

水晶における弾性振動の対称性

Symmetry of Elastic Vibration in Quartz Crystal

亀 山 寛

Hiroshi KAMEYAMA

(昭和59年10月9日受理)

It is well known that velocity, displacement and frequency-constant of elastic vibration in quartz crystal have high symmetry for the polar angle (θ, ϕ). We could prove analytically this symmetry of the elastic vibration, taking the piezoelectric contribution into consideration. In order to obtain the result, the elastic wave equation in a rotated coordinate system is used. From this study, the symmetry of the elastic vibration in quartz crystal is found to be owing to the fact that the elastic wave equation is invariant to the crystal symmetry elements in point group D_3 and an inversion symmetry I .

1 はじめに

水晶単結晶における、超音波のバルク波の音速と変位モード、及び、厚みすべり振動の周波数定数と変位モード等に関して、高い対称性が存在している。結晶の任意方向の弾性定数 $C = \rho v^2$ (ρ : 密度, v : 速度) が、極座標 θ, ϕ に関して、高い対称性を持つことは古くから指摘されてきた。Kogaは、 $0 \leq \theta \leq 30^\circ$, $0 \leq \phi \leq 180^\circ$ の範囲の C の値を計算し、他のすべての方向の C の値は、対称的配列より推察出来ることを表中で示した。¹⁾ この表はCadyの本²⁾ に引用されている。また、Kogaは2個の水晶振動子板相互の対称性を数式的に表わし、³⁾ これらを定性的に証明している。^{3) 4)}

水晶における弾性振動の対称性はKogaの数式的表示にことごとく表わされており、かつ、それらの定性的証明も基本的に正しいと言える。しかし、圧電効果を取り入れた場合の C の振舞については触れられてなく、また、解析的な証明もなされていない。

圧電効果をも考慮に入れた C の θ, ϕ に関する値は、Arigaによって計算され、表にまとめられている。⁵⁾ この表によれば、圧電効果を考慮に入れた場合も、圧電効果を無視した場合、全く同様な θ, ϕ に関する対称性が存在していることがわかる。

本研究の目的は、圧電効果も含めた形で、水晶の弾性振動の対称性を解析的に証明することにある。証明にあたって、圧電項をも取り入れた回転座標表示の運動方程式を用いる。回転座標表示法は、対称操作の変換を調べるに極めて有効であるからである。本研究の中で、水晶の弾性振動に存在する対称性は、水晶の対称要素と反転対称との組み合わせから説明出来ることが明らかになるであろう。

2 弾性波運動方程式の対称操作変換に対する不変性

水晶の弾性振動における弾性定数、音速、周波数定数、変位モード等の弾性振動に関わる諸々の性質 $f(\theta, \varphi)$ に対して、

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= f[\theta, (2p+1)\pi/3 - \varphi], \\ f(\theta, \varphi) &= f[\theta, 2p\pi/3 + \varphi], \\ f(\theta, \varphi) &= f[\pi - \theta, (2p+1)\pi/3 + \varphi], \\ f(\theta, \varphi) &= f[\pi - \theta, 2p\pi/3 - \varphi], \end{aligned} \quad (1)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots$$

の対称性が存在する。(1)式はKogaの数式的表示³⁾を基本にして、本研究の主旨に合うように弾性振動の対称性を書き下したものである。(1)式の関係を定性的でなくて、解析的に導きたい。このためには、水晶の弾性振動を基本的に決定する、弾性波の運動方程式、⁶⁾

$$(\Gamma_{ik} - \rho v^2 \delta_{ik}) u_k = 0, \quad (2)$$

Γ_{ik} : 弾性行列要素, u_k : 変位, δ_{ik} : クロネッカのデルタ, $i, k = 1, 2, 3$
が、水晶の属する点群 ($D_3 - 32$) がもつ対称操作要素

$$\begin{aligned} C_z(2\pi/3), C_z(4\pi/3) \quad \dots \quad 3\text{回回転操作}, \\ C_x(\pi), C_y(\pi), C_{xy}(\pi) \quad \dots \quad 2\text{回回転操作}, \end{aligned}$$

