

中2での「変化の割合」の学習指導

A Study on Teaching the Rate of Change of Linear Function in Eighth Grade

国宗 進*・羽田明夫**・鈴木洋一** ほか2名***
Susumu Kunimune, Akio Haneda, Yohichi Suzuki, et.al

This study focusses on a way of understanding with “the rate of change” of linear function in lower secondary school, mainly eighth grade. To analyse students’ understanding with the rate of change, we observe students’ performances in explaining mathematical proposition with the linear function in practical lessons.

To explain the property that the rate of change of linear function $y=ax+b$ equals to the coefficient of x , that is “ a ”, only a few students use literal expressions. About 60 per cent of students in a classroom explain that inductively. And some students equally recognize explaining inductively and explaining by using literal expressions.

From the teaching point of view, it ought to be focussed on the way of explaining by using literal expressions, and non-linear functions are treated simultaneously when students investigate the rate of change of linear function.

1. 研究のねらい

本研究は、中学校3年間を見通した関数についての学習指導のあり方を、授業実践を通して検討することを目的としている。

筆者らはこれまでに、各学年の授業計画やその実際、および課題解決場面での子どもの考え方について報告してきた^{1)~4)}。その継続研究として、本稿では「変化の割合」を取り上げ、それについての生徒のわかり方や学習指導上の問題点を検討する。

現在行われている中学校での学習指導全体を見てみると、「文字式による論証」や「図形の論証」の学習指導においては、ある命題が成り立つことを確かめるのに、一般的に証明することの必要性を強調している。

その一方で、中2における1次関数 $y=ax+b$ についての学習指導では、1次関数の変化の割合が一定であることを確かめるのに、 a 、 b の数値が与えられている2、3の1次関数について、いくつかの具体的な変域についてそれらの値が一致することを調べて、帰納的に説明するのが普通である。そして、それでよしとしている。

つまり、一方では一般的に、他方では帰納的に説明するのである。生徒はこのような指導に、疑問を持たないのであろうか。また、関数の変化の特徴をとらえるための「変化の割合」をどのようにとらえているのであろうか。

*数学教育助教授 **附属島田中学校

***大坂 誠(焼津市立和田中学校)・大岡利江(文京区立第六中学校)

このような現状についての問題意識に基づいて、本稿では、次のことをねらいとする。

- (1) 「1次関数の変化の割合は一定である」ことの根拠を明らかにすることをねらいとした授業を実践し、そこでの生徒の課題追究の様相を明らかにする。
- (2) (1)の授業の実際に基づいて、生徒の「変化の割合」についての理解の様相を明らかにし、関数についての学習指導上の問題点を検討する。

II. 研究の内容

1. 中学校での「変化の割合」の位置付け

中学校での関数指導のねらいとしては、次のことが挙げられる。

ア) 事象の中から、関数関係にある2つの数量を見いだす能力を伸ばす。

イ) 関数関係を表、グラフ、式などで表現したり、それによって関数関係の特徴を調べたりする能力を伸ばす。

ウ) 基本的な関数についての特徴を理解する。

エ) 関数の意味についての理解を深め、関数的な見方・考え方や手法をいろいろな問題の解決に利用する能力を伸ばす。

イやウは、アやエについての学習指導を促すための基礎的な知識・技能としての性格を持つものであるが、グラフをかいたり、式化することだけに学習の力点が置かれることのないようにすることが重要である。アについては、導入時の指導のみならず、機会をとらえて関数関係を見いだす能力を伸ばすことが大切である。エについては、ア、イ、ウもねらって、生徒を具体的な解決場面に当面させることになる。的確な課題を用意したい。

なお、このねらいに関して、筆者らが考える具体的な項目については既に述べてある⁶⁾。

本稿で取り上げる「変化の割合」は、上記のねらいうち主にイを達成するための1つとして、中2での「1次関数」の学習指導で扱われる。ここでは、ウに関連して、「変化の割合が一定である」ことが1次関数の特徴であるとしてまとめられる。

中学校での「変化の割合」の取り扱いに関しては、主に1970年代にいろいろと議論されたが、現代化の学習指導要領以降は、平均変化率ではなく「変化の割合」という用語を使い、1次関数や2次関数について変化の割合を帰納的に調べてその結果をまとめ、その後の学習ではそれを性質として使って問題解決に利用していく、という学習展開に定式化されてきたと考えることができる⁶⁾。

また、生徒の「変化の割合」についての理解の様相については、既に筆者らの一員が調査を通して、その一部を明らかにしている⁷⁾。本稿は、それについて、授業研究を通して明らかにしようとするものである。

