

# PSDによる振動実験の教材化：Ⅱ，連成振動

工学部共通講座 増田健二

## 1. ねじれ振動による連成振動の原理

本学理・工・農学部2年次の共通教育物理実験で1982年より行っている連成振動の実験を紹介する<sup>1)</sup>。実験装置の配置を図1に示す。直径10mm長さ60cmの真鍮丸棒2本P, Qの上部10cmに穴をあけ、直径1.5mm長さ70cm程度の鋼鉄棒を連結する。支持台にその鋼鉄棒を水平におき丸棒P, Qを振動させると、重力を復元力とし鋼鉄棒のねじれの力を結合力とする連成振動をする。

P, Qをそれぞれ $l$ m質量 $M$  Kgの様な棒とし、棒の重心より $h$ mの位置に棒に垂直に鋼鉄棒Sを通して固定する。図2はP, Qの振動を鋼鉄棒Sの軸方向からみた場合で、 $\phi_1, \phi_2$ はP, Qの鉛直線からの角変位である。P, Qの軸Sの慣性モーメントを $I$  kgm<sup>2</sup>とすると、P, Qの回転の運動方程式は次のようになる。

$$I \frac{d^2 \phi_1}{dt^2} = -Mgh \sin \phi_1 + c(\phi_2 - \phi_1) \quad (1)$$

$$I \frac{d^2 \phi_2}{dt^2} = -Mgh \sin \phi_2 - c(\phi_2 - \phi_1) \quad (2)$$

P, Qの振動の振幅が小さいときは、 $\sin \phi_1 \approx \phi_1$ ,  $\sin \phi_2 \approx \phi_2$ となり、 $A, B, \alpha, \beta$ は初期条件で定まる定数である。よって $\phi_1, \phi_2$ は

$$\phi_1 = \frac{A}{2} \sin(\omega_1 t + \alpha) + \frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta) \quad (3)$$

$$\phi_2 = \frac{A}{2} \sin(\omega_1 t + \alpha) - \frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta) \quad (4)$$

となる。(3), (4)式を見るとP, Qの振動 $\phi_1, \phi_2$ は2つの角度に

ついての単振動 $\frac{A}{2} \sin(\omega_1 t + \alpha)$ ,  $\frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta)$ の和または差の振動になっていることがわかる。この様に、複雑な連成振動を単純な単振動の重ね合わせで表せる時、これらの単動をこの系の規準振動、またその振動数を規準振動数(又は固有振動数)という。一般に $N$ 個の自由度( $N$ 個の座標)をもつ連成振動系の小振動においては、 $N$ 個の規準振動があり、各自由度に対する座標の時間的変化は $N$ 個の規準振動の一次結合として取り扱うことができる。

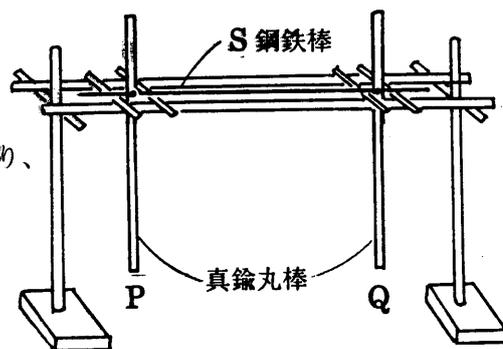


図1 連成振動実験装置の配置

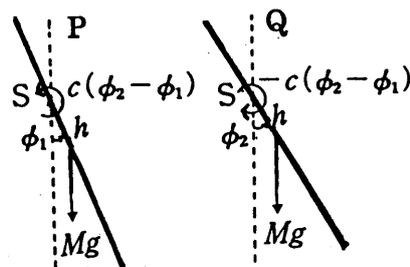


図2 鋼鉄棒Sの軸方向から見た図

## 2. PSDを用いた測定方法

基礎物理実験の教材開発の一貫として「PSDによる振動実験<sup>2-4)</sup>」として報告する。

図3に測定系の全景写真を示す。PSDの受光面を光源で照らし、その間に棒P, Qに連結した遮蔽板を吊す。遮蔽板の中心にはスリットを設け、そこを通過する光の位置から棒の変位を測定する。図4にPSD測定部分を示す。遮蔽板には、25×70×0.5mmのアルミ板を用いた。PSD(浜松ホニクスS1352)を信号処理基盤(C3683-01)にハンダ付けし、±15Vの電源を接続する。このPSD素子は最大±17mmの位置(最大±10V)まで検出でき、変位1.7mmに対して1Vの出力電圧を生じる。光源には、明るい部屋でもPSDが反応するようにバイク用のスモールランプ(6V,12W)を用いる。ア

