静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要　№9 p.11～30 (2003)

〈論文・実践報告〉

中学校での図形の学習指導の改善
―― 作図し証明する過程を重視して ――

An Improvement in Teaching Geometry in Lower Secondary School
−The Third Report−

榛葉伸吾*・園田博人*・国宗　進**
Shingo SHINBA, Hiroto SONODA, and Susumu KUNIMUNE

(平成15年1月10日受理)

This study focusses on teaching and learnig geometry in lower secondary school.
We had already proposed basic principles to make lesson plan about geometry from seventh grade to ninth. Based on this principles, we had made a plan about every lessons and taught it.
By observing practical lessons and analyzing their writings at these lessons, we pointed out the merit that we start teaching spatial figures at seventh grade, and the possibility that we teach the propositions about the triangles, quadriraterals and so on at eighth grade by the method that students and teacher proceed the lessons according to the order that students want to check and prove the problem.
This report points out, it is better we take the process that at first students construct the figures, then prove whether the way of constructing methods are good or not. In these lessons, many students learn geometry with great interest.

1　研究のねらい

本研究は、中学校３年間を見通した図形についての学習指導のあり方を、授業実践を通して検討することを目的としている.

これまでに、中学校での図形指導に関する問題点を指摘し、その改善に関する筆者らの基本方針を明らかにした（国宗・羽田・榛葉、1999)。また、中学校３年間を見通した授業計画を提案し、それに基づいた授業での生徒の理解の様相を明らかにするとともに、授業計画の適否についても検討した（羽田・榛葉・国宗、2001；榛葉・羽田・園田・国宗、2002)。そこでは、筆者らの基本方針は、大筋において実践が可能であるという結論が得られたと考えている。本稿は、その継続研究の報告である。

本稿のねらいは、中１、中２の授業における生徒の理解の様相を明らかにし、それによって筆者らが提案した授業改善の方針や授業計画に基づいた学習指導が実現可能であるかを検討することである。

＊附属島田中学校教諭　＊＊数学教育教授

2　図形の学習指導改善の基本方針

筆者らが提案している「図形の学習指導に関する基本方針」のうち、本稿の研究内容に大きく関係するのは、次の４点である。(1),(2)は指導学年に関するものであり、(3),(4)は各学年での指導方針に関するものである。なお、このような「基本方針」を立てた理由については、既に述べてある。(国宗・羽田・榛葉,1999；羽田・榛葉・国宗,2001)。

(1)　従来中２で扱っている「平行線の性質と条件」から「多角形の内角、外角の和」までの内容を中１で取り扱い、それを「論理的に考察する基礎を培う」ための中心教材として位置づける。

(2)　中１では「条件を満たす点の集合と図形、基本作図」を単独では扱わない。それを中２で扱い、作図しその方法が正しいことを確かめるという展開をして論証指導につなげる。

(3)　中１の学習は、空間図形から導入する。

(4)　中２の学習は、小学校や中１で学習した図形の性質をクラスで共有し、既知のものとして認めて展開する。

3　中学校第１学年での学習指導

（1）第１学年の図形指導の基本的な考え方

筆者らのこれまでの実践に基づいた研究では、終始一貫して「第１学年での図形指導を、空間図形から導入する」ことを主張している。

我々の身の周りには無数の空間図形があり、その中に現れる平面図形も含めて統一的に図形学習を進めていくことは自然である。空間図形と平面図形を別々に指導するのではなく、空間図形の学習の中に平面図形の内容を取り込んで指導をすることによって、空間図形の学習が豊かになることはもちろん、平面図形の内容についても広い見方で学習を進めることができ、時間数を生み出すこともできる。

例えば、点と直線、直線や平面の位置関係などについては、空間で平面とまとめて指導するため、重複して指導することを避けることができる。平面上の２直線の位置関係のように、分類してまとめる意義が伝わりにくいものも、空間における位置関係と統合的にみることによって十分に理解される。効率よく図形指導を展開する上でも有効な方法である。

このような理由によって「空間図形から導入する」ことを主張しているが、この点については、既に何回か報告している通り、実践上たいした問題がないことが明らかになっている（羽田・榛葉・国宗,2001；榛葉・羽田・園田・国宗,2002)。

このような経過を踏まえて、筆者らの実践では、次のことが前提となって計画されている。

◎　第１学年での図形指導を、空間図形から導入する

さらに、今回は特に次の２点を意図した授業を実践した。

①　空間図形の中にある１つの平面に着目して考えることを強調して学習を進める

空間図形を考察するときに、見取図や展開図、断面図や投影図等を考えることが多い。このように１つの平面に着目してとらえることは、平面に関する既知の性質等を使って空間図形の特徴や性質を見つけたり確認したりすることができるという点で、大変重要である。それによって、空間図形の特徴や性質を論理的に考える場が与えられることになる。

②　模型や道具を有効に利用する

空間図形の学習では、空間での１つの平面がとらえにくく、論理的な思考へとつながらないことがある。このような場合は、平面をとらえやすくする方法として、模型を利用したり針金や紐といった道具を使うと有効であろう。空間をイメージすることは、生徒にとって負荷が大きいものである。それを自分の力で乗り越えるためには、実際にその模型を目の当たりにしたり作ったり、１つの平面を針金や紐を使って表したりする等の方法によって、イメージを具現化する必要がある。それによって、問題の解に確信を持つことができ、その理由を論理的に考えようとする。特に第１学年の図形指導では、このような方法が有効であろう。

（２）第１学年での図形の授業計画

上述の「図形指導の基本的な考え方」に基づいて、昨年の実践を参考に授業計画を立て、実践した。「空間図形・平面図形」の学習には21時間を当てている。

第１、２時　【空間図形の意味、展開図の意味】

① 空間図形、立体の意味を理解する。

② 多面体、正多面体の意味、及び正多面体が５種類あることを理解する。

③ 立体の展開図の意味を理解する。

第３時　【点、直線、平面】

① 点と直線、半直線、線分、及び平面の意味と表し方を理解する。

② 直線は２点、平面は３点で決定することを理解する。

第４～６時　【直線や平面の位置関係、角】

① 空間上での２直線、平面と直線、２平面の位置関係を理解する。

② 平行、垂直の意味及び表し方を理解する。

③ 角の意味、記号、表し方を理解し、空間における角度についての概念を深める。

第７、８時　【２点間の距離】

① 距離の意味及び２点間、点と直線、平行な２直線間の距離について理解する。

② 三角形の２辺の和は他の１辺よりも長いことを理解する。

以下、項目名だけをあげる。

第９時　【回転体・円・おうぎ形の弧と面積】

第10、11時　【柱体・錐体の表面積、体積】

第12時【線対称・点対称】

第13、14時　【平行線の作図、円の接線】

第15～17時　【対頂角、平行線の同位角・錯角】

第18～21時　【三角形の内角の和、多角形の内角の和、外角の和】

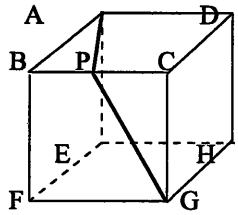
（３）授業の実際と生徒の考え方

① 空間図形の中にある１つの平面に着目して考えることを強調して学習を進める

『２点間の距離』－第７、８時の実際－

２点間の距離に関連して、空間図形の問題として次の問題を提示した。見取図による表現の特徴や展開図で表すことの有効性を知るとともに、２点間の距離の意味を理解することがねらいである。