2. 授業計画の概略

(1) 単元の授業計画

次のように、第2学年「1次関数」の単元について、16時間扱いで授業計画を立てた。毎時間の授業案の詳細、および授業実施上の留意点については、既に報告してある⁶⁾。

第1次 1次関数の意味

第1時 1次関数の意味①

- 第2時 1次関数の意味②
- 第2次 1次関数の値の変化とグラフ
- 第3時 変化の割合①
- 第4時 変化の割合②
- 第5時 1次関数のグラフ
- 第6時 1次関数のグラフのかき方
- 第3次 1次関数を求めること
- 第7時 グラフから式を求める－問題づくり－
- 第8時 作った問題を解くこと
- 第9時 式を求める－変域に注意して－
- 第4次 1次関数の利用
- 第10時 1次関数の利用－図形に関連して－
- 第11時 1次関数の利用－実験式－
- 第5次 課題研究
- 第12時 課題研究①－テーマ設定－
- 第13時 課題研究②－個人追究－
- 第14時 課題研究③－個人追究－
- 第15時 課題研究④－発表会－
- 第16時 課題研究⑤－まとめ－

なお、以下の授業記録等の中に現れる「小集団」、「追究用紙」とは、それぞれ次のようなものである。

「小集団」…原則として毎時間、一斉授業の形態での個人追究の後、生活班をベースとする4人の小集団による討論の場を設ける。そこでは、自分の意見の正しさや不十分さを再認識し、それをより確かなものにしたたり改めたりするなど、自分の考えをより明確にすることができる。小集団であることから、一人一人の発言がなされやすいという利点もある。なお、各班には小ホワイトボードが常時用意されており、構成メンバーそれぞれの考えはそれに書きながら他のメンバーに説明される。

「追究用紙」…授業中、自分の考えを自由に書き込めるようにつくられた用紙。生徒が自分の意見を整理するのに有効であり、考えを書いたりする習慣を身につけさせる効果もある。また、教師側からすると、生徒の個々の考えや傾向、つまづきを授業中や授業終了後にチェックすることができる。

(2) 第3時・第4時の授業計画の概略

目標1, 1次関数 $y = ax + b$ の変化の割合は常に一定で a であることを理解するとともに、変化の特徴を明らかにする。

2, 1次関数 $y = ax + b$ の変化の割合は常に一定で a であることの根拠を確かめる学習を通して、演繹的に推論する能力を伸ばす。

授業展開

1) 反比例 $y = 24/x$ について、変化の割合を調べる。

① x の値が2から6まで増加するときの、 y の値はどのように変化するか考える。

$$(4-12) / (6-2) = -8 \div 4 = -2 \quad \dots -2 \text{ 増える。}$$

yの増加量/xの増加量=変化の割合 という用語の定義を知る

- ② xの値が3から12まで増加するときの、変化の割合を求める。

$$(2-8) / (12-3) = -6/9 = -2/3$$

変化の割合は、調べる場所によって、違うことに気づく。

- 2) 1次関数 $y = 3x - 1$ について、次の変化の割合を求める。

- ① xの値が0から1まで増加するとき
 ② xの値が3から8まで増加するとき
 ③ xの値が-4から2まで増加するとき

気づいたことを発表する。

- ・反比例では違ったが、 $y = 3x - 1$ では変化の割合はいつも決まった数になる。
- ・変化の割合は、 $y = ax + b$ の a になるのだろうか。

- 3) 1次関数では、aがどんな数でも、変化の割合は常に一定でaであるということがいえるかどうかを調べる。

- ・いろいろな数をあてはめて調べている生徒には、その方法以外に調べる方法がないか助言する。(帰納的に調べる生徒が多いと思われる。)
- ・ $y = ax + b$ の a や b を、負の数、分数、小数に変えていろいろ試す。
- ・ $y = ax + b$ について、xの値がmからnまで増加するとして変化の割合を求める。

$$(an+b) - (am+b) / n - m = a(n-m) / n - m = a$$

文字を利用することで、すべての場合についていえることを確かめる。

3. 授業の実際

(1) 第3時の授業記録

- ・日時 1995年12月5日 53分間
- ・授業者 羽田明夫, 観察者 3名
- ・対象 静岡大学教育学部附属島田中学校第2学年1学級
 (出席生徒 男子23名, 女子18名, 計41名)

T1 反比例 $y = 24/x$ について、xが2から6まで増加するときyはどのように変化するだろう。

どんな答え方でもいいです。(問題を板書して、質問する。)