と反転操作 I に対して、不変であることを証明する必要がある。 Γ_{ik} は弾性定数テンソル C_{ijke} 、圧電定数テンソル e_{ijk} と弾性波の方向余弦 n_i とが結合したものである。

式(2)が対称操作に対して不変かどうかを調べるには、次の2段階で考えればよい。

(I) 弾性行列要素 Γ_{ik} すべてが、どの対称操作要素 B_n の変換に対しても不変である。

$$B_n \Gamma_{ik} = \Gamma_{ik}. \quad (3)$$

(II) Γ_{ik} が不変でなくても、(2)式が固有解を得るための ρv^2 に関する3次方程式、

$$(\rho v^2)^3 + A_1(\rho v^2)^2 + A_2(\rho v^2) + A_3 = 0 \quad (4)$$

の係数 $A \equiv (1, A_1, A_2, A_3)$ に対して、

$$B_n A \equiv B_n(1, A_1, A_2, A_3) = (1, A_1, A_2, A_3) \equiv A \quad (5)$$

が成立すればよい。

(I) の判定条件は、(II) の判定条件の特殊な場合になっている。(I) もしくは (II) が成立すれば、固有値に相当する ρv^2 と、固有ベクトルに相当する u_k とが、どの対称操作 B_n の変換に対しても、不変になる。

ここで、2個の対称操作 B_n^1, B_n^2 に対して

$$B_n^1 A = A, B_n^2 A = A \quad (6)$$

ならば、

$$B_n^2 B_n^1 A = B_n^2 A = A \quad (7)$$

となる。すなわち、2個の対称操作 B_n^1, B_n^2 が、各々 A を不変にするならば、それらの積操作 $B_n^2 B_n^1$ も A を不変にする。この事項は後で用いる。

3 回転座標表示による圧電結晶中の弾性波方程式

弾性波の運動方程式を考える際、通常は弾性座標軸と結晶軸は一致させる (図1-a)。この場合、弾性波の運動方程式(2)式は、Christoffelの式と呼ばれ、 Γ_{ik} は次式で表わされる。⁷⁾

$$\Gamma_{ik} = [C_{ijke} + (e_{pij}e_{qke}n_p n_q) / (\epsilon_{rs}^s n_r n_s)] \times n_i n_l \quad (8)$$

ここで、 ϵ_{rs}^s は誘電率テンソルである。(8)式の Γ_{ik} で、(3)、(5)式が成立しているかどうかを調べるには、おびたしい計算を必要とし、不便極まりない。

(3)、(5)式を計算し易いようにするために、弾性座標軸を適当なものを選び直す必要がある。水晶が属する三方晶系や六方晶系において、対称操作の変換に対して、有効性を発揮する方法として、回転座標法がある。回転座標法とは弾性座標 (x_1', x_2', x_3') の x_1' 軸を弾性波の進行方向(波数ベクトル k 方向)に一致させ、 x_2' 軸を結晶のbasal plane— ab 面にとり、 x_3' 軸を x_1' と x_2' 軸に垂直、かつ右手系にとる方法である(図1—b)。

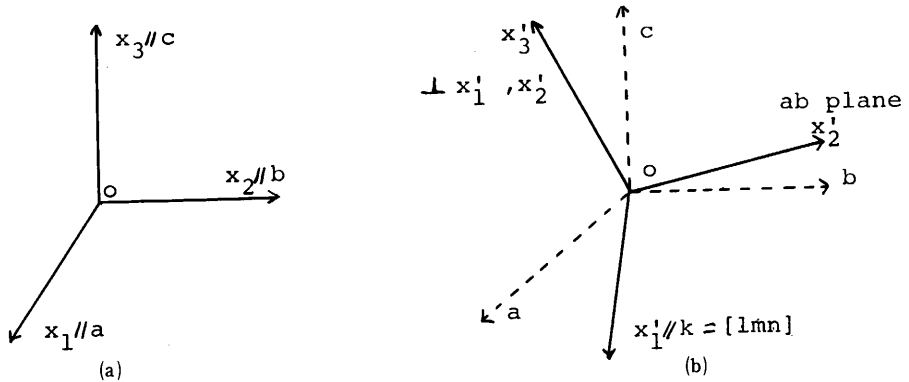


図1 結晶座標系(a)と回転座標系(b)