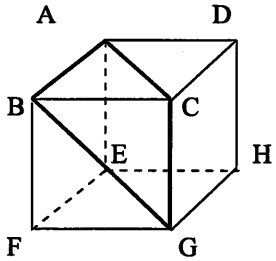
右のような立方体がある。点Ｐが辺ＢＣ上をＢからＣまで動くとき、ＡＰ＋ＰＧの長さはどのような変わり方をしますか。



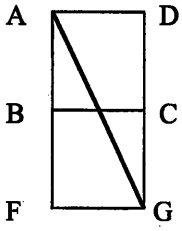
第７時では、生徒が個人で追究をする時間を十分に確保した。その前半は問題の見取図をもとに考えさせ、後半は立方体の模型を作成したり針金や紐などの道具を利用して考えるようにした。第８時では、結論を出した理由をきちんと説明させながら、全体で意見を発表させた。その際に出された意見は、次のようなものであった。

（ア）だんだん短くなる。

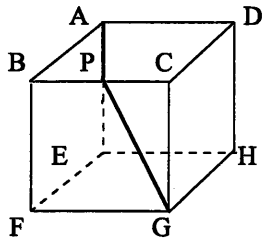
ＡＢがＡＣに変わるときに長くなる。
ＢＧがＣＧに変わるときに短くなる。
ＡＢ＋ＢＧよりＡＣ＋ＣＧの方が見た目で短く見えるから。



（イ）はじめはだんだん短くなるが、途中からだんだん長くなる。

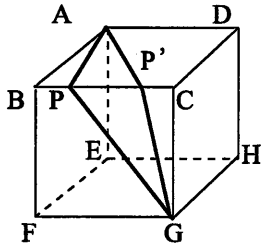


下の図のように、展開図でＡＧを結んだときに、点ＰはＢＣの中点になり、最も短くなるから。



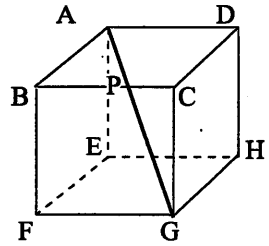
（ウ）変わらない。

ＢＰ＝ＣＰ'としたとき
ＡＰＧ＝ＡＰ'Ｇになる。
△ＡＢＰと△ＧＣＰ'は合同な図形なので、ＡＰ＝ＧＰ'になる。同様にしてＧＰ＝ＡＰ'となる。



（エ）はじめはだんだん短くなるが、途中からだんだん長くなる。

見取図の上で点Ａと点Ｇを結び、この長さＡＧが最も短いから。



【考察】

生徒達は、この問題を実にいろいろな考えで追究している。

（ア）と答えた生徒は、見取図の見た目の辺の長さにだまされている。見取図は、奥行きの長さが実際の長さより短くかれるため、見た目の長さで判断してしまうと誤った答にたどり着いてしまう。

（エ）と答えた生徒も、見取図上でＡＰ＋ＰＧの長さを処理してしまっている。

（ウ）と答えた生徒は、ＢＰ＝ＣＰ'の場合のＡＰＧとＡＰ'Ｇについてだけを比較して結論を出してしまっている。この条件のもとでは、必ずＡＰ＋ＰＧ＝ＡＰ'＋Ｐ'Ｇになる。しかし、点Ｐは辺ＢＣ上を動くため、ＢＰ≠ＣＰ'の場合についても考える必要がある。

正解は（イ）だが、生徒はこの結論を導き出すため、展開図を利用して説明していた。例えば、図１のように、展開図の必要な部分だけをかき、辺ＢＣ上を点Ｐが動いた場合のＡＰＧを数本引く。「点Ｐが辺ＢＣの中点にきたときにＡＰＧは直線になり、最も短くなる。中点から離れていくと、ＡＰＧの曲がり方が大きくなり、長くなっていく。」と結論を出した生徒がいた。また、「それぞれの場合のＡＰの長さ、ＰＧの長さを全て測る。ＡＰ＋ＰＧの値を全ての場合で出し、長さの変化をみたら、だんだん短くなり、点Ｐが辺ＢＣの中点で最も短くなり、その後また長くなっていく。」と結論を出した生徒がいた。図２のように、「点Ａ、点Ｇを中心に、半径を正方形の一辺とする円をかく。それぞれの円に挟まれた平行四辺形のような形の中の辺の長さだけを比較すればいい。真ん中の線が一番短く、そこから外へいくにしたがって長くなっている。」とした生徒もいた。

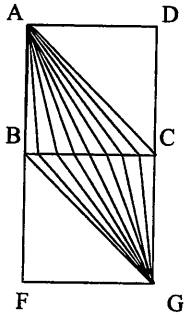


図１

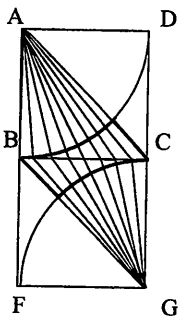


図２

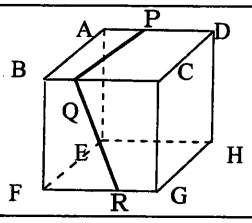
このような授業によって、生徒は見取図では長さや角の大きさが正しく表現されていないことや、この問題の場合には展開図で表して考えることの有効性を知ることができたであろう。

② 模型や道具を有効に利用する

②－１ 『空間における角度を考えよう』－第６時の実際－

生徒がイメージを具現化する手だてとして、模型や針金、紐などの道具を利用した授業を展開した。

右の図のように立方体の辺ＡＤ上に点Ｐ、辺ＢＣ上に点Ｑ、辺ＦＧ上に点Ｒをとる。
∠ＰＱＲの大きさはどうなるだろうか。



ここでは、生徒の次のような活動が見られた。

・立方体の模型を作り、点Ｐ、点Ｑ、点Ｒの位置を変えながら何本か線を引いて考えた。

・立方体の模型を作り、点Ｐ、点Ｑ、点Ｒを含む平面で切断して考えた。
・針金を使い、この３点を通るように点Ｐ、点Ｑ、点Ｒの位置を変えながら実際に∠ＰＱＲを作って考えた。
・紐を使い、この３点を通るように点Ｐ、点Ｑ、点Ｒの位置を変えながら実際に∠ＰＱＲを作って考えた。

②－２　『２点間の距離』－第７時の実際－

第７時で取り上げた問題は、前項①に示してある。

ここでは、生徒の次のような活動が見られた。

・立方体の模型を作り、辺ＢＣ上で点Ｐの位置を変えながら何本か線を引いて考えた。
・立方体の模型を作り、辺ＢＣ上を動く点Ｐの位置を確認してから、模型を広げて展開図にして、そこに何本か線を引いて考えた。
・針金を使い、点Ａ、点Ｐ、点Ｇを通るように折り曲げ、点Ａと点Ｇの位置を確認してから針金を伸ばし、長さを測って考えた。
・紐を使い、点Ａ、Ｐ、Ｇを通るようにして、点ＡとＧの位置を確認して紐を切る。辺ＢＣ上の点Ｐの位置を変えながら、紐をそのつど切り、それぞれの紐の長さを比較して考えた。

