率測定は、液晶素子に与えるビデオ信号の各グレイレベルに対し、素子を挟む偏光子及び検光子の偏角を変化させて行わなければならない。そのため測定

回数が多くなる．そこで，偏光子と検光子の回転に自動回転ステージを用いて，測定を一部自動化した．測定システム全体を図 3-6 に示す．光学系部分は図 3-4 と同様である．パーソナルコンピュータ1 により，画像ボードを通して液晶素子コントローラーにビデオ信号を与え，液晶素子全面にあるグレイレベルを表示させる．グレイレベルは，0 から 255 レベルまでの 8bit の設定が可能である．実際には，グレイレベルを 16 ずつ変化させて測定した．パーソナルコンピュータ2 から，GP-IB (General Purpose Interface Bus) を通した指令により，ステージコントローラーを通して偏光子及び検光子の角度を設定する．設定角度は，オフ状態での測定と同様に (0° , 0°) , (30° , 60°) , (45° , -45°) , 及び (30° , 30°) とした．光検出器で測定された光強度は，やはり GP-IB を通してパーソナルコンピュータ2 に送られ，測定データが収集される．

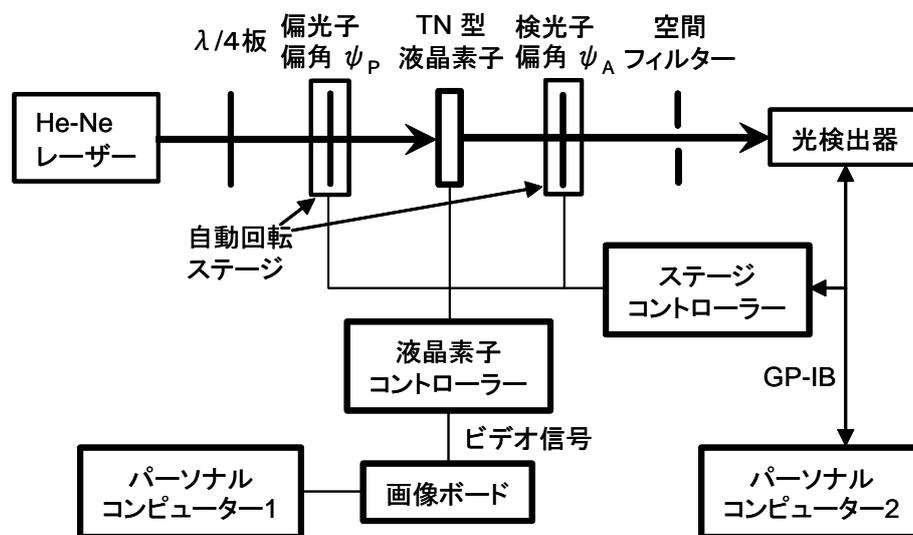


図 3-6 透過率自動測定システム

透過率測定の結果から，付録 3 の手順にしたがって各グレイレベル入力状態における素子のジョーンズ行列要素を計算した．グレイレベルの変化に対する各ジョーンズ行列要素の変化を図 3-7 に示す．ただし，ジョーンズ行列要素の符号はオフ状態で全て正と分かっているので，その状態となめらかに繋がるように決定した．すなわち本液晶素子では，グレイレベルが 0 の時液晶層に最大の電圧が印加され，グレイレベルが 255 の時最小の電圧が印加されるので，オフ状態に一番近い状態であるグレイレベル 255 の時全てのジョーンズ行列要素を正とし，以下順次なめらかに接続した．結果的には，全てのグレイレベルで全てのジョーンズ行列要素が正となった．

次に，式(3-25)により液晶素子の主行列の行列要素 a , b , 及び c を求めた．結果を図 3-8 に示す．

最後に図 3-8 の結果より，線形モデル，単純 3 層モデル，及び微分モデルを用いて，各グレイレベルでの全複屈折量を求める．線形モデルでは，式(3-29)の簡単な計算により全複屈折量を求めた．単純 3 層モデルでは，式(3-33)及び(3-34)により中央と縁での複屈折量を独立に計算し，その和として全複屈折量を求めた．

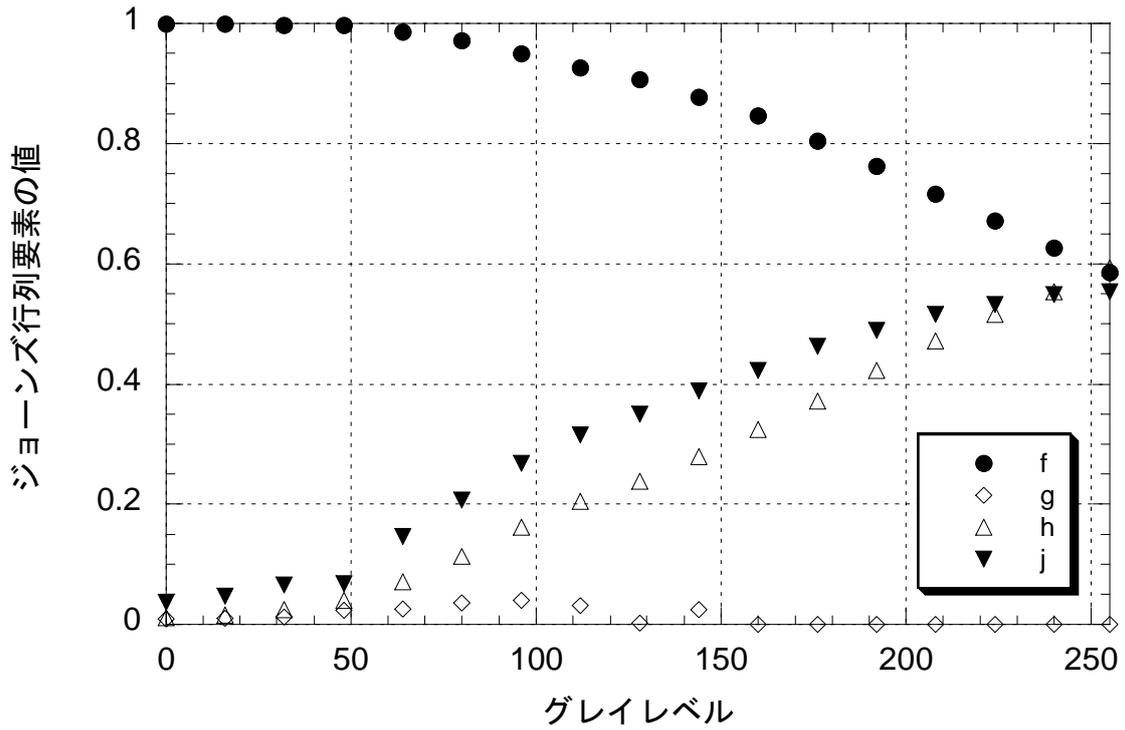


図 3-7 セイコーエプソン製液晶素子に与えたビデオ信号のグレイレベルに対する各ジョーンズ行列要素の変化

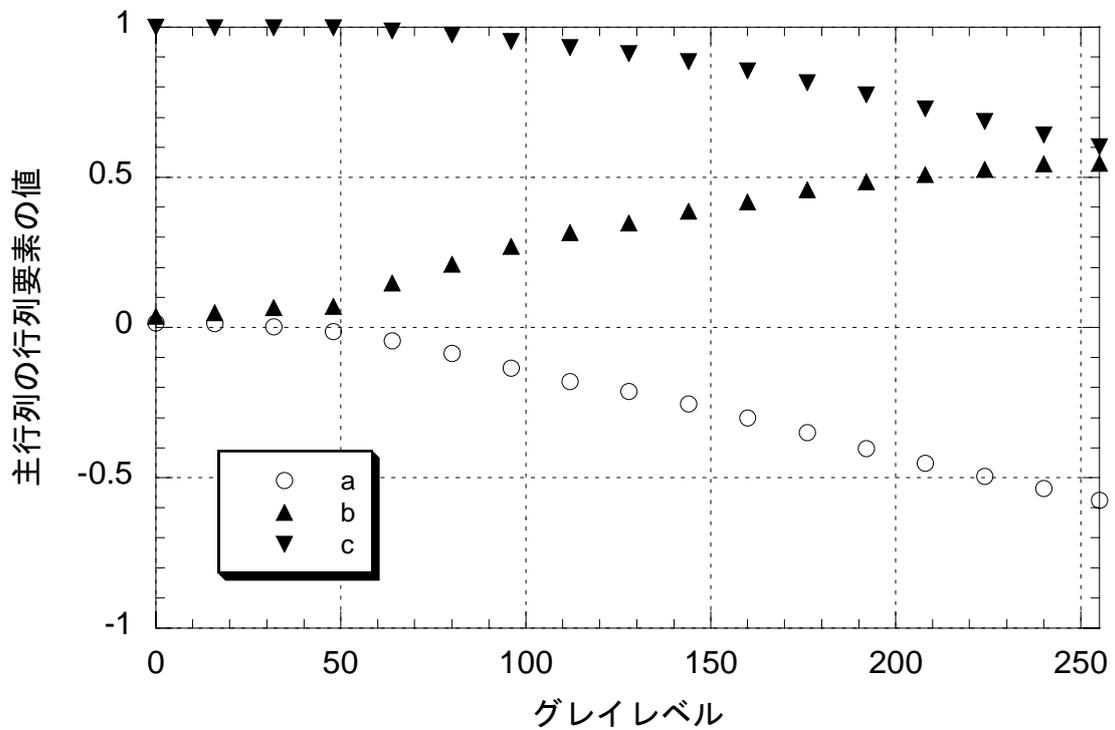


図 3-8 セイコーエプソン製液晶素子に与えたビデオ信号のグレイレベルに対する主行列の行列要素の変化

微分モデルではまず、式(3-38)及び(3-39)により主行列要素から角パラメーター θ , ϕ を求めた。その結果を図 3-9 に示す。次に、3.2.3 項 1)から 5)に示した方法により全複屈折量を計算した。この方法では、液晶層内での液晶分子ダイレクタ方位角、及びチルト角の分布を仮定する必要がある。方位角は、図 3-10(a)に示すように中心対称な折れ線の分布を仮定した。この分布は図 2-11 の 3 層モデルにおける分布と同様であるが、各層の厚さの変化を可能とした。またチルト角は、3 層モデルと異なり、図 3-10(b)に示すような台形の分布を仮定した。それぞれの分布を表すには、線が折れ曲がる頂点部分の液晶層厚み方向 (z 方向) の位置 ($pd/2$, $qd/2$ とする) と、その時の角度 (図 2-11 に記法に合わせて ζ_1 と η_1) を指定する必要がある。したがって、 p , q , ζ_1 , 及び η_1 の合計 4 つのパラメーターを最適化する必要がある。しかしながら、実験より得られる角パラメーターは 2 つなので、これら 4 つのパラメーターを同時に最適化することはできない。そこで液晶層厚み方向については、単に等厚の 20 層に分け、頂点がそれぞれの層の境界にあると仮定して順次計算を行った。つまり、 p 及び q については、0 から 1 の範囲で 0.1 おきの離散的な値とした。このようにすると、実験値との比較により最適化すべきパラメーターは、方位角分布が折れる角度 ζ_1 と、チルト角分布が折れる角度 η_1 の 2 つの角度となり、最適化計算を行うことができるようになる。実際の計算は、マイクロソフトエクセルの表計算機能により、ソルバープログラムによって最適化を行った。角パラメーターの最適化がうまく収束するかどうかを調べれば、仮定した p 及び q の値が適切であったかどうかを判定することができる。結果的には、方位角の頂点位置は、グレイレベルが大きい場合にはほぼ液晶層の厚みの 1/4 の位置 ($p=0.5$) が適切であり、グレイレベルが小さい場合には、中心層の厚みを小さくすると良いことが分かった。またチルト角分布は、両縁の層の厚みを全体の 1/10 程度 ($q=0.8$) にすれば良いことが分かった。これらの角度分布最適化パラメーターをまとめて図 3-11 に示す。ここで得られた方位角及びチルト角の分布は、フランクの弾性定数等を用いた計算結果である図 2-7 と定性的に一致している。微分モデルにおける複屈折量は、式(2-91)により、最適化されたチルト角の分布を z 方向に積分することにより計算した。

このように、線型モデル、単純 3 層モデル、及び微分モデルを用いて、各グレイレベルでの全複屈折量を求めた結果を図 3-12 にまとめて示す。図より、グレイレベルの変化に対する全複屈折量の計算値は、定性的には全てのモデルで等しくほぼ線型であるが、その傾きは線型モデルが一番大きく、微分モデルが一番小さくなる。これは、もしこの液晶素子を用いてグレイレベルの違いによって位相変調を行う場合、線型モデルでは位相変調量を多めに見積もり、微分モデルでは小さめに見積もるであろうことを意味する。具体的にグレイレベル 0 と 255 での複屈折量の差は、線型モデルでは 81.4° 、単純 3 層モデルでは 75.6° 、微分モデルでは 67.7° であり、線型モデルと微分モデルでは 17%程度の違いが生じている。実際の位相変調量は、グレイレベルの変化によって生じる複屈折量の変化分と、主行列から生じる変化分の和となる。前者は光学系によらないが、後者は入出力光の偏光状態を規定しなければ計算できない。最適化された偏光状態での位相変調量の計算、及び光干渉計による位相変調量の測定結果との比較は第 4 章で行う。

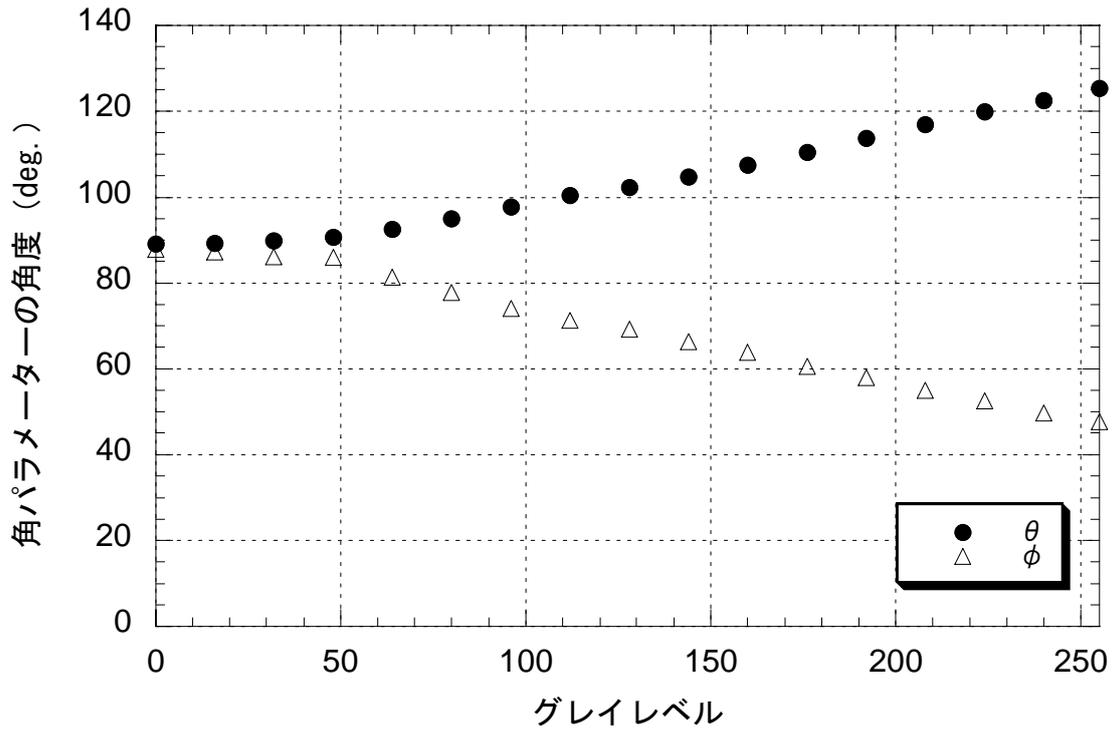


図 3-9 セイコーエプソン製液晶素子に与えたビデオ信号のグレイレベルに対する角パラメーターの変化

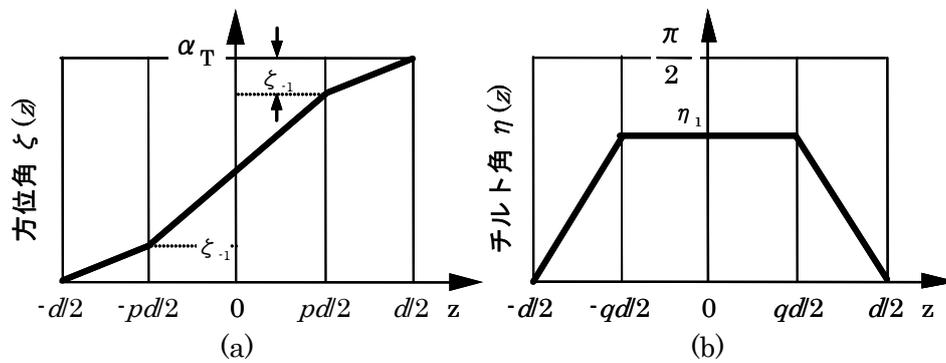


図 3-10 微分モデルでの全複屈折量計算に用いる、液晶層内の液晶分子ダイレクタ(a)方位角及び(b)チルト角分布の仮定

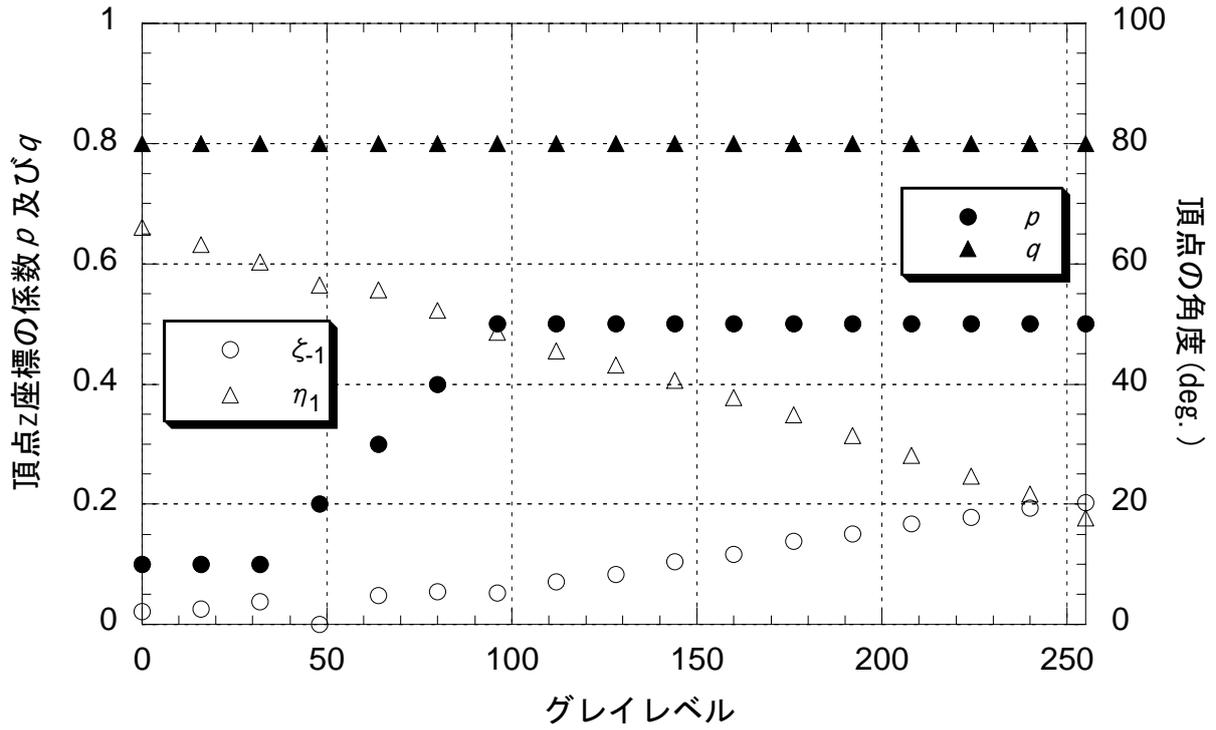


図 3-11 セイコーエプソン製液晶素子に与えたビデオ信号のグレイレベルに対するダイレクタ分布の最適化パラメーター

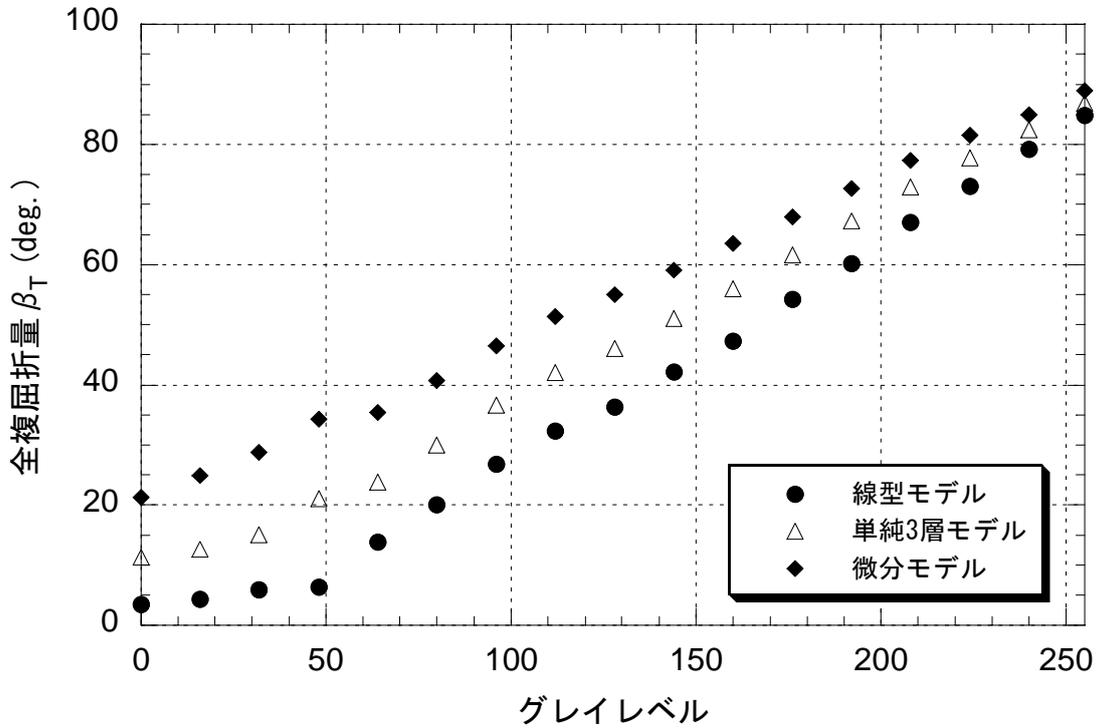


図 3-12 セイコーエプソン製液晶素子に与えたビデオ信号のグレイレベルに対する全複屈折量の変化

(3) ソニー製液晶素子の物理パラメータ測定

ソニー製 LCX012AL 液晶素子は、電源オフの状態、多波長発振のアルゴンイオンレーザーとヘリウムネオンレーザーを用いて、458nm, 488nm, 514nm, 633nm の 4 つの波長で物理パラメータを測定した。測定結果を表 3-6 に示す。表によれば全ツイスト角は -91° であり、前項のセイコーエプソン製液晶素子とツイストの絶対量はほぼ同じであるが周り方が反対だということが分かる。また入射面ダイレクタはセイコーエプソン製のものと異なり、ほぼ 45° の斜め方向であることが分かる。それに応じて、セイコーエプソン製液晶素子ではジョーンズ行列要素のうち g がほぼ 0 であったが、ソニー製液晶素子では j が 0 に近い値となっている。全複屈折量は、実寸ではなく波長を単位とする位相値で表しているの、波長が短い方が大きくなる。波長の比率以上に全複屈折量が大きくなるのは、液晶材料の屈折率分散のため、波長が短い光に対して屈折率が高くなり、したがって同じ厚みの液晶層に対して光路長が長くなるためである。

表 3-6 ソニー製 LCX012AL 液晶素子における、透過率測定から得られるジョーンズ行列要素及び物理パラメータ

	波長	458nm	488nm	514nm	633nm
ジョーンズ行列要素	f	-0.3256	-0.2555	-0.1951	0.1090
	g	0.8314	0.6289	0.4350	-0.1431
	h	-0.4619	-0.7277	-0.8781	-0.9841
	j	-0.0001	0.0979	-0.0415	-0.0001
物理パラメータ	全ツイスト角 α_T	-91°			
	全複屈折量 β_T	225°	204°	188°	144°
	入射面ダイレクタ ϕ_D	-44°			

Davis らは、ソニー製液晶素子を用いて、平行ニコル及び直交ニコルを保ったまま偏光子及び検光子角度を変化させて透過率測定を行った時、波長が異なるレーザー光を用いて測定したにも関わらず全く同様の透過率変化が見られたと報告している⁵²⁾。本項では、全複屈折量変化に対するジョーンズ行列要素変化を調べて、その現象の説明を試みる。

全ツイスト角を -91° 、入射面ダイレクタを -44° とし、電源オフの状態での、全複屈折量の変化に対するジョーンズ行列要素 f , g , h , 及び j の変化を図 3-13 に示す。図には、表 3-6 中にある各波長に対応するオフ状態での全複屈折量を示した。ジョーンズ行列要素の変化曲線との交点を見れば、表 3-6 の値と良く一致していることが分かる。Davis らは、我々と同モデルの液晶素子を用いているが、各波長に対する全複屈折量は我々の測定結果よりも大きくなっている。同モデルであるから、全ツイスト角及び入射面ダイレクタは我々のものとほぼ等しいと考えられ、また液晶分子の屈折率もほぼ同様と考えれば、この違いは液晶層厚みの違いによるものと思われる。彼らの全複屈折量に対する測定値は、波長 458nm に対して 267° 、488nm に対して 241° であった。図 3-13 には、対応する部分も示した。

Davis らの透過率測定は、平行ニコル及び直交ニコルによって行われた。透過率を表す式(3-7)において、平行ニコルの場合は $\phi_A = \phi_P$ とし、直交ニコルの場合は $\phi_A = \phi_P + 90^\circ$ とし、さらに $j=0$

として整理すると，平行ニコルの場合の透過率 T_{parallel} は

$$T_{\text{parallel}} = f^2 + g^2 \cos^2(2\psi_p) \quad (3-66)$$

となり，直交ニコルの場合の透過率 T_{crossed} は

$$T_{\text{crossed}} = h^2 + g^2 \sin^2(2\psi_p) \quad (3-67)$$

となる．一方図 3-13 によれば，全複屈折量が 241° と 267° に対して，ジョーンズ行列要素のうち f と g はほぼ値が等しく， h は符号が異なるが，その絶対値が等しいことが分かる．よってどちらの全複屈折量に対しても，式(3-66)及び(3-67)は偏光子の偏角 ψ_p の変化に対して同等の透過率変化を示す．つまり平行ニコルと直交ニコルでは，波長が異なるレーザー光を用いたにも関わらず，透過率の測定結果に全く違いが生じないことになる．これは，異なる波長において，液晶素子のジョーンズ行列要素が符号を除いて偶然等しくなったために起こった現象である．逆に考えると，そのような状況において，透過率測定の結果のみから液晶素子の物理パラメーターを不定性無く決定することは非常に難しいといえる．

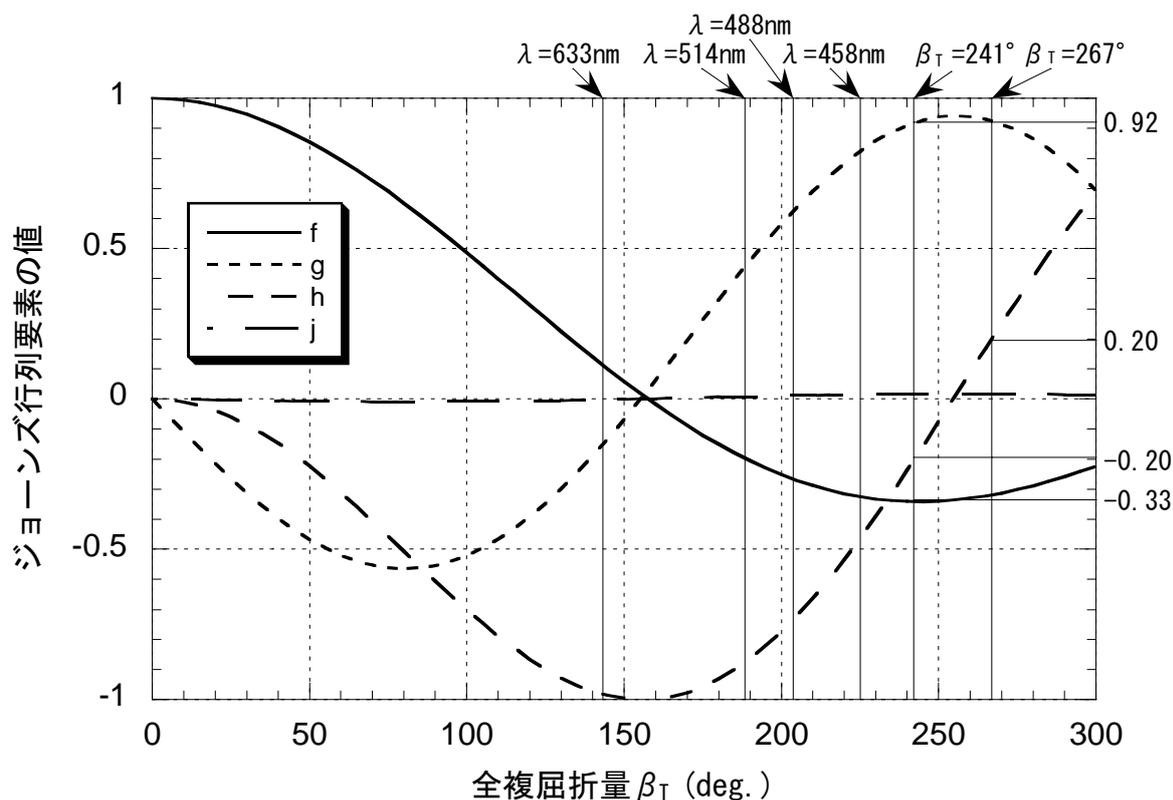


図 3-13 ソニー製液晶素子オフ状態における，全複屈折量の変化に対するジョーンズ行列要素の変化

3.4 物理パラメータ計算における不定性の改善

3.4.1 波長変化の方法による不定性の改善

本項では、実験に用いるレーザー光の波長を変化させることにより、前節で現れた不定性をなくすことが可能であるかどうかを考察する。表 3-6 に示したソニー製液晶素子の各波長におけるジョーンズ行列要素 f 及び h の値から、式(3-22)の連立方程式により全ツイスト角 α_T 及び全複屈折量 β_T を求め、その解のうち式(3-44)及び(3-45)の範囲内にあるものを全て図 3-14(a)にプロットした。同様に、ジョーンズ行列要素が $-f$ 及び $-h$ となる場合について、図 3-14(b)に示す。図に矢印で示したように、正しい解については、波長が変化するにつれて全ツイスト角が変化せず、全複屈折量のみ変化するようなグループを見出すことができる。図 3-14(a)において、全ツイスト角が 95° で全複屈折量が 300° の付近に、それと似通った変化を示す解の一群がある。しかしながらこの場合は、波長が大きくなるにつれて全複屈折量が小さくなるべきところ、逆に大きくなっているため、この解が正しくないと判断できる。図 3-14(b)では、波長が変化した時に全ツイスト角が変化しないような解のグループは見出せない。したがってこの図から、仮定したジョーンズ行列要素 f 及び h の符号は誤っていると判断できる。このように、ソニー製液晶素子については、多波長のレーザー光を用いた実験により、不定性のない解を求めることができた。

いくつかの波長を用いて透過率測定の実験を行った結果、物理パラメータの異なる全ての液晶素子において、唯一の解を求めることができるという保証はない。実際前項で見たように、異なる波長に対して同等の透過率となる場合があり、また測定したいくつかの波長において偶然、全ツイスト角が等しく、全複屈折量が定性的に正しく変化するような結果が得られる可能性もある。さらに言えば、何個の波長について調べれば十分に不定性をなくすことができるかという問題に対しても答えることができない。しかしながら波長変化の方法により、液晶素子の全ツイスト角及び全複屈折量に対する不定性を改善できることは間違いなく、多くの場合には唯一の解を求めることが可能と考えられる。波長変化の方法に関するさらに踏み込んだ議論は、今後の研究に委ねたい。

3.4.2 その他の方法による不定性の改善提案に対する考察

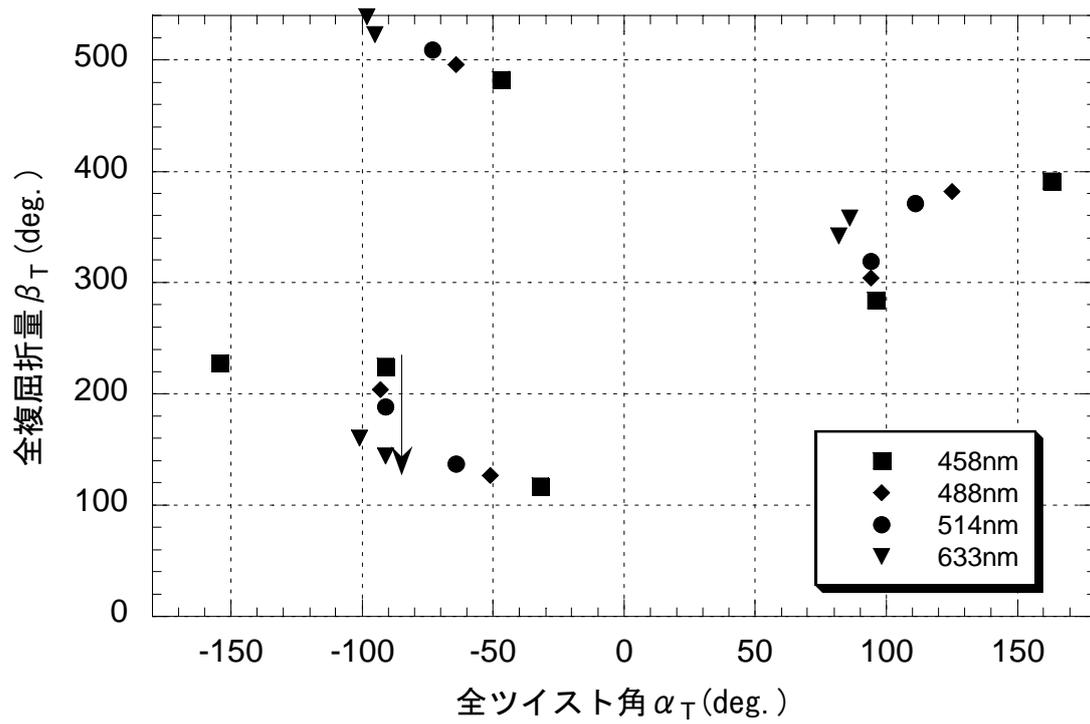
ツイステッド・ネマティック型液晶素子の物理パラメータである全ツイスト角 α_T 、全複屈折量 β_T 、及び入射面ダイレクタ ϕ_D を実験的に求める際に現れる不定性は、多くの研究者を悩ませてきた。本項では、不定性の解決法として提案された代表例を紹介し、その有効性に関する考察を行う。

(1) アディアバティック点を求める方法

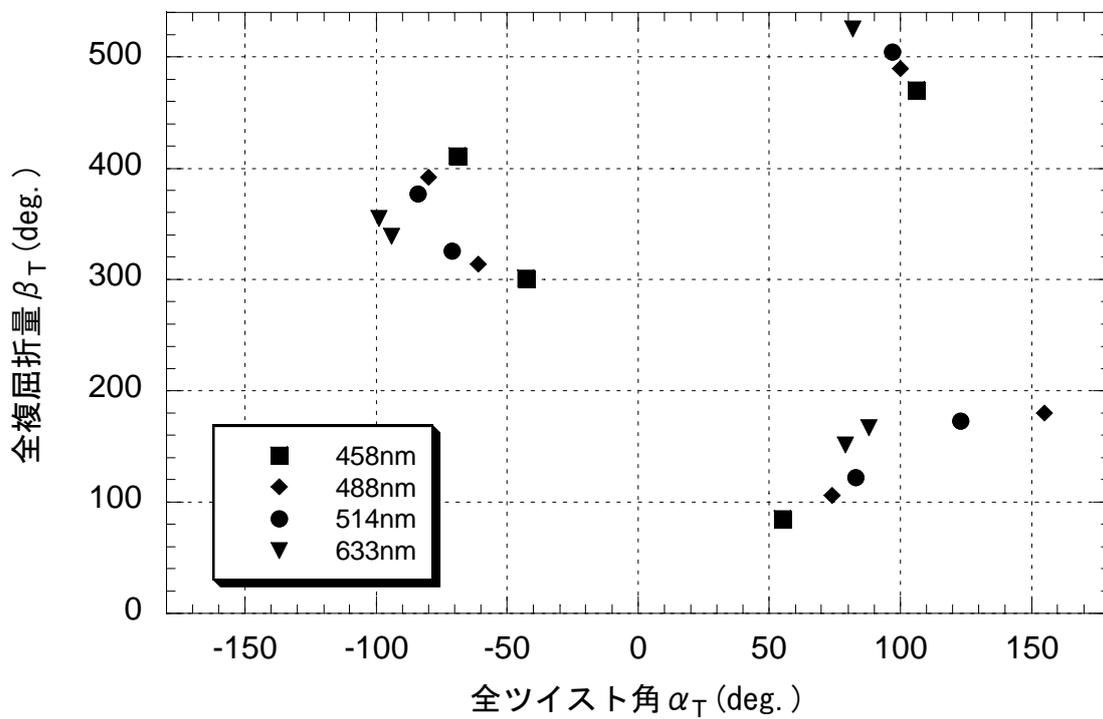
液晶素子のジョーンズ行列要素と物理パラメータの関係式(3-17)～(3-20)において、

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2} \quad (k=1, 2, 3\dots) \\ &= k\pi \end{aligned} \tag{3-68}$$

が成り立つ特別な場合を考える。このとき $\sin \gamma = 0$ となるので、



(a)



(b)

図 3-14 ソニー製液晶素子オフ状態におけるジョーンズ行列要素から、式(3-22)を解いて得られる解. (a) f 及び h の符号が正しい場合. (b) f 及び h の符号が反対の場合.

