

# 二重振り子におけるカオス

工学部共通講座 増田 健二

## 1. はじめに

最近、若者の理科離れが学会やマスコミ等でも問題視されている。理科（物理）が、中・高校生から敬遠されているということである。その実体は何であろうか。以前のように子供の中に「科学する心」が失われたとは思われなく、演示実験などを通じて多少なりとも理科への興味楽しさを広める取り組みを行っている。

具体的には、前回（第3号）の技術報告<sup>1)</sup>したように、小中高校生向けの科学実験をテーマとした「静岡大学テクノフェスタ in 浜松」において、「超伝導の謎」と題した演示実験を行った。今回取り上げる「二重振り子」もテクノフェスタや科学の祭典さらに大学の講義等で演示実験され活用されている教材である。

## 2. 二重振り子の仕組み

図1に二重振り子の概略図を示す。二重振り子は、厚さ3mm幅30mm長さ200mmと165mmの2枚の真鍮板による、2つの剛体振り子からなっている。振り子の回転部分にベアリングを用いれば、振動が減衰しないうちに十分に不規則な運動の様子が観察できる。

不規則な運動をする仕組みとしては、振り子が2つあることとともに大振幅振り子の周期が大きく影響する。振り子の振幅が小さい場合は、線形化して周期 $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ で求まる。 $\ell, g$ は各々糸の長さ、及び重力加速度である。大振幅振り子（非線形振り子）の周期の測定をビデオカメラを用いて行った<sup>2)</sup>。

最大の振れ角と周期の関係を示す式を用いて説明すると、非線形振り子の方程式は、

$$\theta = \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

となり、式(1)で記述される振り子の周期は、最大の振れ角を $\alpha$ として、

$$T_\alpha = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} K(k) \quad (2)$$

で与えられる。

ここで、 $K(k)$ は $k = \sin \frac{\alpha}{2}$ を母数とする第1種の完全楕円積分で、この値は便法を用いて求める。便法としては、相加平均と相乗平均の極限值Mを求め算出する。

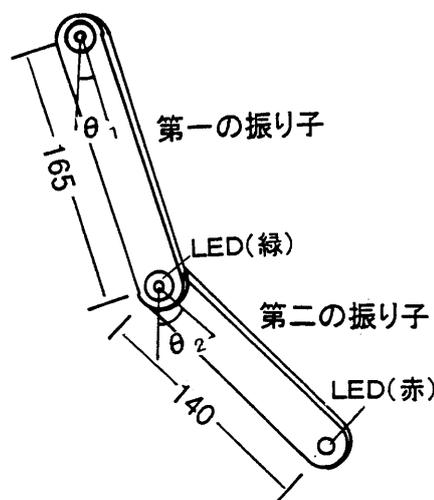


図1 二重振り子の概略図

<  $K(k)$  を算出する便法 >

$$a_0 = 1, b_0 = \sqrt{1-k^2}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_n = \sqrt{a_{n-1} \times b_{n-1}} \quad (3)$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$a_n, b_n$  は同じ極限值  $M(a_n, b_n)$  を有し

$$\frac{1}{M(a_n, b_n)} = \frac{2}{\pi} K(k) = \frac{T_\alpha}{T_0} \quad (4)$$

$$\left( T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \right)$$

< 最大の振れ角  $\alpha = 120^\circ$  の場合 >

$$k = \sin \frac{120^\circ}{2} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_0 = 1, b_0 = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 0.75, b_1 = \sqrt{a_0 \times b_0} = 0.7071$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 0.7285, b_2 = \sqrt{a_1 \times b_1} = 0.7282$$

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 0.7283, b_3 = \sqrt{a_2 \times b_2} = 0.7283$$

( $T_0 = 1.3782$ [s])

$$T_\alpha = \frac{T_0}{M(a_3, b)} = \frac{1.378}{0.7284} = 1.892$$
[s]

図2に最大の振れ角  $120^\circ$  の1周期分の変位のグラフを示す。測定は、ビデオカメラを用い、第一の振り子のみを使用した。グラフのX軸と交わる時間を補間法で用いて測定する。測定より求まる周期は1.868[s] になった。