【考察】

③－１と②－２両方の問題とも、最初は模型や針金、紐を与えないで、まずは見取図から考え、自分なりの意見を持たせるようにした。途中経過として、どのような意見があるか、全体の場で発表させ（理由については触れない）、幾つかの考え方があることを全員で確認した後に、模型や針金、紐を与えた。見取図で考えた意見に自信がない生徒も、実際に模型や針金、紐を利用して実測することにより、自分の考えが正しかったのか、誤っていたのかを確認することができた。自分の意見に自信をもった生徒は、意欲的にその理由を考えようとし、また、自分の意見が誤っていた生徒は、どうして間違ったのかを考えようとする姿が見られた。

授業後に参観者から、最初から模型や針金、紐を使って活動させる方法もあるのではないかという意見をいただいた。それも一つの方法であるが、最初から具体物に頼るのではなく、まずは見取図という限られた条件で自分のイメージをふくらませることも大切ではないかと考えた。そして、そのイメージを具現化することにより、より確かな意見をもち、理由を考えるようにしたいというねらいがあった。

②－１では、ほとんどの生徒が模型を作るか針金を利用した。角度を求めるためには、紐では角の大きさを固定できないので、針金の方がよいと考えたのであろう。②－２では、ほとんどの生徒が模型を作るか紐を利用した。辺の長さを求めるためには、針金では曲げ伸ばしがやりにくく、紐の方が都合がよいと考えたようである。道具を利用するにも、問題に適した道具を選択する姿が見られた。

（４）まとめ

以上に述べた実践に基づいて、授業展開の妥当性を検討する。

①　平面で考えることにより、イメージが確かなものになる

空間図形では、問題を把握したり解決するときに視覚的イメージをもつ。しかし、イメージだけでは「こうなるのではないか」という予想はできるが、実際にそうなるのかどうかという

不安が常にある。見取図だけで考えている生徒が「先生これでいいの？」と質問してくることが多かったのは、そのような不安な状態から脱し、確信を得たかったからであろう。そこで、そのイメージを実際に形に表すことができれば、予想はより確かなものになっていく。生徒はそのときに、展開図や断面図などの平面図形として捉えて考えていた。

② 具体物を使うことにより、空間図形の性質や特徴がつかみやすくなる

模型や針金、紐などの具体物を利用することで、生徒の意欲的な活動が見られた。また、イメージを具体的に平面図形として表すことができるため、実測が可能になり、「確かにこうなる」という結論を導き出すことができた。結論がはっきりすることにより、空間図形の性質や特徴がつかみやすく、自分の意見に自信をもつ生徒が多かった。

4 中学校第２学年での学習指導

（1）第２学年での図形指導の基本的な考え方

今回は、次の①、②を重点にして授業を展開した。また。③は、空間図形に関する問題を第２学年の指導に位置づける試みである。

① 小学校や中１で学習した性質をクラスで共有し、既知のものとして認める

「小学校や中１で学習した図形の性質をクラスで共有し、既知のものとして認める。そして、生徒がどんどんそれを使い、新たな図形の性質を見いだしたり証明したりする授業を展開する。」というのが、我々の研究・実践での大きな方針である。それは、数学の系統を重視するあまり、小学校の学習によって生徒が既に知っている二等辺三角形や平行四辺形に関する性質を対象にして、論証の初期の段階から三角形の合同条件を使った証明を要求している従来の指導を改善する一つの提案である。筆者らは、この論証の初期指導の改善が、中学校での図形指導改善の最重要課題と考えている。

具体的には、次のような手だてを取る。

まず単元の初めに、角の大きさを求める問題をいろいろな方法で解く。その学習において、問題を解く際に利用されしかもクラスで認められた性質については、今後証明に利用してもよいものとして、クラス毎に準備したワークシートにそのクラスの定理としてまとめていく。その図形の性質を一人でも知らなかったり、それが成り立つかどうか疑問をもった場合には、そのワークシートにのせることは保留する。もしその性質が証明できれば、ワークシートに書き加えていく。

② 作図を積極的に取り入れる

作図の問題を授業に積極的に取り入れる。そうすると生徒は、教科書に記されている典型的な作図の方法のみならず、実にさまざまな作図の方法を考え出してくる。その中には、確かに正しい作図方法であるとわかるものもあるが、本当にそうなるかどうかがはっきりしないものも含まれている。

そこで、次のような思いが働き、論証に自然とつながっていく。

「こうすれば作図できそうだ」→「でも、この方法で本当に正しいのだろうか」

→「では、理由を考えてみよう」

③ 第２学年でも、立体作りと論証とをセットにして、空間図形を取り上げる

第２学年での図形指導で、論証と関連づけて空間図形を扱おうというものである。「第２学年でも、立体の作製と論証をセットにして扱えば、空間図形を取り扱うことが可能であろう」

というのが、私たちの考えである。従来の教科書や授業実践では、平面図形に関するものだけであった。それは、これまでの長年の実践の積み重ねによる一つの結論なのであろうが、空間図形を１つも取り扱わない空白の１年間は、空間図形の見方を豊かにする上で大きな障害であろう。

空間図形は、生徒にとって、わかりにくく抵抗の大きいものであろう。その原因として、教師側の問題としては、第１学年での数学の授業時間数が十分でないので、３学期の終わりの時期に少ない時間数で指導しがちということがあげられる。また、空間図形という教材そのもののもつ難しさもある。それは、３次元の立体について、２次元に表された見取図や展開図等を通して学習していることによる。

そこで、本単元では「立体の作製」を取り入れた。現物を手に取り、適度な演繹的推論によって考察していく。「見取図に示された立体を作製する」という具体的な目標を生徒にもたせることで、空間図形と論証とを結びつけることができると考えたのである。

（2）第２学年での図形の授業

上述の「図形指導の基本的な考え方」に基づいて、昨年とほぼ同様な授業計画を立てて実践した。「三角形・四角形」の学習には28時間かかっている。その概略は、次の通りである。

第１～３時【三角形の合同条件】

第４～６時【定理と定義】

第７～11時【二等辺三角形】

①二等辺三角形をいろいろな方法で作図する。

②作図方法が正しいことを証明する。

③命題の逆の意味と、逆の命題が真であることは証明する必要があることを理解する。

第12～15時【平行四辺形】

①平行四辺形をいろいろな方法で作図する。

②作図方法が正しいことを証明する。

第16、17時【立体を作ろう】

第18、19時【直角三角形の合同条件】

第20、21時【三角形・四角形の関係】

①いろいろな三角形、いろいろな四角形の包含関係をベン図で表す。

②ベン図を用いて図形の性質について整理する。

第22～24時【円の性質】

第25、26時【平行線と面積】

第27、28時【定理のまとめ】

①既習の定理を自分なりに分類する。

②定理間の関係を考察する。

（3）授業の実際と生徒の考え方

①　小学校や中１で学習した性質をクラスで共有し、既知のものとして認める

今回の実践では、大まかな方針はこれまでの方向を継続し、次の２点について、一層の授業改善を図ることにした。

1）既に学習している性質をクラスで共有し既知のものと認めて推論を進めていくという、学習の方法をとらえることを意図した授業を明確に位置づける。

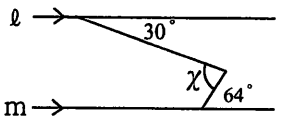
2）単元のまとめの段階に、学習した定理をもう一度整理する時間を設定する。

以下、1）については①－1で、2）については①－2で述べる。

①－1　『いろいろな方法で角の大きさを求めよう』－第4、5、6時の実際－

ここでは、次の問題を取り上げた。この問題の解決を通して、既に学習している性質をクラスで共有し既知のものと認めて推論を進めていくという学習の方法をとらえることをねらっている。その際、いろいろな方法で解くように指示した。