$$f = \pm \cos \alpha_T \quad (3-69)$$

$$h = \mp \sin \alpha_T \quad (3-70)$$

$$g = j = 0 \quad (3-71)$$

と簡略化される。ただし複合は、 k が偶数か奇数かによる。液晶素子を偏光子及び検光子で挟んだ光学系での透過率は、式(3-7)より

$$T_{\psi_P, \psi_A} = \cos^2(\alpha_T + \psi_P - \psi_A) \quad (3-72)$$

となる。透過率は、 k の奇偶によらない。

式(3-72)は、液晶層中を進む直線偏光が、導波路効果 (Waveguide effect) により、その偏光状態を変えずに、液晶分子のツイストに沿って偏光軸を α_T だけ回転させている状況と解釈されている。つまり、検光子の偏角を $\phi_A = \phi_P + \alpha_T$ とすれば、偏光面が回転した直線偏光が全て検光子を透過するので、透過率は 1 となる。このような配置による液晶素子の動作状態を、ノーマリーホワイト (ポジ) 表示と呼ぶ³⁸⁾。また $\phi_A = \phi_P + \alpha_T + 90^\circ$ とすれば、偏光面が回転した直線偏光は全て検光子で遮断されるので、透過率は 0 となる。このような配置による液晶素子の動作状態を、ノーマリーブラック (ネガ) 表示と呼ぶ。特に 90° ツイストの場合、ノーマリーホワイトとノーマリーブラックは、それぞれクロスニコル、及び平行ニコルによって実現される。液晶素子をビデオ信号のグレイレベルによって駆動する表示機器として用いる場合、グレイレベルが最小あるいは最大の時にこの状況を実現すれば、一番コントラストが高くなる。 90° ツイストの素子ではその全複屈折量が

$$\beta_T = \pi \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}} \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (3-73)$$

の時、式(3-68)の条件が成り立つことが分かる。具体的には

$$\begin{aligned} \beta_T &= \frac{\sqrt{3}}{2} \pi, \frac{\sqrt{15}}{2} \pi, \frac{\sqrt{35}}{2} \pi, \frac{\sqrt{63}}{2} \pi, \dots \\ &= 156^\circ, 349^\circ, 532^\circ, 714^\circ, \dots \end{aligned} \quad (3-74)$$

となる。ただし実際には、全複屈折量が波長によって変化するため、式(3-68)で表される状態を白色光の全波長域に対して維持することはできない。液晶層を十分に厚くとり、

$$\beta_T \gg 2\pi \quad (3-75)$$

とすれば、波長が多少変化しても比較的良好なコントラストが得られることが知られており、式(3-75)はモーガン条件と呼ばれている。しかしながら液晶層が厚くなると応答速度が遅くなる^{27,28)}。他にも実用的には駆動電圧、視角特性、閾値特性等を考慮して、市販の液晶素子は多くの場合、最大全複屈折量が、可視光の波長の範囲で $k=1$ と $k=2$ の間にあるように設計されている。

Gonçalves-Neto ら⁵⁴⁾は、まず光学系を平行ニコルの配置とし、平行ニコルを保ったまま、偏光子と検光子の偏角を同時に回転させる実験を行った。そしてビデオ信号のグレイレベルを順次変え、偏光子及び検光子を回転させても透過率が変化しなければ、そのグレイレベルでは式(3-68)の条件が成り立っていると考えた。次にそのグレイレベルにおいて検光子角度 ϕ_A を 0° に固定し、偏光子角度 ϕ_P を変化させた時の透過率変化を測定した。最後に彼らは、測定結果をフィッティングして、 $\phi_P=0$ の時の透過率を正確に求め、逆余弦関数を用いて式(3-72)を α_T について解くことにより全ツイスト角を求めた。

Moreno ら⁵⁵⁾は、液晶素子を偏光子と検光子で挟んだ光学系において、偏光子の偏角を固定し、検光子を回転させた時、透過率が最大になる検光子の偏角を測定した。式(3-68)が成り立っている時、偏光子の偏角に関わらず、透過率が 1 となるような検光子偏角が存在する。また、その検光子偏角は偏光子偏角に比例する。つまり $\phi_P - \phi_A$ は一定であり、式(3-72)からその値は $-\alpha_T$ あるいは $\pm 180^\circ - \alpha_T$ であることが分かる。彼らはこのようにして、全ツイスト角を求めることに成功した。彼らは、式(3-68)が成り立つような全複屈折量をアディアバティック点 (adiabatic point) と呼んでいるが、アディアバティック点を見つけるために全複屈折量を変化させる手段として、用いるレーザー光の波長を変化させる実験と、グレイレベルを変化させる実験を行った。そして用いた液晶素子がオフ状態のとき、波長 633nm の He-Ne レーザー光に対して偶然、式(3-68)を満たしていることを発見した。しかしながら、グレイレベルを変化させても、完全にアディアバティックになることはなかった。彼らはその原因が、液晶素子のオン状態では線型ジョーンズモデルが成り立たなくなることにありと考へ、線型モデルが確実に成り立つオフ状態において測定可能な、波長変化によりアディアバティック点を見つける方法がより有効だと結論している。

式(3-68)の条件を、図 3-2、3-5 と同様の解曲線の観点から考察する。ソニー製液晶素子では、全ツイスト角が -91° であった。式(3-68)において $k=1$ の場合について β_T を解くと、この素子では全複屈折量が 155° の時アディアバティックになると計算される。また式(3-69)、(3-70)より、その時のジョーンズ行列要素の値は、 $f=-0.0175$ 、 $h=-0.9999$ となる。これらの値から解曲線を求めると、図 3-15 の通りとなる。図には、式(3-68)が成り立つような曲線も合わせて描画した。図 3-2、3-5 等と比較すると、 f =一定の解曲線にはそれほど大きな変化が見られないが、 h =一定の解曲線は、非常に小さな閉曲線になっていることが分かる。さらに、図 3-15 では少々見づらいが、この小さな閉曲線は f =一定の解曲線に 1 点で接しているのである。その接点は明らかに、 f =一定の解曲線と $\gamma=k\pi$ の曲線の交点である。図 3-2 に見られるように、緩やかに変化する f =一定の解曲線と、小さな閉曲線である h =一定の解曲線は、近接した 2 点で交わる。ところがアディアバティックな状態では、それらの解曲線が接するようになり、連立方程式(3-22)の解であるその 2 点が 1 点に縮退するのである。したがって、不定性が約半分に減少する。実際、図 3-2 及び 3-5 では共に 5 つ存在した解が、図 3-15 では 3 つになっている。逆に、アディアバティックに近い全複屈折量を持つが、完全にはアディアバティックではない場合には、式(3-22)から近接した 2 つの解が得られることになり、それらの解から真の解を判断することが非常に困難となる。

このように、式(3-68)で表されるような全複屈折量が特殊な値となる場合を用いると、液晶素子の物理パラメーターに対する不定性を多少減ずることができる。しかしながら、不定性を完全になくすには、何らかの追加実験が必要なことは明らかである。実際 Gonçaves-Neto らの方法では、式(3-72)右辺の余弦関数の符号が定まらない。また余弦関数は偶関数であるから、全ツイスト角の符号も決まらない。Moreno らの方法ではまず、偶然ではなく、透過率の変化しない波長を見出すことは困難と思われる。またそのような波長が、可視光の範囲で存在することが保証されていないため、実験が徒労に終わる可能性すらある。さらにそのような波長を首尾よく見出したとしても、すぐには一意的な全ツイスト角を求めることはできない。よって、アディアバティック点を利用した不定性の改善方法は、他の方法に比較して格段に優れた方法とはいえない。

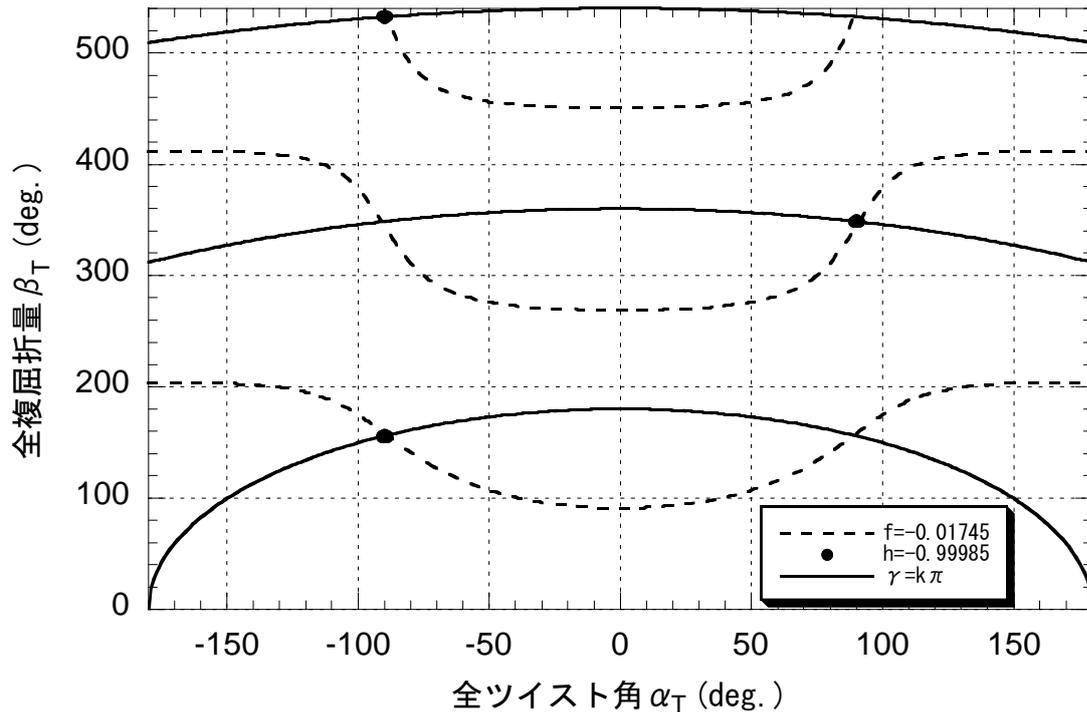


図 3-15 ソニー製液晶素子のアディアバティックな状態における
ジョーンズ行列要素から，式(3-22)を解いて得られる解。

(2) 高次回折光により入射面ダイレクタの不定性をなくす方法

3.2.2 項で示したように，直線偏光のみを用いた透過率測定から液晶素子の物理パラメーターを求めようとするとき，入射面ダイレクタに対して 90° の不定性があり，一意的には定まらない。これは結晶光学的にみれば，一軸性結晶において，異常屈折率を持つ結晶軸方向と，それに垂直な常屈折率を持つ結晶軸方向が区別できないということである。この問題に対し Davis らは，液晶素子のピクセル構造によって生じる高次回折光を観察するという簡単な実験により，入射面ダイレクタの候補が，常屈折率に対応しているか異常屈折率に対応しているかを判別する方法を提案した⁵³⁾。彼らは，入射面ダイレクタ方向に直線偏光したレーザー光を液晶素子に入射させ，素子に与えるグレイレベルを変化させた時，あるグレイレベルにおいて，5 次及び 6 次回折光強度が急に大きくなるという現象を観察した。この現象は，液晶素子ピクセル内の電界の不均一から生じる，ブレイズ効果 (blazing effect) によって引き起こされたものだと説明されている。

この方法は，もしそのような現象を容易に観察可能であれば，簡単な実験によって入射面ダイレクタに対する不定性を解消できるので便利である。しかしながら，以下の疑問点がある。

- ① 液晶素子ピクセル内の電界不均一という製造上の欠陥による効果に基づいた方法であり，全ての液晶素子に対して有効であるかどうか保証されていない。
- ② 電界の不均一に対する定量性がないため，ブレイズ効果に関しても定量性がない。

Davis らは，3 つのメーカーによる 4 つの液晶素子について実験を繰り返し，全ての素子においてこの方法が有効であったと述べている。ただし素子によって，回折光強度に大きな変化が生じる回折次数と，その方向はまちまちであった。液晶素子ピクセル内における位相変調量の不均一については，平行配向の素子について，Yocky らが光干渉計を用いた測定を行った例がある⁵⁷⁾。

その結果によれば、多少なりともピクセル内の不均一性は存在しているが、大きなブレイズ効果が現れるような、方向性を持った位相変調量分布は観察されていない。これらを考え合わせると、ブレイズ効果により回折光強度が変化するような回折次数と、その変化の大きさを予測することはできないので、それを確実に捉えることができるとは言い難い。したがってこの方法は、試してみる価値はあるが、リスクの大きい方法といえる。

(3) 楕円偏光を使う方法

3.2.1 項の議論により、入出力光として楕円偏光を用いれば、ジョーンズ行列要素に対する符号の不定性はただ 2 つだけとなる。言い換えれば、ジョーンズ行列要素である f , g , h , j のうち、どれか一つだけでもその符号が決まれば、残りの要素の符号は一意的に定まる。液晶素子の物理パラメーターとの関係で考えれば、 f と h の値から全ツイスト角と全複屈折量が計算され、 g と j の値から入射面ダイレクタが計算されるので、例えば全ツイスト角のおおよその値が分かっていると全ツイスト角が一意的に定まれば、入射面ダイレクタも自動的に一意的に定めることができる。

Ichikawa は、まず液晶素子に直線偏光を入射させた時、出射光が直線偏光となるような特別な偏角を測定し、次にそれ以外の角度で直線偏光を入射した時に得られる楕円偏光を、1/4 波長板と検光子の組み合わせによって測定するという 2 段階の測定方法により、液晶素子の物理パラメーターを決定する方法を提案している⁵⁸⁾。しかしながらこの方法では、

- ① 特別な角度を見出すために、試行錯誤的な実験を繰り返す必要がある。
- ② 1/4 波長板の精度が良くないため、測定精度が悪い。

という欠点がある。

第 4 章で詳しく説明するが、長軸方向と楕円率を定めた楕円偏光を作り出す、あるいは検出するには、偏光板と位相板の組み合わせを用いることが有効であり、特に位相板として 1/4 波長板を用いることが多い。②の欠点については、位相板が水晶や方解石等の結晶を用いて製作されていることから生じており、直ちに格段に性能を向上させることは難しい。個別の光学素子の性能が透過率測定結果にどのような影響を及ぼし、その誤差が最終的に液晶素子の物理パラメーター測定精度にどのような影響を及ぼすかといった研究は行われておらず、今後の課題である。液晶素子のパラメーター測定の不定性を解消するために、入出力光として楕円偏光を用いるという考え方の方向性は正しいといえる。しかしながら現状では測定精度の点で問題があるため、楕円偏光を使う方法は、直線偏光のみを用いた測定結果から不定性を減らすための確認実験用のみ用いるのが妥当と考えられる。

3.5 第3章のまとめ

本章ではまず、液晶素子を偏光子及び検光子で挟んだ光学系での透過率測定結果から、素子のジョーンズ行列要素を計算する方法について示した。そして、一般的に透過率測定から液晶素子のジョーンズ行列を一意的に決めることは不可能であり、行列要素の符号が定まらないことを証明した。特に一般の楕円偏光を許した測定では、行列要素に対する符号の組み合わせ候補が2つであり、直線偏光に限定した測定では、その候補が4つに増え、さらに、平行ニコルとクロスニコルのみの測定では、その候補が8つに増えることを示した。

次に、液晶素子がオフの状態において、ジョーンズ行列要素から素子の物理パラメーターである全ツイスト角、全複屈折量、及び入射面ダイレクタを計算する方法を示した。そして数学的な不定性はここでも生じ、特に全ツイスト角と全複屈折量を求めるための非線型連立方程式が無数個の解を持つことを証明した。またジョーンズ行列要素の符号の不定性が、その計算結果にどのような影響を及ぼすかを調べた。その結果、ジョーンズ行列要素の虚数成分の符号の不定性が、入射面ダイレクタに 90° の不定性をもたらすことなどが分かった。

液晶素子がオン状態での全複屈折量の計算は、第2章で求めた液晶素子のジョーンズ行列モデルによって異なるので、線型モデル、単純3層モデル、及微分モデルでの計算方法を示した。

3.3節では、具体的な例を用いて液晶素子の物理パラメーターを計算し、不定性の性質を調べた。その結果典型的には、全ツイスト角と全複屈折量について、およそ10個の候補から正しい解を見出さなければならないことが分かった。物理パラメーターのおおよその値が分かっている場合には、これらの候補から正しい解を求めることが可能な場合があることを示した。

3.4節では、液晶素子の物理パラメーター計算における不定性を改善させるために提案されているいくつかの方法を吟味した。その中で、いくつかの波長で測定を行う方法が有望であることが分かった。しかしながら偶然、波長を変化させたにも関わらず測定結果が同一となる場合があり、そのような場合には波長を変化させても不定性が改善されないことを示した。他の方法にもそれぞれ利点と欠点があり、それを良く理解した上で使用するべきである。不定性を改善させる決定的方法はなく、いくつかの方法を試して結果を確認しあうのが最善といえる。

第4章 位相変調光学系の最適化と位相変調特性の測定

4.1 はじめに

液晶素子は空間光変調素子として、光学的情報処理、光インターコネクション、ホログラフイー等の応用分野で利用されてきた。ディスプレイ素子や画像の入力、空間フィルタリングのような応用においては、液晶素子は空間的強度変調素子として用いられる。しかしながら、光の回折現象を伴うような応用においては、光の利用効率の高さから、強度変調よりも位相変調が望まれる。液晶素子の最大位相変調量は全複屈折量の大きさに依存するが、近年の高精細な液晶素子では液晶層の厚みが薄いため、全複屈折量があまり大きくない。そのため、大きな位相変調量を得るためには、光学系の工夫が必要となる。

本章では、前章までに構築した TN 型液晶素子のジョーンズ行列モデル、及び実際の素子で測定されたパラメーターに基づき、どのような光学系の配置を用いれば入射光の位相のみの変調が可能であるかを述べる。液晶素子の位相変調特性の概要を掴むため、最初は、素子に対する入出力光として直線偏光のみを考え、物理的にどのような状態が実現された時に位相のみの変調が可能であるか考察する。また実際に光干渉計を用いた位相変調量の測定により、その結果を確認する。次に、最大位相変調量を大きくするための手段として、反射型配置による往復光路の場合について考察する。最後に、液晶素子の固有偏光について考察し、固有偏光を用いた位相変調光学系の構築方法と、その位相変調特性の測定結果について述べる。

4.2 直線偏光を用いた光学系

4.2.1 直線偏光の偏角の最適化

図 3-1 のように TN 型液晶素子が偏角 ϕ_P の偏光子と偏角 ϕ_A の検光子に挟まれた状態の時の光波の伝搬を考える^{50,51}。液晶素子のジョーンズ行列を式(3-1)とすれば、この時の複素振幅透過率は式(3-6)の通りである。具体的に表すと、

$$\tilde{T} = \text{Re}(\tilde{T}) + \text{Im}(\tilde{T}) \quad (4-1)$$

ただし

$$\text{Re}(\tilde{T}) = f \cos(\psi_P - \psi_A) + h \sin(\psi_P - \psi_A) \quad (4-2)$$

$$\text{Im}(\tilde{T}) = -g \cos(\psi_P + \psi_A) - j \sin(\psi_P + \psi_A) \quad (4-3)$$

であり、 f 、 g 、 h 、及び j は液晶素子のジョーンズ行列要素である。強度透過率（以後単に透過率という） T は

$$T = [\text{Re}(\tilde{T})]^2 + [\text{Im}(\tilde{T})]^2 \quad (4-4)$$

で表され、この素子による位相遅れ δ は

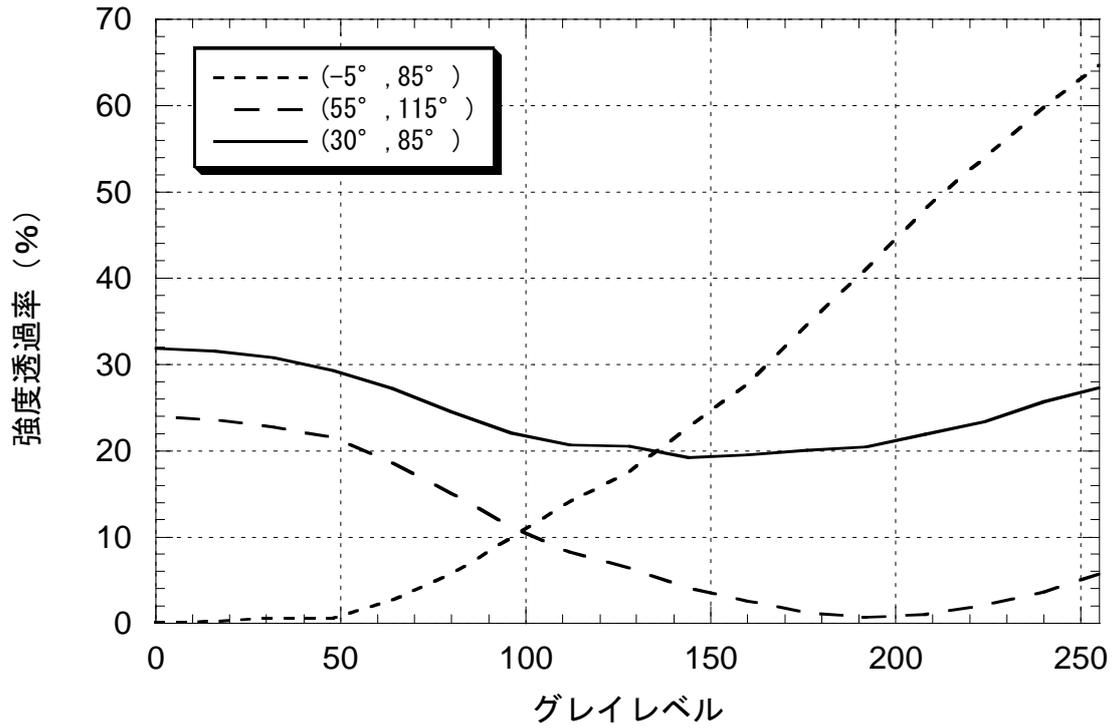
$$\begin{aligned} \delta &= \beta_T - \arg(\tilde{T}) \\ &= \beta_T - \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}(\tilde{T})}{\text{Re}(\tilde{T})} \right] \end{aligned} \quad (4-5)$$

となる。

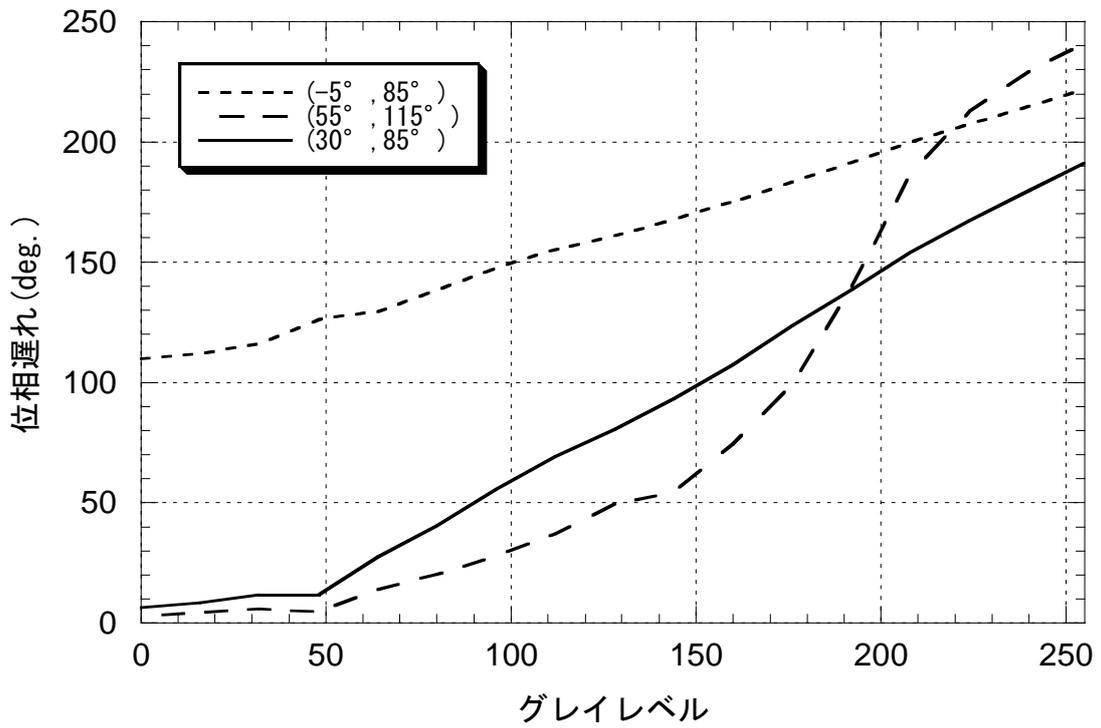
図 3-7 に示したセイコーエプソン製液晶素子のグレイレベルに対するジョーンズ行列要素の測定値を用いて、偏光子の偏角 ϕ_P と検光子の偏角 ϕ_A を各 5° おきに設定し、式(4-4)及び(4-5)を用いて透過率と位相遅れをシミュレーションした。この際式(4-5)における全複屈折量 β_T は、計算が簡単な線型モデルのものを用いた。その結果、いくつかの特徴ある特性が得られた。

① ノーマリーホワイトの状態

偏光子、検光子の偏角が ($-5^\circ, 85^\circ$) の場合、すなわち入射光の偏光方向を入射面ダイレクタに一致させ、検光子の偏角を出射面ダイレクタに一致させた場合は、ノーマリーホワイト表示を用いた製品における偏光子、検光子の配置と同じである。図 4-1(a)を見ると分かる通り、この場合グレイレベルが 50 から 255 の間でほぼ線型な透過率が得られており、通常のディスプレイに望ましい強度変調特性が得られることが分かる。一方この場合の位相遅れは図 4-1(b)のようになり、グレイレベルに対してほぼ線型に 110° 程度の位相変調が発生する。液晶素子をコヒーレント光に対する強度変調素子として用いる場合には、このような位相変調も同時に発生していることに留意する必要がある。



(a)



(b)

図 4-1 偏光子，検光子の偏角を特定の角度に設定した時の
(a)強度変調特性(b)位相変調特性シミュレーション結果.

②位相変調量が最大になる場合

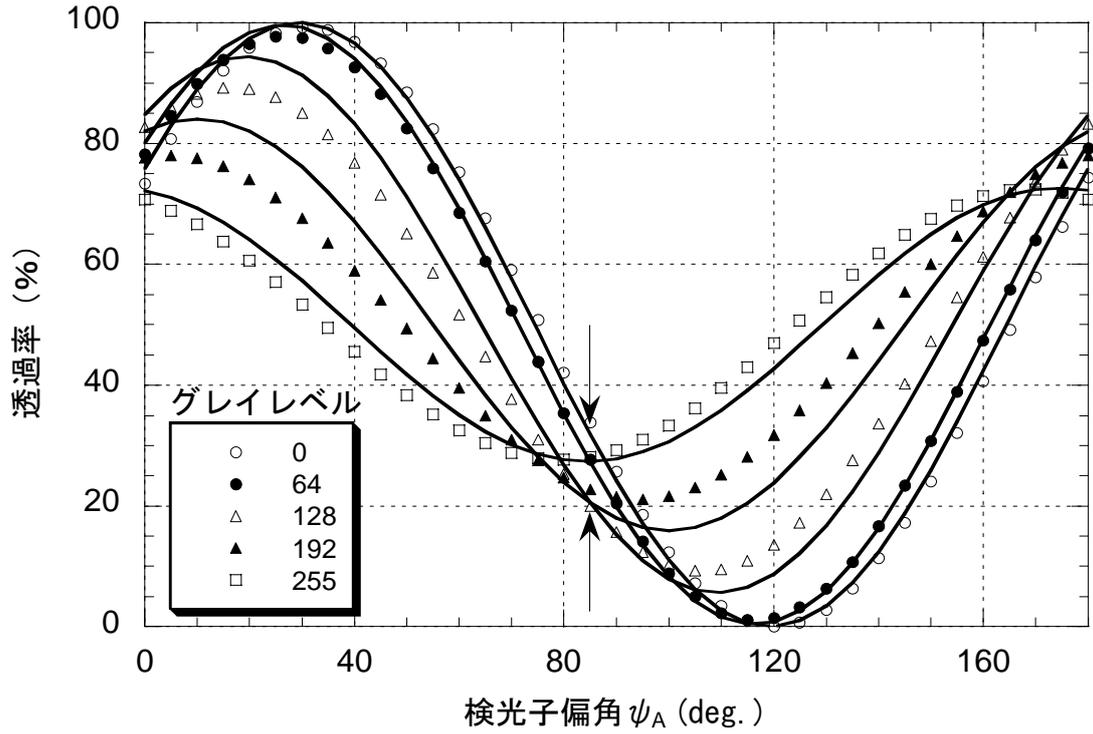
グレイレベルの変化に対する位相遅れの変化が最大になる場合は、偏光子、検光子の偏角が(55°, 115°)などいくつかの配置で生じ、最大位相変調量は240°程度であった。しかしながら、このような配置ではいずれの場合でも、図4-1(a)から分かる通り、透過率が大きく変化することが分かった。したがって、位相のみの変調を目的とする観点から見て、理想的な配置とは言いがたい。またこの場合の位相遅れは図4-1(b)に示した通りとなり、位相変調の線型性についても良好な特性ではなかった。図4-1(a)と図4-1(b)とを対比すると、グレイレベルが190付近の透過率がほぼ0の部分で位相遅れが大きく変化することが分かる。したがって、位相変調の線型性を向上させるため、限定したグレイレベルの範囲のみを利用することを考えても、その部分での透過率が低いため実用的ではないことが分かる。

③良好な位相変調特性が得られる場合

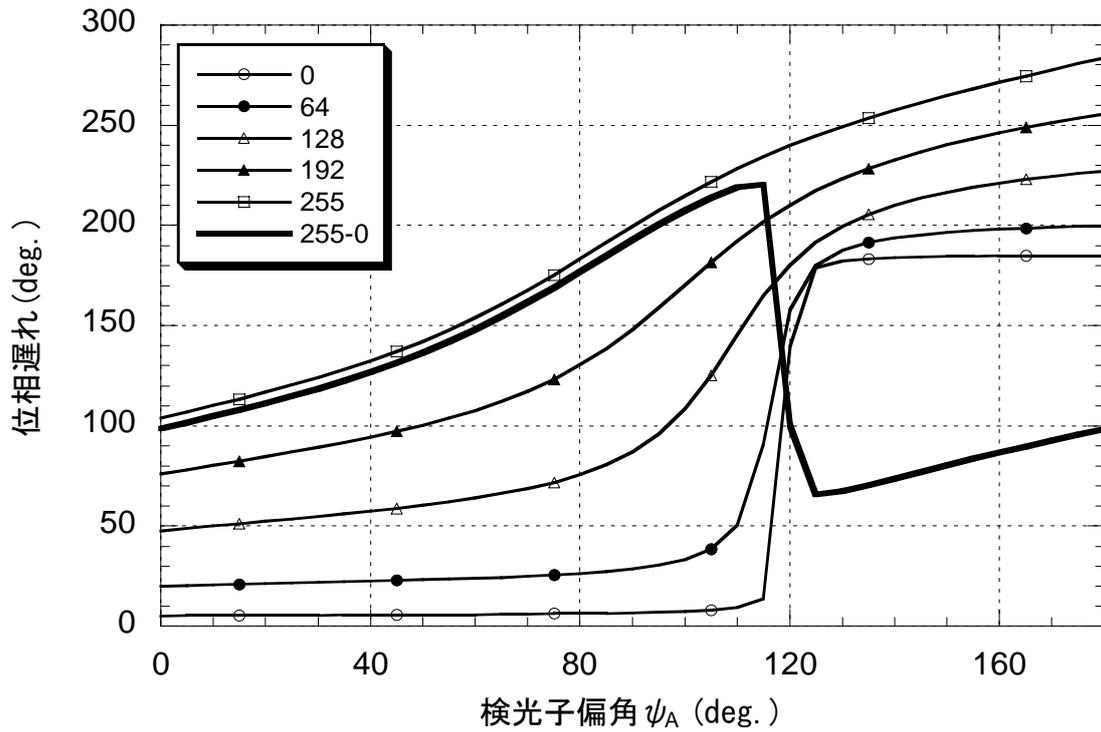
最大位相変調量が180°以上という条件で、最も透過率変化が小さくなる場合を探索した結果得られたのが、偏光子、検光子の偏角が(30°, 85°)等の配置である。この場合の透過率は図4-1(a)の通りであり、上記の2つの場合に比較するとフラットな特性となっているが、依然として40%近い透過率変動(強度変調)がある。一方位相遅れは図4-2(a)の通りであり、比較的良好的な線型の位相変調特性が得られている。最大位相変調量が十分とはいえ、また位相変調と同時に少なからぬ強度変調が生じているが、セイコーエプソン製の液晶素子を、直線偏光の入出力光で空間光位相変調素子として用いる場合には、最適な配置といえる。

最適な配置である③の場合について、まず入射側の偏光子の偏角を30°に固定して、出射側の検光子の偏角を変化させた時に透過率がどのように変化するかを調べた。図4-2(a)において、プロットで表したのが実験結果で、実線で表したのがシミュレーション結果である。両者はほぼ一致している。図に矢印で示した、検光子が85°付近のとき、曲線群がくびれたようになる。これは、透過率変動の少ない光学系配置では、グレイレベルを変化させた時、出射光の偏光状態があまり変化しないことを意味している。そのため、透過率があまり変化しなくなるのである。同様に検光子の偏角を変化させた時の位相遅れについてシミュレーションを行った結果を図4-2(b)に示す。透過率が0となるような配置、すなわち映像信号が0で、偏光子、検光子の配置がクロスニコル(30°, 120°)になった時、位相遅れが180°程度急に変わることが分かった。そのため最大位相変調量は、図中に太線で示したように単調には増大しなくなる。図によれば、検光子の偏角を80°から110°の間に設定した時にほぼ180°以上の位相変調量が期待できる。その間で強度変調量が最も少ない $\phi_A=85^\circ$ の時が、この条件の下での最適な配置といえる。

本項では、液晶素子を偏光子と検光子で挟む光学系において、それぞれの偏角を変化させた時の透過率、及び位相遅れをシミュレーションした。また透過率については、シミュレーション結果を実験的に確認した。その結果、液晶素子に対する入出力光として直線偏光のみを用いた場合の変調特性は、強度変調と位相変調が必ず同時に起こり、特に位相変調量が大きな場合には、必ず透過率の変化も大きくなってしまふことが分かった。試行錯誤的に偏光子と検光子の偏角を調整しても、強度変調量が最小でかつ位相変調量が最大といった都合の良い配置は見つからなかった。したがって、偏光子と検光子の偏角を最適化することにより位相のみの変調を得るという目的のためには、強度変調量と位相変調量のどちらかに対して十分満足できるような条件を課し、その際に他方が最適となるような配置を見出すというのが、現実的な対処方法といえる。



(a)



(b)

図 4-2 偏光子の偏角を 30° に固定し、検光子の偏角を変化させた時の
(a)強度変調特性(b)位相変調特性。(a)はプロットが実験結果,
実線がシミュレーション結果。(b)はシミュレーション結果。

実験に使用したセイコーエプソン製液晶素子のオフ状態での全複屈折量，すなわち最大全複屈折量は，式(3-63)の通り 97.3° である．平行配向型の素子の場合，得られる最大の位相遅れは全複屈折量の 2 倍以下であり，本素子がそのような素子であればそれは約 195° 以下ということになる．しかしながらシミュレーション結果によれば，図 4-1(b)に示したように， 240° を越える位相遅れの変化が可能な光学系配置がある．式(4-5)を見ると分かる通り，TN 型素子における位相遅れは全複屈折量と逆正接関数の差であるから，最大位相変調量は全複屈折量の変化だけでは決まらず，全複屈折量の 2 倍以上の位相変調も可能となる場合がありうる．つまり一概に，TN 型液晶素子が平行配向型液晶素子に比べて位相変調能力が劣るとは言い切れないのである．TN 型液晶素子は，平行配向液晶素子に比べてその位相変調能力が劣るとい指摘があるが¹⁸⁾，それは当時入手可能であった，液晶層が十分に厚く，したがって最大全複屈折量が大きな素子の場合には正しい．しかしながら液晶層が薄く，最大全複屈折量が小さな素子においては，TN 型液晶素子が劣るのは，位相変調に付随して起こる強度変調が避けられない点であって，最大位相変調量という観点では平行配向素子に勝るのである．

4.2.2 透過型位相変調特性の測定

前項でシミュレーションした位相変調特性を確認するため，図 4-3 に示すマッハツェンダー型干渉計を用いて，TN 型液晶素子の位相変調量を測定した⁴⁴⁾．

He-Ne レーザーから出射した波長 633nm の光は，偏光板 (P1) を透過して直線偏光となり，電気光学素子 (EO) に入射する．ここで P1 は，得られる干渉縞のコントラストが最大になるようその偏角を調整する．EO は，ファンクションジェネレーターにより発生した周波数 f_m の鋸歯信号によって駆動されており，素子を透過するレーザー光の垂直方向成分にのみ鋸歯状の位相変調を与える．今回の実験では， $f_m=200\text{Hz}$ とした．EO から出射したレーザー光は，顕微鏡対物レンズ (MO)，ピンホール (PH)，及びコリメーターレンズ (CL) によって拡大され，平行光となって干渉計に入射する．偏光ビームスプリッター (PBS) に入射した平行光は，変調された垂直方向成分 (参照光) と変調を受けていない水平方向成分 (物体光) とに分けられる．物体光は，偏光子 (P2)，TN 型液晶素子 (TN LCD)，検光子 (AN) を透過し，その間に位相遅れを生じる．P2 を特定の角度に設定した時に光量のロスが起こらないよう，P2 の前に $1/2$ 波長板 ($\lambda/2$) を配置した．偏光子，検光子の偏角が ($30^\circ, 85^\circ$) の時の位相遅れを測定するためには， $\lambda/2$ の速い軸，P2，AN の偏角はそれぞれ $15^\circ, 30^\circ, 85^\circ$ に設定すれば良い．参照光は，偏角 85° に設定された偏光子 P3 を透過し，参照光と物体光の偏光方向が揃うようにした．無偏光ビームスプリッター (NPBS1) によって重なりあった参照光と物体光は，その位相差に応じた干渉縞を形成する．干渉光は 2 つ目の無偏光ビームスプリッター (NPBS2) で 2 つに分けられ，それぞれ開口 (AP1, AP2) の後ろに配置された光検出器 (PD1, PD2) によってその強度変化が検出される．