P1 xが2ならyは12で、xが3になればyは8になる。yは4以上12以下の範囲を動く。

P2 yは減っていく。

P3 yは単調に減少していかない。

T2 簡単に表にしてみよう。xが2のときyはいくつですか。

P4 yは12。

T3 xが6のときyはいくつですか。

P5 yは4。

T4 (xの値が2から6まで増加するときに、yの値が12から4まで変化することを、表の数値を指し示しながら) このように変化している。yは減少している。

ではこのとき、xが1増えるごとにyは平均いくつ増えていますか。

x	2	3	4	5	6
y	12	8	6	4.8	4

P6 2 増えてる。

T5 2 増えてる…。

P7 -2 増えてる。

T6 そうですね。2 減少している。-2 増えてますね。このことを「変化の割合」といいます。

$y = 24/x$ について、 x が 2 から 6 まで増加するときの変化の割合は、 $-8/4 = -2$ です。つまり、変化の割合は、 x の増加量分の y の増加量で求められます。

(変化の割合 = y の増加量 / x の増加量 と板書)

では、同じ関数 $y = 24/x$ で、 x が 3 から 12 まで増加するときの変化の割合を求めてみよう。

(5 分間程度)

T7 できた人? …A さん説明して下さい。

P8 x が 3 から 12 まで変化するという事は、(表を板書しながら) x が 3 から 12 まで 9 増える間に、 y は 8 から 2 まで -6 増える。

だから変化の割合は、 $-6/9$ で、 $-2/3$ になると思います。

T8 $y = 24/x$ の、 x が 2 から 6 まで増加するときの変化の割合は -2 でしたが、 x が 3 から 12 まで増えるときの変化の割合は $-2/3$ になりました。 (以上15分)

では続いて、1 次関数の変化の割合を考えてみましょう。

(次の問題を板書する)

1 次関数 $y = 3x - 1$ について、次の変化の割合を求めよう。

- ① x が 0 から 1 まで増加するとき。
- ② x が 3 から 8 まで増加するとき。
- ③ x が -4 から 2 まで増加するとき。

(5 分程度…個人追究の中で、すべて同じ値になることに気づいている。)

T9 変化の割合を求められましたか。できた人? …では、①を B さん。

P9 3 です。

P10 ②も 3 です。

P11 ③も 3 です。

(つぶやきが聞こえてくる。)

T10 何か気づいたことはありますか…。C 君。

P12 $y = 3x - 1$ の変化の割合は 3 になる。つまり変わらない。

P13 反比例の時には、調べる場所によって変化の割合が変わるけど、1 次関数ではいつも同じになる。

P14 違うかもしれないけれど、変化の割合が $y = ax + b$ の a が変化の割合になるのじゃないかな。

(「えー」という声があがる。)

(以上23分)

T11 今日はこのことを追究してみよう。「1 次関数では、変化の割合はいつも同じになるのか。また、 $y = ax + b$ の a が変化の割合になるのか。理由まで考えてみよう。」

(12 分間程度の個人追究)

(以上35分)

T12 それでは小集団で話し合いをしてみましょう。

(10分間程度、小集団による話し合い)

(以上45分)

T13 では小集団を終えて、机をもとの形に戻しましょう。

誰か自分の考えを言ってくれる人はいませんか…。D君。

P15 例えば、式をつくるのに、 $y = 4x - 1$ の場合、この4が変化の割合だということだったけど、それは正しいと思います。それは、この-1は変わらない数で、 $4x$ が変わる数なんだけど、4ずつ変わることになる。xが3ならば、 $4 + 4 + 4$ で、xが4ならば $4 + 4 + 4 + 4$ だから、4増えることになる。だから変化の割合は4になると思います。

P16 $y = ax + 0$ で考えると、aは比例定数で、変化の割合と同じようなものだと考えました。

P17 $y = ax - b$ で考えると、右の表のようになるので、xが1増えるごとにa増えるから、変化の割合はaになると思いました。

x	-1	0	1	2
y	$-a-b$	$-b$	$a-b$	$2a-b$
		a	a	a

P18 $y = ax + 1$ を $y = ax$ と $y = 1$ に分けて考えると、 $y = 1$ の変化の割合は、xが増えてもyはいつも1なので、変化の割合は0になります。 $y = ax$ の変化の割合を考えると、AからBまで増えるとすると、xの方は $B - A$ 増えます。yの方は $a(B - A)$ 増えます。だから、変化の割合は、

$$a(B - A) / (B - A) = a \text{ となります。}$$

(何となくわかってきたが、すっかりしない様子。)

P19 なんかビシッとしないなあ。

T14 時間が来ましたので、次の時間に続きをやりましょう。

(以上53分)