圧電性を無視した場合の回転座標表示による弾性波運動方程式の挙動については、すでに、Neighbours⁸⁾によって十分に明らかにされている。圧電効果を含んだ場合の回転座標表示による弾性波の運動方程式は以下ようになる。⁹⁻¹³⁾(付録参照) 平面波 $u_i'(x_i', t) = u_i' \exp[j(\omega t - kx_i')]$, ($i = 1, 2, 3$), (ω : 角周波数, t : 時間) に対して、

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}' - \rho v^2 & \Gamma_{16}' & \Gamma_{15}' \\ \Gamma_{16}' & \Gamma_{66}' - \rho v^2 & \Gamma_{56}' \\ \Gamma_{15}' & \Gamma_{56}' & \Gamma_{55}' - \rho v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = 0, \quad (9)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}' &= C_{11}' + e_{11}'^2 / \epsilon_{11}'^s, \\ \Gamma_{55}' &= C_{55}' + e_{15}'^2 / \epsilon_{11}'^s, \\ \Gamma_{66}' &= C_{66}' + e_{16}'^2 / \epsilon_{11}'^s, \\ \Gamma_{15}' &= C_{15}' + e_{11}' e_{15}' / \epsilon_{11}'^s, \\ \Gamma_{16}' &= C_{16}' + e_{11}' e_{16}' / \epsilon_{11}'^s, \\ \Gamma_{56}' &= C_{56}' + e_{15}' e_{16}' / \epsilon_{11}'^s \end{aligned} \quad (10)$$

となる。添字は縮約した形を用いている。ここで、プライムは回転座標表示での物理量であることを示す(以下同様)。 C_{11}' , ..., C_{56}' はすでにNeighbours等⁸⁾によって求められている C_{11} , ..., C_{56} に対応する弾性行列要素である。一方、 e_{11}' , e_{15}' , e_{16}' は付録の(A・5)式より求めることが出来る。

水晶($D_3 - 32$)に対して、具体的に書き下すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
C_{F_1}' &= \alpha^4 C_{F_1} + 2n^2 \alpha^2 (C_{F_3} + 2C_{F_4}) + n^4 C_{F_3} + 4mn(3l^2 - m^2) C_{F_4}, \\
C_{F_5}' &= n^2 \alpha^2 (C_{F_1} - 2C_{F_3} + C_{F_4}) + (1 - 2n^2)^2 C_{F_4} - 2mn \alpha^{-2} (3l^2 - m^2) C_{F_4}, \\
C_{F_6}' &= \frac{1}{2} \alpha^2 (C_{F_1} - C_{F_2}) + n^2 C_{F_4} - 2mn \alpha^{-2} (3l^2 - m^2) C_{F_4}, \\
C_{F_5}' &= -n \alpha^3 C_{F_1} + n \alpha (1 - 2n^2) (C_{F_3} + 2C_{F_4}) + n^3 \alpha C_{F_3} + m \alpha^{-1} (3l^2 - m^2) (1 - 4n^2) C_{F_4}, \\
C_{F_6}' &= 3ln \alpha^{-1} (l^2 - 3m^2) C_{F_4}, \\
C_{F_6}' &= l \alpha^{-2} (l^2 - 3m^2) (1 - 3n^2) C_{F_4}, \\
e_{11}' &= l (l^2 - 3m^2) e_{11}, \\
e_{15}' &= -ln \alpha^{-1} (l^2 - 3m^2) e_{11}, \\
e_{16}' &= -m (3l^2 - m^2) \alpha^{-1} e_{11} + n \alpha e_{14}, \\
\epsilon_{11}' &= \alpha^2 \epsilon_{11}^s + n^2 \epsilon_{33}^s.
\end{aligned} \tag{11}$$