同様の方法で最大の振れ角と周期の関係をグラフにしたのが図3です。この理論曲線と測定値を比べると  $110^\circ$  以下の角度ではよく一致する。最大のふれ角が  $120^\circ$  より大きくなると周期も急激に大きくなり、回転部分の摩擦が影響から、理論曲線から測定値がずれる。

二重振り子の初期値  $\theta_1, \theta_2$  が大きいほど、より不規則な運動を行うことは、第一、第二の振り子の最大の振れ角が大きいほど周期の変化(非線形)が大きくなるのが影響しているためと考えられる。

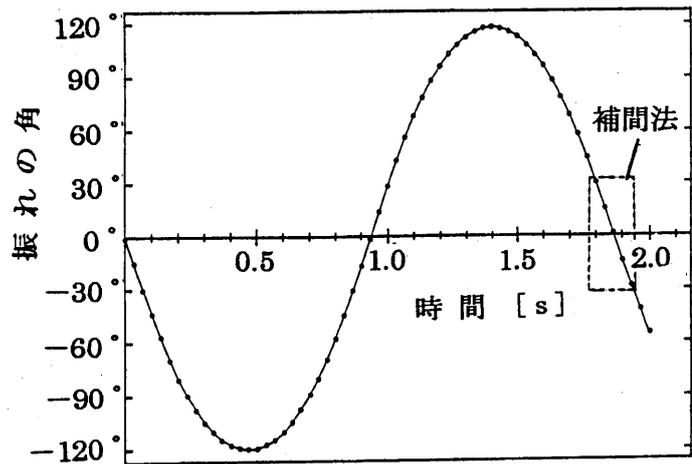


図2 最大の振れ角  $120^\circ$  の1周期分の変位

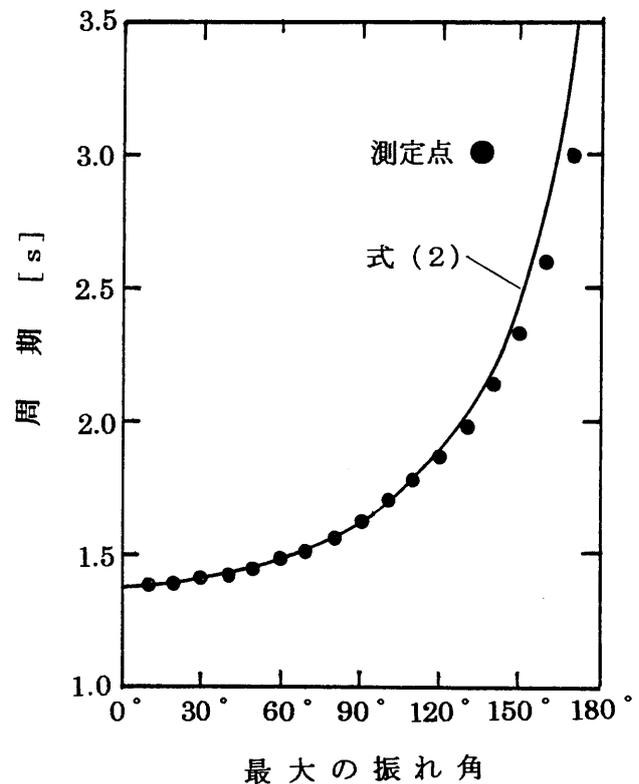


図3 最大の振れ角と周期の関係

二重振り子の写真を図4に示す。二重振り子は黒色に塗った。これはLEDの光を見やすくするためと、色の分解能が悪いというVTRの特性を補うものである。

測定及びデータ処理の手順は次のようになる。

- ① ビデオカメラで二重振り子の運動を撮影する。
- ② ビデオ制御ソフト CuteyJoy2.0 で、ビデオテープの画像をパソコンに取り込む。
- ③ ビデオ画像を QuickTime, MoviePlayer で1枚1枚の静止画像にする。
- ④ 静止画像をイラストフォト編集ソフト Canvas で取り込み、カーソルの位置情報から、各LEDの位置を読み取る。
- ⑤ 位置情報のデータを表計算ソフトに1つ1つ入力してグラフを描く。