この光干渉計測定システムの動作を説明する．マッハツェンダー型干渉計中の参照光は，電気光学素子により周波数 f_m で変調を受けている．電気光学素子中には，ADP($\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$)，KDP(KH_2PO_4)等のポッケルス効果を持つ一軸性光学結晶が入っており，結晶に電圧を与えることによって，その結晶主軸方向の屈折率を変化させることができる⁵⁹⁾．つまり，結晶主軸方向の偏光成分にのみ位相変調を与える．本実験では，ADP 結晶を用いた Quantum Technology 社製

HVA-100K を用いた。

電気光学素子に与える電圧を

$$V = V_0 + V_1 t \quad (4-6)$$

とする。ここで V_0 はバイアス電圧であり、ポッケルス効果の線型性が良くなる大きさに設定する。また V_1 は鋸歯信号の振幅であり、鋸歯信号の一周期でちょうど 360° の位相変調が行えるよう設定する。 t は時間であるが、周波数 f_m で変調するため、正しくは $t(\text{mod } 1/f_m)$ である。位相変調を受ける偏光成分の入射光の電場を

$$E_m = A \exp[i(\omega t - kz)] \quad (4-7)$$

とする。ポッケルス効果は、結晶に与える電圧に対する 1 次の電気光学効果であるから、結晶を透過した光線の位相遅れ ξ は、与えられた電圧に比例する。その比例係数を k とすれば

$$\begin{aligned} \xi &= kV \\ &= kV_0 + kV_1 t \\ &\equiv \xi_0 + 2\pi f_m t \end{aligned} \quad (4-8)$$

となる。ここで、位相遅れの定数項を $\xi_0 = kV_0$ とし、変調項はその周波数を用いて表した。出射光の電場は

$$E_{out} = A \exp[i(\omega t - kz - \xi)] \quad (4-9)$$

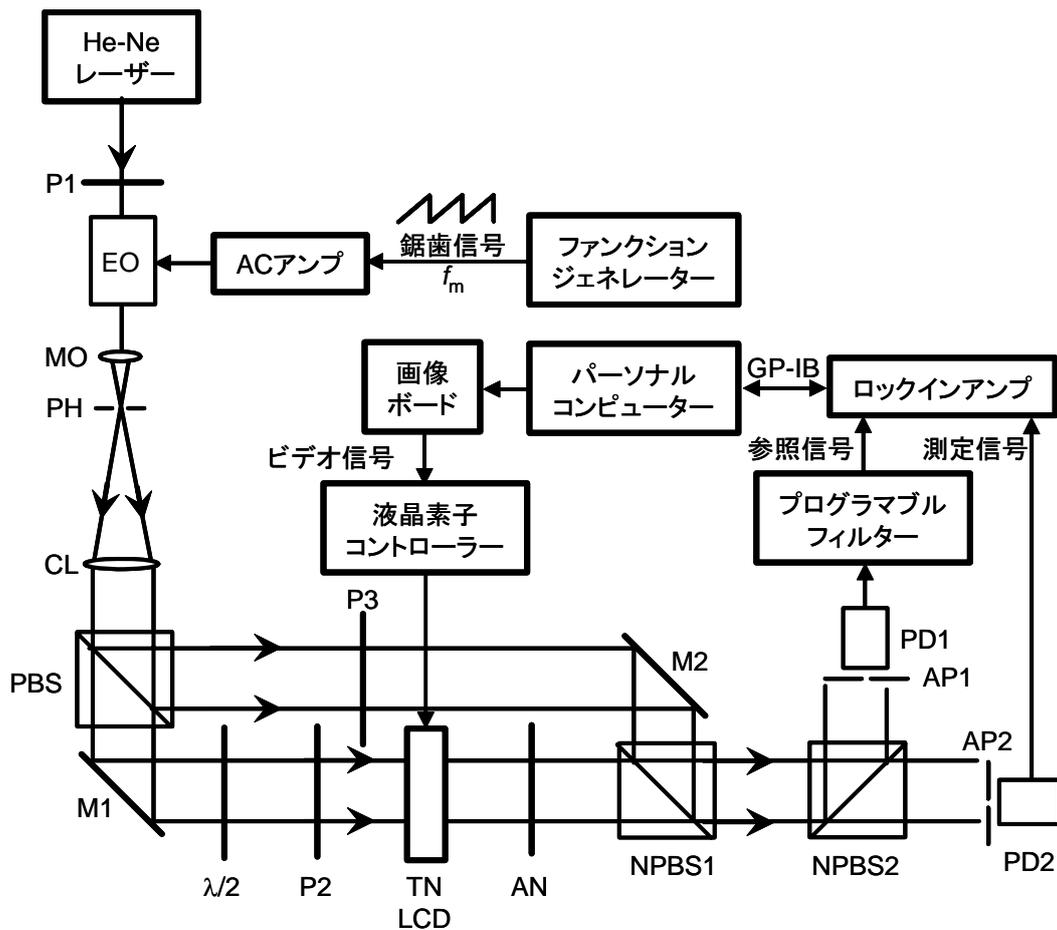


図 4-3 液晶素子の位相変調特性を測定するマッハツェンダー型干渉計測定システム

となり，これが図 4-3 の干渉計における参照光の電場である．一方入射光のうち，この偏光成分に垂直な成分である物体光は電気光学素子による位相変調を受けないが，液晶素子を透過することにより， δ の位相遅れを生じている．両成分の偏光方向を揃えて干渉させたときの干渉光強度は，簡単のため両成分の振幅を等しく $A/\sqrt{2}$ として，

$$I = \frac{1}{2} A^2 |\exp[i(\omega t - kz - \xi)] + \exp[i(\omega t - kz - \delta)]|^2 \quad (4-10)$$

$$= A^2 [1 + \cos(\xi_0 + 2\pi f_m t - \delta)]$$

となる．式(4-10)は，干渉する 2 光束のうち，その一方が時間に比例するような位相変調を受けると，干渉光の強度は正弦的に変化することを表している．周波数 f_m の鋸歯信号で位相変調した場合は，その干渉光強度は同じ周波数 f_m で，正弦的に変化する．この様子を図 4-4 に示す．図の上段(a)が変調用に電気光学素子に与えた電圧，中段(b)はあるグレイレベルでの一つの光検出器で測定された光強度の変化，下段(c)は異なるグレイレベルでの光強度変化である．このように，グレイレベルの違いに応じて位相遅れ δ が違うため，光強度の正弦的変化の位相が変化する．

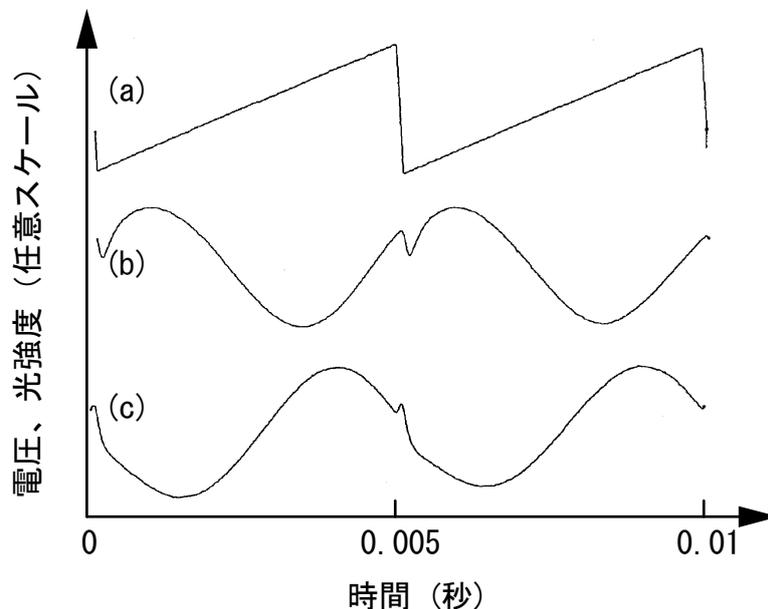


図 4-4 電気光学素子 (EO) による鋸歯変調と得られる干渉光強度変化. (a)EO に与える電圧. (b)グレイレベル 192 の時の干渉光強度変化. (c) グレイレベル 96 の時の干渉光強度変化.

図 4-3 の光学系において，画像ボードを介したパーソナルコンピューターからのコントロールにより，液晶素子の左半分をグレイレベル 255 で駆動し，右半分を 0 から 255 のあるグレイレベルで駆動する．そして光検出器 PD1 では左半分を透過した干渉光強度を検出し，PD2 で右半分の透過光強度を検出する．これらは共に周波数 f_m で正弦的に変化する信号となるが，その信号間には，グレイレベルの違いによって生じた位相遅れの差に等しい位相差が生じる．PD1 からの信号をプログラマブルフィルターで整形して，ロックインアンプの参照信号とし，PD2 からの信号を測定信号とすれば，ロックインアンプによって，それら信号間の位相差を高精度に測定することができる．ロックインアンプは，Stanford Research Systems 社製 SR530 を使用した．測定された位相差は，GP-IB(General Purpose Interface Bus)によってパーソナルコンピューターに取り込まれる．

偏光子，検光子の偏角を（ 30° ， 85° ）に設定して，グレイレベルに対する位相遅れを測定した結果を図 4-5 に示す．この液晶素子は，グレイレベルが小さい時に液晶層に大きな電圧が印加され，位相遅れは小さくなる．図 4-5 では同時に，図 3-12 に示した線型モデル，単純 3 層モデル，及び微分モデルで計算された全複屈折量と式(4-5)により求めた位相遅れのシミュレーション結果も示した．ただし位相変調の観点からは位相遅れの相対値だけが問題であるから，比較が容易となるようグレイレベル 255 において全ての位相遅れ量が一致するようにした．位相遅れの測定は 10 回行い，その平均値を黒丸で示すと共に，標準偏差をエラーバーで示してある．実験ではグレイレベルを 255 に設定した時の位相遅れとの相対的な位相遅れを測定しているため，グレイレベルが小さいところでは標準偏差も大きくなり，最大 22° であった．

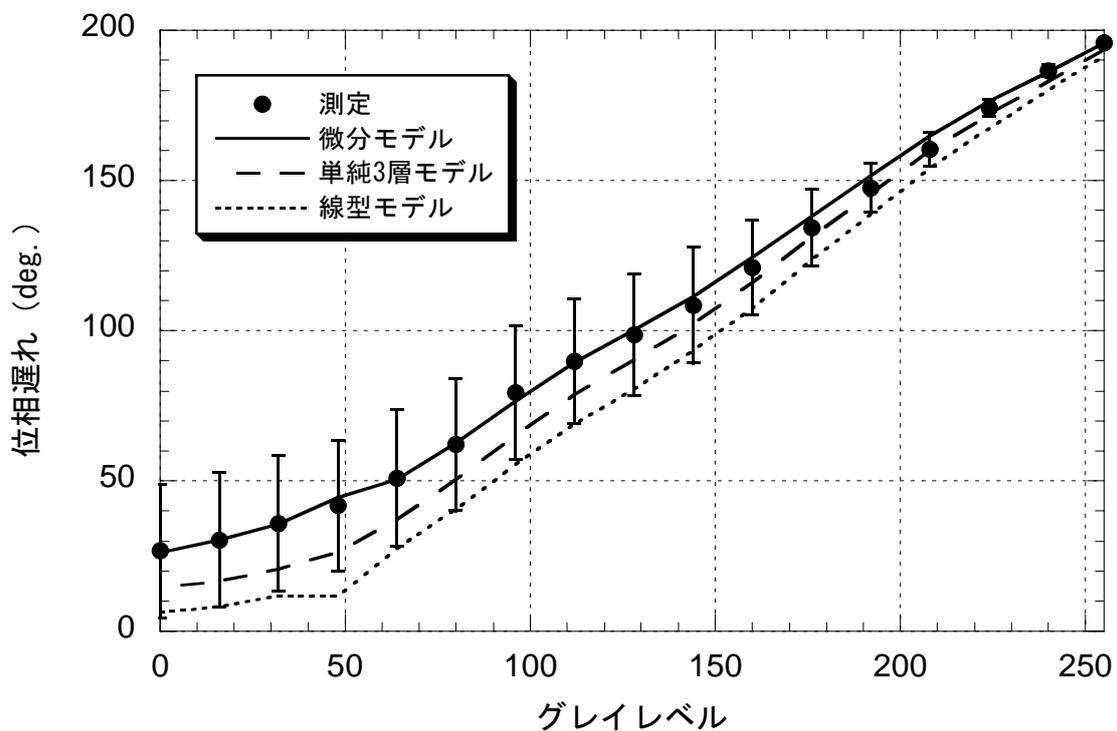


図 4-5 液晶素子の位相遅れ測定結果とシミュレーション結果との比較

液晶素子による位相変調は，グレイレベルの違いによる位相遅れの差によって行われるから，図 4-5 において，傾きが急であるほど大きな位相変調が可能ということになる．図によれば，線型モデルでの位相遅れのシミュレーションは，明らかに測定値と合っていない．この場合測定値に比べて傾きが大きいことから，線型モデルで位相変調量を予測すると，常に大きく見積もってしまうことが分かる．したがって，位相変調量のシミュレーションという立場からは，線型モデルは適していないといえる．実際この偏光子，検光子偏角の設定は，シミュレーションによって 180° 以上の最大位相変調量が得られるという条件の下で最適化されたものであり，線型モデルでの予測値は 185° であった．しかし測定では 169° の最大位相変調量しか得られておらず，その誤差は 8.6%であった．このような状況は常に生じうると考えられ，線型モデルで位相変調量を予測する時は，1 割程度の誤差を見込んで余裕を持った最適化を行うべきである．

単純 3 層モデルによるシミュレーションでも，線型モデルと同様に位相変調量を大きく見積も

ってしまうことになる。しかしながらその大きさは測定誤差の範囲内であり，今回の結果のみからモデルの良否を判断することはできない。一方微分モデルを用いた位相遅れシミュレーションは，今回の結果から判断すると非常に正確であり，位相変調特性から光学系の最適化を行う目的において最も優れたモデルであるといえる。

4.2.3 反射型位相変調特性の測定

(1) 往復光路の場合のジョーンズ行列

光が液晶素子中を逆向きに透過する場合の，素子のジョーンズ行列 \mathbf{J}' を考える⁶⁰。光の進む向きが常に z 軸の正方向になるように座標系を設定する。具体的には往路の時の配置図 4-6(a) に対し，復路では図 4-6(b) に示すように z 軸の向きを反対にする他，右手系を維持するために， x 軸の向きを反転する。このような座標系を用いると，光が液晶素子を逆向きに透過する場合でも，液晶分子のねじれ方は変化しないので全ツイスト角は α_T のままとなり変化しない。また全複屈折量は液晶分子のチルト角にのみ依存し，方位角には依存しないのでやはり往路の時と変化しない。したがって，光が逆向きに透過する時に変化する物理パラメーターは入射面ダイレクタのみとなる。具体的には図 4-6 から分かる通り，復路での素子への入射面（往路の出射面）での液晶分子ダイレクタは，

$$\psi'_D = -\psi_D - \alpha_T \quad (4-11)$$

となる。式(4-11)を用いて， \mathbf{J}' を式(2-117)と同じ形に書くと

$$\begin{aligned} \mathbf{J}'_X &= \exp(-i\beta_T) \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi'_D) \mathbf{M}_X \mathbf{R}(\psi'_D) \\ &= \exp(-i\beta_T) \mathbf{R}(\psi_D) \mathbf{M}_X \mathbf{R}(-\psi_D - \alpha_T) \end{aligned} \quad (4-12)$$

となる。ここで行列の添え字 X は，モデルの種類（線型モデル： L ，単純3層モデル： S ，微分モデル： D ）である。主行列 \mathbf{M}_X は，入射面ダイレクタが x 軸と平行の場合について求められたものであるから，いずれのモデルにおいても往路と復路で変化しない。式(4-12)の右辺の行列計算を実行して式(3-1)と同じ形式に書くと，

$$\begin{aligned} \mathbf{J}' &= \exp(-i\beta_T) \begin{pmatrix} f' - ig' & h' - ij' \\ -h' - ij' & f' + ig' \end{pmatrix} \\ &= \exp(-i\beta_T) \begin{pmatrix} f - ig & h + ij \\ -h + ij & f + ig \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-13)$$

となる。ここで， f' ， g' ， h' ， j' は復路での液晶素子のジョーンズ行列要素を表す。式(4-13)によれば，(1, 2)及び(2, 1)要素の虚数部分の符号のみ変化し，他は往路の場合と全く同じとなることが分かる。これは例えば線型モデルの場合，ジョーンズ行列要素 f ， g ， h ， j は式(3-17)～(3-20)となるが，それらの式の入射面ダイレクタに式(4-11)を代入すると， j のみが符号を変えることから確認できる。

式(4-13)のジョーンズ行列によって表される液晶素子を透過する光線に生じる位相遅れを計算する。まず，偏角 ϕ'_P の直線偏光が入射し，偏角 ϕ'_A の直線偏光を検出する場合を考える。ただし，図 4-6(b) の光学系を考えると， $\phi'_P = -\phi_A$ ， $\phi'_A = -\phi_P$ である。この時の複素振幅透過率を式(4-1)の形に表すと，式(4-2)及び(4-3)に対応する実成分と虚成分はそれぞれ

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\tilde{T}) &= f' \cos(\psi'_P - \psi'_A) + h' \sin(\psi'_P - \psi'_A) \\ &= f \cos(\psi_P - \psi_A) + h \sin(\psi_P - \psi_A) \end{aligned} \quad (4-14)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\tilde{T}) &= -g' \cos(\psi'_P + \psi'_A) - j' \sin(\psi'_P + \psi'_A) \\ &= -g \cos(\psi_P + \psi_A) - j \sin(\psi_P + \psi_A) \end{aligned} \quad (4-15)$$

であり，往路の場合と全く同じになることが分かる．これは，ジョーンズ行列要素のうち j のみ符号を変えるが，ちょうどその変化を打ち消すように偏光子，検光子の偏角が変わるためである．このように入出力光として直線偏光のみ考えた場合，往路と復路でその位相遅れは全く同じであり，式(4-5)で表される量となる．

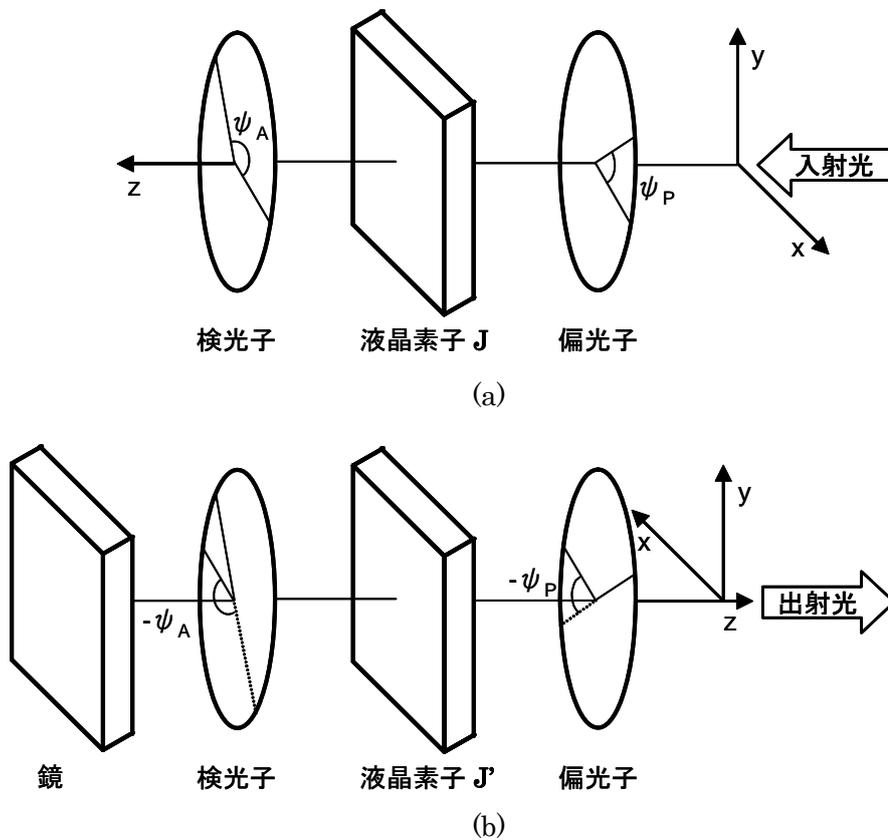


図 4-6 偏光子，液晶素子，検光子の配置と座標系．光線の進行方向が常に z 軸正方向になるようにする．(a)片道光路及び往復光路の場合の往路．(b)往復光路の場合の復路．

液晶素子の片面を鏡面にするなどして，図 4-6 の検光子を用いない往復光路を構成するとどうなるであろうか．この時，液晶素子からの出射光は一般に楕円偏光となるので，鏡による反射の影響を考慮しなければならない．鏡を表すジョーンズ行列を \mathbf{V} とすると，我々は鏡の前後で x 軸の向きを反転させたので，ジョーンズベクトルの x 成分と y 成分の間に 180° の位相差を付加したことに同等になり

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (4-16)$$

となる．式(4-16)のジョーンズ行列で表される素子に，例えば長軸が x 軸方向で楕円率 ε の右楕

円偏光を入射すると、

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi \\ i \sin \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \cos \chi \\ \sin \chi \end{pmatrix} \quad (4-17)$$

となる。式(4-17)は出射光が、入射光と同じ長軸方向と楕円率を持った左回りの楕円偏光になることを表している(表 2-1 参照)。これは一般の楕円偏光でも成り立ち、鏡による反射によって光の進行方向を逆向きにすると、偏光の回り方が逆になる。詳しい計算は省略するが、この影響のため往路と復路で対称性が保たれず、復路での位相遅れは必ずしも往路の位相遅れの 2 倍にはならない。直線偏光の場合には、回り方の違いがないため往路と復路で厳密に同じだけ位相遅れが生じる。つまり、片道光路で位相変調特性を最適化した光学系を用いて、位相変調量を 2 倍にするために往復光路とする場合は、必ず検光子を用いて鏡に入射する光線を直線偏光にしなければならない⁶¹⁾。

(2) 光干渉計を用いた往復光路での位相変調特性の測定

往復光路にした場合、期待通り 2 倍の位相変調量が得られるかどうかを調べるために図 4-7 に示すマイケルソン型干渉光学系を用いて実験を行った⁶⁰⁾。He-Ne レーザーの光は対物レンズ、ピンホール、コリメーターレンズによって拡大され、平行光になったあとハーフミラーによって測定光と参照光に分けられる。測定光は、偏光子、液晶素子、検光子を透過したあと、レンズ 1, 2 による共焦点光学系と鏡によって同じ光路を戻されて再び液晶素子を通過する。共焦点面には不要な回折光を除くため空間フィルター 1 が置かれている。液晶素子としては、表 3-4 の仕様のセイコーエプソン製のものを用い、また偏光子、検光子の偏角は、4.2.1 項の最適化に従って(30°, 85°)とした。一方参照平面波はピエゾミラーによって反射され、液晶素子を通った光と干渉して CCD カメラ上に干渉縞を形成する。干渉縞はパーソナルコンピューター 2 に取り込まれる。パーソナルコンピューター 2 は同時にピエゾミラーをコントロールしており、参照光波面を 60°, 120° の位相シフトさせることが可能となっている。位相シフトと同期した干渉縞画像の取り込みにより、3 ステップ位相シフト干渉法により物体光の波面を測定する。液晶素子には、パーソナルコンピューター 1 と画像ボードにより 8 段階のグレイレベルに対応したストライプ状のパターンを描かれており、それぞれのストライプ部分を透過した波面の位相は、液晶素子による位相遅れを反映しているため、透過波面の位相測定により位相遅れを測定できる。

ビデオ信号 0 に対する相対的な位相差を測定した結果は図 4-8 の通りであり、検光子のある往復光路では、予想通り片道光路に比べて位相遅れ量がちょうど 2 倍になっていることが分かる。比較のため、検光子を取り外して同様に測定した結果も同図上に示す。検光子のない場合には、入力映像信号が小さい時には位相遅れが大きく変化しているが、途中からあまり変化しなくなり、結果的に片道光路の場合と比べて、最大位相変調量がそれほど大きくなっていないことが分かる。4.2.1 項では片道光路において偏光子、検光子の最適化を行い、この液晶素子を用いて最大で 180° の位相変調を可能としたが、このように往復光路においては同様の光学系で、360° の連続的な位相変調が可能となる。

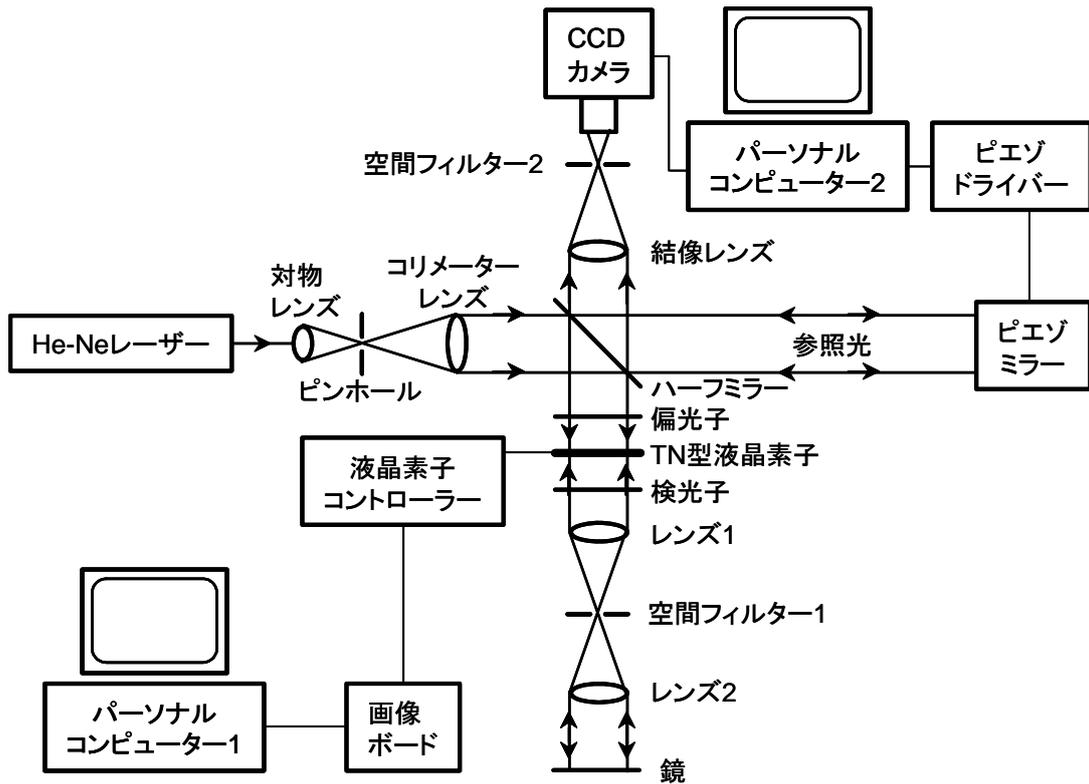


図 4-7 往復光路での液晶素子の位相変調特性を測定するための位相シフトマイケルソン型干渉計測定システム

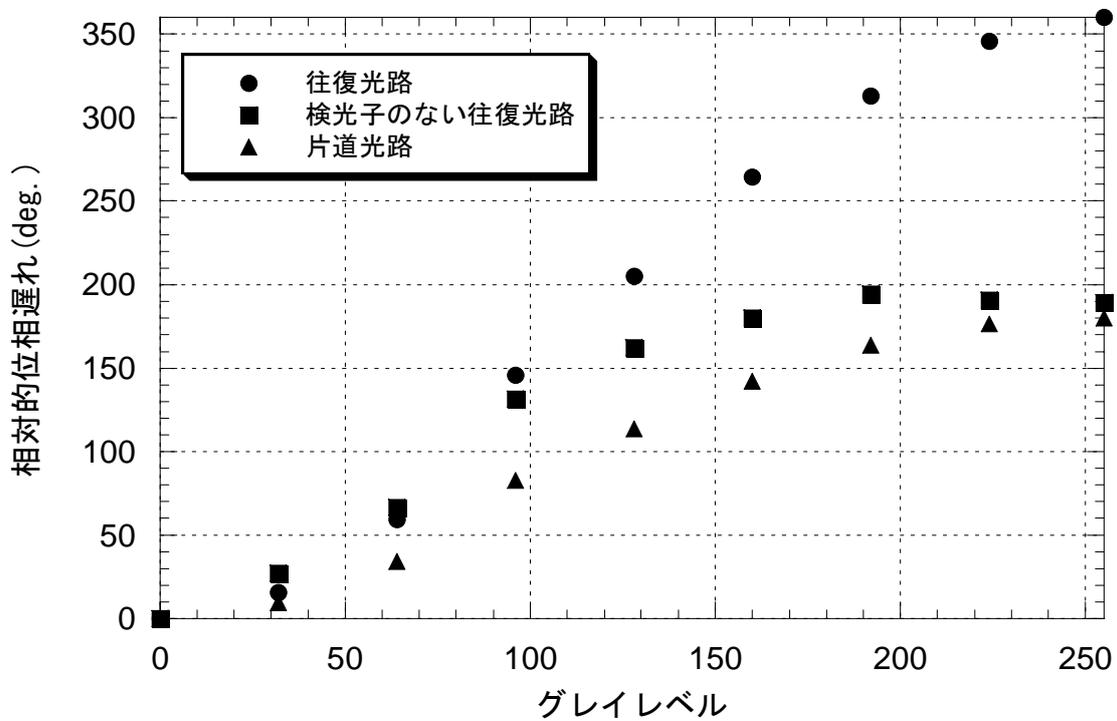


図 4-8 入力ビデオ信号のグレイレベルに対する相対的位相遅れ量測定結果

4.3 固有偏光を用いた光学系

4.3.1 液晶素子の固有偏光

液晶素子への入出力光として、直線偏光以外の入出力光を用いる方法も種々検討されている。今井らは、入力光として円偏光を用い、出力光として直線偏光を検出した場合の位相変調特性を測定した⁶²⁾。その結果、液晶分子のツイストとは逆回りの円偏光を入射させた時、大きな位相変調量が得られたと報告している。Pezzaniti と Chipman は、ある楕円偏光を液晶素子に入射した時、ビデオ信号のグレイレベルが変化しても、元の偏光状態がほとんど変化しないような楕円偏光をミューラー行列によって計算し、それを固有偏光 (eigenpolarization states) と名付けた⁶³⁾。そして入出力光として固有偏光を用いると、グレイレベルの広い範囲において位相のみの変調が可能であると報告した。ただし彼らの報告では理論的な説明がなされておらず、また実験に用いた液晶素子の物理パラメーターも明らかでないため、その有効性は不明である。Davis らは、液晶素子を線型モデルによってジョーンズ行列で表し、その主ジョーンズ行列に対する固有ベクトルを、液晶素子の固有偏光 (polarization eigenstates) と規定した⁶⁴⁾。そして、Pezzaniti の定義における固有偏光よりも優れた位相変調特性が得られたと報告している。本論文では、液晶素子の固有偏光の定義として、後者の Davis らによるものを採用する。

液晶素子を透過した光線の偏光状態が入射時から変化しないのであれば、液晶素子は純粋な位相子として働いていることになるので、位相のみの変調が可能となっていることが期待される。問題は、グレイレベルの変化に対して固有偏光がどのように変化するかということである。本項では、液晶素子の線型ジョーンズ行列を用いて固有偏光を定式化し、その位相変調特性を調べる。また次項以降では実験的にその特性を測定する方法について述べる。

線型モデルによる液晶素子のジョーンズ行列 \mathbf{J}_L は式(2-52)の通りであり、定数項を除いて、物理パラメーターである全ツイスト角 α_T 、全複屈折量 β_T 、及び入射面ダイレクタ ψ_D により

$$\mathbf{J}_L = \exp(-i\beta_T) \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D) \mathbf{M}_L \mathbf{R}(\psi_D) \quad (4-18)$$

で表される。ここで \mathbf{M}_L は線型モデルの主行列であり、

$$\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} \cos \gamma - i \frac{\beta_T}{\gamma} \sin \gamma & \frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma \\ -\frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma & \cos \gamma + i \frac{\beta_T}{\gamma} \sin \gamma \end{pmatrix} \quad (4-19)$$

である。ただし γ は式(2-51)で定義される量である。主行列は全ツイスト角及び全複屈折量にのみ依存し、入射面ダイレクタによらない。式(4-19)の行列に対する固有値を μ_{\pm} 、及びそれに付随する規格化された固有ベクトルを \mathbf{E}_{\pm} とすると、固有方程式

$$\mathbf{M}_L \mathbf{E}_{\pm} = \mu_{\pm} \mathbf{E}_{\pm} \quad (4-20)$$

を解くことによりそれぞれ、

$$\mu_{\pm} = \exp(\pm i\gamma) \quad (\text{複合同順}) \quad (4-21)$$

$$\mathbf{E}_{+} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma(\beta_T + \gamma)}} \begin{bmatrix} \alpha_T \\ i(\beta_T + \gamma) \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{1}{\sqrt{2\gamma(\beta_T + \gamma)}} \begin{bmatrix} \beta_T + \gamma \\ -i\alpha_T \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

と求められる^{64,65)}. 式(4-21)における複合の正負によって、それぞれ正の固有値、負の固有値と称し、式(4-22)、(4-23)のジョーンズベクトルで表される偏光状態をそれぞれ正の固有偏光、負の固有偏光と呼ぶことにする. γ の定義により常に $|\alpha_T| < \beta_T + \gamma$ であるから、式(4-22)によって表される正の楕円偏光はその長軸が y 軸に沿っており、式(4-23)の負の楕円偏光は長軸が x 軸に沿っている. つまり、正の固有偏光の長軸は入射面ダイレクタに垂直であり、負の固有偏光の長軸は入射面ダイレクタに平行である. また全ツイスト角が正の時、正の固有偏光は右回りの楕円偏光であり、負の固有偏光は左回りの楕円偏光となる. 全ツイスト角が負の時はその逆である. 符号を考慮した固有偏光の楕円率 ε は、

$$\varepsilon_{\pm} = \pm \frac{\alpha_T}{\beta_T + \gamma} \quad (\text{複合同順}) \quad (4-24)$$

となる. ε_+ は正の固有偏光の楕円率を表し、 ε_- は負の固有偏光の楕円率を表す. 符号を考慮した楕円率が正の時、右回りの楕円偏光となる.

式(4-18)のジョーンズ行列で表される液晶素子に、 ϕ_D だけ回転させた固有偏光を入射すると、正の固有偏光では

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_L \mathbf{E}_+ &= \exp(-i\beta_T) \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D) \mathbf{M}_L \mathbf{R}(\psi_D) [\mathbf{R}(-\psi_D) \mathbf{E}_+] \\ &= \exp[-i(\beta_T - \gamma)] \mathbf{R}(-\alpha_T) [\mathbf{R}(-\psi_D) \mathbf{E}_+] \end{aligned} \quad (4-25)$$

となり、負の固有偏光では

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_L \mathbf{E}_- &= \exp(-i\beta_T) \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D) \mathbf{M}_L \mathbf{R}(\psi_D) [\mathbf{R}(-\psi_D) \mathbf{E}_-] \\ &= \exp[-i(\beta_T + \gamma)] \mathbf{R}(-\alpha_T) [\mathbf{R}(-\psi_D) \mathbf{E}_-] \end{aligned} \quad (4-26)$$

となる. 式(4-25)及び(4-26)は、入射光がその偏光状態を保ったまま、長軸が全ツイスト角分の α_T だけ回転して出射することを表している. 正及び負固有偏光の入出力に対する位相遅れをそれぞれ δ_+ 、 δ_- とすれば、

$$\delta_{\pm} = \beta_T \mp \gamma \quad (\text{複合同順}) \quad (4-27)$$

である. β_T 及び γ は共に正の量であるから、位相遅れ量そのもの、及びグレイレベル(全複屈折量)に対する変化量は共に、負の固有偏光の方が大きくなる.

このように、 ϕ_D だけ回転させた固有偏光を液晶素子に入射し、出射光のうち、全ツイスト角分回転した固有偏光を検出すれば、光のロスがないため、透過率は常に100%となって変化せず、理想的な位相のみの変調が可能となると考えられる. しかしながら実際には4.2.2項で示したように、線型モデルで計算される全複屈折量 β_T は正確ではない. また、グレイレベルによって固有偏光は異なるので、変化させるグレイレベルの範囲内で、平均的な固有偏光を用いて位相変調を行うことになる. これらの影響により、固有偏光を用いた光学系においても、位相変調に加え、若干の強度変調が起こる. 平均化の効果については、4.3.4節で議論する.