ここで, l, m, n は波数ベクトル k の方向余弦, $\alpha^2 = l^2 + m^2$ である。また, プライムのない物理量は, 通常の結晶座標表示による, 対応する物理量である。

(9)式の固有解を得るための, ρv^2 に関する3次方程式は次のようになる。

$$(\rho v^2)^3 - (\Gamma_{11}' + \Gamma_{55}' + \Gamma_{66}') (\rho v^2)^2 + (\Gamma_{15}'^2 + \Gamma_{16}'^2 + \Gamma_{56}'^2 - \Gamma_{11}' \Gamma_{55}' - \Gamma_{55}' \Gamma_{66}' - \Gamma_{66}' \Gamma_{11}') \rho v^2 + \Gamma_{11}' \Gamma_{56}'^2 + \Gamma_{55}' \Gamma_{16}'^2 + \Gamma_{66}' \Gamma_{15}'^2 - 3\Gamma_{15}' \Gamma_{16}' \Gamma_{56}' = 0.$$

従って, (5)式の判定条件に用いる A_1, A_2, A_3 は

$$\begin{aligned}
A_1 &= -(\Gamma_{11}' + \Gamma_{55}' + \Gamma_{66}'), \\
A_2 &= \Gamma_{15}'^2 + \Gamma_{16}'^2 + \Gamma_{56}'^2 - \Gamma_{11}' \Gamma_{55}' - \Gamma_{55}' \Gamma_{66}' - \Gamma_{66}' \Gamma_{11}', \\
A_3 &= \Gamma_{11}' \Gamma_{56}'^2 + \Gamma_{55}' \Gamma_{16}'^2 + \Gamma_{66}' \Gamma_{15}'^2 - 3\Gamma_{15}' \Gamma_{16}' \Gamma_{56}'
\end{aligned} \tag{12}$$

となる。

4 対称操作の変換に対する不変性

反転操作 I と水晶がもつ対称操作との忠実表現¹⁴⁾ は次の如くである。

$$\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}, \quad C_z \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \begin{pmatrix} -1/2 - \sqrt{3}/2 & \cdot \\ \sqrt{3}/2 - 1/2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad C_z \left(\frac{4\pi}{3} \right) = \begin{pmatrix} -1/2 \sqrt{3}/2 & \cdot \\ -\sqrt{3}/2 - 1/2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \\
C_y(\pi) &= C_x(\pi) C_z(2\pi/3), \quad C_{xy}(\pi) = C_x(\pi) C_z(4\pi/3).
\end{aligned} \tag{13}$$

$C_y(\pi)$ と $C_{xy}(\pi)$ は, $C_x(\pi)$ と $C_z(2\pi/3), C_z(4\pi/3)$ との積で表現されるので, (6), (7)式を考慮すると, $C_x(\pi), C_z(2\pi/3), C_z(4\pi/3)$ が不変な対称操作であることを示せば, $C_y(\pi)$ と $C_{xy}(\pi)$ は必然的に不変な対称操作と言える, ゆえに, 対称操作 $C_z(2\pi/3), C_z(4\pi/3), C_x(\pi)$ と I とに対する不変性を調べることにする。

たとえば, $C_z(2\pi/3)$ に対して,

$$C_z(2\pi/3)(l, m, n) = [-(l + \sqrt{3}m)/2, (\sqrt{3}l - m)/2, n],$$

を考慮すると

$$C_z(2\pi/3)m(3l^2 - m^2) = m(3l^2 - m^2),$$

$$C_z(2\pi/3)l(l^2 - 3m^2) = l(l^2 - 3m^2),$$

となる。これらの関係式を用いて,

$$C_z(2\pi/3)\Gamma_{ik}' = \Gamma_{ik}', \quad ik = 11, 55, 66, 15, 16, 56, \tag{14}$$

を導びくことができる。すなわち、 Γ_{ik}' はそ $C_2(2\pi/3)$ 変換に対して不変であり、それらの指標はいずれも1である。同様に、 Γ_{ik}' の $C_2(4\pi/3)$, $C_x(\pi)$, I 操作に対する変換の指標を調べて、結果を表1にまとめた。