二重振り子の初期値  $\theta_1, \theta_2$  を各々  $140^\circ, 160^\circ$  とする。緑のLEDの軌跡を図5に赤のLEDの軌跡を図6に示す。第一の振り子(LED緑)は、同一ライン上を繰り返す運動である(図5)。

それに対してLED(赤)の図6の二重振り子の軌跡は、あきらかにノン・リニア(非線形)であり、不規則に乱れた複雑な運動をする。

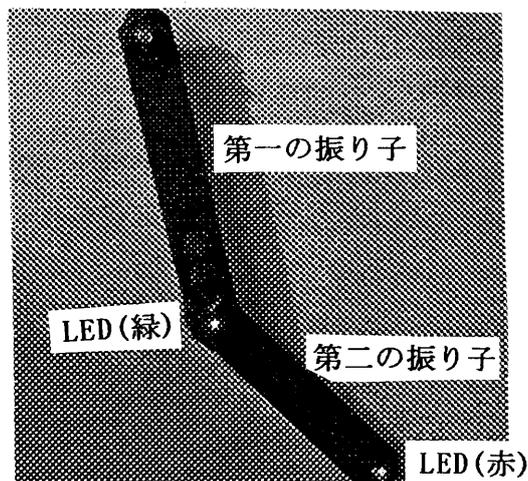


図4 二重振り子の写真

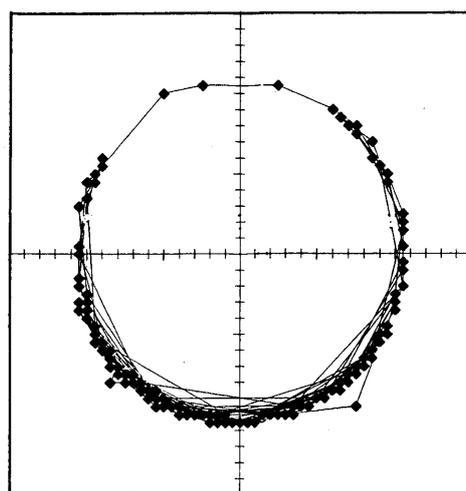


図5 第一の振り子(LED緑)の軌跡

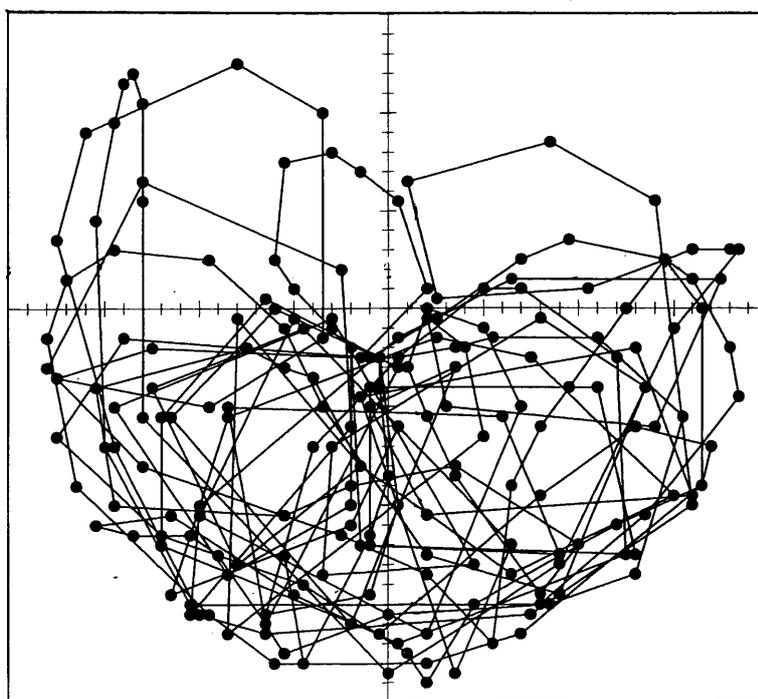


図6 二重振り子(LED赤)の軌跡

### 3. カオスの評価

比較的簡単な力学系から複雑な運動が生じることを学生に示すのに二重振り子は格好な教材である。実際に試してみると図7-1の質点 $m_2$ が、かなり複雑な挙動を示し、系の簡単さと相まってデモンストレーションの効果は十分にあると思われる。この系のカオスはハミルトン力学系（例えば図7-2のように糸の部分にバネの入ったもので不規則な振動を生じる）であるが、製作のしやすさとカオスの観察の容易な点では二重振り子の方がすぐれている。現実の系は、前述したように摩擦がかなりあり比較的早く運動が静止してしまうのが難点である。摩擦がゼロの仮想的な状態における運動をパソコンでシミュレーション<sup>3)</sup>した結果を図8に示す。