(2) 第4時の授業記録

- ・日 時 1995年12月6日 50分間
- ・授業者 羽田明夫
- ・対 象 静岡大学教育学部附属島田中学校第2学年1学級
(出席生徒 男子22名、女子18名、計40名)

T1 昨日は、「1次関数の変化の割合は常に一定で、 $y = ax + b$ のaになる。」ということをも理由を含めて追究しました。昨日はすっかりしないという声がありましたが、まだしっかり理由がつかめなかった人は、手を挙げて下さい。

(6～7人が手を挙げる。)

T2 昨日、aとbにいろいろな数字をあてはめて調べた人はいますか。

P1 調べました。それで、そのことが言えました。

T3 では、昨日文字を使って考えた2人にもう一度説明してもらおう。最初にEさん(前時のP17のこと)。

P2 (前時の説明を繰り返す。)

T4 では、次にF君(前時のP18のこと)。

P3 (前時の説明を繰り返す。)

P4 でも、それだと比例のときしか言えないんじゃない、bは別だもの。式を2つに分けたらおかしい。

P5 F君のは、どうしてその式が出たのかよくわかりません。

T5 F君の意見には疑問があるようですが、Eさんの考えにも疑問があったら言って下さい。
(質問や意見は出てこない。)

T6 Eさんの意見では、 x が1増えると y が a 増えるということはわかりますが、じゃあ x が20増えたとき y がどのように増えて、変化の割合はいくつかということはどうしたらわかるのですか。20増えるというのも決まっていないですよ。

P6 それも文字を使ったらどうだろうか？

T7 では、全部を文字で考えて変化の割合を求めてみよう。つまり $y = ax + b$ で、 x が m から n まで増加するときの変化の割合を求めてみよう。

(20分間程度、個人追究。生徒にとっては難しいようで、時間がかかっている。)

T8 小集団で話し合ってみよう。

(15分間程度、小集団。約分で手間取っている様子が見られる。)

T9 では、みんなの前で発表してみよう。G君。

P7 (黒板に、表を板書しながら)

x が m から n まで増えるとき、 $n - m$ 増えます。

y は $am + b$ から $an + b$ まで増えるから、

$(an + b) - (am + b)$ 増えることになる。

だから、変化の割合は $(an + b) - (am + b) / n - m = a$

x	m	n
y	$am + b$	$an + b$

T10 どうでしょうか。

P8 いいです。

T11 $n - m$ が約分できるのはいいですか。(数字を例に挙げて、約分できることを確認する。)

(「あーそうか」、「知らなかった。」といった声があがる。この反応から、個人追究の段階で、文字の約分がネックになっていたことがわかる。)

T12 変化の割合はどんなことが言えますか。

P9 1次関数では変化の割合は一定である。

T13 他の関数ではどうですか。

P10 一定ではない。反比例では一定でなかった。1次関数だから一定なんだ。

(この後の残り15分程は、2組の x 、 y の値の組が与えられている1次関数の式の求め方を考えた。)

4. 第3時における生徒の考え方

(1) 追究用紙の記述の分析

第3時の後半において、1次関数 $y = 3x - 1$ ではその変化の割合が3なることを確認した後、授業者は次のように問いかけている。

「1次関数では、変化の割合はいつも同じになるのか。また、 $y = ax + b$ の a が変化の割合になるのか。理由まで考えてみよう。」

この問いに対する生徒の解答を、授業時の追究用紙の記述から分析する。

まず、説明の方法に着目してみると、生徒の解答は大きく次の a 、 b 、 c 、3つのタイプに分類できた。

(a) 文字を使って追究している解答 6名 (15%)

(b) 具体的な1次関数について具体的な数で変化の割合を求めている解答 24名 (58%)

(c) その他の解答

11名 (27%)

以下、細かくみていく。

(a) 文字を使って追究している解答…6名

ア) $y = ax + b$ について、 x の変域を文字を使って考察しているもの。(1名)

[例1] x が z から x まで増加するとき、 x の増加量は $x - z$ 、

y の増加量は $a(x - z)$ となるから、変化の割合は、

$$y \text{ の増加量} / x \text{ の増加量} = a(x - z) / x - z = a$$

同じように、 x が A から B まで増加するとき

$$y \text{ の増加量} / x \text{ の増加量} = a(B - A) / B - A = a$$

イ) $y = ax + b$ について、 x の変域が具体的な数の場合に計算しているもの。(3名)