表1 弾性行列要素 Γ_{ij}' の対称操作に対する変換の指標値

| | Γ_{11}' | Γ_{55}' | Γ_{66}' | Γ_{15}' | Γ_{16}' | Γ_{56}' |
|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $C_2(2\pi/3)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $C_2(4\pi/3)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $C_x(\pi)$ | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| I | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 |

表1から $C_2(4\pi/3)$ は $C_2(2\pi/3)$ と同様にすべての Γ_{ij}' を不変とする対称操作であり、共に第2節の(I)条件を満たしていることがわかる。

一方、 $C_x(\pi)$ と I に対しても、表1と(12)式を考慮すれば、

$$\begin{aligned} C_x(\pi)(1, A_1, A_2, A_3) &= (1, A_1, A_2, A_3), \\ I(1, A_1, A_2, A_3) &= (1, A_1, A_2, A_3), \end{aligned} \tag{15}$$

が成立し、第2節の(II)の条件を満たしている。

以上の考察により、 $C_2(2\pi/3)$, $C_2(4\pi/3)$, $C_x(\pi)$, $C_y(\pi)$, $C_{xy}(\pi)$, I は(9)式の弾性波の運動方程式を不変にする。従って固有値 ρv^2 や固有ベクトル u_i' を不変にする対称操作であることがわかった。ゆえに、上記の対称操作とそれらの積操作とは、音速、弾性定数、変位、周波数定数等の

弾性振動に関わる諸々の性質 $f(\theta, \varphi)$ を不変にする。

今、図2のように、 φ を $\pi/6$ 間隔の領域 $R_1, R_2, \dots, R_{12}(R_n$:

$$(n-1)\pi/6 \leq \varphi \leq n\pi/6)$$

に分割する。図2には上記の対称操作による等価点をステレオ投影図で示してある。この弾性振動のステレオ投影図は水晶の属する結晶点群 $D_{3d} - 32$ の対称操作に、反転操作 I が付け加っているために、結晶点群 $D_{3d} - 3m$ のステレオ投影図と同一となっている。

R_n の弾性的性質は R_1 の弾性的性質 $f(\theta, \varphi)$ より知ることが出来ることを示そう。

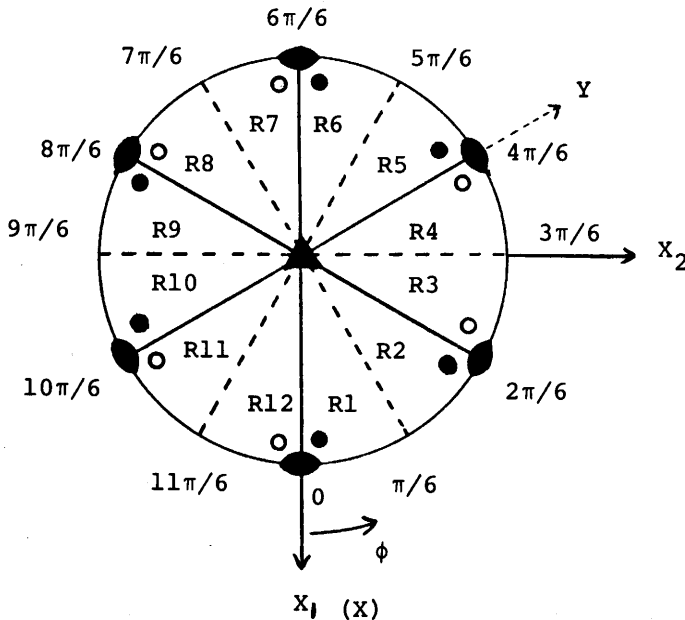


図2 水晶の弾性振動における等価点 (●:上, ○:下) を付加したステレオ投影図

表2 水晶弾性振動 $f(\theta, \varphi)$ に対する対称操作変換 ($R_n: (n-1)\pi/6 \leq \varphi \leq n\pi/6$)