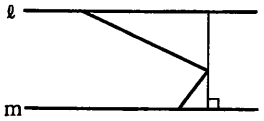
○右の図で、ℓ // mのとき∠χの大きさをいろいろな方法で求めよう。



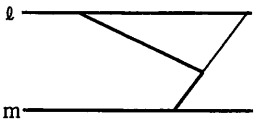
第4時では個人で考える時間を確保し、第5時に意見を出し合い、第6時ではこの問題を解くのに使った図形の性質をクラスで確認し共有するという展開で、3時間の授業を行った。

第5時に出された解決の方法は次のものである。なお、この対象生徒は、第1学年で「平行線と角」から「多角形の角」までを学習しているので、「対頂角」、「平行線と同位角・錯角」、「三角形の内角・外角」、「多角形の内角・外角」の性質は既習事項である。

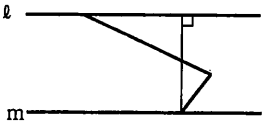
ア　垂線をひく



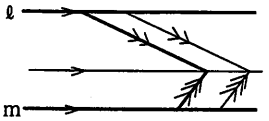
イ　延長する



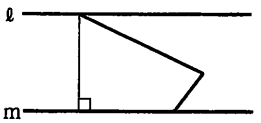
ウ　垂線をひく



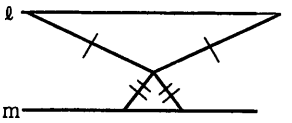
エ　平行四辺形をかく



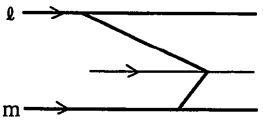
オ　垂線をひく



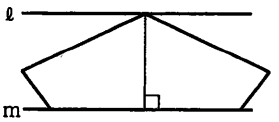
カ　二等辺三角形をかく



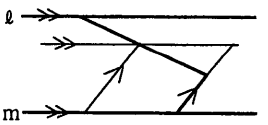
キ　平行線をひく



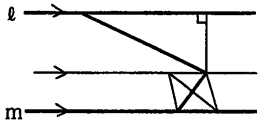
ク　線対称な線をひく



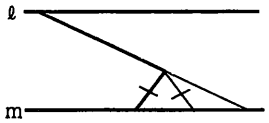
ケ　平行線をひく



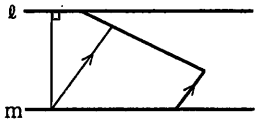
コ　ひし形をかく



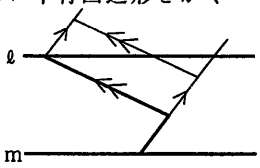
サ　二等辺三角形をかく



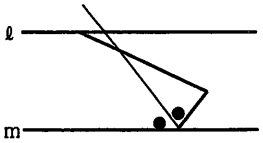
シ　垂線，平行線をひく



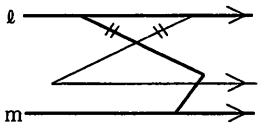
ス　平行四辺形をかく



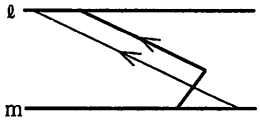
セ　角の二等分線をかく



ソ　二等辺三角形をかく
平行線をひく



タ　平行線をひく



【考察】

従来の指導ならば、この問題は、定理を一通り学習してから扱い、定理活用の練習という位置づけで扱われるであろう。ここでは、知っていることをおおいに使い、それを定理としてクラスで共有するためのきっかけの問題として扱った。角度を求める問題が好きだという生徒が多かったためか、非常に多くの解き方が発表された。

第４時では、「対頂角」、「平行線と同位角・錯角」、「三角形の内角・外角」、「多角形の内角・外角」のような既習の性質以外にも、「カ、サ、ソ」では「二等辺三角形の底角は等しい」ことが、「エ、ス」では、「平行四辺形の対角は等しい」ことが使われている。

第５時に友人の角の求め方の説明を聞いて、それに対して疑問を抱いた生徒は一人もいなかった。小学校で既習の「二等辺三角形の底角」「平行四辺形の対角」の性質は、従来の指導ではまだ「証明していないから使ってはいけない」とされていたものである。生徒にとっては、この２つの性質が成り立つことは、それほどまでに、当たり前のこととしてとらえられていることがよくわかる。

第６時では、「二等辺三角形の底角」と「平行四辺形の対角」を、クラスで定理として共有した。具体的には、定理や図形の性質を記入する用紙を配布し、そこに書き込んでいくことにした。その際に、クラス全員が認めればその用紙に記入し、記入された定理・性質は、新たな性質を証明したり、問題を解く際に活用してもよいことを確認した。

ここではまた、多くの解き方を「補助線の引き方」で分類できるということも確認した。例えば、「ア、ウ、オ」は「垂線を引く」方法であり、引く場所が違うと角度を求めるのに使う図形の性質も違ってくる。そのような視点で見ると、補助線には「平行線」、「線対称な線」、「ある線分を延長する」、「角の二等分線」などがあることも、この問題から見えてくる。

①－２ 『定理のまとめ』－第27、28時の実際－

前項で示したように、今回の実践は「クラスのみんなが認めたら定理としてクラスで共有する」という方向で学習を進めてきた。その理由は、その時点での生徒の理解の仕方を大切にしようと考えたからである。

これまでにもこのような方法で学習を進め、その実践を発表すると、参会者の意見は大きく２つに分かれることが多かった。

１つは、「生徒の思いを大切にした価値のある実践である」という意見。

もう１つは、「言いたいことはわかるが、数学の体系はどうなるのか。生徒にとっては、逆にわかりにくいのではないか。」という意見。

前者の意見からは、私達の方向はまちがっていないという自信をいただいたが、心の中に常に引っかかっていたのは、苦言を呈している後者の意見であった。これまでの実践では、多くの生徒は意欲的に取り組んでいたのであるが、定理が教科書に書かれいている順ではなくバラバラに出てくるので、数学の苦手な生徒が困惑したような顔を見せているのを目にしていた。