4.3.2 マツハツェンダー型干渉計を用いた位相変調特性の測定

(1) 楕円偏光の発生と検出

レーザー光源から発生した光から、偏光板と 1/4 波長板を用いて長軸方位 ψ 、楕円率 ε の楕円偏光を発生させることができる。楕円率角 χ を

$$\chi = \tan^{-1} \varepsilon \quad (-45^\circ \leq \chi \leq 45^\circ) \quad (4-28)$$

で定義する。楕円率角の正負は楕円率の正負と同様であり、正の時右回りの楕円偏光、負の時左回りの楕円偏光に対応している。まず、1/4 波長板の速い軸を長軸方位に合わせる。そして、偏光板の偏角を、長軸方位から $-\chi$ の方向に合わせてレーザー光源と 1/4 波長板の間に設置する。表 2-1 及び 2-2 を参照すると、このような光学系での出射光はジョーンズ行列を用いて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{out} \\ y_{out} \end{pmatrix} &= \mathbf{Q}_\psi \begin{bmatrix} \cos(\psi - \chi) \\ \sin(\psi - \chi) \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{R}(-\psi)\mathbf{Q}_0\mathbf{R}(\psi)] \begin{bmatrix} \cos(\psi - \chi) \\ \sin(\psi - \chi) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{R}(-\psi) \begin{pmatrix} \cos \chi \\ i \sin \chi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-29)$$

と計算される。ただし、表 2-2 に示した通り、 \mathbf{Q} は 1/4 波長板のジョーンズ行列であり、添え字はその速い軸の偏角を表す。式(4-29)右辺は、長軸が x 軸方向で楕円率 ε の楕円偏光を ψ だけ回転したものであることを表しており、出射光が長軸方位 ψ 、楕円率 ε の楕円偏光であることが分かる。

液晶素子からの出射光のうち、長軸方位 ψ 、楕円率 ε の楕円偏光成分を検出するには、やはり 1/4 波長板と偏光板の組を用いる。1/4 波長板の速い軸の偏角を、検出したい楕円偏光の長軸方位に合わせる。この 1/4 波長板に長軸方位 ψ 、楕円率 ε の楕円偏光が入射すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{out} \\ y_{out} \end{pmatrix} &= \mathbf{Q}_\psi \mathbf{R}(-\psi) \begin{pmatrix} \cos \chi \\ i \sin \chi \end{pmatrix} \\ &= [\mathbf{R}(-\psi)\mathbf{Q}_0\mathbf{R}(\psi)]\mathbf{R}(-\psi) \begin{pmatrix} \cos \chi \\ i \sin \chi \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\psi + \chi) \\ \sin(\psi + \chi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-30)$$

となり、 $\psi + \chi$ 方向の直線偏光となる。検出したい楕円偏光に直交する偏光は、長軸方位 $\psi + 90^\circ$ 、楕円率 $-\varepsilon$ の楕円偏光であるが、その楕円偏光を同様に速い軸の偏角が ψ の 1/4 波長板に通すと、式(4-30)の出射光に直交する偏光、すなわち $\psi + \chi + 90^\circ$ 方向の直線偏光となる。したがって、1/4 波長板の後ろに透過軸偏角を $\psi + \chi$ の方向にした偏光板を配置すると、検出したい楕円偏光成分のみを検出することができる。

式(4-23)のジョーンズベクトルで表される負固有偏光を発生させ、またそれを検出する光学系を図 4-9 に示す。正負の固有偏光における楕円率角を

$$\chi_{\pm} = \tan^{-1} \varepsilon_{\pm} \quad (\text{複合同順}, -45^\circ \leq \chi_{\pm} \leq 45^\circ) \quad (4-31)$$

とする。全ツイスト角が正の時，負固有偏光は左回りで楕円率 ϵ_- は負であるから，楕円率角 χ_- も負となる。負固有偏光の長軸はダイレクタに平行なので，負固有偏光を発生させるには，1/4波長板の速い軸の偏角を入射面ダイレクタ ϕ_D と同じにする。そして，偏光子の透過軸偏角を $\phi_D - \chi_-$ に設定すれば良い。液晶素子を透過した負固有偏光は，楕円率を保持のまま，長軸が全ツイスト角分回転して出射する。したがってこれを検出するには，検出側 1/4波長板の速い軸の偏角は，出射面ダイレクタと平行に $\phi_D + \alpha_T$ とし，検光子の偏角は $\phi_D + \alpha_T + \chi_-$ とする。

正固有偏光の長軸は入射面ダイレクタに垂直なので，入射側 1/4波長板の速い軸を $\phi_D + 90^\circ$ に設定する。あるいは同じことであるが，入射側 1/4波長板の遅い軸を入射面ダイレクタと平行にする。偏光子偏角は $\phi_D + 90^\circ - \chi_+$ とする。液晶素子を透過した正固有偏光は，やはりその楕円率のまま，長軸の向きが全ツイスト角分だけ回転しているのので，それを検出するには検出側の 1/4波長板の速い軸の偏角を $\phi_D + 90^\circ + \alpha_T$ とし，検光子の偏角を $\phi_D + 90^\circ + \alpha_T + \chi_+$ とすれば良い。これらの角度を，表 4-1 にまとめる。

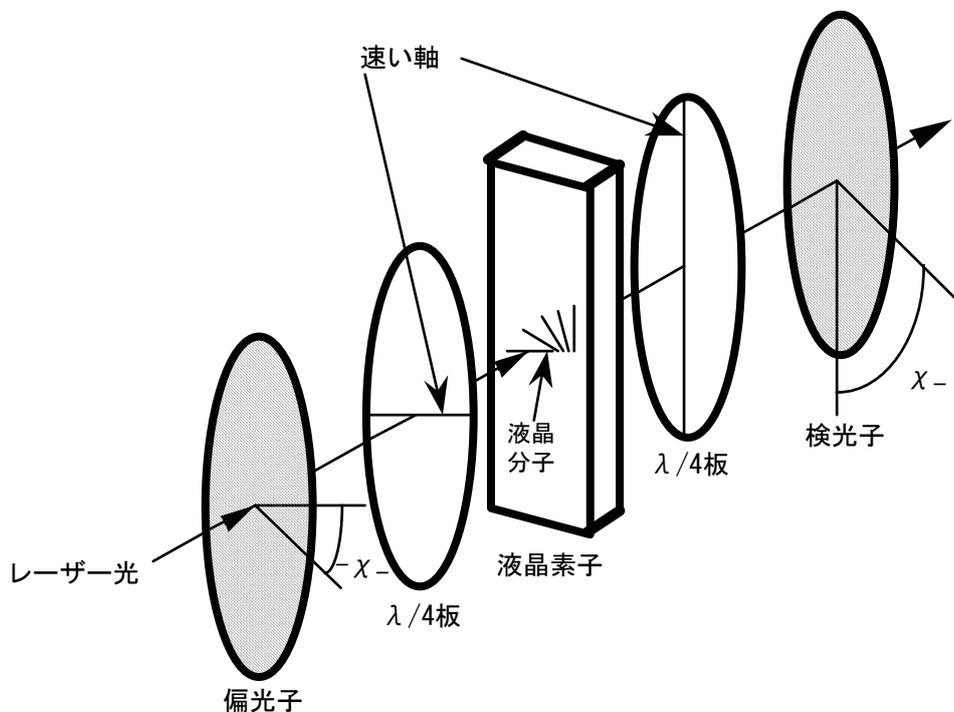


図 4-9 液晶素子に負固有偏光を入射し，出射光の負固有偏光成分を検出する光学系配置

表 4-1 液晶素子の固有偏光を発生，検出する光学系配置の偏角

	偏光子偏角	入射側 1/4 波長板 速い軸	出射側 1/4 波長板 速い軸	検光子偏角
正固有偏光	$\phi_D + 90^\circ - \chi_+$	$\phi_D + 90^\circ$	$\phi_D + 90^\circ + \alpha_T$	$\phi_D + 90^\circ + \alpha_T + \chi_+$
負固有偏光	$\phi_D - \chi_-$	ϕ_D	$\phi_D + \alpha_T$	$\phi_D + \alpha_T + \chi_-$

(2) 透過率の測定

固有偏光の楕円率角 χ_{\pm} は、液晶素子に与えるビデオ信号のグレイレベルによって変化する。液晶素子があるグレイレベル駆動したとき、そのグレイレベルにおける固有偏光を入射・検出すると透過率は 100% となるが、異なるグレイレベルにおける固有偏光を入射し、検出した時は多少透過率が小さくなる。そこで、位相変調特性を測定するのに先立ち、グレイレベルを 0 から 255 の範囲で変化させた時、透過率変化が最小になるような中間的な固有偏光を決定する必要がある。光源として波長 488nm のアルゴンイオンレーザーを用い、ソニー製液晶素子に対して図 4-9 に示した固有偏光の発生・検出光学系で透過率を測定した。楕円率角 χ_{\pm} を変化させ、偏光子及び検光子の偏角を表 4-1 で計算した値に設定して実験を行ったところ、透過率変化が最も小さくなるような楕円率角として

$$\chi_{\pm} = \mp 32^{\circ} \quad (\text{複合同順}) \quad (4-32)$$

が得られた。この液晶素子はツイスト角が負であるため、正固有偏光に対して楕円率が負（すなわち左回り）である。この楕円率角の時の、グレイレベルに対する透過率を図 4-10 に示す。図では、正及び負の固有偏光毎に、最大の透過光強度で規格化してある。強度透過率の変動は、正固有偏光に対して 15%、負固有偏光に対して 10% であった。

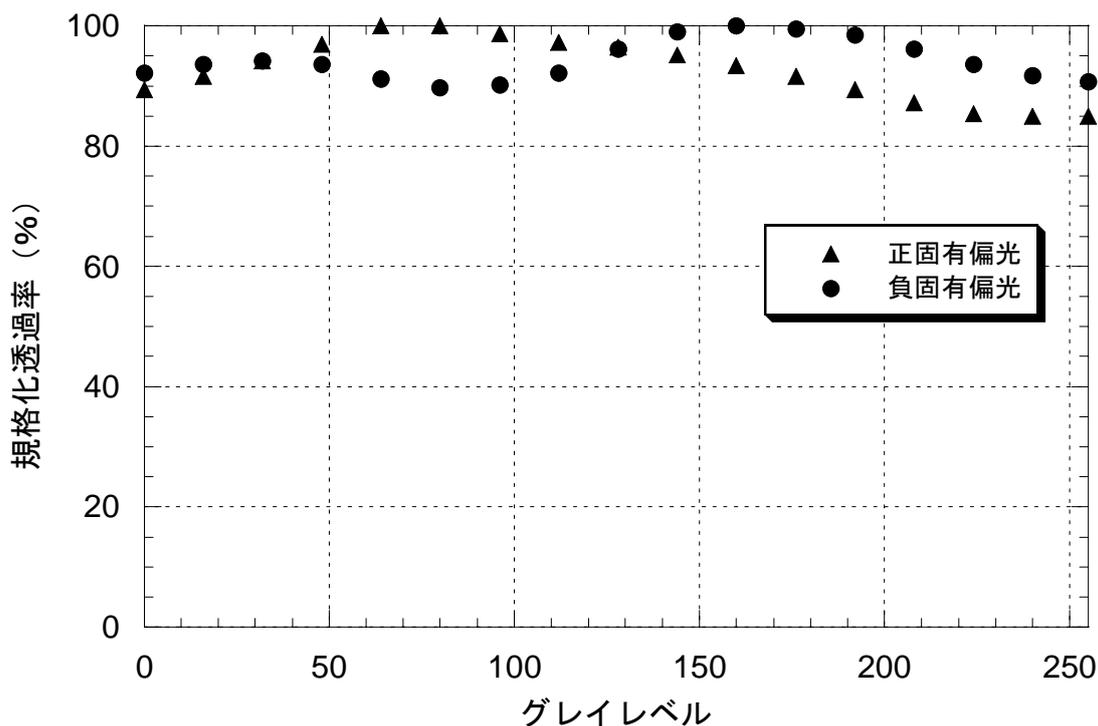


図 4-10 液晶素子にその固有偏光を入射し、検出した時の透過率特性

(3) 位相遅れの測定

固有偏光入出力に対する位相遅れを、図 4-11 に示す光学系を用いて測定した。測定した液晶素子は、ソニー製 LCX012AL であり、その仕様は表 3-4、物理パラメーターは表 3-6 の通りである。図 4-11 の測定システムは、図 4-3 の測定システムと同様の原理に基づくマッハツェンダー型干渉

計測定システムである。光源には、波長 488nm のアルゴンイオンレーザーを用いた。レーザービームは 1/2 波長板(HWP1)と電気光学素子(EO)を透過した後、偏光ビームスプリッター(PBS)に入射し、水平な偏光成分と垂直な偏光成分に分離される。HWP1 は両成分の強度比を調整し、干渉縞のコントラストを最大にするために用いた。また EO には鋸歯状の電圧を印加し、両成分に位相変調を与えた。この EO による時間的な位相変調と、ロックインアンプによる干渉縞の位相検出の原理は、図 4-3 の測定システムと同様である。ただしロックインアンプの参照信号には、ファンクションジェネレーターからの信号を直接入力した。また図 4-3 の干渉計と異なり、レーザービームは拡大せずに使用した。PBS を透過した水平偏光成分は参照光となり、偏光板(LP1)、1/2 波長板(HWP2)を透過した後、無偏光ビームスプリッター(NPBS)によって測定光と重ねあわせられ、干渉縞を形成する。一方垂直偏光成分は測定光となり、偏光板(LP2)を透過した後、固有偏光発生検出の光学系に入射する。ここで LP1、LP2 の両偏光板は、PBS の不完全さを補い、クロストークを減少させるために用いた。これにより EO によって位相変調を受けた成分と受けなかった成分はより完全に分離され、測定精度の向上が期待できる。また、HWP2 は、参照光の偏光方向を物体光に合わせるために用いた。

固有偏光の発生及び検出の光学系は、図 4-9 と同様に、偏光子(LP3)、入射側 1/4 波長板(QWP1)、液晶素子(TN LCD)、出射側 1/4 波長板(QWP2)、及び検光子(LP4)からなる。それぞれの素子の偏角は、透過率測定の時と同様である。NPBS によって重ねあわせられた測定光と参照光は検出器上で干渉縞を形成する。より高精度な測定を行うため、顕微鏡対物レンズ(MO)、ピンホール(PH)、及び開口(AP)によって不要な高次回折光、迷光等を取り除いて測定した。

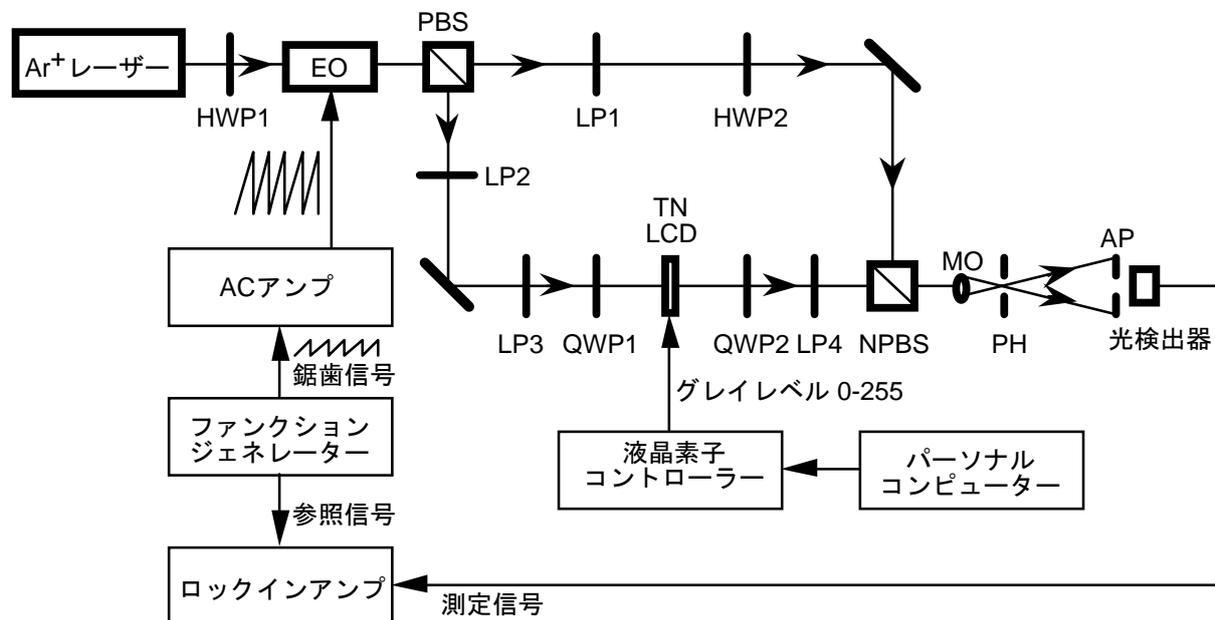


図 4-11 固有偏光の位相遅れを測定するマッハツェンダー型干渉計測定システム

測定結果を図 4-12 に示す。直接測定される位相値は、ファンクションジェネレーターからの信号との位相の違いなので、それぞれ式(4-27)と比較できるような値に補正した。この液晶素子では、グレイレベルが小さい時に液晶層にかかる電圧が小さくなるので、位相遅れは大きくなる。式(4-27)から期待されるとおり、正固有偏光よりも負固有偏光の方が大きな位相遅れの変化があるこ

とが分かり、最大位相変調量は正固有偏光に対して 40° ，負固有偏光に対して 291° であった。また測定精度はおおよそ $\pm 10^\circ$ であった。

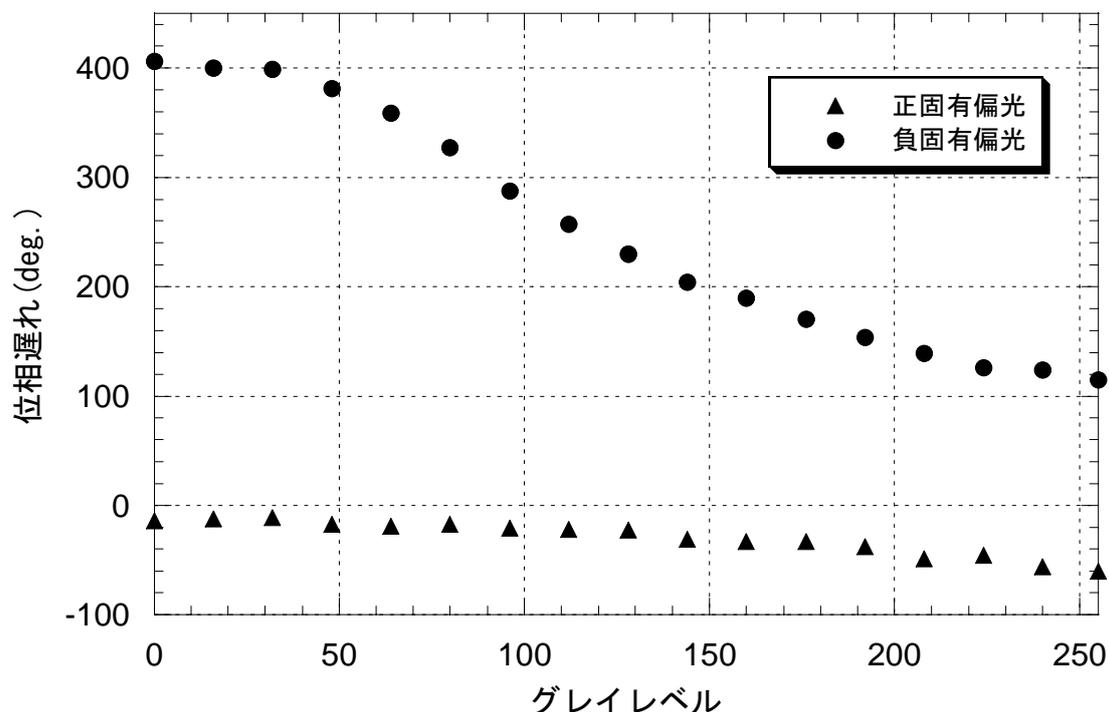


図 4-12 液晶素子にその固有偏光を入射，検出した時の位相遅れ

4.3.3 共通光路型干渉計を用いた位相変調特性の測定

光干渉計を用いた測定においてその測定精度を低下させる要因は、測定時における外部振動や空気揺らぎといった測定環境の変化である⁶⁶⁾。測定精度を向上させるためには、測定時間を短縮する、数多くの測定を繰り返して平均する、位相シフトのアルゴリズムを工夫する^{67,68)}、測定光と参照光の光路を同一にする等の手法がとられる。Shyu らは、共通光路型干渉計を用いて波長板による位相遅れを測定し、非常に安定性の高い結果を得た⁶⁹⁾。我々は、その手法を TN 型液晶素子に適用できるよう工夫した⁷⁰⁾。

図 4-9 の光学系を考える。入射側，出射側とも 1/4 波長板の速い軸の偏角は、それぞれ入射面ダイレクタ，出射面ダイレクタの方位角に一致させる。さて，表 4-1 の通りに偏光子偏角を $\phi_{D-\chi}$ とすれば，負固有偏光が発生する。一方，偏光子偏角を $\phi_{D-\chi} + 90^\circ$ にすると，入射側 1/4 波長板に入射する直線偏光が共役な直線偏光になるので，そこから出射する楕円偏光は，負固有偏光に共役な楕円偏光，すなわち正固有偏光になる。固有偏光の検出についても同様のことがいえる。つまり，出射側 1/4 波長板を透過した後の光を，表 4-1 に示す偏角の検光子で検出すると負固有偏光が検出されるならば，その検光子偏角に垂直な方向の直線偏光成分を検出すれば，正固有偏光を検出したことになる。要するに，固有偏光が発生，検出する光学系配置の偏角は一通りではない。この別方法の例を表 4-2 に示す。この方法では，1/4 波長板の偏角を固定したまま，偏光子と検光子の偏角を変化させることによって正負の固有偏光を使い分けることができる。

表 4-2 液晶素子の固有偏光を発生，検出する光学系配置の偏角（別方法）

	偏光子偏角	入射側 1/4 波長板 速い軸	出射側 1/4 波長板 速い軸	検光子偏角
正固有偏光	$\phi_D - \chi_- + 90^\circ$	ϕ_D	$\phi_D + \alpha_T$	$\phi_D + \alpha_T + \chi_- + 90^\circ$
負固有偏光	$\phi_D - \chi_-$	ϕ_D	$\phi_D + \alpha_T$	$\phi_D + \alpha_T + \chi_-$
共通光路型干渉計	$\phi_D - \chi_- + 45^\circ$	ϕ_D	$\phi_D + \alpha_T$	$\phi_D + \alpha_T + \chi_- + 45^\circ$

共通光路型干渉計は，その正負の固有偏光を等分に混ぜた状態により実現することができる．すなわち偏光子，及び検光子の偏角を，正負の固有偏光の場合のちょうど中間にする．具体的な共通光路型干渉計の測定システムを図 4-13 に示す．それぞれの偏光素子の偏角は表 4-2 下段の通りとする．また本システムの位相測定の実理は図 4-11 のマッハツェンダー型干渉計と同様であり，電気光学素子による位相変調を行って，干渉光強度変化の位相をロックインアンプで検出する．共通光路型干渉計では，マッハツェンダー型干渉計に比べて光学系が簡単となる．

波長 488nm のアルゴンレーザー光は偏光子(LP1)を透過した後電気光学素子(EO)に入射して，周波数 f_m で鋸歯状の位相変調を受ける．偏光子を透過した光線のジョーンズベクトルを \mathbf{E}_1 とする． \mathbf{E}_1 を，表 4-2 にある正負固有偏光の偏光子偏角方向の直交する 2 成分で表すと

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{R}(-\psi_D + \chi_- - 45^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mathbf{R}(-\psi_D + \chi_- - 90^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R}(-\psi_D + \chi_-) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (4-33)$$

となる．ここで 2 行目右辺第 1 項が正固有偏光となり，第 2 項が負固有偏光となる成分である．EO の結晶主軸方位を，第 2 項のみに位相変調をかけるように設定すれば，その出射光 \mathbf{E}_2 は，

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mathbf{R}(-\psi_D + \chi_- - 90^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \exp(-i\xi) \mathbf{R}(-\psi_D + \chi_-) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (4-34)$$

となる．ここで ξ は式(4-8)で表される位相変調量である．

EO により変調を受けた光線は，入射側 1/4 波長板(QWP1)，液晶素子(TN LCD)，出射側 1/4 波長板(QWP2)，検光子(LP2)の順に透過し，光検出器でその強度が検出される．測定した液晶素子は，前項と同じソニー製 LCX012AL であり， $\chi_- = 32^\circ$ とした．QWP1 を透過した光線のジョーンズベクトルは，

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3 &= \mathbf{Q}_{\psi_D} \mathbf{E}_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{R}(-\psi_D) [-\mathbf{E}_+ + \exp(-i\xi) \mathbf{E}_-] \end{aligned} \quad (4-35)$$

となり，正負固有偏光の和となる．ここで正固有偏光に負号がつくのは，表 4-2 の別方法により発生させたためである．つまり，表 4-1 の光学系偏角配置で正固有偏光を生じさせた場合と比較して，位相は 180° だけ異なっている．しかしながらそれらは本質的に同じ偏光状態である．

\mathbf{E}_3 が液晶素子を透過すると、その出射光のジョーンズベクトルは

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_4 &= \mathbf{J}_L \mathbf{E}_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D) \{-\exp[-i(\beta - \gamma)]\mathbf{E}_+ + \exp[-i(\beta + \gamma + \xi)]\mathbf{E}_-\} \quad (4-36)\end{aligned}$$

となる。式(4-36)は、固有偏光がそれぞれ全ツイスト角分の回転と位相遅れを受けたことを表している。この光線がさらに出射側 1/4 波長板を透過すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_5 &= \mathbf{Q}_{\alpha_T + \psi_D} \mathbf{E}_4 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D - \chi_-) \left\{ -\exp[-i(\beta - \gamma)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \exp[-i(\beta + \gamma + \xi)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (4-37)\end{aligned}$$

となり、正負の固有偏光は直交する直線偏光となる。検光子を透過した後は

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_6 &= \mathbf{P}_{\alpha_T + \psi_D + \chi_- + 45^\circ} \mathbf{E}_5 \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D - \chi_- - 45^\circ) \{-\exp[-i(\beta - \gamma)] + \exp[-i(\beta + \gamma + \xi)]\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4-38)\end{aligned}$$

のように、検光子偏角方向の直線偏光となる。光検出器で検出される光強度は

$$\begin{aligned}I &= |\mathbf{E}_6|^2 \\ &= \frac{1}{2} [1 - \cos(2\gamma + \xi)] \\ &= \frac{1}{2} [1 - \cos(2\gamma + \xi_0 + 2\pi f_m t)]\end{aligned} \quad (4-39)$$

と計算される。このように、検出した光強度は EO に与えた信号と同じ周波数で正弦的に変化し、その位相をロックインアンプで検出すると、正負固有偏光での固有値の位相の差である 2γ が測定できることが分かる。共通光路干渉計では、外乱の影響を受けづらいので、高精度な測定が可能となる。しかしながら、各固有偏光のみによって発生する位相遅れは測定できない。

共通光路干渉計を用いた測定により得られた固有値位相項の絶対値 γ を図 4-14 に示す。黒丸は共通光路干渉計による測定結果であり、白抜き三角は、前項でのマッハツェンダー干渉計による測定結果から計算された γ の値である。両者は良く一致している。この結果から、固有値のみを測定する目的では、共通光路干渉計は非常に有効な方法といえる。なぜなら、マッハツェンダー干渉計によるものと比較して、光学系が簡単で、かつ測定環境に左右されない安定した測定が可能だからである。ただし、液晶素子による固有偏光の位相変調量そのものを測定しているのではないことに注意が必要である。

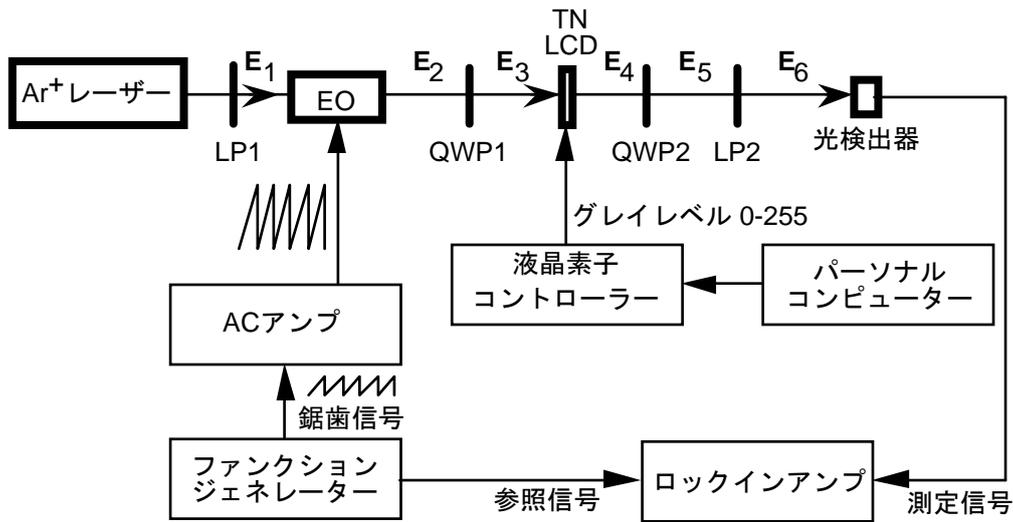


図 4-13 液晶素子の固有値の位相差を測定する共通光路型干渉計測定システム

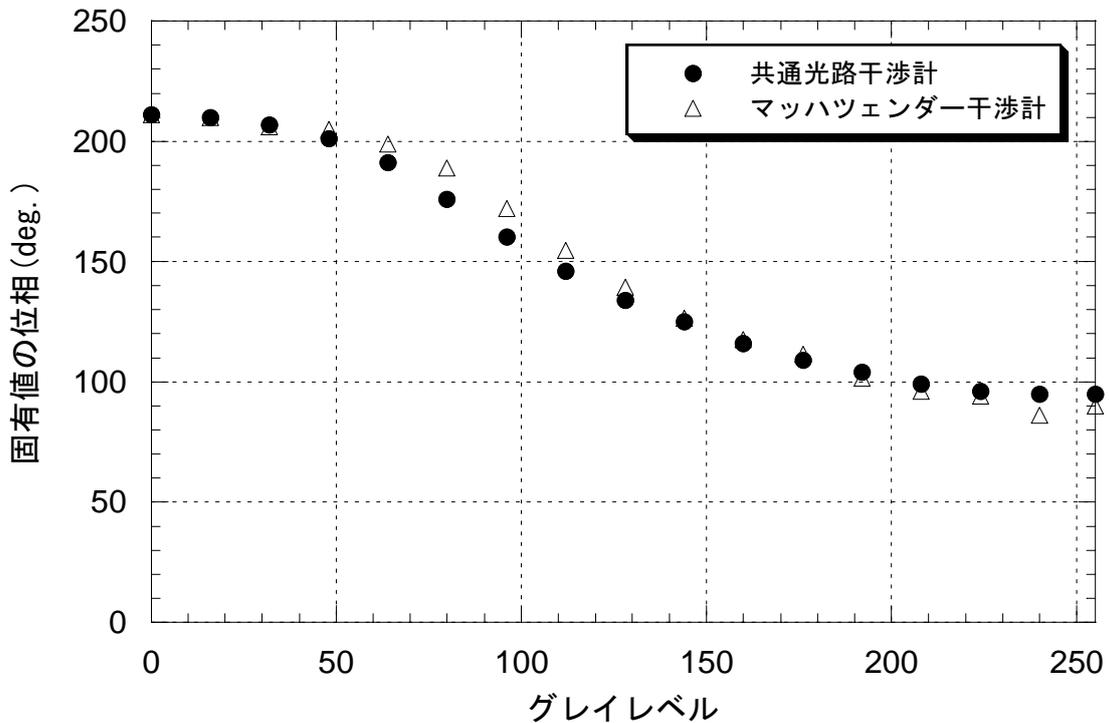


図 4-14 ソニー製液晶素子の固有値の位相

4.3.4 平均化固有偏光に対する考察

4.3.2 項の結果より、液晶素子への入出力光として負固有偏光を用いると、透過率の変化が比較的少なく、大きな位相変調が可能であるという良好な位相変調特性が得られることが分かった。固有偏光は全複屈折量に依存するので、液晶素子に与えるグレイレベルによって変化する。そこで最も良好な位相変調特性を得るためには、平均的な固有偏光を用いる必要がある。どのような

平均を行えば良いかという問題は、液晶素子のジョーンズ行列に角パラメーターを用いることで、比較の見通しの良い考察を行うことができる⁴³⁾。

角パラメーターを用いた液晶素子のジョーンズ行列は、

$$\mathbf{J}(\theta, \phi) = \exp(-i\beta_T) \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D) \mathbf{M}(\theta, \phi) \mathbf{R}(\psi_D) \quad (4-40)$$

と書くことができる。ただし、主行列は

$$\mathbf{M}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta - i \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta + i \sin \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (4-41)$$

である。式(4-41)は、第2章で微分モデルに対して導いた式であるが、実は全てのモデルにおいてこのような角パラメーター表示が可能である。角パラメーターとそれぞれのモデルでのパラメーターの関係は、例えば線型モデルでは

$$\theta = \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_T^2} \quad (4-42)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\alpha_T}{\beta_T} \quad (4-43)$$

となる。このように角パラメーターを用いると、モデルによらない一般的な議論が可能となるので便利である。さらに以下で見るように、角パラメーターを用いた方が、固有偏光の表式が簡単になる。

式(4-41)で表される液晶素子主行列の固有値と固有ベクトルを求める。4.3.1項と同様に、固有値を μ_{\pm} として固有方程式

$$\mathbf{M} \mathbf{E}_{\pm} = \mu_{\pm} \mathbf{E}_{\pm} \quad (4-44)$$

を解くと

$$\mu_{\pm} = \exp(\pm i\theta) \quad (4-45)$$

$$\mathbf{E}_{+} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\phi}{2} \\ i \cos \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \quad (4-46)$$

$$\mathbf{E}_{-} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ -i \sin \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \quad (4-47)$$

が得られる。このように角パラメーターが固有値と固有ベクトルに分離され、表式が簡単になることが分かる。

液晶素子に与えるビデオ信号のグレイレベルを変化させた時、角パラメーターがどのように変化するかを考える。全複屈折量の最小値を β_{\min} 、最大値を β_{\max} とする。この時、角パラメーターの変化する範囲は

$$\sqrt{\alpha_T^2 + \beta_{\min}^2} \cong \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max} \cong \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_{\max}^2} \quad (4-48)$$

$$\tan^{-1} \frac{\alpha_T}{\beta_{\max}} \cong \phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max} \cong \tan^{-1} \frac{\alpha_T}{\beta_{\min}} \quad (\alpha_T > 0 \text{ の時}) \quad (4-49)$$

$$\tan^{-1} \frac{\alpha_T}{\beta_{\min}} \cong \phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max} \cong \tan^{-1} \frac{\alpha_T}{\beta_{\max}} \quad (\alpha_T < 0 \text{ の時}) \quad (4-50)$$

となる．ただし各式において両端の近似は，線型モデルにより式(4-42)，(4-43)を用いて角パラメーターを物理パラメーターに変換した場合の表式である．これらの関係を図示したのが図 4-15 である．式(4-48)をみると，全複屈折量 β_T が単調に増加するとき，角パラメーター θ も単調に増加することが分かる．一方角パラメーター ϕ は，全ツイスト角の正負によって，単調に減少するか増加するかが決まる．いずれの場合でも，全複屈折量がグレイレベルに対して単調に変化するならば，角パラメーターもグレイレベルに対して単調に変化する．角パラメーターの測定結果の一例は図 3-9 に示されているが，セイコーエプソン製液晶素子ではグレイレベルの増加と共に全複屈折量が増加し，また全ツイスト角が正なので，グレイレベルに対して角パラメーター θ は単調に増加し， ϕ は単調に減少している．

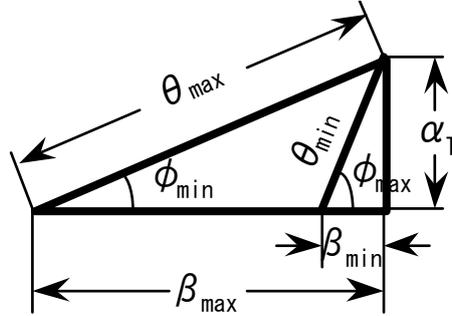


図 4-15 線型モデルにおける角パラメーターと物理パラメーターの関係

平均化固有偏光を $\bar{\mathbf{E}}_{\pm}$ で表し，その時の角パラメーターを $\bar{\phi}$ とする．式(4-46)，(4-47)から

$$\bar{\mathbf{E}}_{+} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\bar{\phi}}{2} \\ i \cos \frac{\bar{\phi}}{2} \end{pmatrix} \quad (4-51)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{-} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\bar{\phi}}{2} \\ -i \sin \frac{\bar{\phi}}{2} \end{pmatrix} \quad (4-52)$$

となる．あるグレイレベル G での固有偏光を $\mathbf{E}_{G\pm}$ と書き，正負の平均化固有偏光をあるグレイレベルでの固有偏光の一次結合として表すと

$$\bar{\mathbf{E}}_{+} = \cos \hat{\phi} \mathbf{E}_{G+} + \sin \hat{\phi} \mathbf{E}_{G-} \quad (4-53)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{-} = -\sin \hat{\phi} \mathbf{E}_{G+} + \cos \hat{\phi} \mathbf{E}_{G-} \quad (4-54)$$

と書けるが，簡単な計算から

$$\hat{\phi} = \frac{1}{2}(\phi_G - \bar{\phi}) \quad (4-55)$$

となることが分かる．ただし， ϕ_G はそのグレイレベル G での角パラメーターである．これらの平均化固有偏光を入射面ダイレクタ ϕ_D だけ回転させ，グレイレベル G で駆動されている液晶素子 \mathbf{J}_G に入射すると，出射光のジョーンズ行列はそれぞれ

$$\mathbf{J}_G \bar{\mathbf{E}}_+ = \exp(-i\beta_G) \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D) \left[\exp(i\theta_G) \cos \hat{\phi} \mathbf{E}_{G+} + \exp(-i\theta_G) \sin \hat{\phi} \mathbf{E}_{G-} \right] \quad (4-56)$$

$$\mathbf{J}_G \bar{\mathbf{E}}_- = \exp(-i\beta_G) \mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D) \left[-\exp(i\theta_G) \sin \hat{\phi} \mathbf{E}_{G+} + \exp(-i\theta_G) \cos \hat{\phi} \mathbf{E}_{G-} \right] \quad (4-57)$$

となる．ここで， β 及び θ についた添え字の G は，それぞれのグレイレベルにおける値であることを示す．これらの出射光から， $\alpha_T + \phi_D$ 回転した平均化固有偏光を検出すると，その複素振幅透過率はそれぞれ

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{G+} &= (\mathbf{J}_G \bar{\mathbf{E}}_+) \cdot [\mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D) \bar{\mathbf{E}}_+]^* \\ &= \exp(-i\beta_G) \left[\cos \theta_G + i \cos 2\hat{\phi} \sin \theta_G \right] \end{aligned} \quad (4-58)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{G-} &= (\mathbf{J}_G \bar{\mathbf{E}}_-) \cdot [\mathbf{R}(-\alpha_T - \psi_D) \bar{\mathbf{E}}_-]^* \\ &= \exp(-i\beta_G) \left[\cos \theta_G - i \cos 2\hat{\phi} \sin \theta_G \right] \end{aligned} \quad (4-59)$$