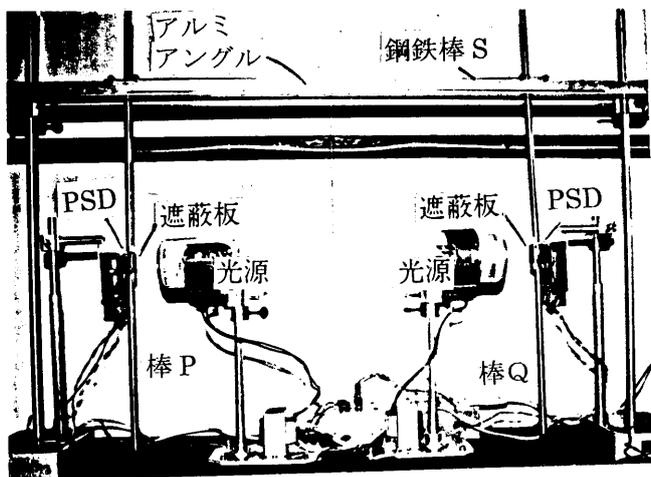


図3 測定系の全景写真

ルミ缶の底に直径15mm程度の穴を開けランプを覆い、スポット光源としてPSDの受光面のみを照らすように工夫した。電圧振幅の時間変化はデジタルストレージオシロスコープ(日立VC6523)の画面上に波形として表示される。この波形をホールドしてRS-232Cでパソコンに取り込む。パソコン解析では、オシロスコープ画面の1目盛を1cmにプリントアウトする。

### 3. 実験方法と結果

#### 実験1. 振幅の時間変化による $\omega_1, \omega_2$ の測定

棒P, Qを図1のようにセットする。このとき鋼鉄棒Sは水平に、またP, Qは自然の状態で鉛直下方を向くようにSに固定する。棒Qを鉛直下方に固定した状態で棒Pを適当な角度だけ変位させ、P, Qを同時に静かに放す。

この方法により初期条件 $\phi_1 = a, \phi_2 = 0, \frac{d\phi_1}{dt} = 0, \frac{d\phi_2}{dt} = 0$

から、 $A = B = a, \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ となる。

よって(3), (4)は

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{a}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \\ &= a \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{a}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \\ &= a \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (6) \end{aligned}$$

となる。 $\omega_1 \approx \omega_2$  ( $Mgh \gg 2c$ , すなわち重力による復元力に対して結合力が小)のとき、P, Qの振動 $\phi_1, \phi_2$ は角振動数 $(\omega_1 + \omega_2)/2$ で変化するが、その振幅は角振動数 $(\omega_1 - \omega_2)/2$ で「うなり」のようにゆるやかに変化していくことがわかる(図5)。

$\omega_1 \approx \omega_2$ の場合の $\phi_1, \phi_2$ の時間的变化は、図6になり、P, Qの振動の周期Tは

$$T = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2} \quad (7)$$

となる。また振幅の周期 $\tau$ は

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \quad (8)$$

となる。 $\phi_1, \phi_2$ の振動の変化は位相が $\pi/2$ だけずれているので、P, Qの振動の振幅は一方が最大るとき他方は最小となり、振動のエネルギーは交互に入れかわることになる。

図6の振動の周期 $T = 1.15[s]$ 、振幅の「うなり」の周期 $\tau = 12.5[s]$ となった。規準角振動数 $\omega_1, \omega_2$ は

$$\omega_1 = \pi \left( \frac{2}{T} - \frac{1}{\tau} \right) = 5.21 [\text{rad/s}]$$

$$\omega_2 = \pi \left( \frac{2}{T} + \frac{1}{\tau} \right) = 5.71 [\text{rad/s}]$$