そこで、今回の実践では、大まかな方針はこれまでの方向を継続し、単元のまとめの段階に、学習した定理をもう一度整理する時間を設定するという改善を試みた。

具体的には、次のような方法で行った。

① 定理記入用紙に記入した定理を再度プリントし、カード化する。

② 関係があると思う定理を近くに並べたり、逆の定理を横に並べたりして、自分なりにカードを分類して用紙に貼り付けていく。

③ 完成したものを発表し、友人のまとめ方と自分のまとめ方の違いや類似点を見つける。

実際には、生徒たちは次のような視点で定理をまとめていた。

ア ひとまとめにできる定理をまとめる。

例 三角形についての定理、四角形についての定理

イ 逆の関係をセットにする。

例 「平行四辺形の性質」と「平行四辺形になるための条件」

「二等辺三角形の性質」と「二等辺三角形になるための条件」

ウ 包含関係にあるものを大きなくくりでひとつにする

例 「平行四辺形の対角線は中点で交わる」と「長方形の対角線は中点で交わる」

【考察】

この「定理のまとめ」の時間では、図形の関係をベン図で表す学習を行った後だったので、定理をまとめる際にベン図の考え方が生かされていた。

生徒にとって気になっていたことは、他のクラスでどんな定理が出たのかということだった。つまり、自分のクラスで出なかった定理がないかが気になっていたのである。そこで、定理のまとめの時に他のクラスで出てきた定理を紹介し、それもクラスで認められれば定理として書き加えた。その結果、他のクラスで出された定理については、すべて証明しなくても定理として認められた。

このようにして、単元の最終段階では、クラスによるばらつきはなく、学年全体で定理を共有することができた。そして、教科書に出てきた定理はすべて扱うことができた。

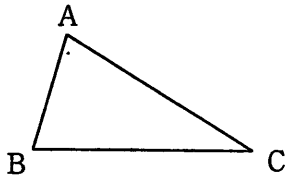
②　作図を積極的に取り入れる

ここでは、作図を積極的に取り上げてそれを証明し、定理としていくという一連の流れで展開した授業について、３例を示し、そこでの生徒の思考の様相を明らかにする。

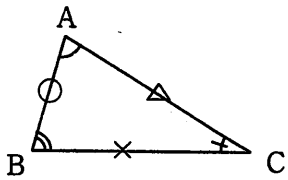
②－１　『合同な三角形を作図しよう』－第１時の実際－

第２学年になって初めての図形の授業である。まず「合同」という用語の意味、記号とその使い方を指導し、次の問題を提示した。

○　△ＡＢＣと合同な三角形を作図しよう。

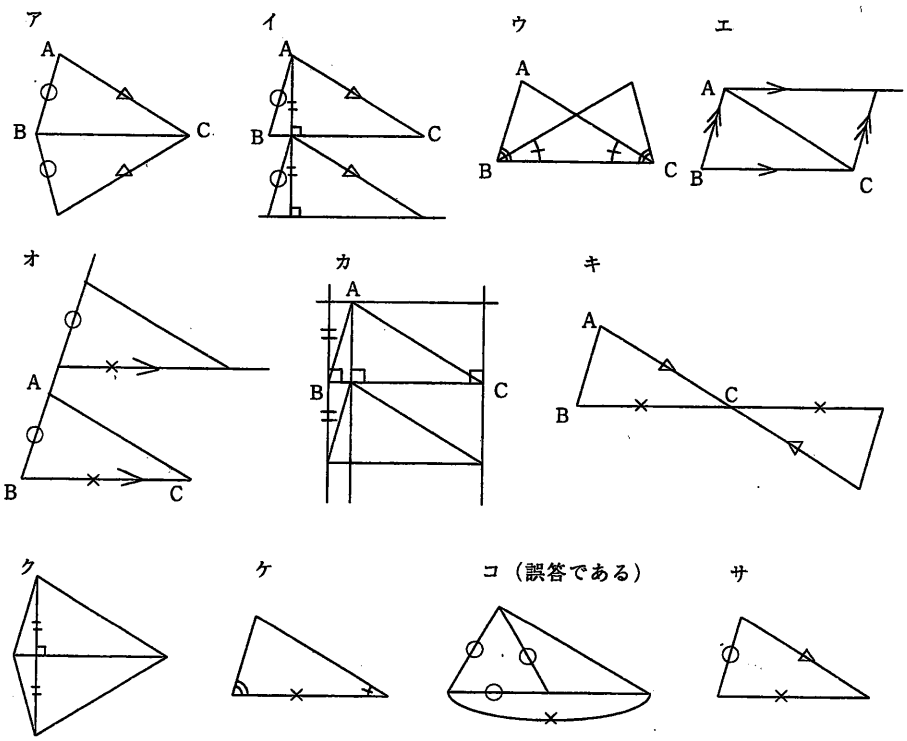


もとになる三角形を印刷したワークシートを配布し、個人で追究する時間を十分確保した。その際、どうしても使いたい場合には分度器を使ってもいいことを生徒に伝えた。



発表の際には、どことどこを等しくしたかを明確に述べるように、また、その時に板書した三角形の角と辺に印をつけて、等しくした所に同じ印を付けるように指示した。

生徒からは次の作図方法が発表された。



【考察】

図形の授業の第１時であるが、生徒たちは活発に討論をした。特にコの方法が発表されたときには、発表した生徒の方法を良く聞き、自分でもやってみて本当にできるかどうかを吟味している生徒が多かった。

誤答が出たときに生徒から指摘がなければ、授業者は積極的に関わろうと考えていた。それが、その意見を述べた生徒に対する誠実な対応であり、その意見を深く考察することによって授業が深まるということを他の生徒にも伝えたいと考えていた。

「コ」の方法は誤答であるが、それについては、次のような議論があった。

教師「本当にこの方法で作図できるのかなあ？」

生徒Ａ「これだと∠Ｂが６０°に決まってしまうけど、そうとは限らないよね。」

生徒Ｂ「∠Ｂ＝６０°なら正しいかもしれないけれど、そうとは限らないね。」

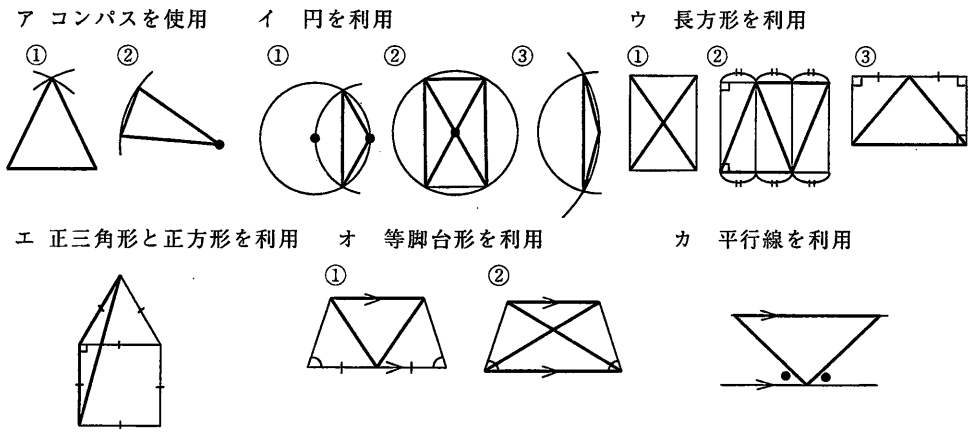
このような発表がなされた後に、三角形の合同条件を確認した。なお、授業の最後には、分度器を使わずに角を移動する作図の方法を紹介し、その理由も三角形の合同条件を利用して説明できることを補足した。