[例2] x が 5 から 10 に増えるとき、 $(10a + b) - (5a + b) / 10 - 5 = a$

x が c のとき… $y = ac + b$

x が 1 増えて、 $c + 1$ のとき… $y = a(c + 1) + b = ac + a + b$

したがって、 x が 1 増えると、 y は a 増える。

[例3]

x	1	2	3	4	…
y	$a + b$	$2a + b$	$3a + b$	$4a + b$	…

→ → →

+ a + a + a

[例4] $y = ax - b$ について、

x	-1	0	1	2	…
y	$-a - b$	$-b$	$a - b$	$2a - b$	…

→ → →

+ a + a + a

ウ) ある具体的な1次関数について、変化の割合を具体的な数で計算し、それを $y = ax + b$ の場合に読み替えているもの。(1名)

[例5] $y = 4x - 3$ では

(a)

x	1	2	3	4
y	1	5	9	13

→ → →

+ a + a + a

y は、 ax によって変化する。そして、その ax はいつも x が 1 増えるごとに、 a の数ずつ増えていくから、増加量が常に一定で、割合は変わらず、変化の割合は a になる。

エ) 文字を使って説明しようとしているが不十分なもの。(1名)

[例6] $y = ax + b$ で、 x が c から d まで増加するとして、変化の割合を計算しようと試みている。

(b) 具体的な1次関数について具体的な数で変化の割合を求めている解答…24名

オ) 具体的な1次式について、変化の割合を2カ所以上で計算しているもの。(11名)

この11名の内訳は、2つ以上の式について計算しているものが6名、1つの式だけで計算しているものが5名であった。このうち、1名は6つの式について、2名が4つの式について計算している。念には念をいれたのであろう。

また、変化の割合は「一定でaに等しい」ことまでも指摘したものが6名、「一定である」というものが5名であった。

〔例6〕6つの式について、 x が0から1まで増加するときの変化の割合を調べ、変化の割合が常にaになることを確認した。それから、変化の割合が常に一定で、aになるとした。

カ) 具体的な1次式について、変化の割合を1カ所だけ計算しているもの。(9名)

この9名の内訳は、2つ以上の式について計算しているものが4名、1つの式だけで計算しているものが5名であった。

また、変化の割合は「一定でaに等しい」ことまでも指摘したものは4名であった。

〔例7〕 $y = 3x - 5$ について、 x が-8から1まで1ずつ増える対応表を作成し、変化の割合が3になることを確かめている。

キ) 表をかいて、 x の増加量と y の増加量をそれぞれ求めているもの。(4名)

これに基づいて、変化の割合は一定でaであるとしたのが3名、一定であるとしたのが1名である。

〔例8〕3つの式のそれぞれについて、2カ所ずついろいろな変域で変化の割合を求めて、常に一定であることを確認している。

〔例9〕1次関数と反比例の具体的な式をあげ、表にしてみても、1次関数の場合のみ、変化の割合が一定でaになることを改めて確認している。

(c) その他の解答…11名

ク) グラフを利用して考えたもの。(6名)

1次関数のグラフをかいて説明したものが3名、比例のグラフで説明したものが2名である。また、うまくかけないものが1名いた。

〔例10〕グラフが比例と同じで直線になるから、一定の割合で変化しており、変化の割合は一定になる。また、 $y = 3x - 1$ の-1を考えないと、 x が1増えるときは y が3増えるから、変化の割合は3になる。

〔例11〕変化の割合が一定でない場合、グラフはぎざぎざやでこぼこになってしまう。 b が0でなくても直線になるので、一定。また、 x が1だと a をかけると a 、 x が2だと a をかけると $2a$ で、グラフを見ると変化の割合は a となる。

このようにグラフを利用して説明した生徒は、変化の割合が一定であることと、グラフが直線であることは同じであると直観的に認めているのであろう。

ケ) 変わる数と変わらない数について述べているもの。(1名)

コ) $b = 0$ の場合(比例)で考えようとしているもの。(1名)

サ) 課題を繰り返し書くのみで、追究が進まないもの。(3名)

(2) 第3時終了後のアンケート結果

変化の割合に対する授業前の生徒の知識をとらえるために、第3時終了後に次のようなアン

ケートを実施した。

『あなたは、今日の授業の前に次のことを知っていましたか。次の質問に対して、「はい」「いいえ」のどちらかに、まるをつけて下さい。

- 1) 「変化の割合」という言葉を知っていましたか。
- 2) 変化の割合は、 y の増加量/ x の増加量ということを知っていましたか。
- 3) 1次関数の変化の割合は、一定だということを知っていましたか。
- 4) また、その一定の変化の割合が、 a であることを知っていましたか。』