となる．ただし，透過率の計算に内積を用いた．これらの複素振幅透過率から，強度透過率 $I_{G\pm}$ と位相遅れ $\delta_{G\pm}$ を求めると

$$I_{G+} = I_{G-} = 1 - \sin^2(\phi_G - \bar{\phi}) \sin^2 \theta_G \quad (4-60)$$

$$\delta_{G\pm} = \beta_G \mp \tan^{-1} \left[\cos(\phi_G - \bar{\phi}) \tan \theta_G \right] \quad (\text{複合同順}) \quad (4-61)$$

が得られる．式(4-60)，(4-61)は，あるグレイレベルで駆動されている液晶素子に，そのグレイレベルに対応した固有偏光ではなく，平均化固有偏光を入射し，検出したときの透過率と位相遅れを表している．グレイレベルに対応した固有偏光を入射したときの透過率は1であり，位相遅れは $\beta_G \mp \theta_G$ であるから，式(4-60)の右辺第2項及び式(4-61)の \cos の項が，平均化固有偏光を用いたために生じた変化分であることが分かる．具体的には透過率はやや減少し，位相変調量は僅かながら小さくなる．

式(4-60)より明らかに， $\phi_G = \bar{\phi}$ の時透過率は最大となる．また式(4-60)を $\bar{\phi}$ で微分すると

$$\frac{dI_{G\pm}}{d\bar{\phi}} = \sin \left[2(\phi_G - \bar{\phi}) \right] \sin^2 \theta_G \quad (4-62)$$

であり，

$$\frac{dI_{G\pm}}{d\bar{\phi}} = 0 \quad (4-63)$$

となるのは

$$\phi_G - \bar{\phi} = \frac{m\pi}{2} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (4-64)$$

あるいは

$$\theta_G = m\pi \quad (m=0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (4-65)$$

の時である。それぞれの角パラメーターの範囲を考えるとまず

$$|\phi| \leq 90^\circ \quad (4-66)$$

であり、 ϕ の正負は全ツイスト角によってのみ定まり、グレイレベルの変化によって符号が変わることがないから、式(4-64)が成り立つのは $m=0$ の場合のみであることが分かる。また $\theta_G > 0$ であるから、

$$0^\circ < \theta_G < 180^\circ \quad (4-67)$$

の範囲では式(4-65)は成り立たない。よって、式(4-67)の範囲において、式(4-60)で表される透過率は、 $\phi_G = \bar{\phi}$ の時最大値 1 をとり、 $|\phi_G - \bar{\phi}|$ が大きくなるにしたがって単調に減少することが分かる。したがって、透過率の変動を最小にするためには、角パラメーター ϕ が最大及び最小の時に透過率が等しくなるようにすれば良い。すなわちその条件は

$$\sin^2(\phi_{\min} - \bar{\phi}) \sin^2 \theta_{G_{\min}} = \sin^2(\phi_{\max} - \bar{\phi}) \sin^2 \theta_{G_{\max}} \quad (4-68)$$

となる。ただし G_{\min} , G_{\max} はそれぞれ角パラメーター ϕ が最小値、最大値をとるときのグレイレベルである。角パラメーター θ が式(4-67)の範囲にあるのは、 90° ツイストの液晶素子の場合、全複屈折量が約 156° 以下の場合である。セイコーエプソン製の液晶素子は式(4-67)を満たしている。全複屈折量が約 156° 以上になるときは、透過率は角パラメーター θ が式(4-65)を満たすときに極小値をとるため、グレイレベルに対する透過率の変化は波打つことが予想される。実際表 3-6 によれば、ソニー製の液晶素子では、波長が短くなると式(4-67)の条件を満たさなくなるため、図 4-10 のように、平均化固有偏光の入出力に対して透過率は波打っている。

式(4-68)は平均化固有偏光を求める上で、十分実用的な指針を与えると考えられる。すなわち、式(4-68)により角パラメーターの平均値を求め、それにより平均化固有偏光を決定してその偏光状態の光を入出力光に用いれば、最も透過率変化が少なく、位相変調量の大きな状態になるので、液晶素子が理想的な空間光位相変調素子となる。

4.4 第4章のまとめ

本章では、ツイステッド・ネマティック型液晶素子を用いて位相のみの変調を実現させるため、まず入出力光として直線偏光のみを考えた場合の、光学系の最適化を図った。そして、ジョーンズ計算を用いたシミュレーションと光干渉計を用いた測定結果を比較した。特に、ジョーンズ計算として第2章で構築した線型モデル、単純3層モデル、及び微分モデルを用いた場合のシミュレーション結果と比較し、各モデルの有効性について吟味した。その結果、線型モデルでの位相遅れのシミュレーションは、測定値と比較して測定誤差以上の相違があり、線型モデルで位相変調量を予測すると、常に大きく見積もってしまうことが分かった。単純3層モデルによるシミュレーションでも同様に、位相変調量を大きく見積もってしまう傾向があることが分かった。しかしながらその大きさは測定誤差の範囲内であり、今回の結果のみからモデルの良否を判断することはできない。一方微分モデルを用いた位相遅れシミュレーションは、今回の結果から判断すると非常に正確であり、位相変調特性から光学系の最適化を行う目的において最も優れたモデルであることが分かった。

次に、最大位相変調量を大きくする手段として反射型往復光路での理論的計算と、確認のための測定を行った。その結果、液晶素子を透過した光線が楕円偏光になる場合は、反射する際に回り方が逆になるため、単純には位相変調量が2倍にならないことが分かった。それを解決し、確実に2倍の位相変調量を得る手段として、検光子を用いる方法の有効性を示した。

TN型の液晶素子に、直線偏光した光を、その偏光面が素子の入射面の液晶分子のダイレクタに一致するように入射させた時、その後の光の伝搬については次のような描像が一般的に受け入れられている。それは光の偏光面が光導波路効果によって螺旋状の液晶分子配列に沿って直線偏光状態を保持したまま回転し、出射面の液晶分子ダイレクタ方向に直線偏光した光が出射するというものである。この描像は、液晶層が十分に厚く、全複屈折量が大きい場合にはほぼ正しい。しかしながら今回我々が用いた液晶素子のように、全複屈折量が1波長以下という薄い素子の場合には、出射光は楕円偏光となってしまうのでこの描像は成り立たない。このような場合には、入射光としてどのような偏光状態にある光を用いれば、最も良く位相変調を行うことができるかという一般的な議論を行うことは難しい。また、往復光路にする場合も、必ずしも位相変調量が2倍になると期待できない。

最後に、液晶素子の固有偏光を用いた位相変調について調べた。その結果、負固有偏光を入射し、検出すると、透過率変動が少なく、位相変調量の大きな光学系を構築できることが分かった。

一般的には、入出力光を直線偏光に限定するより、固有偏光を用いた方がより良い位相変調特性が得られるとは限らない。例えば本文では示していないが、セイコーエプソン製の液晶素子を用いて、入出力光に負固有偏光を用いた場合の透過率及び位相遅れのシミュレーションを行うと、透過率変動が10%以下で、最大位相変調量が 106° という結果が得られる。これを直線偏光入出力の時の結果と比較すると、透過率変動については約1/4に減少しており、特性が向上したといえるが、最大位相変調量については 65° ほど小さくなっており、実用上十分とはいえない位相変調しか行えなくなることを意味している。

このように、TN型液晶素子を位相のみの空間光変調素子として用いるための光学系の最適化は、今のところ普遍的に最良といえる方法が見つかっておらず、ケースバイケースで対応してい

るのが現状である。液晶素子への入出力光として、一般的楕円偏光まで拡張することも考えられるが、その有効性は未知であり今後の課題といえる。ただ、所望の楕円偏光を発生、あるいは検出するためには、1/4 波長板のような位相素子が必要となるので、位相素子が高価であることと、液晶素子全面を覆うような大きな位相素子を得ることが困難なことを考え合わせると、種々の応用においては直線偏光のみの光学系による利用が便利と考えられる。

第5章 液晶空間光位相変調素子の応用

5.1 はじめに

本章では、TN型液晶素子を空間光位相変調素子として用いた応用例を述べる。

5.2節では、動画ホログラフィーへの応用を目指した研究について述べる。ホログラフィーは、その基本原理が提案されてから既に半世紀以上が経過し、理論的な枠組みはほぼ確立していると言ってよい。しかしながら応用面においては、数多くの提案がなされているにもかかわらず、クレジットカードの偽造防止用ステッカーに代表されるセキュリティの分野、及びバーコードリーダーに組み込まれているホログラムスキャナー等のホログラム光学素子を除いて産業的には成立していない。特にホログラフィーの最大の特徴である3次元像の表示に関しては、美術館等で芸術家の作品を鑑賞する、あるいは小規模に販売されている等の他は、大衆の目に触れる機会がほとんどないのが現状である。

ホログラフィーの3次元表示技術としての応用面が発展しない一つの理由は、ホログラム撮影の困難さにある。ホログラムの撮影には通常、暗室、除振台及びレーザー光源が必須であり、一般家庭やオフィス内、あるいは屋外での撮影は困難である。架空物体から干渉縞を計算する計算機ホログラムに関しては、オフィス内で手軽に3次元像のハードコピーを作製することを目指したホログラムプリンターがいくつか提案されており⁷¹⁻⁷³⁾、近い将来これが製品化されれば、静止画ではあるがホログラムが3次元表示媒体として一般に普及する第一歩となろう。

応用面が発展しないもう一つの理由は、ホログラムがその現像、定着に時間がかかり、高速性に欠けることである。そのため、静止画像では相当程度普及する技術が完成しても、その技術の延長線上で動画ホログラフィーを実現できるわけではない。2次元画像技術は、写真、映画、テレビジョンといったように、静止画像、現像を要する動画像、実時間映像という発展を遂げた。ホログラフィーを用いた3次元表示技術は、今まさに実時間映像技術としてのスタートラインに立ったところであり、テレビジョン技術のような飛躍的発展は今後の研究開発に委ねられているといった段階にある。特に高速性の欠点の克服は、3次元表示分野のみならず、光学的情報処理分野等においても新たな産業分野を切り開く技術として切望されている。

空間光変調素子を用いたホログラフィックな3次元動画表示に必要な周辺技術を展望する。撮影技術に関して言えば、実時間で3次元物体の干渉縞を記録する技術は今のところ存在しない。そのため当面は、計算機ホログラムの表示に限られる。3次元コンピューターグラフィクスによって作成された物体の他、3次元CADを用いた設計物、干渉計等を用いた形状計測の測定結果、X線CT、MRI等で取得した医用断層画像等の3次元情報から干渉縞を計算することは可能であり、解像度を制限する等の一定の条件下ではその計算時間はほぼ実時間に近づいている。

ホログラムの情報量は、後述するように例えば大きさ100mmの物体では、1静止画当たり100ギガビット(10¹¹bit)程度となる。それをビデオレート(30フレーム毎秒)で送信することを考えると、送信レートはテラビット毎秒(10¹²bit/s)を超える。この情報量は膨大であり、最近の情報通信技術の飛躍的発展を考えても、現実的に保存・伝送が可能な量ではない。よって、縦方向の視差を放棄する等の情報量低減策を講じる必要がある。より小さな物体や奥行きが少ない物体を観察する、あるいは視域を制限することによっても情報量は低減される。このように現状で

は、単純な図形等の 3 次元物体の表示であれば、動画ホログラフィーの周辺技術は既に整っているといえる。将来的には、より複雑な物体や迫力のある映像にも耐えうるような状況になるであろう。

動画ホログラフィーは究極的には、他の方法では実現できないような自然な 3 次元立体像を裸眼で観察できる手段を与えるものと期待される。動画ホログラフィーの実現を目指し、液晶素子を空間光変調素子として用いたホログラフィックな像再生は、これまでもいくつか試みられてきた⁷⁴⁻⁷⁶⁾。しかしながら像の大きさ、画質、視域の広さ等の点で満足すべき結果は得られていない。この原因は主に、現状の液晶素子では、画素ピッチ、画素数、位相変調能力の全てにおいて不足しているためである。したがって、より満足度の高い像再生を行うためには、液晶素子自体の研究開発が不可欠である。本研究では、液晶素子を用いた動画ホログラフィーの実験及び考察を通して、今後開発すべき液晶素子の仕様を明らかにすることを目指した⁷⁷⁾。具体的にはまず、動画ホログラフィーを実現させるために空間光変調素子に要求される性能を、光学的及び情報論的観点から理論的に調べた。次に、現状で入手可能な液晶素子を用いて、フーリエ変換型光学系により 2 次元画像を再生する実験を行い、その画質を評価した。最後に、2 次元画像であるが、動画ホログラフィーを実現したデモンストレーションを行った。

5.3 節では、移動テーブルの運動の直線性を測定する光干渉計の光学系に液晶素子を組み込むことにより、その性能を向上させる方法を提案する。旋盤等の工作機械に使用される移動テーブルでは、その直進性が直接加工精度に影響を及ぼす。そのため、テーブルの横ぶれ量を測定する技術が重要となる。移動テーブルの運動の直線性を測定する方法は様々考えられるが、レーザー光線の直進性を用いた非接触な測定では、テーブルの運動に影響を及ぼすことがないという利点がある。特に、レーザー光線の干渉を利用した測定法を用いれば、より高精度な測定が可能となる。

光干渉計を用いた直線性の測定システムでは既に製品化されたものもあり、例えばヒューレット・パッカード社の干渉計では、空気揺らぎによる誤差を除いて、1m の移動に対し $\pm 0.4 \mu\text{m}$ の精度で測定することができる⁷⁸⁾。他に提案されているシステムでは、移動テーブル上に回折格子を置き、干渉光強度の変化をカウントするもの⁷⁹⁾、ケスタープリズムを用いて移動テーブル上の空間に干渉縞を発生させ、移動テーブルに搭載したセンサーでその干渉縞を検出するもの⁸⁰⁾、移動テーブル上にホログラムを置き、ホログラフィー干渉法によって 2 次元の変位を同時に測定するもの⁸¹⁾、移動テーブル上にバイプリズムを置き、形成される干渉縞を検出するもの⁸²⁾等がある。いずれの場合でも、レーザー光線の光軸をテーブルの移動方向とほぼ平行に設定し、干渉を起こさせるための光学系、あるいは干渉縞を検出するためのセンサーを移動テーブル上に配置する構成となっている。移動テーブルに光学系を配置するものでは、テーブルを中心として、レーザー光源と反対側の端で干渉縞を検出する片道光路のタイプと、反対側には反射鏡あるいはコーナーキューブを配置し、往復光路にして光源と同じ側で干渉縞を検出するタイプが考えられる。

我々は、移動テーブル上に回折格子を配置し、往復光路の光学系によってテーブルの横ぶれ量を測定する干渉計システムを開発した⁸³⁻⁸⁵⁾。5.3 節ではそのシステムの基本原理、測定結果を示し、回折格子を液晶素子に代替することで、どのような性能向上が可能になるかについて検討した結果を述べる。

5.2 動画ホログラフィーへの応用

5.2.1 動画ホログラフィーを実現する光学系

(1) 液晶素子の画素構造と回折角

液晶素子の画素構造を図 5-1 に示す．実験に使用した液晶素子の大きさ，画素数，画素ピッチ等の仕様は表 3-4 に示した通りであるが，本項では典型的な例として平均的な値を用いて議論を進めるため，大きさ $2H=24\text{mm}$ ，画素ピッチ $p=50\ \mu\text{m}$ ，画素数 480 個とする．それぞれの画素を透過する光には，画素内の液晶分子の屈折率変化に応じて位相遅れが生じる．そして隣り合った画素を透過したときに受ける位相遅れ量の差（位相変調量）に応じて回折する．位相差が小さいときには，位相を 1 波長分変化させるために必要な画素数が多くなり，位相変化の空間周波数が小さくなって回折角 θ は小さくなる．逆に位相変化の空間周波数が最大になるのは，隣り合う画素での位相差が 180° の時であり，回折角 θ も最大となる．最大回折角 θ_{\max} は，

$$\sin \theta_{\max} = \frac{\lambda}{2p} \quad (5-1)$$

で計算できる．ここで λ は光の波長である．以下では， $\lambda=0.5\ \mu\text{m}$ として， $\theta_{\max}=0.286^\circ$ (5.00×10^{-3} ラジアン) とする．

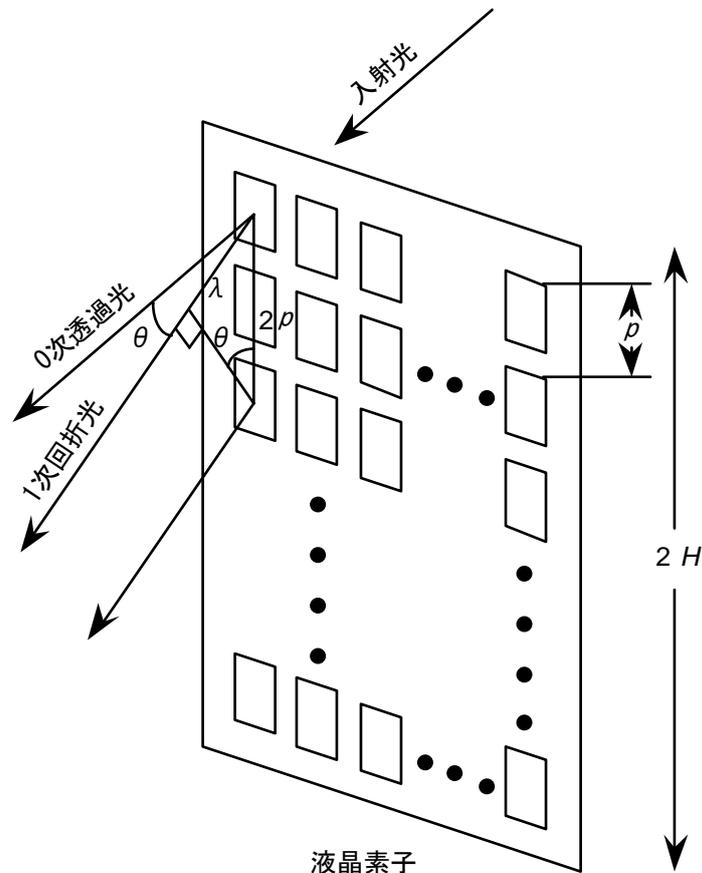


図 5-1 液晶素子の画素構造模式図と透過光の回折

(2) フレネル型光学系での虚像再生

フレネル型光学系を用いて虚像を観察することを考える。ホログラムパターンの描かれた液晶素子を透過して回折した光は、図 5-2 に示すように液晶素子から L_1 の位置に虚像の再生像を結像する。像の大きさを $2W$ 、液晶素子の大きさを $2H$ 、視域を $2G$ 、素子と視点の距離を L_2 とする。簡単のため、像の奥行き方向の大きさは小さいと考える。これらの量は液晶素子による光の回折角 θ を用いて次式で関連づけられる。

$$L_1 \tan \theta = H + W \quad (5-2)$$

$$(L_1 + L_2) \tan \theta = G + W \quad (5-3)$$

$$L_2 \tan \theta = G - H \quad (5-4)$$

仮に、像がただ 1 点のみ ($W=0$) としても、典型的な液晶素子の H 及び θ_{\max} を用いると $L_1=2.4\text{m}$ となり、像は液晶素子からかなり遠方に再生することになる。さらに、最低限この像を両目で観察可能となるよう、視域 $2G$ を両目間隔である 65mm 以上とすると、視点から像までの距離（視距離） L_1+L_2 は、 6.5m 以上必要だということが分かる。像が大きさを持つと L_1 が大きくなるので、例えば大きさ 5mm の 3 次元像を両眼で観察するには、像と観察者の視距離は最低でも 7m になる。これらの距離は、視域 $2G$ が両目間隔ぎりぎりの値に対する計算値であり、顔を左右に振ると少なくとも一方の眼が視域から外れてしまうので両眼立体視はできなくなる。したがって両目を振って像の側面を観察する（すなわち運動視差を得る）には、さらに長い視距離が必要となる。

このように、現状の液晶素子を空間光変調素子として用いることにより、フレネル型光学系でホログラフィックな 3 次元像を観察しようとする時、画素ピッチが大きいため素子による回折角が小さいこと、及び画素数が少ないため素子の大きさが小さいこと、の 2 つの制限により像が小さい割に視距離が長くなりすぎて、実際上有用とはいえないことが分かる。

視距離を短くするにはどのような方法が適当であるかを考える。回折角 θ が小さいとき、 $\sin \theta \doteq \tan \theta \doteq \theta$ と近似すると、式(5-1)を式(5-2)から(5-4)にそれぞれ代入して

$$L_1 = \frac{2p}{\lambda}(H + W) \quad (5-5)$$

$$L_1 + L_2 = \frac{2p}{\lambda}(G + W) \quad (5-6)$$

$$L_2 = \frac{2p}{\lambda}(G - H) \quad (5-7)$$

となる。これらの式から、液晶素子の大きさ $2H$ 、像の大きさ $2W$ 及び視域 $2G$ が一定の場合、液晶素子の画素ピッチ p を小さくするといずれの距離も小さくできることが分かる。あるいは、同じ視距離の時には、 p を小さくすると像や視域が大きくなる。逆に、液晶素子の画素ピッチ p が一定の場合を考えると、式(5-6)が H に無関係なことから分かるように、素子の大きさが大きくなっても視距離 L_1+L_2 は変わらない。この場合、 L_1 と L_2 の比率が変化するだけである。素子の大きさ $2H$ が両目間隔より大きくなった場合には、視域が大きくなることにより像の側面の観察が可能になるが、視距離は小さくならない。このように、単純なフレネル型光学系においては、観察者の目の前（例えばデスクトップ作業を考えると、視距離 $30\text{cm}-50\text{cm}$ ）に 3 次元像を再生するには、液晶素子の画素ピッチを小さくすることが必須である。

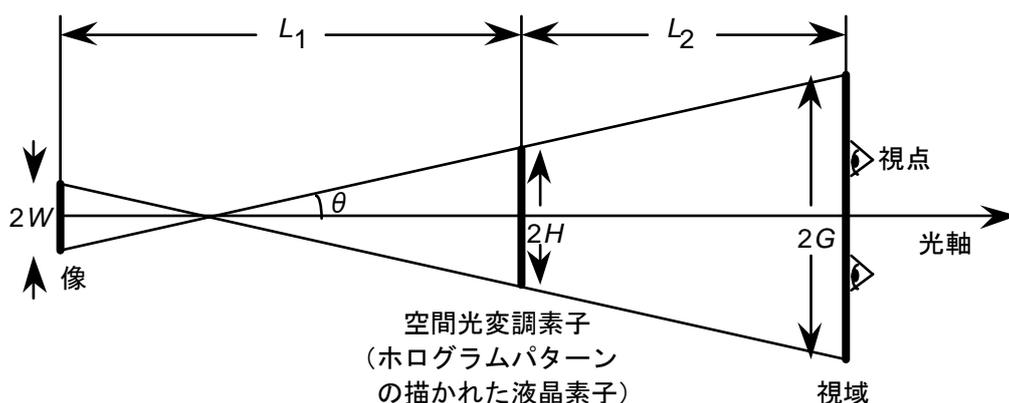


図 5-2 ホログラフィックに虚像を再生するフレネル型光学系

(3) 一般的実像再生光学系

液晶素子の画素ピッチは、今後の技術開発によりある程度までは小さくすることが可能であろう。しかしながら、画素ピッチには実用上の下限があると考えられている。なぜなら、画素ピッチが液晶素子の厚み以下になるような場合、隣り合った画素間でのクロストークが発生することが予想されており、その場合は画素ピッチを小さくしても、素子上で有効な空間周波数はある限界値以上には大きくならないからである。素子の液晶層の厚みには、十分な位相変調量を得るための下限があり、画素ピッチの下限も同程度だと考えられている。

一方液晶素子の大きさ $2H$ に関しては、小さな素子を空間的に並べることによって、大きな素子と同等の機能を持たせることができる。本項では、一般的な実像再生においては、光学系の工夫により画素ピッチを小さくすることと、液晶素子を大きくすること（画素数を増やすこと）が本質的に同等であることを示す。

図 5-3(a)に示すような一般的実像再生の光学系を考える。点 B に焦点距離 f_1 の凸レンズ 1、点 D には焦点距離 f_2 の凸レンズ 2 があり、点 C を共焦点とする共焦点光学系をなしている。この光学系では、レンズ 1 の反対側の焦点付近点 A に置かれた物体は、レンズ 2 のもう一つの焦点 E の周りに実像として再生される。この基本的な共焦点結像光学系を用いて、ホログラフィックな像再生を可能にする光学系が図 5-3(b)である。レンズ 1 とレンズ 2 の間に空間光変調素子を置き、平行光を空間的に変調することにより、点 A の物体から発してレンズ 1 を透過した光波と全く同様の波面を再生すると、その波面はレンズ 2 を透過した後、点 E の周りに 3 次元像を再生する。レンズ 1 及び 2 の口径は空間光変調素子の大きさに比べて十分大きいものとする、このときの視域角 Ω は

$$\tan \Omega = \frac{H}{f_2} \quad (5-8)$$

となり、素子の画素ピッチではなく、用いるレンズの焦点距離に依存した量となる。また、この像を観察する視点 F までの視距離 L は、

$$L = \frac{G}{\tan \Omega} = \frac{f_2 G}{H} \quad (5-9)$$

となる。式(5-9)は視域幅 $2G$ が一定の時、レンズ 2 の焦点距離 f_2 を小さくするか、あるいは空間光変調素子の大きさ $2H$ を大きくすれば、視距離 L が小さくなることを表している。例えば、 $f_2=150\text{mm}$ 、 $2G=65\text{mm}$ 、 $2H=24\text{mm}$ では、 $L=406\text{mm}$ となり、デスクトップ作業の要求値を満たすことが可能となる。

このように光学系の工夫により、画素ピッチが一定のまま視距離を小さくすることができる。しかしながら実際には、焦点距離の短いレンズを使用すると、図 5-3(a)において $f_1 > f_2$ となる場合を考えれば分かる通り、縮小光学系となる。したがって、A 点にある像は E 点に縮小して結像されるので、再生像は小さくなる。また、レンズ収差の影響も大きくなる。したがって、むやみに f_2 を小さくすることはできない。

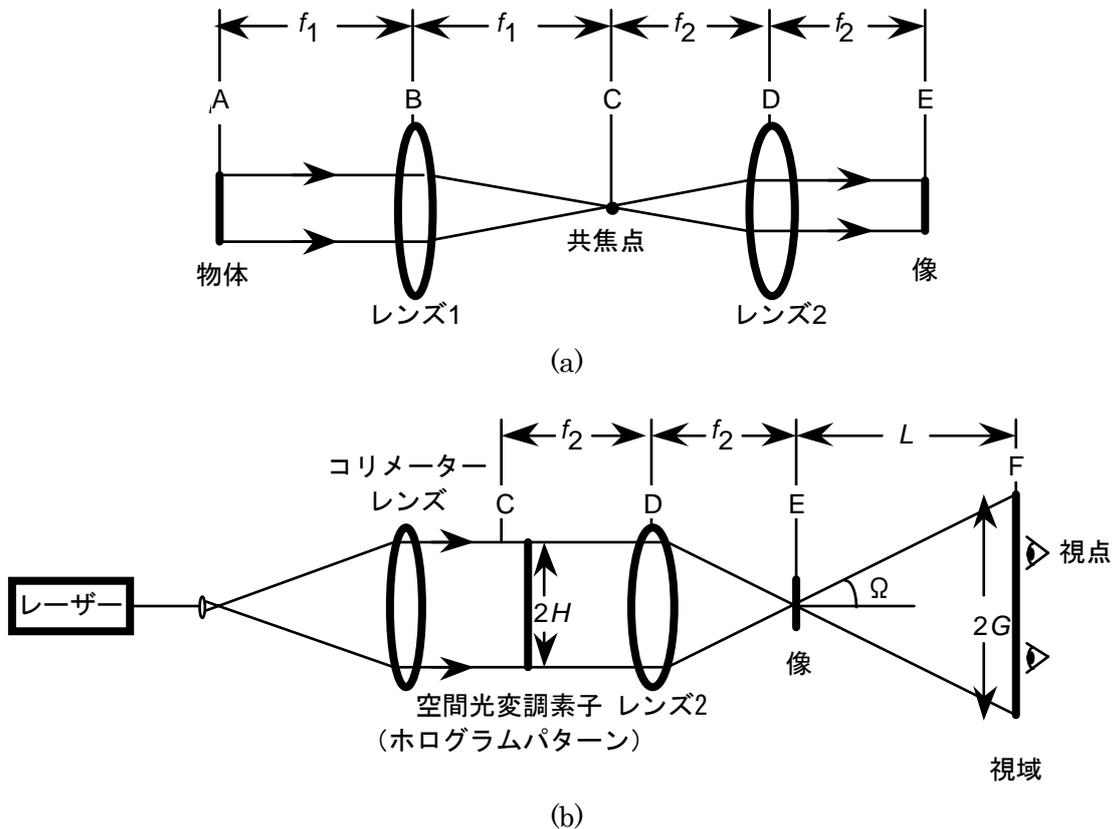


図 5-3 共焦点光学系による実像結像光学系。(a)通常の結像状態。
(b)空間光変調素子を用いたホログラフィックな像再生。

5.2.2 情報論的考察

3次元像再生に必要な情報量 P は、

$$P = (3 \text{次元像上のサンプル点数 } N) \times (\text{視点数 } M) \times (1 \text{点当たりの情報量 } J) \quad (5-10)$$

で見積もることができる⁸⁶⁾。図 5-2 のようなフレネル型の光学系配置を考え、当面色の情報は無視して、明暗の階調のみを考えるものとする。カラー化する場合は、RGB に色分解を行い、3 色光による再生像を重ね合わせれば良い。

3 次元像の見かけの大きさを $2W \times 2W$ 、像から視点までの距離を $L_1 + L_2 = L$ とする。最低限必要な像の解像力として、人間の眼の角分解能 ζ による像上での解像力をとると、物体上で最低限必要なサンプル点数 N は、

$$N = \left(\frac{2W}{L\zeta} \right)^2 \quad (5-11)$$

と見積もることができる。デスクトップで作業する典型的な場合を考え、物体の大きさを $2W=100\text{mm}$ 、物体から視点までの距離を $L=400\text{mm}$ とする。人間の眼の角分解能 ζ を視力 1.0 相当=角度で約 1 分 ($2.9 \times 10^{-4}\text{rad}$) とし、それぞれ(5-11)式に代入すると、 $N=7.4 \times 10^5$ 点が得られる。

視点数 M は、顔を少しでも上下左右に動かした時に異なる像が眼に入るという意味で、おおよそ視域の面積を人間の瞳の面積で割った量と考えることができる。すなわち視域を横 a 、縦 b とし、瞳の半径を r とすれば、

$$M = \frac{ab}{\pi r^2} \quad (5-12)$$

となる。観察者の両目間隔を 65mm 、物体を異なる方向からのぞき込むための目の位置の変化が左右、上下とも 80mm とすれば、視域は横 $225\text{mm} \times$ 縦 160mm となる。人間の瞳の直径を 3.4mm とすれば、視点数 M は約 4000 個分必要と計算される。

1 点当たりの情報量 J はまず、シャノンの標本化定理により、2 次元的に 1 点を再生するには最低 4 標本点が必要である。さらにホログラムの冗長性により、その 4 倍の標本点が必要となる⁸⁶⁾。この冗長性は、像再生時に 0 次透過光と物体光を分離するために必要になる。最後に、明暗の階調を再生するための情報量が必要となる。透過型の位相回折格子の場合、16 レベルの格子にすると最大 1 次回折効率が 98.7% となるので⁴⁾、十分な回折光量が得られるという意味で 1 標本点当たりのレベル数はこの値を採用し、最低限 4 ビットと考える。もちろんこの階調数が多くなるほど再生像の画質は向上する。1 点当たりの情報量は、これらの値を掛け合わせるにより

$$J = 4^3 = 64 \quad (5-13)$$

となる。

以上をまとめると、3 次元像再生に必要な情報量 P は、

$$P = \frac{4abW^2J}{\pi(rL\zeta)^2} \quad (5-14)$$

となり、上記の例では約 1.9×10^{11} ビットとなる。

3 次元動画像を伝送するには、この情報量をビデオレート (毎秒 30 コマ) で送信するとして、およそ $5.6 \times 10^{12}\text{bps}$ (bit per second) の伝送レートが必要になる。さらに、カラー化する際に、RGB の信号を独立に送信すると、この 3 倍の伝送レートが必要となる。この伝送レートは現在実現されていないので、当面は情報量の圧縮が重要となる。たとえばもし縦方向の視差を放棄すると、視点数は一次元的に考えれば良いので $M=a/2r$ となり、情報量は約 1/60 に低減される。さら

に、上記の計算では人間の眼の角分解能を、視力 1.0 に相当する 1 分としたが、例えばこれを視力 0.3 に相当する角分解能で満足することにすれば、1 桁程度情報量を低減することができる。このような情報量の低減により、情報量 P は約 36MB、伝送レート約 3.2Gbps となる。平面動画像の保存メディアとして現状で一般的な DVD (Digital Versatile Disk) は、記録容量が 4.7GB、標準転送速度は 11Mbps なので、容量的には数分の動画像しか記録できず、また転送速度は 2 桁以上不足していることが分かる。したがって、ホログラフィックな 3 次元動画像の再生が手軽に行えるようになるには、さらなる情報量の低減が必要である。

5.2.3 画質に関する考察

(1) 像再生実験と再生像の特徴に関する考察

現状で入手可能な液晶素子を空間光変調素子として用いて、実際にどの程度の画質の画像を再生できるかを調べるため、フーリエ変換型の光学系を用いて 2 次元画像を再生する実験を行った。

実験に用いた光学系を図 5-4 に示す。これは、図 5-3(b)において、共焦点上の点 C に液晶素子を置いた配置である。実験には、表 3-4 に示した仕様を持つセイコーエプソン製の液晶素子を用いた。液晶素子は偏光子と検光子に挟まれており、それぞれの透過軸偏角は、直線偏光を用いて位相のみの変調が可能な、 $(30^\circ, 85^\circ)$ とした。液晶素子上にホログラムパターンを描き、拡大されて平行光となったレーザー光を照射すると、レンズの焦点面に 2 次元画像が再生されるので、それをスクリーン上に投影して観察する。ホログラムパターンは、再生画像を 2 次元フーリエ変換した時の位相画像である。文字 A を高速フーリエ変換 (FFT) した時の位相画像の例を図 5-5 に示す。図 4-5 に示したように、この液晶素子では波長 633nm の He-Ne レーザー光に対して 169° までの変調しか行うことができなかったため、連続的階調での駆動はせず、位相画像を 2 値化し、グレイレベル 0 と 255 の 2 値で駆動した。

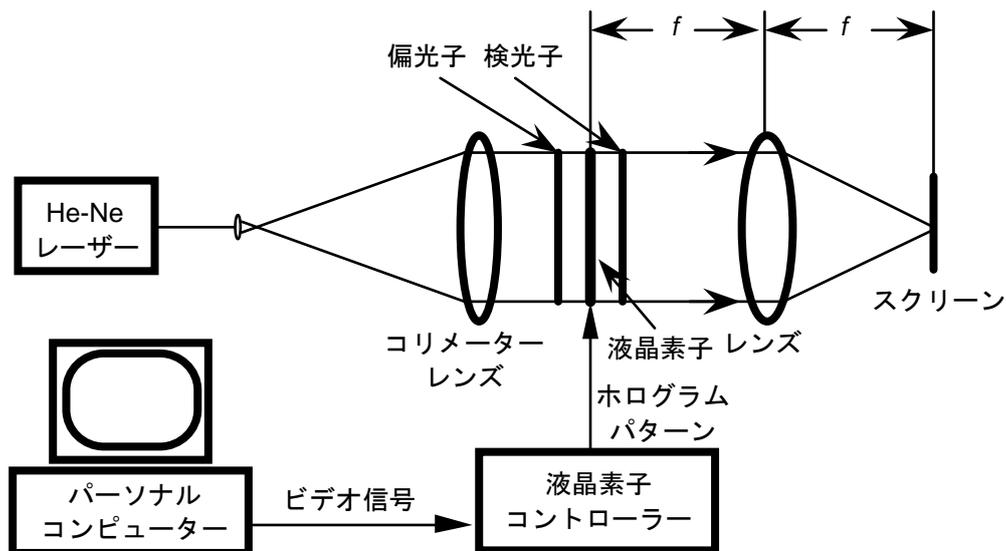


図 5-4 液晶素子を用いたフーリエ変換型ホログラムの像再生光学系

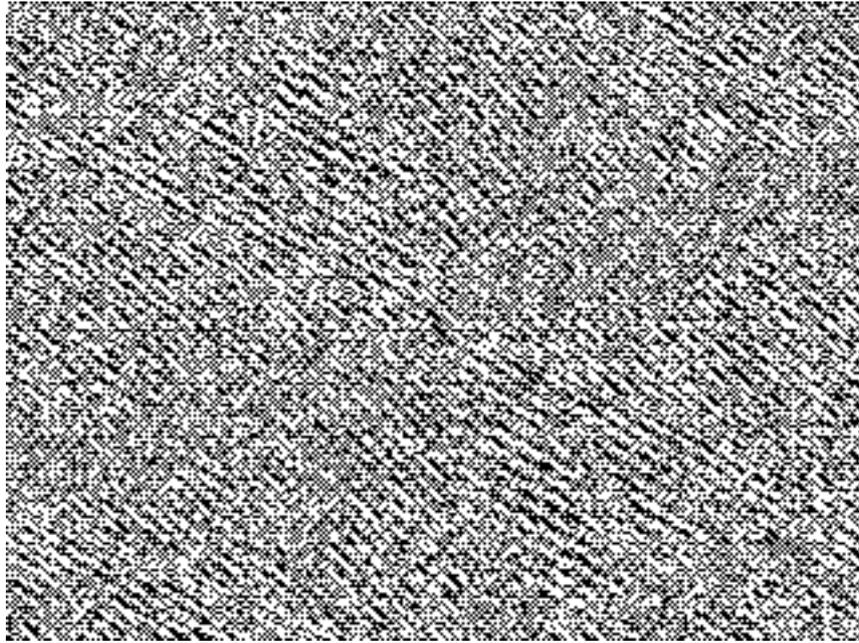


図 5-5 文字 A を高速フーリエ変換した位相画像。
位相値をグレースケールに変換して表している。

文字 A の再生像を図 5-6 示す。上段中央が 0 次の再生像であり、その他は画素の格子構造によって生じる高次回折像である。各回折像の中央にある輝点は、像再生に寄与しない透過光がレンズによって焦点面上に集光したものである。図 5-6 再生像には、次の 3 つの特徴が認められる。

- ① 像の縁が強調されている。
- ② 中央の輝点を挟んで点対象な位置に像が現れている。
- ③ ノイズが非常に多い。

①の原因は、フーリエ変換の位相画像のみをホログラムパターンとして用いて再生したことによる。原画像の空間周波数分布は一般に、図 5-7 実線で示すように、低周波数側で大きく、高周波数になるにつれて小さくなる。位相画像のみを用いると、同図に波線で示すように、素子の解像度まではある程度の透過率があるが、それ以上の空間周波数では透過率 0 となる。その結果低周波数側では液晶素子を透過する光量が不足し、高周波数側では過大となるため、結果的に画像に対してハイパスフィルターの効果が加わって、像の縁が強調されるようになる。この効果をなくするためには、フーリエ変換画像の振幅情報を使用すれば良いが、単独の空間光変調素子で振幅と位相を同時にコントロールすることはできないので、2 個別々の素子を用いる必要がある⁷⁴⁾。また振幅情報を補償する方法として他に、透過率フィルターを用いる（アボダイゼーションと呼ばれる³⁵⁾）、像にランダム位相を加える（キノフォームと呼ばれる⁸⁷⁾）、振幅画像に基づいて、位相画像の変調度を変化させる方法⁸⁸⁾などが考えられている。

②は、その位相画像をさらに 2 値化したことに起因している。位相が 0° と 180° の 2 値に量子化されているため、再生像とその複素共役像の回折効率が全く同じとなり、中心の輝点を挟んで対称な位置に画像が表れている。共役像や中心の輝点への光量を減らし、再生像を形成する光量を増やすには、液晶素子へ書き込む位相の量子化数を増やせばよい。

③のノイズの原因には、光学系に付着したごみや多重反射等による不要な散乱光、スペckル

ノイズ等の他，ホログラムパターンとしての位相画像の量子化誤差が考えられる．スペックルノイズを低減させるため，回転スクリーンを用いた実験を行ったが，画質に大きな改善は見られなかった．2 値化した位相画像は本来 0° と 180° で位相変調すべきところ，今回の実験ではほぼ 0° と 169° の位相変調となっているため，この量子化の誤差によってノイズが生じている可能性がある．量子化誤差に対する詳細な解析を含め，ノイズの低減は今後の検討課題である．

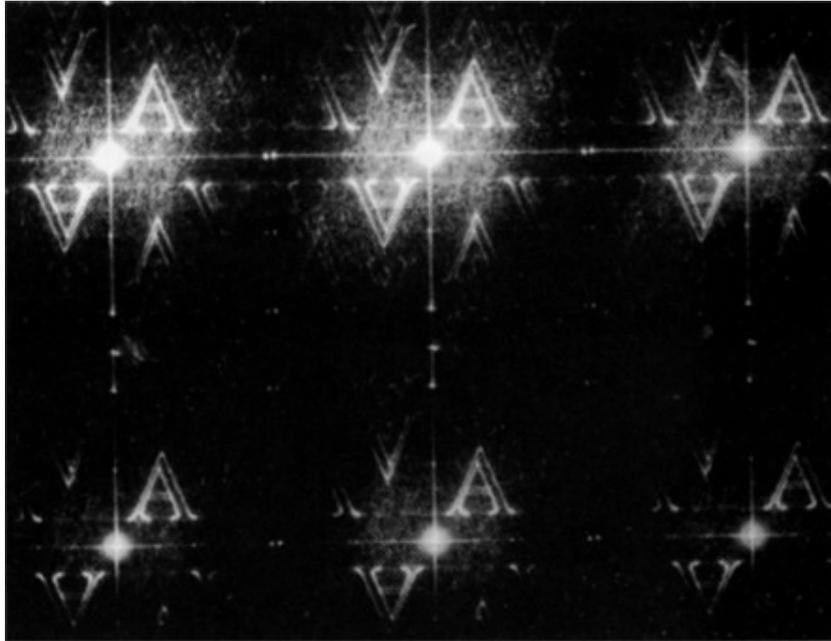


図 5-6 図 5-4 の光学系で得られたスクリーン上の再生像．液晶素子の画素構造のため，多くの高次回折像が現れる．上段中央が 0 次回折像．

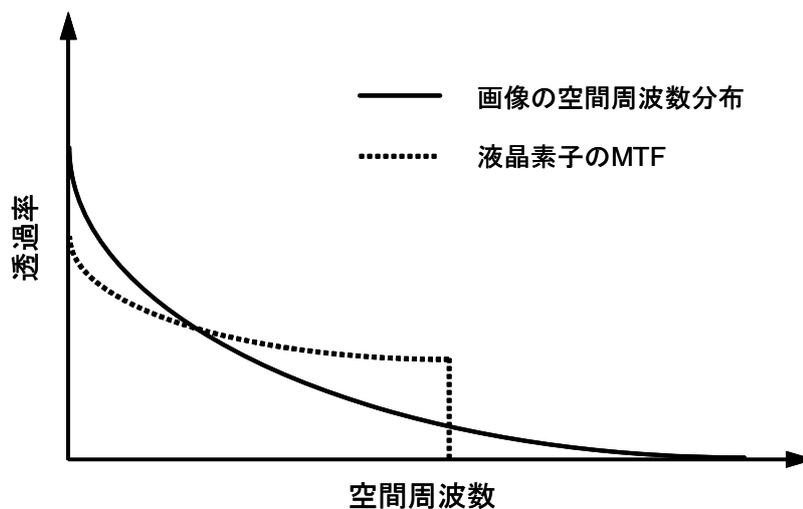


図 5-7 原画像の空間周波数分布と，像再生に用いた液晶素子の MTF(Modulation Transfer Function).