②－２　『二等辺三角形を作図しよう』－第７時の実際－

第７時では次の問題を扱った。前時までに「二等辺三角形の底角は等しい」、「平行四辺形の対角は等しい」ことを定理としてまとめている。

○　二等辺三角形をいろいろな方法で作図しよう。

生徒からは、次の作図方法が発表された。



上の方法が発表された後の授業は、次のように展開された。

発表された作図方法を、コンパスで２つの辺を等しくした方法「ア、イ、エ」と、それ以外の方法「ウ、オ、カ」の２つに分類した。

そして、二等辺三角形の定義を確認し、２つの辺を等しくとったものは確かに二等辺三角形といえるが、それ以外の方法でなぜ二等辺三角形が作図できるのかを考察した。

「オ、カ」の説明で、「２つの角が等しいので二等辺三角形になる」という内容の説明があっ

たので、「本当にそうか？」と教師が関わった。すると、「二等辺三角形の底角は等しいんだから、２つの角を等しくすれば二等辺三角形になるのは決まってるじゃないか」という意見が返ってきた。

そこで、教師から逆が必ずしも正しいとはいえない例を出し、ある命題が正しくても逆が正しいかどうかは証明が必要なことを全員で確認した。

次の時間には、なぜ「２つの角が等しければ二等辺三角形になる」のかを証明し、それを使って「オ、カ」も証明した。

【考察】

生徒たちは、この授業で初めて「作図」→「証明」→「定理化」という流れによる学習を体験した。この授業を通して、授業者は次のような感想をもった。

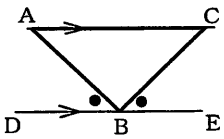
① 生徒の意識の流れがスムーズに進む。

② 「ある命題が正しければ、逆も正しい」という意識が、生徒の中に根強くある。

③ 教科書の問題練習などをしなくても、自分たちの考え出した作図方法が正しいかどうかを考察することが証明の練習になる。しかも、生徒はその問題にとても意欲的に取り組む。なぜならば、それがそのクラスにしかないオリジナルな問題だからである。

このクラスでは、例えば次のような問題がそれに当たる。

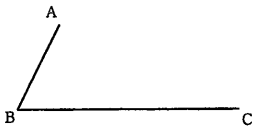
右の図で、ＡＣ//ＤＥ、∠ＡＢＤ＝∠ＣＢＥならば△ＡＢＣは二等辺三角形であることを証明しなさい。



②－３　『平行四辺形を作図しよう』－第12時の実際－

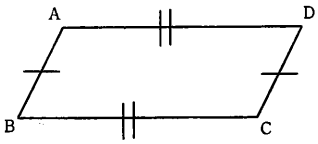
第12時では次の問題を取り上げた。なお、ワークシートには、３点Ａ、Ｂ、Ｃがかいてあり、４つ目の点Ｄを作図する形式で出題した。

○　平行四辺形ＡＢＣＤをいろいろな方法で作図しよう。

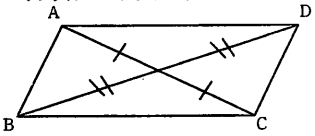


次の方法が発表されたので、なぜその方法で平行四辺形が作図できるのかを考察した。

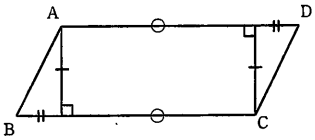
ア　２組の向かい合う辺を等しくする



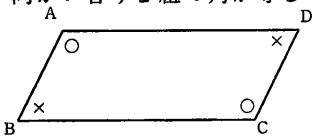
イ　対角線が中点で交わるようにする



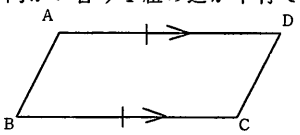
ウ　垂線を引き，図の長さを等しくとる



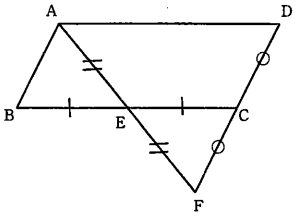
エ　向かい合う２組の角が等しい



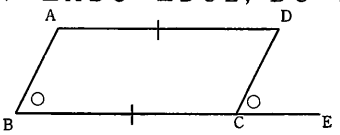
オ　向かい合う１組の辺が平行で等しい



カ　ＢＥ＝ＥＣ　ＡＥ＝ＥＦ　ＦＣ＝ＣＤ



キ　∠ＡＢＣ＝∠ＤＣＥ，ＢＣ＝ＡＤ



（キは誤答）

【考察】

ここでも「キ」のような誤答が出たが、これに対しては、「もしＡＢの長さがもっと長ければ、ＡＤが１つには決まらないのではないか」という意見が出された。このように１つ１つの方法が正しいかどうかを考察することを通して、思考力が養われる。

ここでも、「作図」→「証明」→「定理化」という流れは、スムーズであった。

②　立体作りと論証をセットにして空間図形を取り上げる

『立体を作ろう』－第16、17時の実際－

この授業は、平面図形についての学習に終始する第２学年での図形学習において、立体を取り上げて、適度な演繹的推論を行う場を用意すると共に、生徒の興味・関心を高めることをねらっている。通常の授業のように、まず一斉の形態で問題把握の後に個人追究、その後に小集団での検討、そして、終盤は全体での検討という展開である。

１）問題把握

授業は次のように始まった。

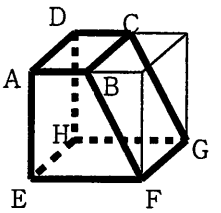
教師「１年生の時には、こういう立体を作ったね。」

右の見取図を板書し、実際に立体を生徒に見せる。

生徒「うん、作った作った。」、「みんな、できたよね。」

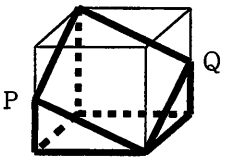
教師「この立体は、こことここが中点だったね。」

板書した見取図の点Ｂ、Ｃを指さして、２点が立方体の辺の中点であることを確認する。そして、右の見取図を板書した。



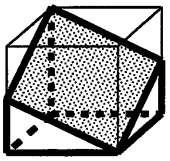
教師「今日はこういう立体にチャレンジしてみよう。昨年作った立体との共通点は、どちらも立方体を平面で切ってできた立体であることと、この立体もこの２つの点が中点であることです。それでは作ってみよう。」

板書した見取図の点Ｐ、Ｑを指さして中点であることを確認し、作業に入るよう指示した。



2）個人追究

生徒たちは立体づくりに熱中して取り組んだが、30分ほど経つとざわざわしてきた。うまくいくと思って立体を作ったら、上のふたの部分がうまくくっつかない。



この四角形は正方形であると思ったが、うまくいかない。いったいこれはどんな四角形なのだろうか。そこで、これまでの既習の性質や定理、論証によって身につけた知識をフルに活用して追究が始まっていた。

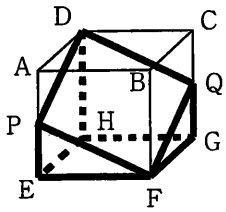
追究の始まりは、立体を作るという外的活動の度合いが高かったが、追究を進めるにつれて内的活動に入っていく様子が見られた。

授業者である私はしばらくそんな様子を黙って眺めていたが、生徒たちは、もう周りの友人の様子を気にし始めた。そこで、小集団で意見を交換するように促した。

3）小集団での検討

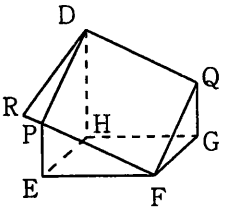
ここでは、立体のふたの部分がどんな四角形になるのかを考察している小集団の話し合いの様子を紹介する。