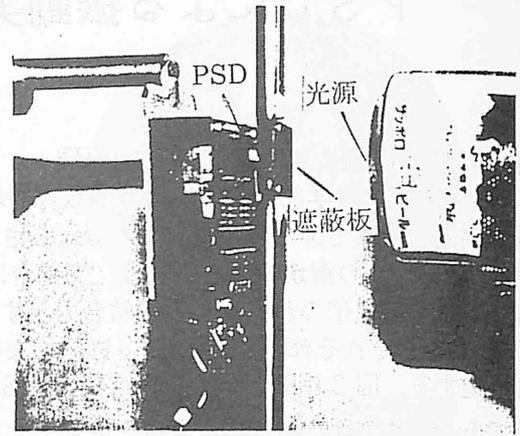


図4 PSD測定部分

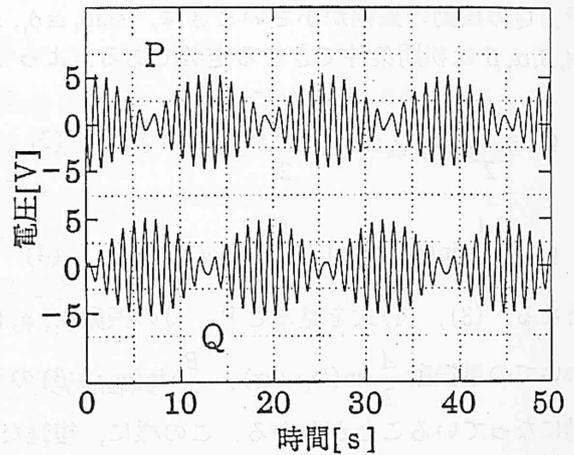


図5 「うなり」の振動波形

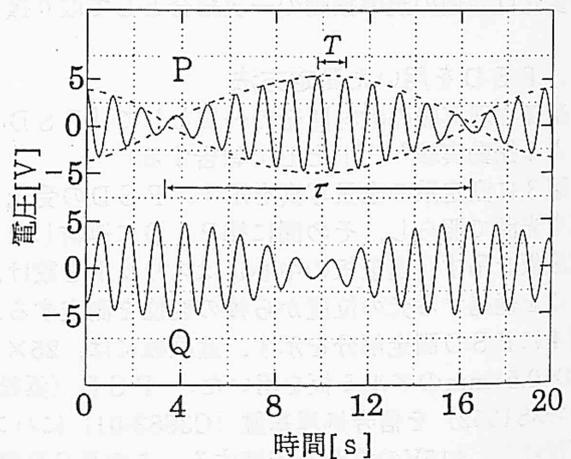


図6  $\phi_1, \phi_2$ の時間的变化

実験2. 連成振動モードによる $\omega_1, \omega_2$ の測定

① 鋼鉄棒Sの中心に軽い指標を取り付ける. 実験1と同様にしてP, Qを振動させた時の指標Xの振動周期 $T_1$ を測定する. (3), (4)式から分かるように $\phi_1, \phi_2$ は2つの規準振動 $\frac{A}{2}\sin(\omega_1 t + \alpha), \frac{B}{2}\sin(\omega_2 t + \beta)$ の和又

は差となる. ここで $B=0$ のとき,  $\phi_1, \phi_2$ は規準角振動数 $\omega_1$ だけの振動となり,  $\phi_1 = \phi_2 = \frac{A}{2}\sin(\omega_1 t + \alpha)$ となる. よってP, Qは調子を合わせて常に同方向に振動する (PとQの位相差は0).

指標Xの振動周期 $T_1$ の測定する (ストップウォッチで $100 T_1$ を測る).

$$100T_1 = 119.32[s] \quad \therefore T_1 = 1.193[s]$$

Xの変位は $(\phi_1 + \phi_2)/2$ であるから,

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 5.27[\text{rad/s}] \quad \text{となる.}$$

② 次にP, Qを反対の方向に同じ角度だけ変化させ, 同時に放す (図7). ここで $A=0$ のときは,

$$\phi_1 = \frac{B}{2}\sin(\omega_2 t + \beta)$$

$$\phi_2 = -\frac{B}{2}\sin(\omega_2 t + \beta) = \frac{B}{2}\sin(\omega_2 t + \beta + \pi)$$

となり, 規準角振動数 $\omega_2$ のみの振動となり, P, Qは, 常に反対方向に振動する (位相差 $\pi$ ). このときには,  $\phi_1 = -\phi_2$ が成り立つので $\phi_1 - \phi_2 = 2\phi_1 = -2\phi_2$ となる. よって, P又はQの振動周期 $T_2$ から $\omega_2$ を求める.