(2) 解像線数に関する考察及び実験

画質を評価するには、視野の一辺当たり何本の線を分解できるかという量である解像線数を用いると便利である。図 5-8 に示す通り、光軸を z 軸にとり、空間光変調面に u, v 軸、再生像面に x, y 軸をとったフーリエ変換型光学系を考える。空間光変調素子の大きさを横 $2H_u$ 、縦 $2H_v$ とする。空間光変調素子には、最大空間周波数 $1/(2p_u)$ 、 $1/(2p_v)$ までのホログラムパターンを書き込むことが可能である。ここで p_u, p_v はそれぞれ横、縦方向の画素ピッチである。再生像面での分解能 $\delta x, \delta y$ は、空間光変調素子による回折限界に等しくなり、

$$\begin{cases} \delta x = \frac{\lambda f}{2H_u} \\ \delta y = \frac{\lambda f}{2H_v} \end{cases} \quad (5-15)$$

となる。ここで、 λ は波長、 f はレンズの焦点距離である。一方再生像の大きさ W_x, W_y は、ホログラムパターンの最大空間周波数に比例する。すなわち、

$$\begin{cases} 2W_x = \frac{\lambda f}{2p_u} \\ 2W_y = \frac{\lambda f}{2p_v} \end{cases} \quad (5-16)$$

となる。解像線数 N_x, N_y はこれらの量の比で表され、

$$\begin{cases} N_x = \frac{2W_x}{\delta x} = \frac{H_u}{p_u} \\ N_y = \frac{2W_y}{\delta y} = \frac{H_v}{p_v} \end{cases} \quad (5-17)$$

となる。式(5-17)によれば、再生像の最大解像線数は素子の一辺当たりの画素数の 1/2 となるので、セイコーエプソン製の液晶素子では、最大解像線数は横 240 本、縦 220 本が期待される。しかしながら図 5-6 の再生像を見ても分かるとおおり、実際の解像線数はそれよりかなり少なくなっている。そこで図 5-4 の像再生光学系を用いて実験を行い、解像線数が少なくなる原因を調べた。

まず、再生像の分解能を調べるため、スポット状の輝点を再生させ、レーザービームアナライザ (Spiricon 社製 LBA-100i) を用いて像面での輝点の直径を測定した。測定は、焦点距離 300mm のレンズ S と、焦点距離 800mm のレンズ T の 2 種類のレンズで行った。光源としては、波長 633nm の He-Ne レーザーを用いた。測定結果を表 5-1 に示す。レンズ S は焦点距離 300mm なので、液晶素子の大きさの開口に対する回折限界は $9.5\mu\text{m}$ と計算される。スポット径は回折限界程度の大きさとなることが期待されたが、測定の結果、単独のスポットを再生したとき、スポット径はその 3.2 倍の $30\mu\text{m}$ に広がっていることが分かった。複数のスポットを再生すると、スポット径はさらに広がって $50\sim 60\mu\text{m}$ となった。焦点距離 800mm のレンズ T を用いて同様の実験を行うと、理論上の回折限界 $25.3\mu\text{m}$ に対し、単独スポット径は 1.8 倍の $45\mu\text{m}$ まで広がっており、複数の点像でのスポット径はレンズ S と同じく $50\sim 60\mu\text{m}$ であった。測定例として、1 つの点像及び $60\mu\text{m}$ 離れた 2 つの点像を再生し、像面を幅 $10\mu\text{m}$ のスリットで走査したときの透過光強度を図 5-9 に示す。2 点を再生した時の方が、明らかにスポットのピークが低くなると共に、スポット径が大きくなっていることが分かる。

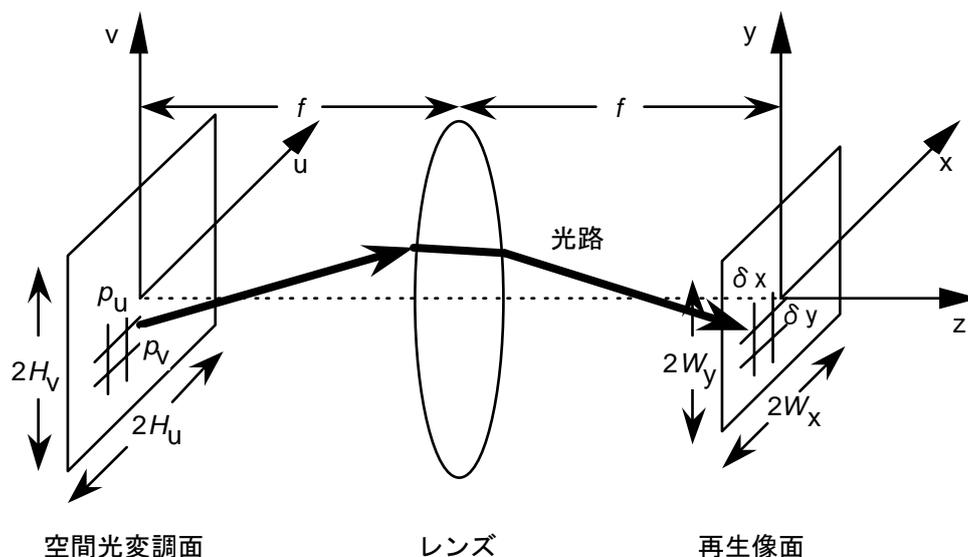


図 5-8 空間変調素子の大きさ、画素ピッチと再生像の大きさ、分解能の関係。

これらの実験結果から、再生像の分解能が理論値より低下する原因として次の2つが考えられる。第1の原因は、レンズ収差の影響である。レンズSとレンズTは共に同一メーカーの2枚張り合わせレンズなので、品質上は同等であると考えられる。しかしながら焦点距離が異なるため、実効的な口径比（F値）が異なる。今回の実験では、どちらのレンズに対しても入射光の口径はほぼ液晶素子の大きさ（約20mm）と考えられるので、レンズSのF値は15、レンズTのF値は40となる。一般的に、同様の品質のレンズであればF値が大きいほど収差が小さくなる。レンズTはF値が大きいため収差が少なく、したがって点像の劣化も少なかったと考えられる。実際にこれら2枚のレンズを用いて、あるパターン（旧機械技術研究所のロゴマーク）を再生すると図5-10のようになった。より回折限界近くまで解像できるレンズTの方が、明らかに良好な像を再生できていることが分かる。

第2の原因は、ホログラムパターンの空間的サンプリング誤差である。1点を再生するホログラムパターンにおいても、液晶素子の画素配置と限られた画素数では、計算された正確なパターンを描くことはできない。複数点を再生するホログラムパターンは、なおさら空間的サンプリング誤差が増大する。その結果、1点の再生に比べて2点再生の方が、像のスポット径が広がったと考えられる。本実験では、再生像の分解能は理論値よりも2倍～6倍低下することが分かった。

表 5-1 1点及び複数点の点像を再生した時のスポット直径測定値、及びその回折限界に対する比率（画質劣化の度合い）。

	焦点距離	回折限界 (口径 20mm の時)	スポット径 (実験結果)	スポット径/回折限界
レンズ S	300mm	9.5 μ m	1点 30 μ m	3.2
			複数点 50～60 μ m	5.3～6.3
レンズ T	800mm	25.3 μ m	1点 45 μ m	1.8
			複数点 50～60 μ m	2.0～2.4

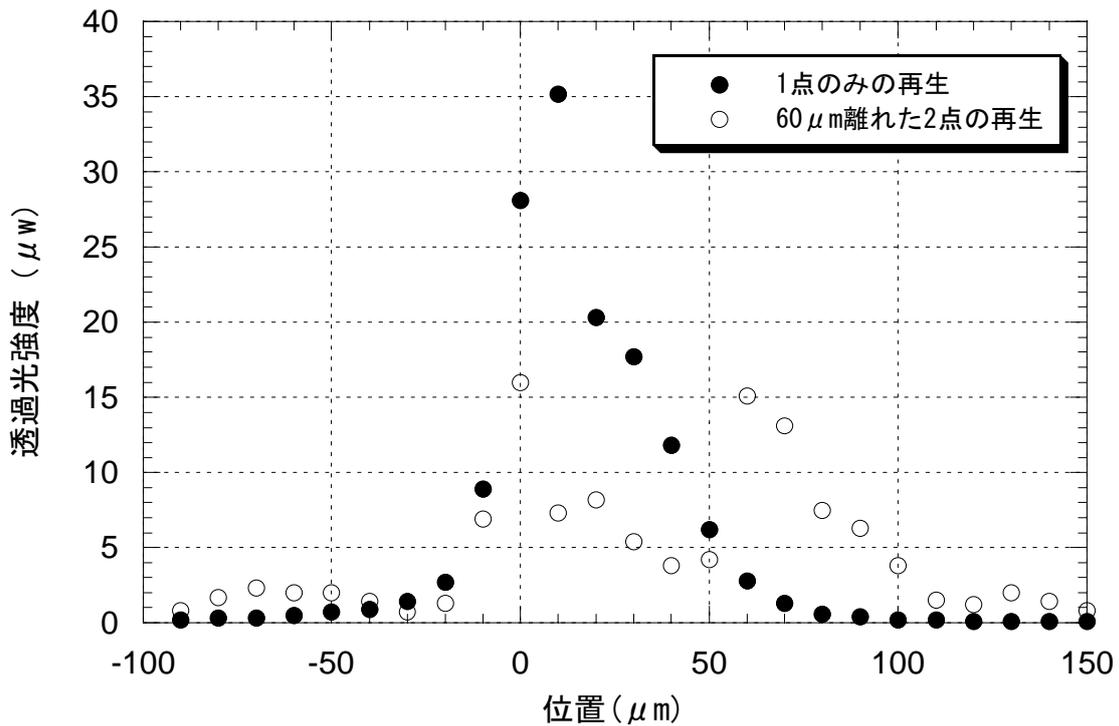


図 5-9 1 点及び近接した 2 点の点像を再生した時のスポット形状.

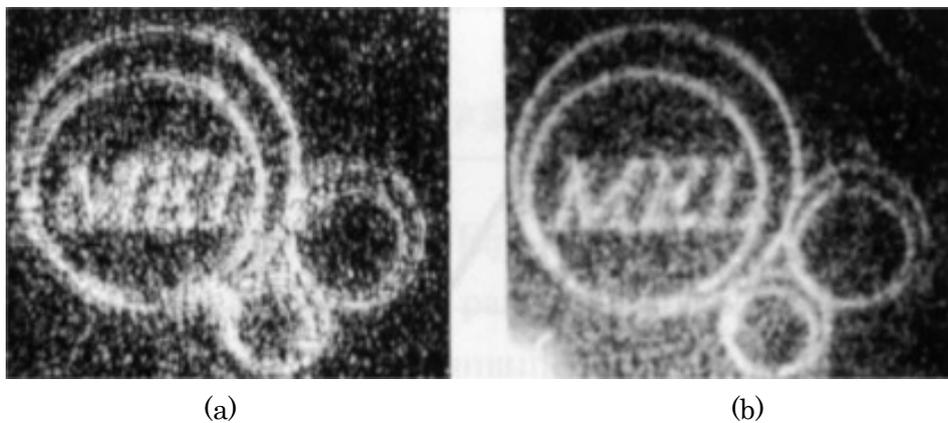


図 5-10 同じホログラムパターンから，焦点距離の異なるレンズを用いて像再生した時の画質の比較. (a)レンズ S ($f=300\text{mm}$) (b)レンズ T ($f=800\text{mm}$).

次に，像の大きさを測定した．図 5-11 の再生像において，式(5-16)で計算される像の大きさを外側の枠線で示す．明らかに外枠線の近傍は暗く，回折光が届いていないことが分かる．これは，液晶素子に送るホログラムパターンを，通常の NTSC コンポジットビデオ信号で送信したことに起因している．実験に使用した素子の画素数は，横 480×縦 440 であるが，ビデオ信号の規格は横 447×縦 345 本の解像度であり，素子よりも少ない．したがって回折角が小さくなり，像の広がる範囲が狭くなったのである．参考のため，ビデオ信号の規格値から計算された像の再生範囲を，図 5-11 に内側の枠線で示した．実際には，ビデオ信号では規格値上限の解像線数まで 100% 変調することはできない．そのため，内枠線の近傍では回折効率が低下しており，有効な画像範

囲はさらに狭くなっている。変調度の低下による回折効率の低下を確認するため、液晶素子に単純な直線回折格子を書き込み、ビデオ信号の変調度及び透過光の0次光強度と1次回折光強度の比を測定した。その結果を図5-12に示す。液晶素子に書き込む空間周波数が大きくなるにつれて変調度、回折効率共に減少してゆくことが分かる。実験に用いた液晶素子の画素ピッチから計算される最大空間周波数は11本/mmであるが、その時変調度は測定不能であり、また1次回折光は全く観測されなかった。このように今回の像再生実験では、画素ピッチから期待される最大空間周波数までの変調は実現されていないことが分かった。

像の大きさに関してはもう一つ注意すべき事柄がある。それは図5-11から明らかなように、再生像とその共役像及び中央の輝点が重ならないためには、図に枠線で示した領域の1/4しか有効に利用できないことである。これは、情報論的考察の項で述べた、ホログラムの4倍の冗長性に対応している。したがって、ホログラフィーによる像再生における有効解像線数は、空間光変調素子の大きさと画素ピッチから式(5-17)により計算される解像線数の半分となる。

以上のように、図5-4に示したフーリエ変換型の光学系でホログラフィックな像再生を行う場合、理論的にはその解像線数は、実験に用いた液晶素子では100本程度となる。しかしながら実際には、光学系の収差等により回折限界までの点像が得られないことと、信号の伝送系の解像度が液晶素子の解像度を下回ったことのため、期待されたほどの解像線数が得られないことが分かった。レンズTを用いた場合、回折限界から2倍以上スポット径が大きくなり、また像の広がる範囲が約半分になることから、本実験系における解像線数は20~25本程度と見積もられる。図5-10(b)の再生像は、この結果を支持している。

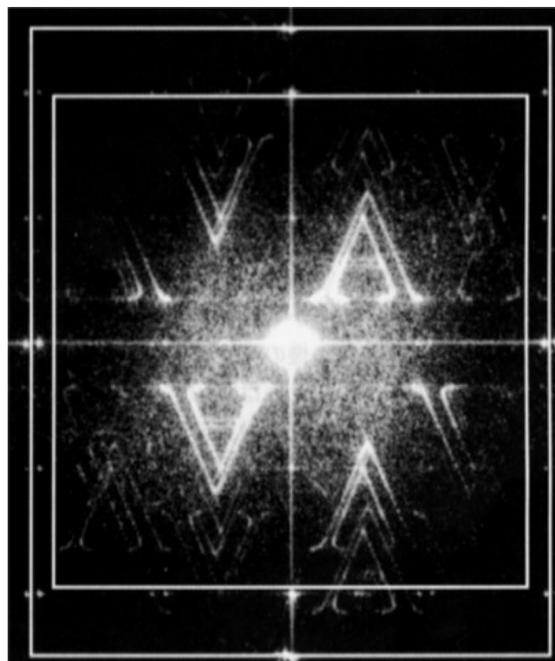


図5-11 像が再生可能な範囲。外枠線：液晶素子の画素ピッチから計算される画像の大きさ。
内枠線：NTSC コンポジットビデオ信号の公称解像力から計算される画像の大きさ。

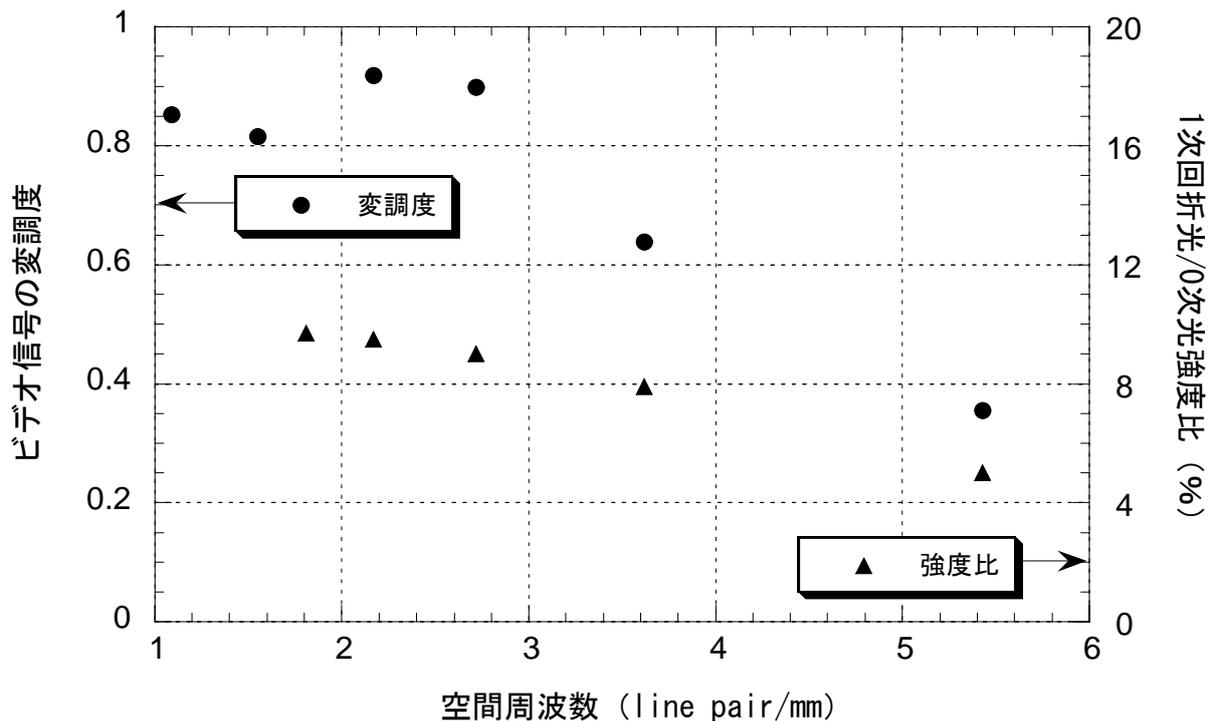


図 5-12 空間周波数に対するビデオ信号の変調度低下と、それに伴う 1 次回折光強度の低下。

5.2.4 ホログラフィックアニメーションのデモンストレーション

液晶素子を空間光位相変調素子として用い、ホログラフィックなアニメーションを再生する実験を行った。その像再生システムを図 5-13 に示す。波長 633nm のヘリウムネオンレーザーからの光線を拡大し、平行光にして偏光子、液晶素子、検光子の順に透過させる。液晶素子にはセイコーエプソン製のものを用い、偏光子及び検光子の偏角はそれぞれ 30° 、 85° とした。液晶素子へ入力する画像は前項と同じく、再生したい 2 次元画像のフーリエ変換位相像である。ホログラムパターンは 1 フレームずつパーソナルコンピュータで計算し、一旦書き換え型ビデオディスクに保存した。ビデオディスクは蓄積されたホログラムパターンを通常のビデオレート (30 フレーム毎秒) で再生し、これを液晶素子にビデオ信号で送ることにより、動画像としての再生を可能にした。

検光子を透過した光線は、焦点距離 f のレンズによるフーリエ変換光学系により、空間フィルターの位置に像を再生する。ここで 0 次回折光及び不要な高次回折光を空間フィルターでカットし、その後の像拡大光学系で再生像の位置に結像した動画像をスクリーンに映して観察した。

観察された動画像を図 5-14 に示す。観察される像は円弧であり、1 フレーム進む毎に円弧の長さが円周の約 $1/30$ ずつ長くなるようにした。このようにすると、再生開始から 1 秒間でちょうど一つの円を描くことになる。1 秒間の再生中に像の明るさが変わっているが、これは円弧の長さによって液晶素子での回折効率が変化するためである。また円弧の位置やノイズも若干変化する様子が観察された。これらは、観察者にとって不快なものであるので、今後実用化に向けて解決すべき課題である。

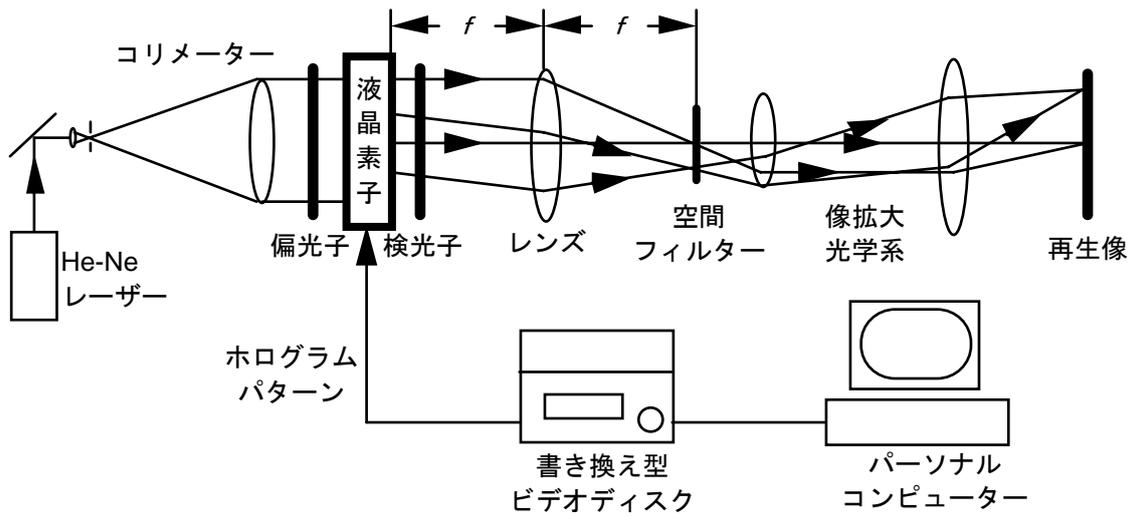


図 5-13 ホログラフィックアニメーションの像再生光学系システム

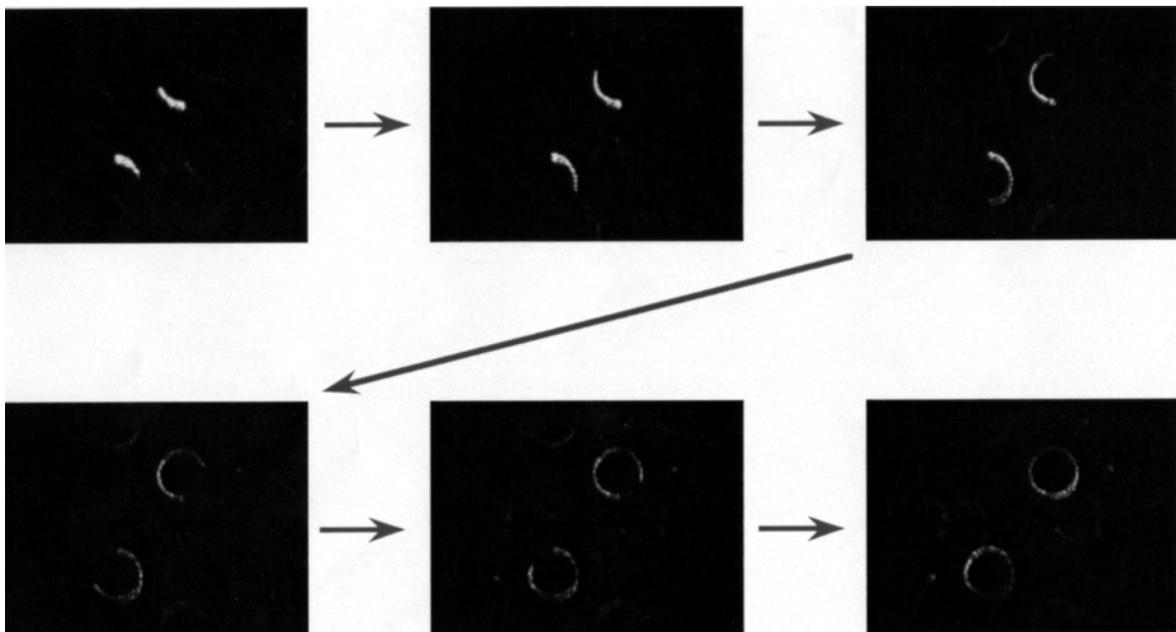


図 5-14 動画ホログラフィーにより円を描くデモンストレーション

5.3 直線計への応用

5.3.1 測定原理

我々は、移動テーブル上に回折格子を載せ、テーブルが直線運動する際に生じる横ぶれ量を測定する光干渉計測定システム（以後直線計と呼ぶ）を開発した⁸³⁻⁸⁵。回折格子を用いた直線計の構成を図 5-15 に示す。テーブルの移動方向とレーザー光線の光軸方向を一致させ、それを z 軸方向とする。また水平方向に x 軸、垂直方向に y 軸をとる。x 軸方向の横ぶれを測定する場合は、回折格子を移動テーブル上に、その刻線が y 軸と平行になるように固定する。y 軸方向の横ぶれを測定する場合は逆に、刻線が x 軸方向となるようにする。回折格子にレーザー光線を入射すると、±1 次の回折光が出射するので、移動テーブルの先に配置した 2 枚の鏡により、それぞれの回折光を元の方向に反射する。回折格子に戻った光線は再び回折し、それぞれ回折光の一つが光源の方向に向かう。この方向に戻った回折光を干渉させてその光強度を検出することにより、横ぶれ量が測定できる。

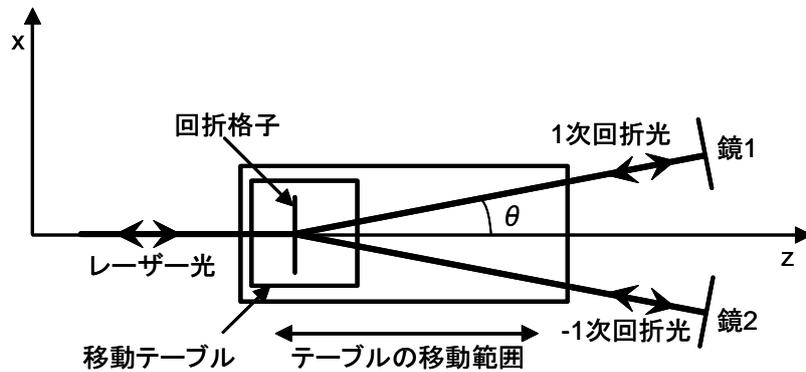


図 5-15 回折格子を用いた直線計の構成

干渉光強度の変化を調べるため、図 5-16 を用いて回折格子からの回折光の位相を計算する。水平方向の横ぶれを測定する場合を考える。平行光を回折格子に入射した時、1 次回折光が出射する方向 θ は、格子方程式により、

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{p} \quad (5-18)$$

となる。ただし、 p は格子ピッチ、 λ は光線の波長である。-1 次回折光の出射方向は $-\theta$ である。この回折格子が水平方向に Δx だけ変位した時、出射光波面は図 5-16 の実線から破線のように変化するので、1 次回折光の位相変化は

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \sin \theta \\ &= 2\pi \frac{\Delta x}{p} \end{aligned} \quad (5-19)$$

である。一方 -1 次回折光は、出射方向が $-\theta$ であるから、位相変化は $-\delta$ となる。つまり、1 次回折光と -1 次回折光との間に 2δ の位相差が生じる。このような回折光の位相差は、テーブルの移

動方向である光軸方向に回折格子が変位しても生じない。また明らかに、刻線方向の垂直方向の変位によっても位相差は生じない。したがって、1次回折光と-1次回折光を干渉させてその光強度を検出したとき、もし光強度が変化したとすると、それは回折格子が水平方向に変位したために生じた位相差によるものとなる。

1次回折光を鏡で反射させ再び回折格子に戻すと、そこで生じる-1次回折光は元の光路を戻すが、回折格子が Δx 変位した場合にはやはり δ だけ位相が変化する。すなわち、往路の1次回折光と復路の-1次回折光の位相変化は共に δ であるので、結局この光線は 2δ の位相変化を受ける。往路の-1次回折光についても同様であり、復路で1次の回折をして-z方向に進む光線は -2δ の位相変化を受ける。したがってこれらの2つの光線を干渉させると、その干渉光強度は

$$I = A + B \cos(4\delta + \delta_0) \quad (5-20)$$

のように変化する。ここで A, B は定数であり、 δ_0 は回折格子から2枚の鏡までの光路長の違いによって生じる位相差である。 δ_0 はテーブルがz方向に移動しても変化しないため、やはり定数となる。予備的な実験を行うなど、何らかの方法で式(5-20)の定数 A, B が分かれば、干渉光強度 I を測定することにより位相差 δ を計算することができる。位相差 δ が求めれば、式(5-19)を用いて横ぶれ量 Δx が計算できる。

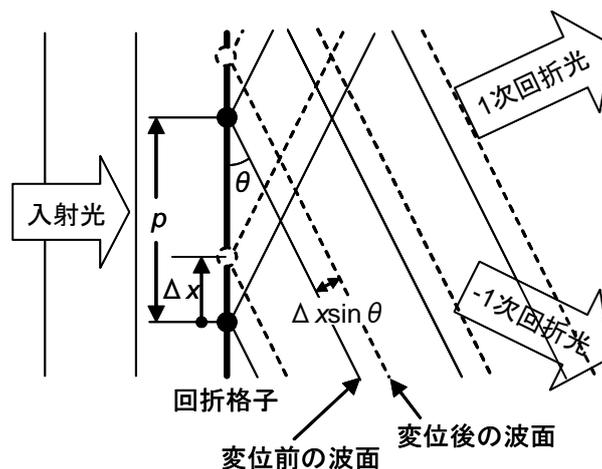


図 5-16 回折格子が変位した時の回折光の位相変化

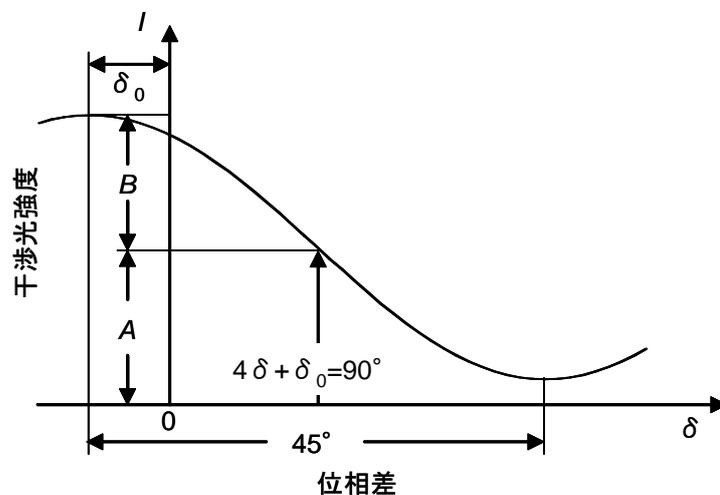


図 5-17 位相差 δ に対する干渉光の強度変化

この方法（干渉コントラスト法）では，検出光強度 I の変化によって位相差 δ を決定するが，それらの関係が線型ではないため，バイアス値 δ_0 によって感度が異なる．図 5-17 は式(5-20)をグラフ化したものであるが，図を見ても分かる通り， $4\delta + \delta_0 = 90^\circ$ となる付近ではグラフが急峻であるため感度が高いが，逆に $4\delta + \delta_0 = 0^\circ$ 付近ではグラフが平坦で，位相差が変化しても検出光強度があまり変化しないため，感度が低くなる．いま，最大強度変化の $1/n$ までの光強度が検出可能とすると，平均的な位相差 δ の測定感度は

$$\delta_n = \frac{\pi}{4n} \quad (5-21)$$

となる．またこの測定感度に対応した，横ぶれ量の測定感度は

$$\Delta x_n = \frac{\lambda}{8n \sin \theta} \quad (5-22)$$

である．このように，回折格子の回折角によっても測定感度が変化する．

5.3.2 実験及び結果

(1) 測定システム

実験に用いた測定システム全体を図 5-18 に示す．波長 633nm のヘリウムネオンレーザーから出射した光線は，顕微鏡対物レンズ，ピンホール，コリメーターレンズによって拡大され，平行光となる．鏡 3，ハーフミラーによって反射された平行光は，移動テーブル上に固定された回折格子へ入射する．回折格子は，2 光束干渉による干渉縞を写真乾板に記録したホログラフィック回折格子であり，現像後漂白処理⁸⁹⁾を行うことによって回折効率を向上させたものを用いた．回折効率は約 10%であった．回折格子からの回折光のうち，1 次回折光と-1 次回折光は，鏡 1，鏡 2 によってそれぞれ反射され，回折格子へと戻される．双方の反射光線は回折格子によって再び回折し，往路で 1 次の回折，復路で-1 の回折を受けた光線と，往路で-1 次，復路で 1 次の回折を受けた光線は，重なり合って干渉し，ハーフミラーを透過後光検出器で検出される．光検出器からの電気信号は，A/D コンバーターを通過してデジタルデータとなり，パーソナルコンピュータに保存される．パーソナルコンピュータは同時に，コントローラーを通して移動テーブルの制御を行う．

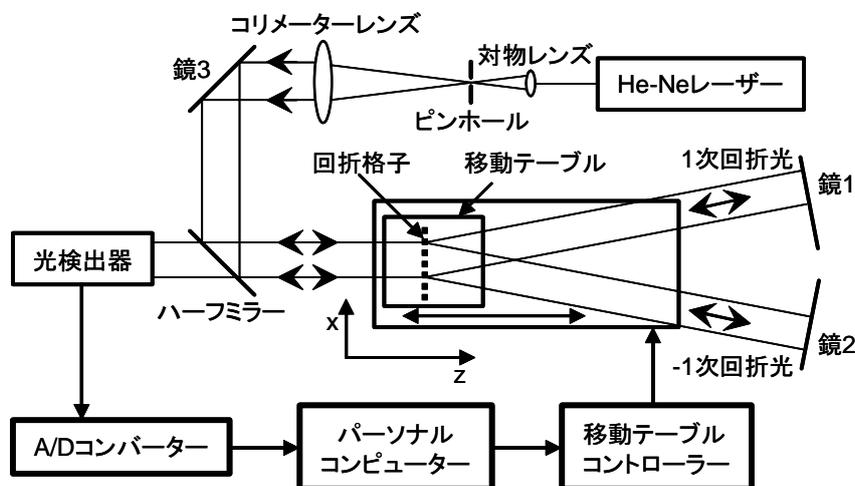


図 5-18 回折格子を用いた干渉コントラスト法による直線計システム.