式を用いて説明すると次のようになる。

図7-1により、系の位置エネルギー $P$ は

$$P = m_1 l_1 g (1 - \cos \theta_1) + m_2 \{ l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2) \} g$$

$$= (m_1 + m_2) l_1 g (1 - \cos \theta_1) + l_2 g (1 - \cos \theta_2)$$

となる。また運動エネルギー $K$ は

$$K = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \{ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \}$$

となる。ラグランジュ関数 $L = K - P$ をつくり、

運動方程式を具体的に求めると次の様になる。

$$\ddot{\theta}_1 + \mu_2 l_{21} \dot{\alpha}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \mu_2 l_{21} \alpha_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \omega_1^2 \sin \theta_1 = 0$$

$$l_{21} \ddot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \alpha_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \omega_2^2 \sin \theta_2 = 0$$

この方程式をパソコンにより、ルンゲクッタ法でプログラム<sup>4)</sup>し、図8にその結果を示す。カオスの計算シミュレーション<sup>3)</sup>と図6の二重振り子の軌跡はほぼ同じ奇妙な形状を示している。カオスは、時間が進んでも位相空間内の同じ点を二度と通らないという特徴も似通っている。また、シミュレーションと測定の軌跡のずれは、初期値の僅かな違いにより将来がらっと変わってしまう（予想不可能な）こともカオスの特徴として上げられる。

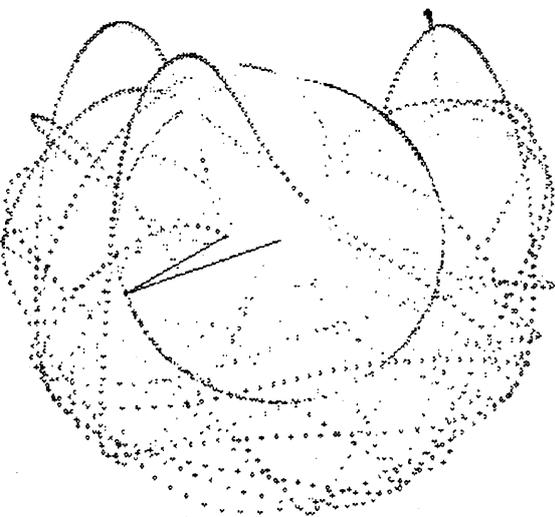


図8 二重振り子のシミュレーション

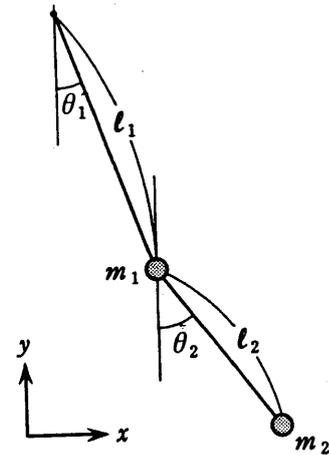


図7-1 二重振り子

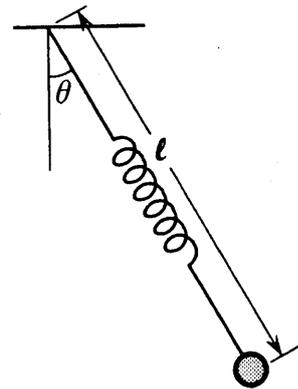


図7-2 バネ付き振り子

文献：1) 増田 健二：技術報告3（静岡大学，1997）pp. 35-38

2) 増田健二，長島弘幸：物理学会予稿集4（1991春）p. 251

3) 長島弘幸，増田健二：物理学会予稿集4（1991秋）p. 252

4) 長島弘幸，馬場良和：カオス入門（培風館，1992）pp. 144-148