結果は右の表の通りである。

アンケート結果（数値は人数）

問い	はい	いいえ
1)	18	22
2)	16	24
3)	12	28
4)	10	30

また、生徒一人ひとりが1)～4)をどのように答えているかを調べてみると、次のようにまとめることができた。

- ①タイプ… 1)～4)がすべて「はい」の生徒 10名
- ②タイプ… 1), 2)が「はい」, 3), 4)が「いいえ」の生徒 6名
- ③タイプ… 1), 3)が「はい」, 2), 4)が「いいえ」の生徒 2名
- ④タイプ… 1)～4)がすべて「いいえ」の生徒 22名
(未回答生徒1名)

このことから、授業前には、変化の割合について、学級全体の約半数に当たる22名の生徒には予備知識はなく、1次関数ではそれが一定であることまで知っていた生徒は、全体の1/4であったといえることができる。

ここで、前項(1)(a)で述べた6名の生徒（変化の割合が一定であることを説明するのに文字を使用した者）についてのアンケートの結果を調べてみると、①タイプ、③タイプがそれぞれ1名、④タイプが4名であった。今回の授業において、一定であることを説明するのに文字を使用したことは、変化の割合についての予備知識の有無には関係がなかったと考えられる。

(3) 第3時終了後の感想

第3時終了時には、授業の感想を記述させている。

ここでは、その感想に基づき、(2)で述べたアンケートの結果も参考にして、生徒の考え方を検討する。感想は自由に記述させたので、全体に対する割合等については述べられないが、具体的な記述内容に基づいて述べることにする。

1) 発表した4名の感想

まず、授業終盤で自分の考えを発表したP15～18の4名の感想について、述べておく。なお、P15, P16, P17の3名はいずれも、前項のアンケート4問すべてに「いいえ」と答えている。

$y = 4x - 1$ について、 x が3から4まで増えると y が4だけ増えるのでと説明したP15は、「関数ははがてなゆえ、うまくまとまらなく3人の意見をきいて道をみいだせた。自分の意見はまだあまい…」と書いている。この授業の段階ではあいまいな理解のままであったものと考えられる。

$y = ax + 0$ と考へて、変化の割合を比例定数 a と同じであると発言したP16は、文字式を使ったP18の説明について、「P18君は、数字をあてはめないで文字でやっていた。ぼくは数字でやっていたので文字でもできることがわかった。最後はみんな同じことをいっている。」と書いている。変化の割合が一定であるという4つの説明の共通性には着目しているが、「みんな同じことをいっている」という文言からは、そう主張することの根拠の違いにまでは目が向いていないことがわかる。

$y = ax - b$ について、 x の値が1ずつ増えるときの y の値の増加量を示して説明したP17は、「私は、自分の考えはとてもよい!と思っていたのに、みんなよくわからなかったみたいで残念でした。」と書き、「もっともっと自分の考えを深めて、一定で、 a になることをうまく証明したいと思います。」とまとめている。自分の説明に自信をもって、図形の論証で学習した「証明」という言葉を使っていて、理由を述べる方法にまで思いを馳せていることが読み取れる。

なお、この生徒は、1次関数の一般式として $y = ax + b$ ではなく、 $y = ax - b$ を取り上げて考へている。これは、授業中の前段階で $y = 3x - 1$ について具体的に調べたことに影響されたものであり、別の意味で文字使用の難しさを表している。

$y = ax + 1$ を $y = ax$ と $y = 1$ とに分けて考へ、 $y = ax$ について x の値がAからBまで増えるとして文字を使って一般的に説明したP18は、前項のアンケートの4問すべてに「はい」と答えている。感想には、「4人目(つまりぼく)が説明がうまくできていない。自分ではわかっているけど、相手に説明するのが下手。」と書いていて、他者への説明についての不十分さに目を向けている。

2) 感想の全体的な傾向

生徒が書いた感想の全体的な傾向としては、次のア、イ、ウの3点を指摘することができるであろう。

ア) $y = ax - b$ について、 x の値が1ずつ増えるときの y の値の増加量を示して考へたP17の説明を「わかりやすい」としたものが多い。

「P18君の意見はこういう考へ方もあるなあと思いました。P17さんの意見はすごくわかりやすくとてもよいと思いました。」というように、わかりやすさを強調した生徒、「私は図とかで説明していたんだけど、図だとわかりやすいけれど、あまり納得がいきませんでした。でも、P17さんは文字式でやっていた見た目はむずかしそうだったけど、よく考へてみるとすごくわかりやすいし理くつもなっていてすごいなあと思いました。」というように、わかりやすさと共に「理屈」という点からのよさを主張した生徒が多かった。次のように文字を使用することの意義にも触れている感想があった。