小集団①



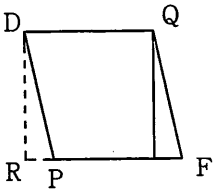
Ａくん「ぼくは、この四角形ＤＰＦＱは正方形だと思います。それはもとの立体は立方体だから、１つ１つの面はすべて合同な正方形なので、△ＡＰＤ≡△ＥＰＦ≡△ＧＱＦ≡△ＣＱＤから、４つの辺の長さがすべて等しいからです。」

このように言いながら、自分で作った立体をみんなに見せたが、それは、ふたの部分が横にはみ出している立体であった。



Ｂくん「ぼくもはじめは、正方形だと思ったんだけど、どうしてもこの横の部分がはみ出しちゃうんだよね。だから、はみ出した部分を切り取って、足りない部分に貼り付けたらうまくいきました。」

Ｂくんはこう言いながら、自分の作った立体を見せた。それは、△ＤＲＰを切り取って、辺ＤＰが図の辺ＱＦの部分に重なるようにセロハンテープで貼り付けて作った立体だった。



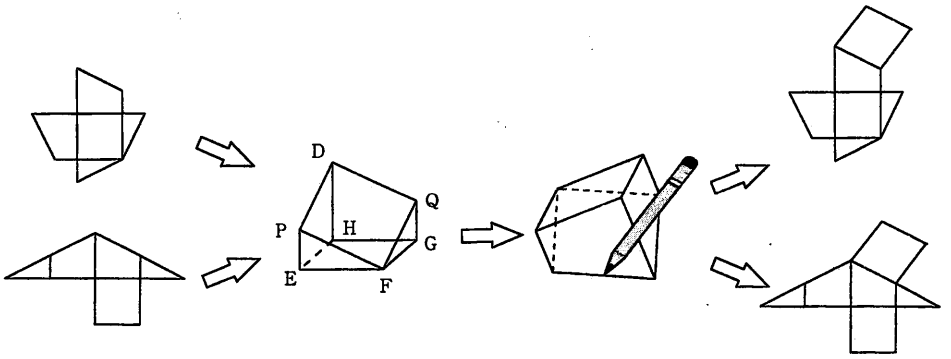
Ｃさん「でもＢくんのように作ると、本当にひし形ができるのかなあ。だって、はじめに作るのが正方形でしょ。だとしたら、辺の長さは等しいはずだから、ＤＱ＝ＤＲだよね。そして、△ＤＲＰを切り取るので、この三角形は直角三角形です。だから、ＤＰの長さの方がＤＲの長さより長くなるはずです。ということはＤＰ≠ＤＱとなり、辺の長さが等しくないので、ひし形にはならないと思います。」

この小集団では、どのように作るかを具体的に話し合っていて、ふたの部分が正方形ではなくひし形であるという方向で話し合いが進んだ。

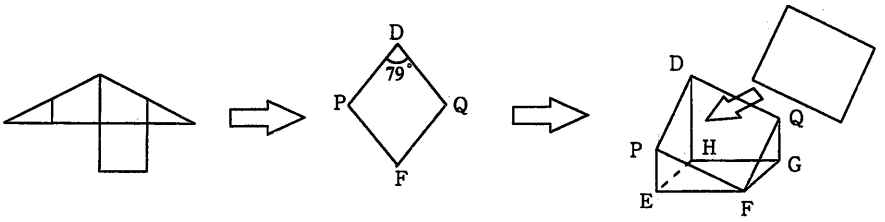
小集団②

別の小集団では、次のようなやりとりが見られた。

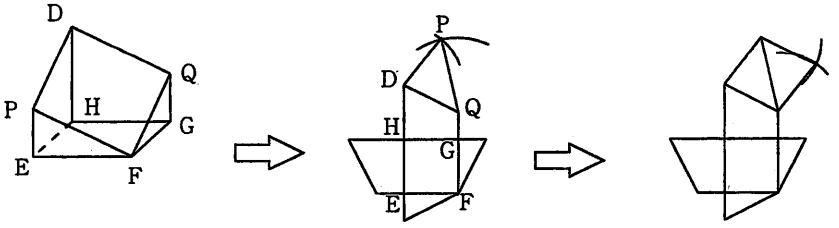
Ｄくん「ぼくは、ずるいかもしれないけど、ふたの部分だけ、作らずにおいて、はじめにそれ以外の部分を作りました。そして、できた立体を裏返しにして、ふたの部分の縁を鉛筆でなぞって四角形をかき写して、ふたの部分を作りました。」



Ｅさん「私は、Ｄくんと似ているけれど、ふたの部分の作り方が違います。私もはじめにふたのない立体を作りました。私はその立体の、∠ＰＤＱの角度を測りました。79°だったので、四角形ＤＰＦＱを図のように作り、そしてふたを貼り付けました。」



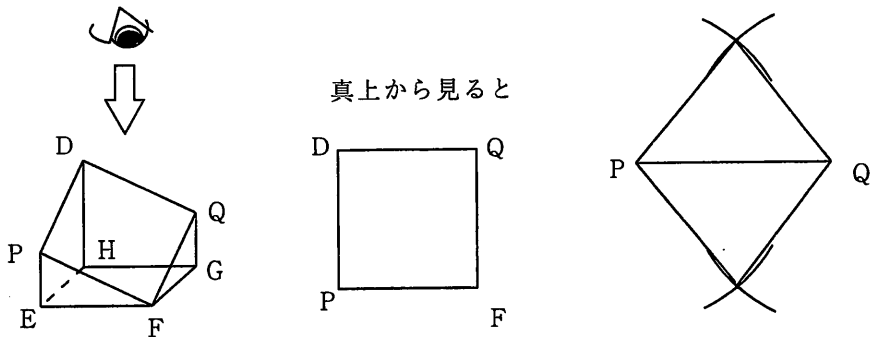
Ｆくん「ぼくも、はじめはＤくんやＥさんのようにふたのない立体を作ろうと、展開図をかきました。そして、ふたのないまま組み立ててみました。でもそれを見ているうちに、四角形ＤＰＦＱの対角線ＰＱの長さは、正方形ＨＥＦＧの対角線ＥＧの長さと等しいことに気がつきました。それを利用すると、△ＤＱＰはコンパスと定規で作図できます。△ＤＱＰができれば、後は同じように△ＰＱＦを作図して展開図が完成します。」



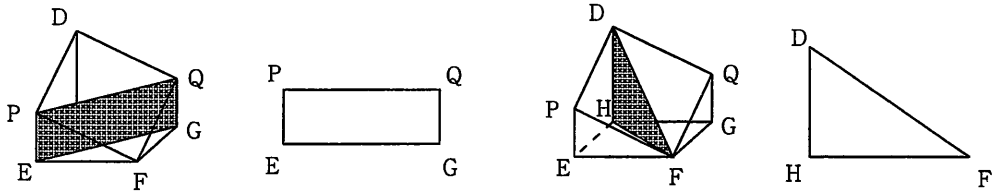
4）全体での検討

全体発表でも、小集団活動で出された上記のような意見が出された。さらに、次のような見方も発表された。

Ｇくん「ぼくは、Ｆくんと同じように展開図を作りました。しかし、このように考えて作りました。ふたのない立体を真上から見ると、ＰＱの長さがＥＧの長さと等しいこことがわかります。そして、４つの辺の長さは等しいので、ひし形ということがわかります。だから、まずＰＱの長さを測って線分を決めておいて、その両端から１辺の長さをコンパスで測って作図しました。」