(2) 予備実験とその結果

測定システムの動作を確認するため、移動テーブル上にもう一つのステージを置き、移動テーブル自体は動作させないで、回折格子を x 軸方向に変位させる実験を行った。ステージは、ステップングモーター駆動により 1 ステップ当り $0.4 \mu\text{m}$ 移動する。また、回折角が 0.74° の回折格子(a)と、 3.32° の回折格子(b)を用いて実験を行い比較した。測定結果をそれぞれ図 5-19(a)及び(b)に示す。グラフの横軸はステージの移動距離、縦軸は光検出器からの出力電圧である。出力電圧は、干渉光強度に比例している。

図 5-19 を見ると、波形が階段状になっていることから、ステップングモーターによる駆動の様子が良く分かる。全体としては、式(5-20)に示したように、正弦波状の光強度変化を示している。回折格子(a)は回折角が小さいため、光強度変化の周期が $12.3 \mu\text{m}$ と長めであり、回折格子(b)では回折角が大きいため、周期が $2.7 \mu\text{m}$ と小さくなっている。回折格子(b)を用いると測定感度が高いため、同じ量の変位に対して光強度変化も大きくなっているが、その分ノイズも大きくなっている様子が分かる。

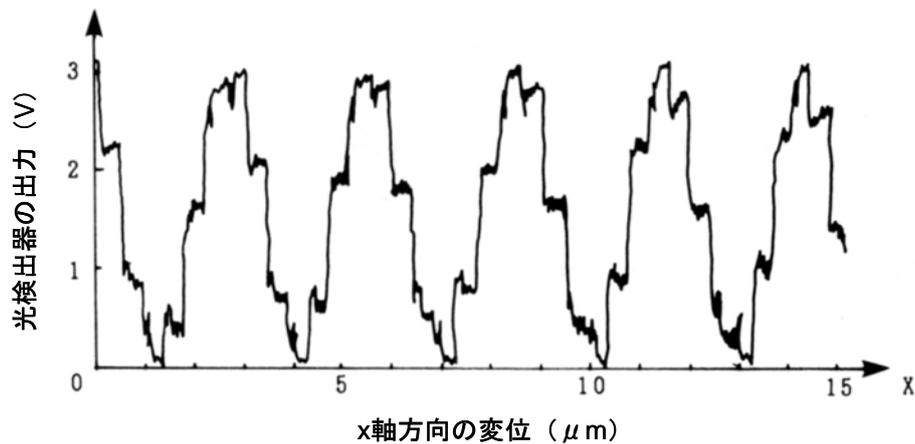
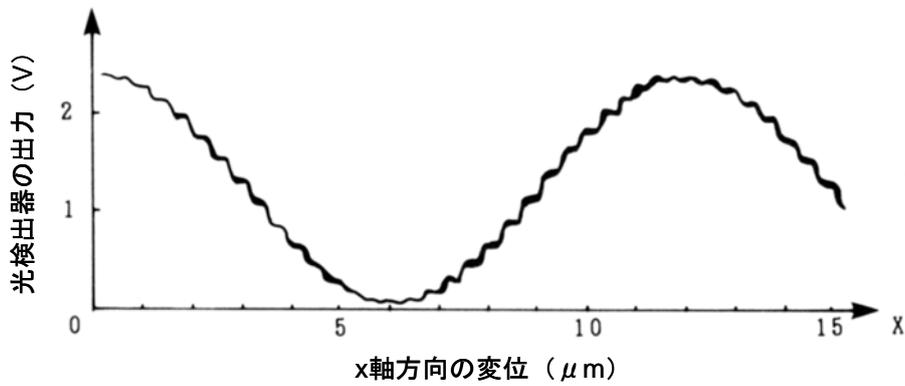


図 5-19 回折格子が x 方向に変位した時の出力波形. (a)回折角 $\theta = 0.74^\circ$: 周期 $12.3 \mu\text{m}$.
(b)回折角 $\theta = 3.32^\circ$: 周期 $2.7 \mu\text{m}$.

(3) 直線性測定結果

図 5-18 の測定システムを用い、移動テーブルを z 軸方向に動かして x 軸方向の横ぶれ量を測定した。回折格子は、感度の低い回折格子(a)を用い、駆動距離は 100mm とした。測定結果を図 5-20 に示す。図 5-20(a)は、光検出器からの出力電圧の生データであり、(b)はそれをスムージングしたものである。図 5-20(b)の結果を式(5-20)により位相値に直し、式(5-19)により横ぶれ量を計算した結果が図 5-20(c)である。移動テーブルが進むにつれて、単調に横ぶれ量が増加しているのは、光軸とテーブルの移動方向が正確に同一方向となっておらず、光軸に対して斜めに移動していることを示している。実際その方向ずれは $1/1000\text{rad}$ 程度であり、特段の機構なしにアライメントする限界に近いので、実用上これを回避することは困難である。真の横ぶれ量は、図 5-20(c)におけるデータのプロット点と、最小 2 乗法により求めた近似直線である実線との差であり、その差分をプロットしたのが図 5-20(d)である。図 5-20(d)の 50 点のプロットは全て $\pm 3\mu\text{m}$ 以内に収まっており、その標準偏差は $0.73\mu\text{m}$ であった。この直線移動テーブルを 100mm 駆動した時の直線性は、この標準偏差値で代表されると考えられる。

5.3.3 測定システムへの液晶素子の組み込み

前項までに説明した移動テーブルの直線性測定システムにおいて、回折格子の代わりに液晶素子を用いることができる。液晶素子には、ビデオ信号の入力によって所望のパターンを書き込むことができ、かつそのパターンを自在に変化させることができるので、固定的な回折格子と比較して次のような利点が生じる。

- ① 書き込む回折格子パターンの方向を変えることにより、x 軸方向だけではなく、y 軸方向や、斜め方向の変位量測定システムとすることができる。
- ② 書き込む回折格子パターンのピッチを変えることにより、測定感度を変化させることができる。
- ③ 干渉光強度の最大値、最小値を求め、検出する位相差 δ の符号を決定するための予備実験を、機械的駆動なく行うことができる。
- ④ 位相のバイアス値である δ_0 を任意に設定できるので、位相差 δ の検出感度を常に高い状態に保つことができる。
- ⑤ 書き込む回折格子パターンを格子と垂直方向に走査することにより、図 5-20(c)に見られるような一定の直流成分を意図的に与えたり、あるいは差し引いたりすることができる。

これらの利点は全て、液晶素子の空間光変調素子としてのフレキシビリティの高さ、及び実時間動作が可能という特長を生かしたものである。

①では例えば、液晶面を 2 分割して片側に x 軸方向測定用の縦の回折格子パターン、もう片側に y 軸方向測定用の横の回折格子パターンを描くことにより、2 方向同時の測定システムとすることが考えられる。ただし、レーザービームは 2 本必要となり、回折光を回折格子に戻すための反射鏡は 2 組必要となる。

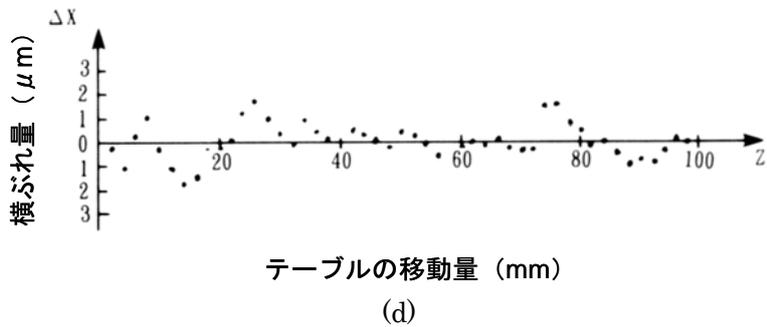
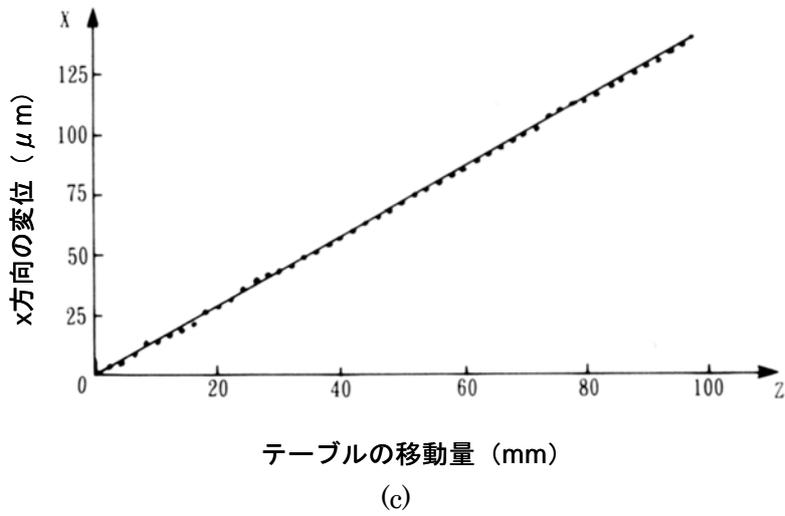
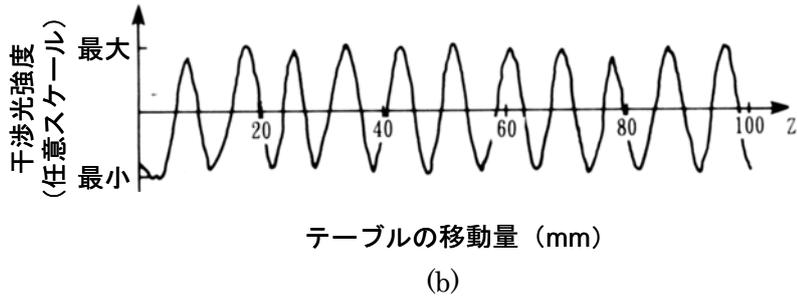
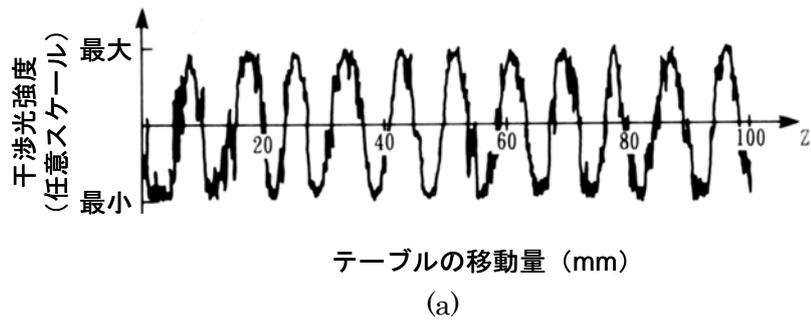


図 5-20 移動テーブルが z 方向に 100mm 移動したときの横ぶれ量測定結果.
 (a)光検出器からの生データ. (b)生データをスムージング処理したもの.
 (c)移動テーブルの x 方向変位量. (d)移動テーブルの正味の横ぶれ量.

②の特長を生かせば、一つの測定システムにより、精度の異なる多種の直線移動テーブルの横ぶれ量測定を行うことが可能となる。また、粗い測定と高精度の測定を同時に行って、それらの結果を組み合わせることで解析することにより、高精度を保ったまま測定のダイナミックレンジを拡大するといったシステム構築が考えられる。ただし、回折角の変化に応じて反射鏡の調整が必要となる。

③の予備実験は、式(5-20)における定数項を求めるために必要なものである。レーザー光源の出力は変動しがちであるから、安定した測定結果を得て繰り返し精度を向上させるためには測定の度にこの予備実験を行うことが望まれる。液晶素子ではこの予備実験を迅速に終了させることが可能となるので、実用上非常に有用な機能となる。

④の特長は、高精度化に寄与する。例えば、 δ_0 を一番感度の良い状態に設定した時、液晶素子に描画する回折格子パターンを、格子に垂直な方向に一定量（例えば1画素分）だけずらした時の干渉光の強度変化をあらかじめ測定する。そして測定中に干渉光の強度があらかじめ測定した変化量に達した時、回折格子パターンを逆方向に一定量ずらすように書き換える。このようなフィードバックシステムを構築することにより、測定システムを常に高感度な状態に保つことが可能となる。

⑤の機能は、レーザー光の進行方向とステージの進行方向とのアライメントが悪い状態での測定を可能とする。

このように、光干渉計による直線性の測定システムに、空間光変調素子としての液晶素子を組み込むことにより、高機能化、高精度化等を容易に実現できるようになる。

前章までに確立した液晶素子を用いた空間光位相変調における位相変調量の精密化が、液晶素子を直線計に応用した際にもたらす効果について考察する。本測定システムは往復光路となっており、光路中で回折格子による回折が2回起こる。そのため光検出器に到達する光量が回折効率の2乗に比例して減少するので、回折効率の向上が検出光量を増大させる効果は片道光路に比べて大きい。検出光量の増大は、測定システムのS/Nを改善し、測定精度を向上させる。したがって、回折格子は強度変調によるものではなく、回折効率の高い位相変調によるものとするのが望ましい。さらに回折効率を高めるためには、より階調数の多い位相回折格子パターンの使用が効果的である。液晶素子による位相変調量が正確に分かっていれば、階調数の多いパターンを正確に描くことが可能となるため、回折効率が向上し、測定精度も向上する。

液晶素子の画素ピッチを $50\mu\text{m}$ とし、描いた回折格子パターンの周期を8画素分とすれば、実寸で $400\mu\text{m}$ の周期となる。比較的容易に実現可能な光強度の検出感度として $n=50$ とすると、この回折格子による横ぶれ量の平均測定感度は、式(5-22)によりちょうど $1\mu\text{m}$ となる。液晶素子上に描く回折格子パターンの周期を2画素分とすれば平均測定感度は4倍向上するが、これ以上細かなパターンを描くことができなくなり、格子ピッチの変更による測定感度の向上は限界となる。またこの限界空間周波数パターンにおいては、上記④のフィードバックシステムによる高精度化の利用が困難となる。しかしながらこの時例えば、隣り合った画素での位相変調量を 0° 、 180° から 90° 、 270° に変更すれば、回折光の位相は 90° だけ変化する。これはフィードバックシステムにおいて、半画素分だけ回折格子パターンをずらしたことに相当する。同様に、位相変調量を僅かだけ変更することにより、1画素分以下の微小な回折格子パターンの移動と同等の機能を実現できるので、限界の空間周波数パターンにおいてもフィードバックシステムの利用に

よって高感度な状態を維持することが可能となる．位相変調量の精密な制御は，液晶素子の画素構造による制限を補償する効果がある．

このように，液晶素子を用いた空間光位相変調における位相変調量の精密化は，液晶素子の直線計への組み込みに際し，回折効率の向上，及び画素構造から生じる制限の補償を可能とし，測定精度の向上に役立つ．

5.4 第5章のまとめ

本章では、TN 型液晶素子を空間光位相変調素子として用いることによって実現される、動画ホログラフィーと、光干渉計の一つである直線計への応用について記述した。

動画ホログラフィーに関してはまず、実際の像再生に即した考察を行った。その結果、現状得られる液晶素子では画素ピッチが大きすぎるため透過光の回折角に限界があり、通常フレネルホログラムで、直視による3次元像の観察は困難であることが分かった。十分大きな視野、視域を確保した上で視距離を小さくするためには、画素ピッチを光の波長の数倍程度まで小さくすることが必須である。次にレンズ系を用いた再生方法について考察し、画素ピッチを小さくする代わりに画素数を大きくすることによって視野及び視域を同時に確保することが可能であることを示した。画素ピッチを小さくすることより画素数を大きくすることの方が容易であるので、この方法は当面選択すべきである方法といえる。しかしながら光学系が大きくなったり、収差によって画像が歪んだりするといった問題があるので、将来的には画素ピッチを小さくして、光学系を極力単純にする方向性を目指すべきである。

ホログラムの情報量は膨大であって、その容量は現状の保存・伝送技術の限界を超えている。空間光変調素子を用いた動画ホログラフィーを実現するためには、情報量の問題は避けて通れない関門であり、表示素子としての性能向上と平行して研究開発してゆくべき課題である。

再生像の画質に関して、再生スポットの形状及び像の再生範囲という観点から評価を行った。その結果、解像線数が理論的に期待されるよりもかなり少なくなっていることが分かり、その原因は、光学系に起因するものと、表示パターンに起因するものの複合的な効果であることを示した。ホログラムからの再生像の画質は目視による確認で行われる場合が多く、本章で示したような定量的な評価方法は確立していない。将来的に3次元映像を普及させるためには、このような画質の評価方法を確立することは重要と思われる。当面画質に関しては、解像線数を理論限界まで向上させる努力が必要である。また実用的には、ノイズの低減も重要であり、今後の研究課題である。前章までに確立した、液晶素子を用いた空間光位相変調における位相変調量の精密化は、ノイズの低減に大きな役割を果たすと期待される。

表 5-2 デスクトップ作業を想定した3次元映像の動画ホログラフィーを実現するため、空間光変調素子に求められる仕様（将来的な研究開発の目標値）。

項目	仕様
画素数	横 56000×縦 40000 以上
画素ピッチ	横 2 μ m×縦 2 μ m 以下
位相変調量	赤色光に対して 360°以上
位相分解能	16 階調以上
書き換え速度	毎秒 30 フレーム以上 (1/30 秒以下)

最後に、実際にホログラフィックな像再生を行うアニメーションを制作し、デモンストレーションを行った。残念ながら 3 次元像の再生はできなかったが、TN 型液晶素子を位相変調素子として用いた動画ホログラフィーのデモンストレーションは、世界初のものと思われる。

液晶素子の動画ホログラフィーへの応用のまとめとして、デスクトップ作業に用いることを想定し、物体の大きさを 100mm、視域を横 225mm×縦 160mm、視距離を 400mm とした場合の、空間光変調素子の目標仕様を表 5-2 に示す。本研究では、空間光変調素子として用いた液晶素子の能力不足のため、見栄えがするような動画ホログラフィーを実現できなかったが、このような目標の数値に根拠を与えることができた。今後は、この仕様を目指した素子の研究開発が重要となる。

直線計への応用では、回折格子を用いた測定システムの測定原理と実験結果を述べ、回折格子を液晶素子に交換することで、どのような機能の改善が望めるかといった観点からの展望を述べた。特に前章までに確立した、液晶素子を用いた空間光位相変調における位相変調量の精密化は、液晶素子の直線計への組み込みに際し、回折効率の向上、及び画素構造から生じる制限の補償を可能とし、測定精度の向上に役立つことを示した。このような機能の改善は、直線性の測定に限らず、回折格子を用いたほとんど全ての干渉計システムにおいて、それらの素子を液晶素子に変更することにより実現可能と思われる。とりわけ往復型の光路を用いたシステムにおいては、回折格子の回折効率による光強度の低下が片道光路の 2 乗分となるため、位相変調素子としての液晶素子の利用が有効である。また多くの干渉測定システムでは、偏光子、波長板等の位相素子が用いられているが、液晶素子を空間光位相変調素子として用いることができれば、それらの位相素子を代替し、さらに動的な変調コントロールによって付加価値を高めることが可能になると考えられる。液晶素子の干渉測定システムへの応用は始まったばかりであり、今後研究の進展が大いに期待される分野である。

第6章 結論

レーザーが発明されてから既に半世紀近い年月が経っている。レーザー光の出現によって初めて実現された位相の揃った光波は、自然光に比べて格段に可干渉性が優れており、ホログラフィー、光干渉計、光学的情報処理等の分野に大いなる発展を促した。一方、その揃った位相を自在に操る、言い換えれば光波面を自在に加工する技術は、現在でも完成していない。その光波面加工技術の核となるデバイスが空間光位相変調素子である。

本論文では、比較的容易に入手が可能であり、かつ空間解像度、書き換え速度の点で優れたデバイスであるツイステッド・ネマティック型液晶素子を、空間光位相変調素子として用いるための研究を行った。

第2章では、液晶素子の動作特性を調べる際に数学的取り扱いを可能とするための手段として、液晶素子のジョーンズ行列モデルの構築を行った。代表的なモデルである線型モデルを基に、液晶層内の液晶分子方位角、及びチルト角の分布をより正確に取り込むことに努めた結果、多層モデルを経て最終的に微分モデルを得た。これらのモデルの最大の違いは、モデルを用いて計算される全複屈折量である。そしてその全複屈折量は、位相変調特性に重大な係わりを持っている。したがって各モデルの良否は、位相変調特性をどれだけ正しく予測できるかで判定されるべきものである。各モデルを用いた位相変調特性のシミュレーションと、光干渉計を用いた測定の比較は、第4章で行われた。

第3章では、液晶素子のジョーンズ行列モデルで使用されているパラメーターを、透過率の測定値から計算する方法と、その数学的な問題点である解の不定性について述べた。透過率の測定値から直接計算されるのはジョーンズ行列の各要素であるが、この際、各行列要素の符号が決まらないという不定性が生じることを述べた。これは、ジョーンズ行列が光波の複素振幅を取り扱うのに対し、光の強度は複素振幅の大きさの2乗であることに起因するものであり、本質的に避けられないものである。液晶素子への入出力光として直線偏光のみを考えると、この不定性がさらに増大することも示した。

次に、各行列要素の値から液晶素子の物理パラメーターの値を計算する際に生じる不定性について検討した。これは、各行列要素と物理パラメーターの間に成り立つ関係が、非線型連立方程式になることから生じている。一般的にはこの連立方程式が無限個の解を持つことを示し、また典型的な例では、現実的なパラメーター範囲に10個程度の解があることを示した。物理パラメーターのおおよその値が知れているときには、それらの解から唯一の正しい値に絞り込むことが可能な場合と、可能でない場合があることが分かった。

最後に、これら不定性の改善方法について検討した。その結果、物理パラメーターのおおよその値が分からない時でも、数波長のレーザーを用いて実験を行えばほぼ確実に不定性を排除し、ただ一つのパラメーター値が得られることを示した。

第4章では、計算されたパラメーターを持つジョーンズ行列を用いて、液晶素子を空間光位相変調素子として用いるための、最適な光学系配置について検討した。まず、入出力光として直線偏光のみを用いた場合について、液晶素子を挟む偏光子と検光子の方位角を最適化した。その最適化された配置において、光干渉計を用いて位相変調特性を測定した。位相遅れをジョーンズ行

列モデルによるシミュレーションと比較した結果、線型モデルによる予測値は定性的に正しいものの、測定誤差以上の相違があることが分かった。また、微分モデルを用いたシミュレーションは、位相遅れの測定結果と非常に良く一致することが明らかとなった。したがって、位相遅れを予測するという目的においては、我々が構築した微分モデルが最も優れていると結論される。

次に、直線偏光のみを用いた往復光路での位相変調特性について、ジョーンズ行列を用いた計算と、光干渉計を用いた実験による測定を行った。その結果往復光路では、鏡による反射の際に楕円偏光の回り方が反対になるため、往路と復路で位相変調量が異なることが分かった。往路と復路での位相変調量を同じにするためには、液晶素子と鏡との間に検光子が必要なことを示した。実験結果はその計算を裏付けるものとなった。

最後に、液晶素子のジョーンズ行列モデルにおける主行列の固有ベクトルで表される偏光状態、すなわち固有偏光を用いた光学系の最適化について検討を行った。その結果、液晶素子への入出力光として負固有偏光を用いると、理想的な状態に近い変調特性が解析的に得られることを示した。また共通光路型干渉計を用いることにより、比較的容易に安定性の高い干渉測定が可能となることを示すと共に、角パラメーターを用いた計算の有効性を示した。

第5章では、これまでに調べた結果に基づく最適な光学系配置を用いて、液晶素子の空間光位相変調素子としての応用を行った。動画ホログラフィーへの応用では、解像線数の観点から再生像の画質を詳細に検討すると共に、ホログラフィックアニメーションのデモンストレーションを行った。また、デスクトップで3次元映像としての動画ホログラフィーを実現する際に、空間光位相変調素子に求められる仕様を、将来的な研究開発の目標値として示した。

回折格子を用いた光干渉計による移動テーブルの運動の直線性測定では、測定原理と実験結果を示した。また、将来的に回折格子を液晶素子に変更することで、どのような機能の改善が図られるかについて検討した。

第2章から第4章までの議論を通じて確立した、液晶素子を用いた空間光位相変調における位相変調量の精密化は、動画ホログラフィーへの応用ではノイズの低減に大きな役割を果たし、直線計への応用では測定精度を向上させると期待される。

このように本研究を通して、ツイステッド・ネマティック型液晶素子を、空間光位相変調素子として用いるための方法を確立した。

本論文では、容易に入手可能な市販の液晶素子を用いて、その特性を調べ、空間光位相変調素子として利用するという観点からの探究を述べている。しかしながらここで得られた知見は、市販品を利用するという立場にとどまらず、新たな素子設計に対し有用な指針を与えることができる。具体的にはまず、第3章で明らかとなった液晶素子のパラメーター決定の不定性は、ディスプレイデバイスとしての新たな設計指針を生み出す。例えば表 3-3 にあるように、全ツイスト角 90° 、全複屈折量 180° の典型的な液晶素子に対し、透過率測定から物理パラメーターを求めると、正しい解以外に全ツイスト角 70° 、全複屈折量 142° という解が得られる。これは、そのような全ツイスト角、全複屈折量を持つ液晶素子を製造すれば、典型的な液晶素子と全く同じ透過率特性を示す素子となることを意味している。そしてその液晶素子は、典型的な素子よりも全複屈折量が小さい、つまり薄いわけであるから、応答速度が向上する。結局、透過率特性が同等で、時間応答特性の優れた液晶素子が設計されたことになる。このように本研究の結果は、全ツイス

ト角が 90° ということにとらわれない液晶素子設計への道を切り開くと期待される。

微分モデルも、新たな液晶素子の設計指針を与えると期待される。線型モデルと微分モデルでは計算される全複屈折量が異なるが、この違いの大部分は、液晶層とそれを挟む基板界面におけるいわゆる“縁の効果 (edge effect)” から生じている。つまり、線型モデルと微分モデルでの全複屈折量の計算結果の差は、全複屈折量に対する縁の効果そのものである。現在全複屈折量は、液晶素子の厚さを設計する指針に用いられている。具体的には、 90° ツイステッド・ネマティック型の液晶素子の場合、全複屈折量が 0.87π となるように設計する。なぜならこの時、入射面ダイレクタに沿った方向の直線偏光を液晶素子に入射すると、ちょうどその偏光方向が液晶分子のらせんに沿って回転し、 90° 回転した直線偏光となって出射するためである^{37,38)}。ところが線型モデルを用いて全複屈折量を計算し、この指針に基づいて厚さを決定すると、縁の効果により全複屈折量が不足してしまう。そこで経験的にその1割から2割増しの厚さとなるようにしている。微分モデルを用いれば、縁の効果を取り込んだ正確な全複屈折量計算が可能となるので、経験則によらず、最適な液晶素子の厚さが精密に決定される。

液晶素子の動画ホログラフィーへの応用では、将来的な研究開発の目標値を示したが、この目標を達成することは容易ではない。なぜなら、半導体露光技術を用いた配線等において相当高度な製造技術が必要なことに加え、画素ピッチと位相変調量の目標値を同時に達成することが困難なためである。液晶材料の複屈折率は $0.1\sim 0.2$ 程度であって、赤色光に対して1波長以上の位相変調量を得るためには、約 $4\mu\text{m}$ 以上の厚みが必要となる。一方画素ピッチの目標値は $2\mu\text{m}$ であるので、液晶セルのアスペクト比は2以上となる。このような状況においては、液晶層中の電界が一様にはならないと考えられる。光軸方向に一様でない電界下で、液晶分子のダイレクタがどのように分布し、液晶層を透過する光線にどのような位相変調を与えるかは明らかではなく、今後の研究課題である。したがって、液晶素子を用いた動画ホログラフィーにより、デスクトップ作業が可能な直視型の立体映像を表示することは当面困難である。しかしながら、より小さな物体や視域を制限した表示は、現状の仕様の液晶素子を用いても可能である。例えば顕微鏡下での映像提示や作業といった応用は有望である。また、ヘッドマウント型ディスプレイでは、観察者個人の瞳内だけに映像を提示するため、視域が非常に狭くても良いことから、現状の素子でも立体像の表示が実現可能である。

液晶素子の光計測への応用、特に光干渉計への応用は有望である。例えば近年、非球面レンズの使用が盛んになっているが、非球面加工の形状精度を向上させるため、非球面形状を高精度に測定する方法が切望されている。球面形状は光干渉計により測定可能であり、非球面量が小さければ同様の方法で測定可能であるが、非球面量が大きい場合、非球面からの反射光と球面波との干渉縞密度が大きくなりすぎるため、従来の光干渉計では測定不能になる。電子線描画により計算機プログラムを作製し、非球面の基準波面を創り出して光干渉計により非球面形状を測定することができる。しかしながら、設計値に応じて非球面毎に計算機プログラムを作製する必要があり、高価で時間がかかりすぎるため、実用には至っていない。液晶素子を空間光位相変調素子として用いて基準波面を発生させれば、書き込む計算機プログラムパターンを変えるだけで様々な設計値に応じた測定が可能になる。液晶素子を光干渉計に組み込むことで、実用的な高精度非球面形状計測が可能になると期待される。

このように、本研究は液晶素子自体の設計、及び多くの応用に役立てることが可能である。今後は、より多くの光学系に液晶素子を組み込み、その有効性を示すことが重要と考えられる。有効性を示すことが更なるデバイスの開発に結びつき、最終的には社会に多くの有用な製品が生み出されるようになることを祈念する。

謝辞

本論文は、筆者が所属した通商産業省工業技術院機械技術研究所、及び独立行政法人産業技術総合研究所での研究活動をまとめたものであります。また本文中には、英国ヘリオット・ワット大学及び米国サンディエゴ州立大学で行った在外研究の成果も含まれております。

本論文をまとめるにあたり、ご指導いただいた静岡大学工学部システム工学科 大坪順次教授に心から感謝の意を表すと共に、適切なご指示を賜った静岡大学工学部電気・電子工学科 篠原茂信教授、静岡大学電子工学研究所 皆方誠教授、静岡大学工学部共通講座 中島伸治教授、静岡大学工学部電気・電子工学科 江上力助教授に深謝いたします。

機械技術研究所入所当時の上司であって永きに亘りご指導をいただき、また定年退職後も終始ご鞭撻いただいた光産業創成大学院大学の松田浄史教授には特別の感謝の意を表します。また在外研究においてお世話いただいた愛媛大学工学部電気電子工学科の市川裕之助教授、ヘリオット・ワット大学の Mohammad R. Taghizadeh 博士、サンディエゴ州立大学の Jeffrey A. Davis 教授、スペインアリカンテ大学の Andrés Márquez 博士にも深く感謝の意を表します。

筆者の研究グループにおいて共に仕事を行い、直接的な指導をいただいた永寿伴章博士、日比野謙一博士及び現ニュージーランドオークランド大学の Thomas H. Barnes 教授には大変お世話になりました。ここに永年の感謝の意を表します。

最後に、研究所内外で私を暖かく見守り、ご協力下さった多くの方々に深くお礼を申し上げます。

付録1 線型ジョーンズモデルの計算

2.4.1 項の議論によれば，ツイステッド・ネマティック型液晶素子のジョーンズ行列モデルは，液晶分子ダイレクタの方位角が液晶層厚み方向に対して線型に変化し，またチルト角が一定と仮定すれば，全ツイスト角を α_T ，全複屈折量を β_L として

$$\mathbf{J}_L = \exp[-i(\phi_c + \beta_L)] \mathbf{R}(-\alpha_T) \left\{ \begin{bmatrix} \exp\left(-i\frac{\beta_L}{2N}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\beta_L}{2N}\right) \end{bmatrix} \mathbf{R}\left(\frac{\alpha_T}{2N}\right) \right\}^{2N} \quad (\text{A-1})$$

となる．式(A-1)中の行列の $2N$ 乗を計算するためにチェビシェフの恒等式⁴²⁾を用いる．チェビシェフの恒等式によれば，2行2列の行列 \mathbf{M} があるとき，行列 \mathbf{M} の N' 乗は，

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{N'} &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}^{N'} \\ &= \frac{1}{\sin \chi} \begin{bmatrix} m_{11} \sin N' \chi - \sin(N'-1)\chi & m_{12} \sin N' \chi \\ m_{21} \sin N' \chi & m_{22} \sin N' \chi - \sin(N'-1)\chi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

である．ただし

$$\chi = \cos^{-1} \left(\frac{m_{11} + m_{22}}{2} \right) \quad (\text{A-3})$$

である．式(A-1)より

$$m_{11} = \exp\left(-i\frac{\beta_L}{2N}\right) \cos\left(\frac{\alpha_T}{2N}\right) \quad (\text{A-4})$$

$$m_{12} = \exp\left(-i\frac{\beta_L}{2N}\right) \sin\left(\frac{\alpha_T}{2N}\right) \quad (\text{A-5})$$

$$m_{21} = -\exp\left(i\frac{\beta_L}{2N}\right) \sin\left(\frac{\alpha_T}{2N}\right) \quad (\text{A-6})$$

$$m_{22} = \exp\left(i\frac{\beta_L}{2N}\right) \cos\left(\frac{\alpha_T}{2N}\right) \quad (\text{A-7})$$

が得られ，また式(A-3)より

$$\cos \chi = \cos\left(\frac{\alpha_T}{2N}\right) \cos\left(\frac{\beta_L}{2N}\right) \quad (\text{A-8})$$

となるので， $N'=2N$ としてこれらを式(A-2)に代入すれば求める表式が得られる． N' が大きくなるとき α_T/N' 及び β_L/N' は共に 0 に近づくが，この時式(A-8)より

$$\chi \approx \frac{\sqrt{\alpha_T^2 + \beta_L^2}}{N'} \quad (\text{A-9})$$

となる．したがって， N' を無限大とする極限では， $N'\chi$ は一定値

$$\gamma = \sqrt{\alpha_T^2 + \beta_L^2} \quad (\text{A-10})$$

となる. $N' \rightarrow \infty$ で $\mathbf{M}^{N'}$ の(1,1)要素は

$$\begin{aligned} & \lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{m_{11} \sin N' \chi - \sin(N' - 1) \chi}{\sin \chi} \\ &= \lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(-i \frac{\beta_L}{N'}\right) \cos\left(\frac{\alpha_T}{N'}\right) \sin N' \chi - [\sin N' \chi \cos \chi - \cos N' \chi \sin \chi]}{\sin \chi} \\ &= \lim_{N' \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left[\cos\left(\frac{\beta_L}{N'}\right) \cos\left(\frac{\alpha_T}{N'}\right) - \cos \chi \right] \sin N' \chi - i \sin\left(\frac{\beta_L}{N'}\right) \cos\left(\frac{\alpha_T}{N'}\right) \sin N' \chi}{\sin \chi} + \cos N' \chi \right\} \quad (\text{A-11}) \\ &= \cos \gamma - i \frac{\beta_L}{\gamma} \sin \gamma \end{aligned}$$

である. ここで

$$\lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\beta_L}{N'}\right)}{\sin \chi} = \frac{\beta_L}{\gamma} \quad (\text{A-12})$$

を使った. 同様に,

$$\lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\alpha_T}{N'}\right)}{\sin \chi} = \frac{\alpha_T}{\gamma} \quad (\text{A-13})$$

を用いると, $\mathbf{M}^{N'}$ の(1,2)要素は

$$\begin{aligned} \lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{m_{12} \sin N' \chi}{\sin \chi} &= \lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(-i \frac{\beta_L}{N'}\right) \sin\left(\frac{\alpha_T}{N'}\right) \sin N' \chi}{\sin \chi} \\ &= \lim_{N' \rightarrow \infty} \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta_L}{N'}\right) \sin\left(\frac{\alpha_T}{N'}\right) \sin N' \chi - i \sin\left(\frac{\beta_L}{N'}\right) \sin\left(\frac{\alpha_T}{N'}\right) \sin N' \chi}{\sin \chi} \right] \quad (\text{A-14}) \\ &= \frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma \end{aligned}$$

となる. (2,1)要素及び(2,2)要素も同様に計算することが可能で, 結局

$$\mathbf{J}_L(\alpha_T, \beta_L) = \exp[-i(\phi_c + \beta_L)] \mathbf{R}(-\alpha_T) \begin{bmatrix} \cos \gamma - i \frac{\beta_L}{\gamma} \sin \gamma & \frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma \\ -\frac{\alpha_T}{\gamma} \sin \gamma & \cos \gamma + i \frac{\beta_L}{\gamma} \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{A-15})$$

を得る.

付録 2 2 行 2 列ユニタリ行列の性質

定義 (ユニタリ行列)

正方複素行列 \mathbf{U} において, \mathbf{U} の転置行列の各要素において複素共役をとったものを要素とする行列 \mathbf{U}^* (これを, \mathbf{U} の随伴行列という) が \mathbf{U} の逆行列になるとき, 行列 \mathbf{U} をユニタリ行列という.

つまり

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{E} \quad (\text{単位行列}) \quad (\text{A-16})$$

である.