図7よりPの振動周期 $T_2 = 1.109[s]$ , 位相差 $\pi$ の振動モードに対する規準角振動数 $\omega_2$ は,

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = 5.67[\text{rad/s}] \quad \text{となる.}$$

実験3. 他の手段による $\omega_1, \omega_2$ の測定

実験1, 2で得られた $\omega_1, \omega_2$ の値の確認のため, 次のような方法により, 独立的な測定を行う.

① 一方の棒Qを鉛直下方に固定したまま, もう一方の棒Pのみを振動させたときを考えると,  $\phi_2 = 0$ の場合で

$$I \frac{d^2 \phi_1}{dt^2} = -Mgh \sin \phi_1 - c\phi_1$$

よって, この場合の小振動 ( $\sin \phi_1 \cong \phi_1$ ) の角振動数 $\omega$ および周期 $T'$ は

$$\omega^2 = \frac{Mgh+c}{I}, \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh+c}} \quad (9)$$

となる. 上式を変形すると

$$2\omega^2 - \frac{Mgh}{I} = \frac{Mgh+2c}{I}$$

$$\left[ \omega_1 = \sqrt{\frac{Mgh}{I}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{Mgh+2c}{I}} \right]$$

となり, (7)式より,

$$2\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \quad \therefore \omega_2 = \sqrt{2\omega^2 - \omega_1^2} \quad (10) \text{となる.}$$

② 棒Qを固定し, 棒Pのみを振動させる (図8). 振動周期 $T' = 1.13[s]$ となり,  $\omega = \frac{2\pi}{T'} = 5.56[\text{rad/s}]$ となる.

③  $\omega_1$ は, 鋼鉄棒Sを回転軸とする剛体振子として棒

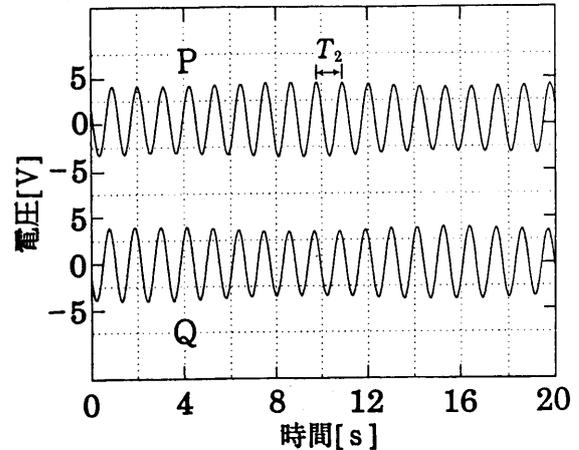


図7  $\omega_2$ の測定

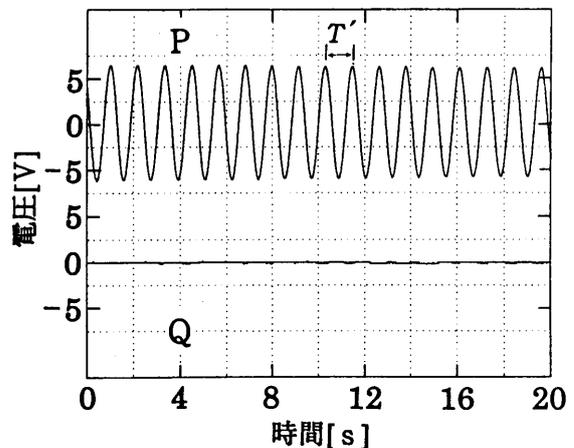


図8  $\omega$ の測定

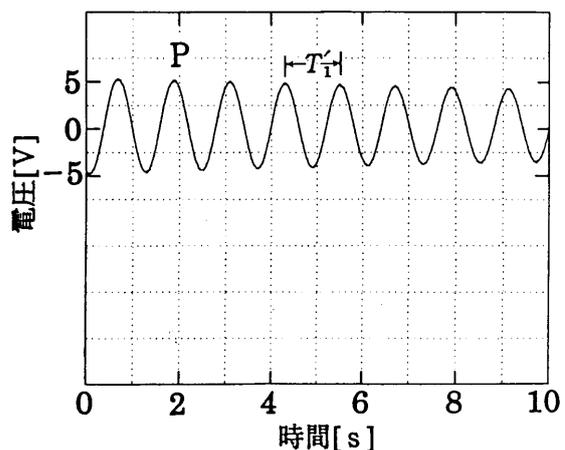


図9  $\omega_1$ の測定

Pを振動させたときの角振動数に等しくなる。よって  
 $\omega_1$ は次の方法で測定する。PをSに固定し、Pのみを

小振動させると図9のようになる。この振動周期 $T_1' = 1.18[s]$ となり、 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1'} = 5.32[\text{rad/s}]$ となる。