「 x と y 全部に数字をあてはめるのではなく、 $y = ax - b$ という式をそのまま表にするなど、わかりやすく工夫した考へ方に感心。」

「P17さんの説明は、 a で表していたので、いかにもどの数字でも大丈夫っていうことがよくわかった。 $+b$ が入ると、何か表に表す数字が不規則に見えるけど、やっぱりそういうのも理由があるからそれを見つけるのがおもしろかった。」

イ) P18の説明は難しすぎるというものが多い。

P18の説明は、 $y = ax + 1$ を $y = ax$ と $y = 1$ とに分けて考へ、 $y = ax$ について x の値がAからBまで増えるとして文字を使って一般的に説明したものである。対象とした1次関数にも

文字 a を使い、 x の変域も文字 A 、 B を使っているだけに、「P18の考えがよく理解できなかった。」「ぼくは根拠をつかむ所までいけなかったの、なおさらなっとくさせられてしまった。それと、P18君の言ったことは難しすぎて全くわからなかった。」というように、「難しすぎる」と書いた生徒が多かった。

その中には、「P18のはよくわからなかった。最初の分数の答えはゼロと言ったけどあれはなんなんだろう。」と、具体的に納得できない点を述べているものもあった。これは、先の授業記録の中にもあるように、 $y = ax + 1$ を $y = ax$ と $y = 1$ とに分けて考え、後者の「 $y = 1$ の変化の割合は、 x が増えても y はいつも 1 なので、変化の割合は 0 になります。」という部分がわからなかったというものである。

ウ) 4つの説明を対等にとらえている生徒がいる。

「1次関数では、変化の割合はいつも同じになるのか。また、 $y = ax + b$ の a が変化の割合になるのか。理由まで考えてみよう。」という問いに対する説明として、授業では4つの説明があがったが、それらを対等にとらえている生徒がいる。

「P17さんの、 x が1増えると、 y が a 増えるというのだったんだけど、これは変化の割合が一定だということを証明したと思う。それで、P17さんのやり方をもっと簡単にしたものが、追究する前にやった、 x が0から1まで増えると y は-1から2まで増えるとか、そういうのだと思った。」と書いた生徒は、文字を使った説明と数値による帰納的な説明とを同じレベルでとらえていると考えられる。また、「1つのことから、しかも関数みたいな答えの少なさそうなものにも4つの考えが出てすごいと思った。」と書いた生徒は、解答の多様性に目が向いてしまって、それぞれの説明の方法の有用性までは着目できないでいるものと考えられる。

5. 「変化の割合」の学習指導への示唆

ここでは、今回の授業研究を通して明らかになった、「変化の割合」、特に1次関数の変化の割合に関する学習指導上の改善点について検討する。

① 文字を利用して一般的に説明する方法にも目を向ける

今回の授業では、「1次関数 $y = ax + b$ では、変化の割合はいつも一定で a である」ことの根拠を確かめるのに、41名の生徒のうちの35名が文字を使用していない。この35名の内訳は、表や具体的な式に数値を代入して確かめた生徒が25名、グラフに着目して考察を進めた生徒が5名であり、残りの5名は思うように考察できなかった。

中2の教科書では「1次関数の変化の割合が一定である」ことを確認するには、具体的な数値の場合について確かめるようになっており、中学校での関数指導のねらいからすれば、このような確かめ方で十分であるとも考えられる。その一方で、「文字式による証明」や「図形の論証」の学習場面では一般的に証明することが強調されている。このような扱いの結果、生徒によっては「図形の性質は演繹的に論証しなければならない。」「関数は演繹的に論証する分野ではない。」といった具合に、単元によってその追究方法を区別してとらえてしまうことも考えられる。

今回の授業で、文字を使って説明したり説明しようとした生徒は6名であった。だが、授業終了後の生徒の感想の項でも指摘したように、文字式を使って一般的に証明する方法に授業で出会ったことによって、そうすることの必要性を感じている様子が全体的にうかがえた。また、

小グループでの話し合いの時に、「いつでもいえるかが問題なんだよ」「理由が問題なんだ」という会話が行われているのである。

帰納的な説明の方法を大切にしながらも、文字式を使って一般的に説明する方法にも確実に目を向けさせていく必要がある。

② 変化の割合が一定であることの根拠の理解を一層深める

アンケートの結果によれば、今回の授業前に「変化の割合」の用語を知っていた生徒は18名いた。このうちの10名は、変化の割合が（ y の増加量）／（ x の増加量）であることや、1次関数 $y = ax + b$ の変化の割合は一定で a であることまでも知っていたのである。