定理 1 (ユニタリ行列の行列式)

2 行 2 列のユニタリ行列の行列式の大きさは 1 である.

証明

ユニタリ行列 \mathbf{U} の行列式を u とする. \mathbf{U}^* は \mathbf{U} の逆行列であるから, \mathbf{U}^* の行列式は $1/u$ である. 一方,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A-17})$$

とすれば

$$\mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* \end{pmatrix} \quad (\text{A-18})$$

であるから, \mathbf{U}^* の行列式は

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{U}^*) &= u_{11}^* u_{22}^* - u_{21}^* u_{12}^* \\ &= (u_{11} u_{22} - u_{21} u_{12})^* \\ &= [\det(\mathbf{U})]^* \\ &= u^* \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

である. $1/u = u^*$ より直ちに

$$|u|^2 = 1 \quad (\text{A-20})$$

が導かれ, 複素数 u の大きさは正であるので, \mathbf{U} の行列式の大きさは 1 となる.

(証明終わり)

定理 2 (2 行 2 列ユニタリ行列の各要素)

行列式が 1 である 2 行 2 列のユニタリ行列を

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A-21})$$

とするとき,

$$u_{22} = u_{11}^* \quad (\text{A-22})$$

$$u_{21} = -u_{12}^* \quad (\text{A-23})$$

である.

証明

一般に, 式(A-21)で表される行列の逆行列は

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{U})} \begin{pmatrix} u_{22} & -u_{12} \\ -u_{21} & u_{11} \end{pmatrix} \quad (\text{A-24})$$

となる. \mathbf{U} の随伴行列が逆行列となる必要十分条件は, 式(A-18)と式(A-24)の各要素が等しくなることであるから,

$$\begin{cases} u_{11}^* = \frac{1}{\det(\mathbf{U})} u_{22} \\ u_{21}^* = -\frac{1}{\det(\mathbf{U})} u_{12} \\ u_{12}^* = -\frac{1}{\det(\mathbf{U})} u_{21} \\ u_{22}^* = \frac{1}{\det(\mathbf{U})} u_{11} \end{cases} \quad (\text{A-25})$$

が得られる. 式(A-25)において $\det(\mathbf{U})=1$ とすれば求める表式が得られる.

(証明終わり)

定理 3 (ユニタリ行列の積)

ユニタリ行列の積は, またユニタリ行列である.

証明

2つのユニタリ行列 \mathbf{U}_1 と \mathbf{U}_2 とを考え, その積を \mathbf{V} とする.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\mathbf{V}^* &= (\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2)(\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2)^* \\ &= \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2\mathbf{U}_2^*\mathbf{U}_1^* = \mathbf{E} \end{aligned} \quad (\text{A-26})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^*\mathbf{V} &= (\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2)^*(\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2) \\ &= \mathbf{U}_2^*\mathbf{U}_1^*\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2 = \mathbf{E} \end{aligned} \quad (\text{A-27})$$

よって, 行列 \mathbf{V} の随伴行列が \mathbf{V} の逆行列になるから, 定義により行列 \mathbf{V} はユニタリ行列であ

る.

(証明終わり)

系 (ユニタリ行列の積)

特に, 行列 \mathbf{U} 及び \mathbf{V} が共に 2 行 2 列, 行列式 1 のユニタリ行列であって, その(1,2)及び(2,1)要素が実数である時, 積 \mathbf{UVU} も(1,2)及び(2,1)要素が実数のユニタリ行列となる.

証明

定理 3 により積 \mathbf{UVU} がユニタリ行列となることは明らかであるから, 実際に計算を行って, (1,2)及び(2,1)要素が実数となることを示せばよい. 定理 2 を用いれば, ユニタリ行列 \mathbf{U} , \mathbf{V} の各要素を

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1^* \end{pmatrix} \quad (\text{A-28})$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ -v_2 & v_1^* \end{pmatrix} \quad (\text{A-29})$$

と書くことができる. 順次計算を行うと,

$$\begin{aligned} \mathbf{UVU} &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ -v_2 & v_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 v_1 - u_2 v_2 & u_1 v_2 + u_2 v_1^* \\ -u_2 v_1 - u_1^* v_2 & -u_2 v_2 + u_1^* v_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1^2 v_1 - u_1 u_2 v_2 - u_1 u_2 v_2 - u_2^2 v_1^* & u_1 u_2 v_1 - u_2^2 v_2 + |u_1|^2 v_2 + u_1^* u_2 v_1^* \\ -u_1 u_2 v_1 - |u_1|^2 v_2 + u_2^2 v_2 - u_1^* u_2 v_1^* & -u_2^2 v_1 - u_1^* u_2 v_2 - u_1^* u_2 v_2 + (u_1^*)^2 v_1^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1^2 v_1 - 2u_1 u_2 v_2 - u_2^2 v_1^* & 2u_2 |u_1 v_1| \cos \phi - u_2^2 v_2 + |u_1|^2 v_2 \\ -(2u_2 |u_1 v_1| \cos \phi - u_2^2 v_2 + |u_1|^2 v_2) & (u_1^2 v_1 - 2u_1 u_2 v_2 - u_2^2 v_1^*)^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-30})$$

となる. ただし,

$$\phi = \arg(u_1 v_1) \quad (\text{A-31})$$

とした. u_2 , v_2 は元々実数であるから, 式(A-30)より明らかに行列 \mathbf{UVU} の(1,2)及び(2,1)要素は実数であって虚数成分はない.

(証明終わり)

付録3 透過率測定からジョーンズ行列を求める例^{50,51)}

式(3-1) のジョーンズ行列で表される TN 型液晶素子に対し、図 3-1 の光学系において偏光子及び検光子の偏角を (ϕ_P, ϕ_A) とした時の透過率を T_{ψ_P, ψ_A} とする。偏光子及び検光子の偏角を $(0^\circ, 0^\circ)$, $(30^\circ, 60^\circ)$, $(45^\circ, -45^\circ)$, $(30^\circ, 30^\circ)$ とすれば、それぞれ式(3-7)に代入して

$$T_{0,0} = f^2 + g^2 \quad (\text{A-32})$$

$$T_{30,60} = \frac{3}{4}f^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}fh + \frac{1}{4}h^2 + j^2 \quad (\text{A-33})$$

$$T_{45,-45} = h^2 + g^2 \quad (\text{A-34})$$

$$T_{30,30} = f^2 + \frac{1}{4}g^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}gj + \frac{3}{4}j^2 \quad (\text{A-35})$$

となる。 (A-32)/4+(A-33)+3×(A-34)/4 を計算すると

$$\frac{1}{4}T_{0,0} + T_{30,60} + \frac{3}{4}T_{45,-45} = f^2 + g^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}fh + h^2 + j^2 \quad (\text{A-36})$$

となるが、式(3-2)の規格化条件により

$$fh = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{4}T_{0,0} - T_{30,60} - \frac{3}{4}T_{45,-45} \right) \quad (\text{A-37})$$

が導かれる。また、(A-34)-(A-32)により

$$h^2 - f^2 = T_{45,-45} - T_{0,0} \quad (\text{A-38})$$

となる。簡単のため、 $fh = u$, $h^2 - f^2 = v$ とおく。式(A-37)と(A-38)から f を消去すると、 h のみの方程式

$$h^4 - vh^2 - u^2 = 0 \quad (\text{A-39})$$

が得られ、これを解くことにより

$$h^2 = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4u^2}}{2} \quad (\text{A-40})$$

を得る。本文第3章でも述べたように、各変数の符号はこの時点では定まらない。他の変数は、それぞれ

$$f^2 = h^2 - v \quad (\text{A-41})$$

$$g^2 = T_{0,0} - f^2 \quad (\text{A-42})$$

$$j^2 = 1 - f^2 - g^2 - h^2 \quad (\text{A-43})$$

といった具合に、次々にその平方が求められる。

変数の可能な符号の組み合わせの数、すなわち不定性を減らすためには、もう少し情報が必要である。-(A-32)/4+3×(A-34)/4+(A-35)を計算すると

$$-\frac{1}{4}T_{0,0} + \frac{3}{4}T_{45,-45} + T_{30,30} = \frac{3}{4}f^2 + \frac{3}{4}g^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}gj + \frac{3}{4}h^2 + \frac{3}{4}j^2 \quad (\text{A-44})$$

となり，式(A-37)を求めたと同様に

$$gj = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}T_{0,0} - \frac{3}{4}T_{45,-45} - T_{30,30} \right) \quad (\text{A-45})$$

が得られる．式(A-37)によって測定値から計算される値の正負により，変数 f と h の符号の関係が分かり，また式(A-45)の正負により変数 g と j の符号の関係が分かる．これにより， f, g, h, j の4変数の可能な組み合わせ16個のうち，4つの組み合わせだけが可能となる．

付録 4 連立方程式(3-22)の解が無数にあることの証明⁵⁶⁾

定理 4 (無限個の解)

2変数 α , β に対する連立方程式

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \alpha + \cos \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \alpha = f \\ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \alpha - \cos \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \alpha = h \end{cases} \quad (\text{A-46})$$

$$\beta \geq 0, \quad 0 < f^2 + h^2 \leq 1 \quad (\text{A-47})$$

の解は、無数に存在する。

証明

次式を満たすように α をとる。

$$\cos \alpha = \frac{f}{\sqrt{f^2 + h^2}}, \quad \text{かつ} \quad \sin \alpha = -\frac{h}{\sqrt{f^2 + h^2}} \quad (\text{A-48})$$

このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 β_0 を十分大きくとれば

$$\frac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta_0^2}} < \varepsilon \quad (\text{A-49})$$

とすることができる。数列 β_k を

$$\beta_k \geq \beta_0, \quad \text{かつ} \quad \cos \sqrt{\alpha^2 + \beta_k^2} = \sqrt{f^2 + h^2} \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (\text{A-50})$$

が成り立つように定める。余弦関数は周期関数であるから、このような β_k は無数に存在する。

このとき全ての k に対し

$$\left| \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta_k^2}} \sin \sqrt{\alpha^2 + \beta_k^2} \sin \alpha + \cos \sqrt{\alpha^2 + \beta_k^2} \cos \alpha - f \right| < \varepsilon \quad (\text{A-51})$$

$$\left| \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta_k^2}} \sin \sqrt{\alpha^2 + \beta_k^2} \cos \alpha - \cos \sqrt{\alpha^2 + \beta_k^2} \sin \alpha - h \right| < \varepsilon \quad (\text{A-52})$$

が成り立つ。なぜなら、式(A-51), (A-52)共に左辺第 1 項の絶対値は ε よりも小さく、第 2 項と第 3 項の和は 0 だからである。ゆえに、 (α, β_k) ($k=1,2,3,\dots$) は連立方程式(A-46)の解である。 β_k は無数に存在するから、このような解は無数に存在する。

(証明終わり)

付録5 ニュートン・ラフソン法を用いた計算

(1) 一般的理論 ^{A1-A4)}

N 個の独立変数を持ち、ある実数を与える N 個の関数 $f_i(\mathbf{x})$ ($i=1, 2, \dots, N$) を考える。ただし

$$\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \quad (\text{A-53})$$

とする。 N 個の方程式からなる連立方程式

$$f_i(\mathbf{x})=0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (\text{A-54})$$

を解くことを考える。推定される解を、初期値 \mathbf{x}_0 とする。左辺の関数を初期値 \mathbf{x}_0 の周りでテイラー展開すれば、

$$f_i(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \Delta x_j + O[(\Delta\mathbf{x})^2] \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (\text{A-55})$$

となる。 $(\Delta\mathbf{x})^2$ 以上の高次項を無視すると、関数値を同時にゼロに近づけるための補正量 $\Delta\mathbf{x}$ についての連立1次方程式

$$f_i(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \Delta x_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (\text{A-56})$$

を得る。補正量にかかる偏微分項を行列形式で

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (\text{A-57})$$

と書けば、補正量 $\Delta\mathbf{x}$ は \mathbf{F} の逆行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_N \end{pmatrix} = -\mathbf{F}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}_0) \\ f_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ f_N(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \quad (\text{A-58})$$

により計算することができる。補正後の推定解

$$\mathbf{x}_0^{new} = \mathbf{x}_0^{old} + \Delta\mathbf{x} \quad (\text{A-59})$$

を改めて \mathbf{x}_0 置き、式(A-58)、(A-59)の計算を収束するまで繰り返すことにより、連立方程式(A-54)の解が得られる。

(2) 式(3-42), (3-43)を解く具体的表式 (1 変数の場合)

具体的に, 式(3-42)をニュートン・ラプソン法で解く手順を示す. 添え字を省略し, また計算を簡単にするため,

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (\text{A-60})$$

とする. 図 3-2(a)のグラフを得るために, 全ツイスト角 α を -180° から 180° まで, 例えば 5° 間隔で固定する. 解くべき式は,

$$f(\gamma) = \frac{\alpha}{\gamma} \sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha + 0.162 = 0 \quad (\text{A-61})$$

となり, その 1 次微分は

$$\frac{df(\gamma)}{d\gamma} = -\frac{\alpha}{\gamma^2} \sin \gamma \sin \alpha + \frac{\alpha}{\gamma} \cos \gamma \sin \alpha - \sin \gamma \cos \alpha \quad (\text{A-62})$$

となる. 初期値を γ_0 とすれば, 1 回目の補正量 $\Delta \gamma$ は

$$\Delta \gamma = -\frac{f(\gamma_0)}{\left. \frac{df}{d\gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0}} \quad (\text{A-63})$$

により求められ, 解の近似値として

$$\gamma_1 = \gamma_0 + \Delta \gamma \quad (\text{A-64})$$

が得られる. 以後同様に, $f(\gamma)$ が 0 に十分近づくまで $\gamma_2, \gamma_3, \dots$ と繰り返して計算すれば解が得られる. 得られた γ から,

$$\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} \quad (\text{A-65})$$

により, ある固定された全ツイスト角 α に対して式(3-42)を満たす全複屈折量 β を求めることができる. 全複屈折量 β は常に正なので, この際符号の不定性が生じる心配はない.

式(3-43)をニュートン・ラプソン法で解いて図 3-2(a)のグラフを得るには, 同様に

$$h(\gamma) = \frac{\alpha}{\gamma} \sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha - 0.932 = 0 \quad (\text{A-66})$$

を定義し,

$$\frac{dh(\gamma)}{d\gamma} = -\frac{\alpha}{\gamma^2} \sin \gamma \cos \alpha + \frac{\alpha}{\gamma} \cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \quad (\text{A-67})$$

を用いて以後順次, 補正量及び近似解の計算を繰り返せば良い.

(3) 式(3-22)を解く具体的表式 (2 変数の場合)

ジョーンズ行列要素の実数部測定値を f_0 及び h_0 とすれば, 解くべき連立方程式は,

$$\begin{cases} f(\alpha, \gamma) = \frac{\alpha}{\gamma} \sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha - f_0 = 0 \\ h(\alpha, \gamma) = \frac{\alpha}{\gamma} \sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha - h_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{A-68})$$

となり，その偏微分はそれぞれ

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{\gamma} \sin \gamma \sin \alpha + \frac{\alpha}{\gamma} \sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha \quad (\text{A-69})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} = -\frac{\alpha}{\gamma^2} \sin \gamma \sin \alpha + \frac{\alpha}{\gamma} \cos \gamma \sin \alpha - \sin \gamma \cos \alpha \quad (\text{A-70})$$

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = \frac{1}{\gamma} \sin \gamma \cos \alpha - \frac{\alpha}{\gamma} \sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \cos \alpha \quad (\text{A-71})$$

$$\frac{\partial h}{\partial \gamma} = -\frac{\alpha}{\gamma^2} \sin \gamma \cos \alpha + \frac{\alpha}{\gamma} \cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \quad (\text{A-72})$$

となる．初期値 α_0, γ_0 に対し補正量を求めるための行列を

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha} & \frac{\partial f}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial h}{\partial \alpha} & \frac{\partial h}{\partial \gamma} \end{pmatrix}_{\alpha=\alpha_0, \gamma=\gamma_0} \quad (\text{A-73})$$

とすれば，補正量 $\Delta \alpha, \Delta \gamma$ は

$$\begin{pmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \gamma \end{pmatrix} = -\mathbf{F}^{-1} \begin{bmatrix} f(\alpha_0, \gamma_0) \\ h(\alpha_0, \gamma_0) \end{bmatrix} \quad (\text{A-74})$$

により計算され，近似解 α_1, γ_1 は

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta \alpha \quad (\text{A-75})$$

$$\gamma_1 = \gamma_0 + \Delta \gamma \quad (\text{A-76})$$

により求められる．以後同様に繰り返し計算を続け，近似解が収束すれば，それが式(A-68)の解となる．全複屈折量は，式(A-65)によって求める．

付録 4 で証明した通り式(A-68)は無数個の解を持つが，初期値を適切に設定し，かつ得られた多数の解から，例えば式(3-44)，(3-45)の条件を満たすもののみ抽出すれば，TN 型液晶素子の物理パラメータとして可能性の高いものを数個に絞り込むことができる．

参考文献

章番号は、初出の位置による.

第1章

- 1) D. Gabor, "A new microscope principle," *Nature* 161(1948)777-778.
- 2) 辻内順平「ホログラフイーの発展—その歴史と応用技術—」*光学* 27-5(1998)253-262.
- 3) 池上皓治「銀塩感光材料の種類と現像・漂白処理方法 [1]」*O plus E* 6(1981)79-86.
- 4) 塩野照弘「レリーフ型回折光学素子の回折効率」*回折光学素子入門*, (社) 応用物理学会日本光学会光設計研究グループ監修, オプトロニクス社, 東京(1997)63-73.
- 5) J. Grinberg, A. Jacobson, W. Bleha, L. Miller, L. Fraas, D. Boswell, and G. Myer, "A new real-time non-coherent to coherent light image converter the hybrid field effect liquid crystal light valve," *Opt. Eng.* 14-3(1975)217-225.
- 6) W. P. Bleha, L. T. Lipton, E. Wiener-Avneer, J. Grinberg, P. G. Reif, D. Casasent, H. B. Brown, and B. V. Markenvitch, "Application of the liquid crystal light valve to real-time optical data processing," *Opt. Eng.* 17-4(1978)371-384.
- 7) H. -K. Liu, J. A. Davis, and R. A. Lilly, "Optical-data-processing properties of a liquid-crystal television spatial light modulator," *Opt. Lett.* 10-12(1985)635-637.
- 8) D. A. Gregory, "Real-time pattern recognition using a modified liquid crystal television in a coherent optical correlator," *Appl. Opt.* 25-4(1986)467-469.
- 9) F. T. S. Yu, S. Jutamulia, and X. L. Huang, "Experimental application of low-cost liquid crystal TV to white-light optical signal processing," *Appl. Opt.* 25-19(1986)3324-3326.
- 10) F. Mok, J. Diep, H. -K Liu, and D. Psaltis, "Real-time computer-generated hologram by means of liquid-crystal television spatial light modulator," *Opt. Lett.* 11-11(1986)748-750.
- 11) T. H. Barnes, K. Matsumoto, T. Eiju, K. Matsuda, and N. Ooyama, "Phase only liquid crystal light modulator and its application in the Fourier plane of optical correlation systems," *Proc. SPIE* 1134(1989)204-208
- 12) T. H. Barnes, F. T. J. Johnson, T. Eiju, T. G. Haskell, K. Matsuda, and S. Kokaji, "Optoelectronic determination of binary phase-only filters for optical correlation," *Opt. Eng.* 31-9(1992)1936-1945.
- 13) T. H. Barnes, K. Matsumoto, T. Eiju, K. Matsuda, and N. Ooyama, "The application of phase-only filters to optical interconnects and pattern recognition," *J. Mod. Opt.* 37-11(1990)1849-1863.
- 14) H. Ichikawa, T. H. Barnes, M. R. Taghizadeh, J. Turunen, T. Eiju, and K. Matsuda, "Dynamic space-variant optical interconnections using liquid crystal spatial light modulators," *Opt. Commun.* 93(1992)145-150.
- 15) T. H. Barnes, T. Eiju, K. Matsuda, H. Ichikawa, M. R. Taghizadeh, and J. Turunen, "Reconfigurable free-space optical interconnections with a phase-only

- liquid-crystal spatial light modulator,” Appl. Opt. 31-26(1992)5527-5535.
- 16) J. Amako and T. Sonehara, “Computer-generated hologram using TFT active matrix liquid crystal spatial light modulator (TFT-LCSLM),” Jpn. J. Appl. Phys. 29-8(1990)L1533-L1535.
 - 17) J. Amako and T. Sonehara, “Kinoform using an electrically controlled birefringent liquid-crystal spatial light modulator,” Appl. Opt. 30-32(1991)4622-4628.
 - 18) N. Konforti, E. Marom, and S. -T. Wu, “Phase-only modulation with twisted nematic liquid-crystal spatial light modulators,” Opt. Lett. 13-3(1988)251-253.
 - 19) T. H. Barnes, T. Eiju, K. Matsuda, and N. Ooyama, “Phase-only modulation using a twisted nematic liquid crystal television,” Appl. Opt. 28-22(1989)4845-4852.
 - 20) A. Ogiwara, H. Sakai, and J. Ohtsubo, “Application of LCTV to nonlinear speckle correlator,” Opt. Commun. 86(1991)513-522.
 - 21) A. Ogiwara and J. Ohtsubo, “LCTV based optical correlator for binary phase specklegram,” Opt. Commun. 93(1992)234-244.
 - 22) H. Sakai and J. Ohtsubo, “Image subtraction using polarization modulation of liquid-crystal television,” Appl. Opt. 31-32(1992)6852-6858.
 - 23) J. C. Kirsch, D. A. Gregory, M. W. Thie, and B. K. Jones, “Modulation characteristics of the Epson liquid crystal television,” Opt. Eng. 31-5(1992)963-970.
 - 24) K. Ohkubo and J. Ohtsubo, “Evaluation of LCTV as a spatial light modulator,” Opt. Commun. 102(1993)116-124.
 - 25) C. Soutar, S. E. Monroe, Jr., and J. Knopp, “Measurement of the complex transmittance of the Epson liquid crystal television,” Opt. Eng. 33-4(1994)1061-1068.
 - 26) 高橋毅, 石井行弘 「Twisted nematic 液晶空間光変調器の位相変調特性の測定」 光学 23-2(1994)127-132.
 - 27) E. Jakeman and E. P. Raynes, “Electro-optic response times in liquid crystals,” Phys. Lett. 39A-1(1972)69-70.
 - 28) S. -T. Wu and U. Efron, “Optical properties of thin nematic liquid crystal cells,” Appl. Phys. Lett. 48-10(1986)624-626.

第2章

- 29) 村田和美 「光学」サイエンス社, 東京(1979).
- 30) M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics 6th ed.*, Pergamon Press, New York(1980).
- 31) R. C. Jones, “A new calculus for the treatment of optical systems,” J. Opt. Soc. Am. 31(1941)488-493.
- 32) W. A. Shurcliff, *Polarized light*, Harvard University Press, Cambridge (1962).
- 33) 福富斌夫, 有賀那加夫, 三輪啓二 「偏光とその応用」 共立出版, 東京(1965).
- 34) 応用物理学会光学懇話会編 「結晶光学」 森北出版, 東京(1975).
- 35) E. Hecht, *Optics 3rd ed.*, Addison Wesley, New York(1998).

- 36) A. Yariv and P. Yeh, *Optical waves in crystals, Chapter 5*, Wiley-Interscience, New York(1984)121-154.
- 37) K. Lu and B. E. A. Saleh, "Theory and design of the liquid crystal TV as an optical spatial phase modulator," *Opt. Eng.*, 29-3(1990)240-246.
- 38) 吉野勝美, 尾崎雅則「液晶とディスプレイ応用の基礎」コロナ社, 東京(1994).
- 39) F. C. Frank, "On the theory of liquid crystals," *Discuss. Faraday Soc.*, 25(1958)19-28.
- 40) D. W. Berreman, "Optics in smoothly varying anisotropic planar structures: Application to liquid-crystal twist cells," *J. Opt. Soc. Am.* 63-11(1973)1374-1380.
- 41) T. Scheffer and J. Nehring, "Twisted nematic and supertwisted nematic mode LCDs," *Liquid crystals - applications and uses vol. 1, Chap 10*, B. Bahadur Ed., World Scientific, London(1990) 231-274.
- 42) P. Yeh, A. Yariv, and C.-S. Hong, "Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory," *J. Opt. Soc. Am.*, 67-4(1977)423-438.
- 43) M. Yamauchi, "Utilization of elliptically polarized light for phase-only modulation by twisted nematic liquid crystal spatial light modulators," *Proc. SPIE* 4296(2001)116-125.
- 44) M. Yamauchi, "Jones-matrix models for twisted-nematic liquid-crystal devices," *Appl. Opt.* 44-21(2005)4484-4493.
- 45) J. A. Coy, M. Zalzarriaga, D. F. Grosz, and O. E. Martinez, "Characterization of a liquid crystal television as a programmable spatial light modulator," *Opt. Eng.*, 35-1(1996)15-19.
- 46) A. Márquez, J. Campos, M. J. Yzuel, I. Moreno, J. A. Davis, C. Iemmi, A. Moreno, and A. Robert, "Characterization of edge effects in twisted nematic liquid crystal displays," *Opt. Eng.*, 39-12(2000)3301-3307.
- 47) A. Márquez, C. Iemmi, I. Moreno, J. A. Davis, J. Campos, and M. J. Yzuel, "Quantitative prediction on the modulation behavior of twisted nematic liquid crystal displays based on a simple physical model," *Opt. Eng.*, 40-11(2001)2558-2564.
- 48) D. B. Taber, J. A. Davis, L. A. Holloway, Jr., and O. Almagor, "Optically controlled Fabry-Perot interferometer using a liquid crystal light valve," *Appl. Opt.* 29-17(1990)2623-2631.

第3章

- 49) C. Soutar and K. Lu, "Determination of the physical properties of an arbitrary twisted-nematic liquid crystal cell," *Opt. Eng.* 33-8(1994)2704-2712.
- 50) M. Yamauchi and T. Eiju, "Optimization of twisted nematic liquid crystal panels for spatial light phase modulation," *Opt. Commun.* 115(1995)19-25.
- 51) 山内真, 永壽伴章「ツイステッド・ネマティック型液晶素子を用いた光空間位相変調光学系の最適化」機械技術研究所所報 50-6(1996)151-160.
- 52) J. A. Davis, D. B. Allison, K. G. D’Nelly, M. L. Wilson, and I. Moreno, "Ambiguities in

- measuring the physical parameters for twisted-nematic liquid crystal spatial light modulators,” *Opt. Eng.* 38-4(1999)705-709.
- 53) J. A. Davis, P. Tsai, K. G. D’Nelly, and I. Moreno, “Simple technique for determining the extraordinary axis direction for twisted nematic liquid crystal spatial light modulators,” *Opt. Eng.* 38-5(1999)929-932.
- 54) L. Gonçalves-Neto, D. Roberge, and Y. Sheng, “Full-range, continuous, complex modulation by the use of two coupled-mode liquid-crystal televisions,” *Appl. Opt.* 35-23(1996)4567-4576.
- 55) I. Moreno, N. Bennis, J. A. Davis, and C. Ferreira, “Twist angle determination in liquid crystal displays by location of local adiabatic points,” *Opt. Commun.* 158(1998)231-238.
- 56) M. Yamauchi, “Origin and characteristics of ambiguous properties in measuring physical parameters of twisted nematic liquid crystal spatial light modulators,” *Opt. Eng.* 41-5(2002)1134-1141.
- 57) D. A. Yocky, T. H. Barnes, K. Matsumoto, N. Ooyama, and K. Matsuda, “Simple measurement of the phase modulation capability of liquid crystal phase-only light modulators,” *Optik* 84-4(1990)140-144.
- 58) H. Ichikawa, “Phase-only modulation with a twisted nematic liquid crystal panel for a reconfigurable grating,” *Opt. Rev.* 4-3(1997)395-401.

第4章

- 59) R. Guenther, *Modern Optics, Chapter 14*, John Wiley and Sons, New York(1990)569-631.
- 60) M. Yamauchi and T. Eiju, “Phase modulation capability of thin twisted nematic liquid crystal panels at double-pass configurations,” *Opt. Rev.* 2-1(1995)24-27.
- 61) 山内真「位相変調方法及び装置」特許第 3059979 号(2000).
- 62) 今井浩, 山口雅浩, 本田捷夫, 大山永昭「TN 液晶パネルの円偏光位相変調特性」*光学* 21-8(1992)550-554.
- 63) J. L. Pezzaniti and R. A. Chipman, “Phase-only modulation of a twisted nematic liquid-crystal TV by use of the eigenpolarization states,” *Opt. Lett.* 18-18(1993)1567-1569.
- 64) J. A. Davis, I. Moreno, and P. Tsai, “Polarization eigenstates for twisted-nematic liquid-crystal displays,” *Appl. Opt.* 37-5(1998)937-945.
- 65) M. Yamauchi, A. Márquez, J. A. Davis, and D. J. Franich, “Interferometric phase measurements for polarization eigenvectors in twisted nematic liquid crystal spatial light modulators,” *Opt. Commun.* 181(2000)1-6.
- 66) M. Yamauchi and K. Hibino, “Measurement of air turbulence for on-machine interferometry,” *Appl. Opt.* 42-34(2003)6869-6876.
- 67) K. Hibino and M. Yamauchi, “Phase-determination algorithms compensating for spatially non-uniform phase modulation in phase shifting interferometry,” *Proc. SPIE*

- 3478(1998)110-120.
- 68) K. Hibino and M. Yamauchi, "Phase-measuring algorithms to suppress spatially nonuniform phase modulation in a two-beam interferometer," *Opt. Rev.* 7-6(2000)543-549.
- 69) L. -H. Shyu, C. -L. Chen, and D. -C. Su, "Method for measuring the retardation of a wave plate," *Appl. Opt.* 32-22(1993)4228-4230.
- 70) A. Márquez, M. Yamauchi, J. A. Davis, and D. J. Franich, "Phase measurement of a twisted nematic liquid crystal spatial light modulator with a common-path interferometer," *Opt. Commun.* 190(2001)129-133.

第5章

- 71) M. Yamaguchi, N. Ohya, and T. Honda, "Holographic 3-D printer," *Proc. SPIE* 1212(1990)84-92.
- 72) 白倉明, 木原信宏, 馬場茂幸「即時ホログラフィック 3D プリント技術」*Hodie Circular* 18-3(1998)8-16.
- 73) 立浪真人, 佐々木篤, 武井和信, 吉川浩「フリンジプリンタによるホログラムの作製と評価」*3次元画像コンファレンス 2004 講演論文集(2004)93-96.*
- 74) J. Amako, H. Miura, and T. Sonehara, "Wave-front control using liquid-crystal devices," *Appl. Opt.* 32-23(1993)4323-4329.
- 75) N. Fukaya, K. Maeno, K. Sato, and T. Honda, "Improved electroholographic display using liquid crystal devices to shorten the viewing distance with both-eye observation," *Opt. Eng.* 35-6(1996)1545-1549.
- 76) N. Hashimoto, "High-resolution LCTV-SLM and its application to holography," *Technical Digest of OSA meeting '97 Lake Tahoe(1997)69-71.*
- 77) 山内真「空間光変調素子を用いた実時間ホログラフィ」*機械技術研究所所報*, 54-5(2000) 227-235.
- 78) "Laser precision measurement system 5526A," A catalog by Hewlett Packard, California(1976).
- 79) "A new laser-based straightness measuring system," *Machinery and Production Eng.* (July 16, 1975)62-63.
- 80) K. Takada and H. Takeyama, "Accuracy control of machine-tool by means of independent optical axes," *Annals of the CIRP*27-1(1978)271-276.
- 81) K. Matsuda, K. Tenjinbayashi, T. Kohno, and T. Eiju, "Straightness measurement using holographic real time interferometry," *ICO-13 Conference Digest(1984)316-317.*
- 82) H. H. Sakuma and H. Wada, "Straightness measurement using a heterodyne moiré method," *Precision Eng.* 9-1(1987)19-22.
- 83) 山内真, 松田浄史「干渉コントラスト法を利用したホログラム直線計」*日本機械学会講演論文集* 870-13(1987)19-21.

- 84) M. Yamauchi and K. Matsuda, "Interferometric straightness measurement system using a holographic grating," *Opt. Eng.* 33-4(1994)1078-1083.
- 85) 山内真, 松田浄史 「干渉コントラスト法を用いた直線計」 *機械技術研究所所報* 48-6(1994)278-285.
- 86) 大越孝敬 「ホログラフィ 第6章」 電子通信学会, 東京(1977)76-95.
- 87) L. B. Lesem, P. M. Hirsch, and J. A. Jordan, Jr., "The kinoform: A new wavefront reconstruction device," *IBM J. Res. Dev.* 13(1969)150-155.
- 88) J. A. Davis, D. M. Cottrell, J. Campos, M. J Yzuel, and I. Moreno, "Encoding amplitude information onto phase-only filters," *Appl. Opt.* 38-23(1999)5004-5013.
- 89) R. L. Lamberts and C. N. Kurtz, "Reversal bleaching for low flare light in holograms," *Appl. Opt.* 10-6(1971)1342-1347.

付録

- A1) W. Ledermann Ed., *Handbook of applicable mathematics, Volume III Numerical method*, A Wiley-Interscience Publication, New York(1981)145-149.
- A2) J. E. Dennis, Jr. and R. B. Schnabel, *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations, Chapter 5*, Prentice-Hall, New Jersey(1983).
- A3) W. H. Press, S. A. Tenkolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge Univ. Press (1988).
- A4) 丹慶勝市, 奥村晴彦, 佐藤俊郎, 小林誠 「C 言語による数値計算のレンピ」 技術評論社, 東京(1993)264-281.

本研究に関する論文リスト

1. M. Yamauchi and K. Matsuda,
"Interferometric straightness measurement system using a holographic grating,"
Optical Engineering, 33-4(1994)1078-1083.
2. M. Yamauchi and T. Eiju,
"Phase modulation capability of thin twisted nematic liquid crystal panels at double-pass configurations,"
Optical Review, 2-1(1995)24-27.
3. M. Yamauchi and T. Eiju,
"Optimization of twisted nematic liquid crystal panels for spatial light phase modulation,"
Optics Communications, 115(1995)19-25.
4. M. Yamauchi, A. Márquez, J. A. Davis, and D. J. Franich,
"Interferometric phase measurements for polarization eigenvectors in twisted nematic liquid crystal spatial light modulators,"
Optics Communications, 181(2000)1-6.
5. K. Hibino and M. Yamauchi,
"Phase-measuring algorithms to suppress spatially nonuniform phase modulation in a two-beam interferometer,"
Optical Review, 7-6(2000)543-549.
6. M. Yamauchi,
"Origin and characteristics of ambiguous properties in measuring physical parameters of twisted nematic liquid crystal spatial light modulators,"
Optical Engineering, 41-5(2002)1134-1141.
7. M. Yamauchi and K. Hibino,
"Measurement of air turbulence for on-machine interferometry,"
Applied Optics, 42-34(2003)6869-6876.

8. M. Yamauchi,
"Jones-matrix models for twisted-nematic liquid-crystal devices,"
Applied Optics, 44-21(2005)4484-4493.

参考論文リスト

1. 山内真, 松田浄史
「干渉コントラスト法を利用したホログラム直線計」
日本機械学会講演論文集, 870-13(1987)19-21.
2. 日比野謙一, 山内真, 清水透, 松田浄史
「弾性変形による微細凹面構造の形成-魔鏡の結像原理」
機械技術研究所所報, 43-2(1989)66-74.
3. K. Hibino, M. Yamauchi, M. Katoh, and K. Matsuda,
"Modern technique for the production and measurement of Makyoh images,"
Journal of crystal growth, 103(1990)433-436.
4. T. Eiju, K. Matsuda, T. H. Barnes, Yusrandihardja, D. Santica, and M. Yamauchi,
"Measurement of displacement using interference fringes localized at infinity,"
Proceedings of SPIE, 1553(1991)540-545.
5. 武谷直也, 山内真, 本間一弘, 小鍛治繁, 松田浄史
「漂白多重露光ホログラムの回折効率」
機械技術研究所所報, 45-8(1991)109-113.
6. 永寿伴章, 松田浄史, T. H. Barnes, 山内真, Yusrandihardja, D. Santika
「ホログラフィ等傾角干渉じまによる変位測定」
精密工学会誌, 59-2(1993)133-138.
7. 天神林孝二, 他15名
「三次元物体の測定と非破壊検査に関する研究」
機械技術研究所報告, 163(1993).
8. 山内真, 武谷直也, 松田浄史, 本間一弘
「多重露光ホログラムによるMR I 像の三次元表示」
機械技術研究所所報, 47-4(1993)147-156.
9. 山内真, 松田浄史
「干渉コントラスト法を用いた直線計」
機械技術研究所所報, 48-6(1994)278-285.

10. 山内真, 永寿伴章
「ツイステッド・ネマティック型液晶素子を用いた光空間位相変調光学系の最適化」
機械技術研究所所報, 50-6(1996)151-160.
11. M. Yamauchi, Y. Yamada and Y. Hasegawa,
"Frequency-domain measurements of diffusing photon propagation in solid phantoms,"
Optical Review, 4-5(1997)620-621.
12. K. Hibino and M. Yamauchi,
"Phase determination algorithms compensating for spatially non-uniform phase modulation in phase shifting interferometry,"
Proceedings of SPIE, 3478(1998)110-120.
13. 山内真
「空間光変調素子を用いた実時間ホログラフィ」
機械技術研究所所報, 54-5(2000)227-235.
14. M. Yamauchi,
"Utilization of elliptically polarized light for phase-only modulation by twisted nematic liquid crystal spatial light modulators,"
Proceedings of SPIE, 4296(2001)116-125.
15. A. Márquez, M. Yamauchi, J. A. Davis, and D. J. Franich,
"Phase measurements of a twisted nematic liquid crystal spatial light modulator with a common-path interferometer,"
Optics Communications, 190(2001)129-133.
16. 日比野謙一, 高辻利之, 山内真, 花山良平, J. Burke, B. Oreb
「波長走査干渉計と最新の干渉解析法」
光応用技術シンポジウム資料集, (2004)37-44.
17. 松岡芳彦, 井上尚志, 木塚優子, 山内真, 丸山伸吾, 木下岳司
「軸上集光ビーム生成におけるアクシコンの傾きの影響」
レーザー研究, 33-9(2005)615-619.