Ｈくん「ぼくは、ふたのない立体を切断して考えました。ＰＱにナイフを当ててまっすぐ下に切断すると、切り口は長方形になります。だから、ＰＱ＝ＥＧです。また、辺ＤＨと点Ｆを通るように切ると、切り口は直角三角形になります。この直角三角形は、立方体の１つの面の正方形の１辺の長さがＤＨと等しく、正方形の対角線の長さがＨＦと等しくなります。」



【考察】

はじめて第２学年で空間図形を扱ってみたが、生徒は、１年生の時より数段論理的に考察することができた。それは、論証を既に学習してあることが大きいためであると考えられる。

授業中の生徒の様子から、「分度器で角度を測ること」や「定規で長さを測ること」、あるいは「できた立体を裏返して、そのふたの部分の四角形を紙に写し取ること」よりは、「自分の頭の中で、切断してみること」や「見方を工夫して長さがどこと等しいか考察して、それをもとに展開図を作製すること」の方が数学的であると考え始めていることがうかがえた。

このことは、より詳しく分析する必要があろうが、教師が「測りたければ測ってもいいよ」、

あるいは「ずるい方法だと思うものでもいいから発表してごらん」などの指示を与えても、なかなか測ろうとしなかったり全体では発表されなかったりしたことからも推察される。

立体の切断は、今回の学習指導要領から削除されたが、空間図形を考察する際の重要な考え方であることが、今回の授業からはっきりと確認できた。第１学年での授業とのつながりもあるが、空間図形を考える際には、「どこからどのように見るか」、「どこをどう切断するか」などを考えることが、空間図形の見方を豊かにし、問題を解決する際に有効に働く。単に立体を観察するだけでなく、自ら切断したり投影したりというように、対象に働きかけて考察することの重要性をとらえる場面を与えているのである。

（4）まとめ

以上述べた実践や考察に基づいて、授業展開の妥当性を検討する。

①－１　小学校や中１で学習した性質をクラスで共有し、既知のものとして認めて授業を進めることにより、展開がスムーズになり、生徒にとって未知の性質を扱う時間が増える

今回の授業展開では、「小学校でやった図形の性質なのに、なぜまた証明するのか」という声は聞かれなかった。むしろ、展開がスムーズで、中学校で初めて出てきた学習内容により多くの時間を割くことができた。つまり、わかりきったことを学び直していた時間がなくなり、授業がより魅力的になったと考えられる。

①－２　定理間の関連のまとめをする時間の設定により、定理を個々バラバラに見るのではなく、体系を意識することができる

ただ単にカードを並べるという単純作業ではなく、定理同士の関係を考えてカードを並べていく。すると、これまでバラバラに出てきた一つ一つの定理が、関連のあるものとして目に入ってくる。そんな様子が授業では見られた。

②　作図を積極的に取り入れることによって、生徒の能動的な取り組みが期待できる

生徒が行う作図には、多くの方法がある。明らかに正しいと思える方法もあるし、正しいかどうかはっきりしないものもある。そこで生徒は、どうしてその方法が正しいのか、あるいは誤っているのかをはっきりさせたくなり、非常にスムーズに論証につながっていった。

また、クラスの友人が考えた作図方法の正誤を確かめることになるので、意欲的な取り組みが見られた。

今後の課題としては、逆から入ることによる混乱をどう解消するかということがあげられる。二等辺三角形も平行四辺形も、作図してから証明に入る。つまり、性質の「逆」から学習に入っているわけだが、この点でやや混乱が見られた。逆の証明はできるが、「二等辺三角形の性質」や「平行四辺形の性質」を証明しようとした際に、何を証明に使っていいのか、仮定と結論の混乱が一部の生徒に見られた。今後、どのようにすればそうした混乱が解消できるかを解明したい。

③　第２学年でも空間図形を取り上げることが可能である

空間図形を扱うことで、授業にも変化が生じ、生徒は主体的に取り組んだ。

立体づくりを取り入れたが、それによって、作製から論証へ、外的活動から内的活動へと学習活動は自然に流れた。立体の作製の良さは、完成させたいという意欲が思考につながり、具体的に図形を考察できるところにある。完成できたときには、達成感があり、生徒の表情は喜びに満ちている。

従来のような平面図形一辺倒の第２学年での図形学習と異なり、空間図形を取り上げた論証の学習は、教師の私にとっても変化に満ち、ワクワクする授業だった。

5　おわりに

今後の課題として、次のことがあげられる。

① 筆者らが考える「基本方針」に基づいた実践の可能性を、さらに実証的に検討する。

② 第２学年から第３学年に移った「相似」の単元の学習をどう扱うか、２年生で扱った場合と比較してどのような違いがあるのかを検討する。

③ 第２学年での円に関する学習をどう扱うか、どの程度まで扱うことが可能なのかを検討する。

今後も、このような課題を追究して、生徒にとって興味がもてる図形の学習指導のあり方を探っていきたい。

＜引用・参考文献＞

藤森章弘・羽田明夫・榛葉伸吾.「より豊かな数学学習をめざして」.日本数学教育学会誌数学教育第81巻第5号.1999, pp.39-42.

羽田明夫・榛葉伸吾・国宗進.「中学校での図形の学習指導の改善－中１での授業実践に基づいて－」. 静岡大学教育実践研究指導センター紀要No.7. 2001, pp.23-41.

羽田明夫・榛葉伸吾.「作図から証明への過程を重視した図形学習－数学的活動の楽しさを実感する授業の創造－」. 日本数学教育学会誌数学教育第84巻第5号.2002、pp.20-28.

小関熙純編著.「図形の論証指導」. 明治図書.1987.

国本景亀（研究代表).「空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善」平成6～7年度科学研究費補助金研究報告書.1996.

S.Kunimune and E.Nagasaki, Curriculum Changes on Lower Secondary School Mathematics of Japan- Focused on Geometry,in Curriculum Changes in the secondary school,Freudenthal institute.1996.

国宗進.「図形の論証指導 改善の視点」. 第31回数学教育論文発表会・テーマ別部会 論証研究部会.1998.

国宗進・羽田明夫・榛葉伸吾.「中学校での図形指導の改善」. 第32回数学教育論文発表会論文集.1999, pp.221-226.

国宗進.「中学校での図形指導の改善－日本中等教育数学会雑誌での論考に基づいて－」. 静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第31号.2000, pp.27-53.

中原忠男.「21世紀型の算数教育の方向と研究課題」. 日数教学会誌算数教育.1998、pp.16-23.

太田伸也.「図形指導における論証の位置づけ」. 第31回数学教育論文発表会.1998.

榛葉伸吾・羽田明夫・園田博人・国宗進.「中学校での図形の学習指導の改善－生徒の探究活動を重視して－」. 静岡大学教育実践研究指導センター紀要No.8. 2002、pp.49-66.