しかし、この10名のうち、今回の授業で「1次関数 $y = ax + b$ では、変化の割合はいつも一定で a である」ことを確かめるのに文字を利用した生徒は、1名しかいなかった。彼らは「変化の割合」を授業以前に知る際に、帰納的に調べて確認するにとどまっていたか、あるいは公式的に覚えることでよしとしていたのであろう。

一方、今回の授業で文字を利用しようとした6名のうちの4名は、「変化の割合」についての予備知識が全くない生徒であった。「変化の割合」について知らないのに、これまでの「図形の論証」等についての学習を思い起こして、根拠を確かめるには一般的に証明することが自然であったとも考えられる。

生徒が「1次関数の変化の割合は一定である」ことを知って、それを単に利用して問題を解決することだけに学習の重点を置くだけでなく、一定であることの根拠についての理解も十分に深めておくことが重要である。そのための手立てとしては、上の①で述べた方法に目を向けしていくことになるであろう。

③ 変化の割合が一定でない関数も同時に取り上げる

現在の中学校での関数指導において、変化の割合は、関数の変化や対応の様子を特徴づけるものの1つとして、中2での1次関数で扱われている。そこでは、「1次関数 $y = ax + b$ では、変化の割合は一定で a である」とまとめており、中3での $y = ax^2$ の学習をするまでは他の関数の変化の割合にふれることはない。1次関数において変化の割合が一定であることは重要な性質であり、それは、グラフが直線になることの根拠としても扱われる。しかし、他の関数で変化の割合について考察することがないために、「どんな関数でも、変化の割合は一定で a である」ととらえてしまっている生徒も少なくないであろう。このような理解の不十分さが、中3での $y = ax^2$ の学習で露見することがある。

今回の授業では、反比例について変化の割合を導入し、1次関数の場合にはそれが一定であることを強調することをねらってみた。「変化の割合」そのものを深く理解し、1次関数ではそれが一定であることを理解するためには、1次関数だけを考察の対象にするのではなく、他の関数にも同時に着眼していくことが必要であろう。今回の授業では中1で既習の反比例を取り上げたが、 $y = ax^2$ やねらいによっては $y = ax^3$ 等を取り上げることも十分に考えられる。

Ⅲ. おわりに

授業を行ってみて感じることは、生徒にとって発見や驚きのある楽しい授業を1時間1時間行っていくことの大切さである。また、数学的な知識や考え方を押しつけるのではなく、その根拠や過程を大切に授業を進めていくことも重要なことである。

さて、「3年間を見通した関数指導のあり方を探る」というねらいを掲げて、この研究を始めて、6年経った。今後も、次のことについて継続して検討していく必要があると考えている。

- (1) 具体的な事象の考察や数学的な思考力の育成をより一層重視して、これまでに作成した関数についての授業計画を改善し、それを実践、検討すること。また、そのための学習問題を開発すること。
- (2) 他領域での、関数的な見方や考え方を育成するための意図的な学習指導について、教材の系統を見直し、授業実践をふまえて検討すること。
- (3) 関数の課題解決場面における生徒の考え方を解明すること。
- (4) 学習指導要領改訂のたびに揺れ動いている中学校での関数指導のあり方について、教材の系統を見直し、授業実践をふまえて提言を行うこと。
- (5) 生徒の数学学習についての興味・関心やその変容をとらえる方法について考察するとともに、その実態を明らかにすること。

[引用・参考文献]

- 1) 国宗進・大坂誠・望月敏行「1次関数の指導について」『静岡大学教育学部附属教育実践研究指導センター紀要第2号』1993,pp.39-68
- 2) 国宗進・大坂誠・鈴木洋一ほか「関数 $y = ax^2$ の指導について」『静岡大学教育学部附属教育実践研究指導センター紀要第3号』1994,pp.47-62
- 3) 国宗進・大坂誠・鈴木洋一ほか「中学校での比例・反比例の指導について」『静岡大学教育学部附属教育実践研究指導センター紀要第4号』1995,pp.11-26
- 4) 国宗進・鈴木洋一・羽田明夫「関数の課題解決場面での子どもの考え方」『静岡大学教育学部附属教育実践研究指導センター紀要第5号』1996,pp.17-31
- 5) 1)に同じ。
- 6) 国宗進「中学生の“変化の割合”についての理解」『第29回数学教育論文発表会論文集』1996,pp.103-108
- 7) 国宗進「文字式の活用－変化の割合の扱いに関連して－」『静岡大学教育学部研究報告(教科教育学篇)第27号』1995,pp.65-83
- 8) 1)に同じ。