④ ②の $\omega$ 、③の $\omega_1$ から(10)式により、規準角振動数 $\omega_2$ を計算する。

$$\omega_2 = \sqrt{2\omega^2 - \omega_1^2} = 5.79[\text{rad/s}]$$

⑤ 支軸周辺の真鍮棒の慣性モーメント $I$ は、

$$I = M \frac{\ell^2}{12} + Mh^2 \quad (M = 0.388[\text{kg}], \ell = 0.600[\text{m}], h = 0.200[\text{m}])$$

で与えられる。ここで $M$ は棒の質量、 $\ell$ は棒の長さ、 $h$ は棒の重心と支軸との間の距離である。

(9)式より、

$$I = M \left( \frac{\ell^2}{12} + h^2 \right) = 0.0272[\text{kgm}^2] \quad \text{となる。}$$

⑥ 鋼鉄棒Sのねじれ復元力のモーメント $c$ は $c = I(\omega^2 - \omega_1^2)$ により与えられる。②、③で求めた $\omega$ 、 $\omega_1$ および④で求めた $I$ を代入する。

$$c = I(\omega^2 - \omega_1^2) = 0.0710[\text{kgm}^2/\text{s}^2]$$

鋼鉄棒の半径を $r$ 、棒PとQ間の距離 $L$ 、剛性率 $G$ をとしたときの $c$ は、

$$c = \frac{\pi Gr^4}{2L} \quad (r = 0.75 \times 10^{-3}[\text{m}], L = 0.550[\text{m}])$$

と表されるので、 $G = \frac{2L}{\pi r^4} c = 7.86 \times 10^{10}[\text{N/m}^2]$ となる。

#### 4. 結果のまとめと評価

① 振幅の時間変化(実験1)、連成振動モード(実験2)、他の手段(実験3)により $\omega_1$ 、 $\omega_2$ を測定した。得られた3つの $\omega_1$ 、 $\omega_2$ を表にすると次のようになり、ほぼ一致した値となった。

	$\omega_1$	$\omega_2$
実験1	5.21[rad/s]	5.71[rad/s]
実験2	5.27[rad/s]	5.67[rad/s]
実験3	5.32[rad/s]	5.79[rad/s]

また、実験3の結果として得られた鋼鉄の剛性率は定数表の値の範囲内であった。

実験結果	$7.86 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$
定数値	$7.8 \sim 8.4 [\times 10^{10} \text{N/m}^2]$

② PSDとデジタルストレージオシロスコープを組み合わせた今回の方法は、力学的振動を電氣的に測定できることから、画面上で振動現象を逐次観測できる点に大きな長所がある。

③ 現在物理実験行っている連成振動の実験は、力学的振動の様子を視覚的に実感できる点が長所である反面、振動現象を逐次測定することができない。そこで本装置を説明段階に活用している。

④ アンケートにおいて「難しい」と回答する学生は2割程度となった(1998年度は4割以上)。また「面白い」とする回答は5割以上となった(1998年度は4割弱)。「面白い」理由としては、「簡単な仕組みで連成振動するのは不思議だ」「いろいろな振動が移りかわっていく様子がよく分かる」「うなりの原理があらためて理解できた」「波形で見ると2つの棒の関連性がよく分かる」など、オシロの画面上で振動現象を逐次観測できる利点が十分発揮できている評価が得られた。

謝辞: 学生実験に取り入れる段階でご指導をいただきました元教養部教授の竹山義雄氏に感謝いたします。さらに、パソコン解析のプログラム作成に関して助言をいただきました福島工業高等専門学校の鈴木三男助教授に厚くお礼を申し上げます。

- 参考文献: 1) 静岡大学(前教養部)物理教室編:「物理実験指導書」(1982-1999)  
 2) 増田健二, 久世宏明, 鈴木三男: 物理学会1995年9月 29pA7  
 3) 増田健二: 技術報告第2号(1997) pp.26-31  
 4) 増田健二, 鈴木三男: 応用物理教育21-2(1997) pp.3-8