| | | | | | | |
|------|--|--|---|--------------------------------------|---|--|
| 対称操作 | E | $C_z\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ | $C_z\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ | $C_x(\pi)$ | $C_y(\pi)$ | $C_{xy}(\pi)$ |
| 関数 | $f(\theta, \varphi)$ | $f\left(\theta, \frac{2\pi}{3} + \varphi\right)$ | $f\left(\theta, \frac{4\pi}{3} + \varphi\right)$ | $f(\pi - \theta, -\varphi)$ | $f\left(\pi - \theta, \frac{4\pi}{3} - \theta\right)$ | $f\left(\pi - \theta, \frac{2\pi}{3} - \varphi\right)$ |
| 領域 | R1 | R5 | R9 | R12 | R8 | R4 |
| 一般形 | $f(\theta, 2p\pi/3 + \varphi)$ | | | $f(\pi - \theta, 2p\pi/3 - \varphi)$ | | |
| 対称操作 | I | $IC_z\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ | $IC_z\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ | $IC_x(\pi)$ | $IC_y(\pi)$ | $IC_{xy}(\pi)$ |
| 関数 | $f(\pi - \theta, \pi + \varphi)$ | $f\left(\pi - \theta, \frac{5\pi}{3} + \varphi\right)$ | $f\left(\pi - \theta, \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$ | $f(\theta, \pi - \varphi)$ | $f\left(\theta, \frac{\pi}{3} - \varphi\right)$ | $f\left(\theta, \frac{5\pi}{3} - \varphi\right)$ |
| 領域 | R7 | R11 | R3 | R6 | R2 | R10 |
| 一般形 | $f[\pi - \theta, (2p+1)\pi/3 + \varphi]$ | | | $f[\theta, (2p+1)\pi/3 - \varphi]$ | | |

たとえばR5とR9とに関わる弾性的性質は、

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= C_z(2\pi/3)f(\theta, \varphi) = f(\theta, 2\pi/3 + \varphi), \\ f(\theta, \varphi) &= C_z(4\pi/3)f(\theta, \varphi) = f(\theta, 4\pi/3 + \varphi) \end{aligned} \quad (16)$$

に従っていて、R1の $f(\theta, \varphi)$ より求めることが出来る。

以下同様にして、他の対称操作を施すことによって、R2, ..., R12のすべての領域を導びくことが出来、これらを表2にまとめて示した。

表2より、水晶の弾性振動 $f(\theta, \varphi)$ に対する対称操作変換の不変性は

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= f[\theta, (2p+1)\pi/3 - \varphi], \\ f(\theta, \varphi) &= f[\theta, 2p\pi/3 + \varphi], \\ f(\theta, \varphi) &= f[\pi - \theta, (2p+1)\pi/3 + \Gamma], \\ f(\theta, \varphi) &= f[\pi - \theta, 2p\pi/3 - \varphi], \\ P &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

のようにまとめることが出来る。

以上でもって、最初に設定した(1)式を解析的に導びくことが出来たと言えよう。(1)式を解析的に証明出来た大きな要因に、対称操作の変換に対して、指標値が±1になる Γ_{ik}' が設定出来たこと、すなわち、回転座標表示を用いたことがあげられる。

(1)式は、任意の角度から切り出した振動子板は、たとえば、ST板は12の R_n 領域から、各々全く同一なものが得られることを意味している。更に、任意方向の振動子板の共振周波数 f の一次温度係数 $(1/f_0)df/dT$ や二次温度係数 $(1/2f_0)d^2f/dT^2$ 等の方向依存性も、(1)式の対称性を有している。何故ならば、 f を温度微分しても、 θ, φ に関する対称性は何ら影響を受けないからである。実際に数値計算された、任意方向振動子の周波数の一次、二次、三次温度係数の θ, φ 等高図¹⁵⁾ も(1)式に従った対称性をもっていることがわかる。

5 平面 ($\varphi = p\pi/6$) における弾性振動の対称性

今2図において、 $\varphi = p\pi/6$ ($p = 0, 1, \dots, 11$)の12個の平面について注目しよう。これらの平面は12個のRn領域の境界面であると共に、弾性振動において特に高い対称性を所有している。実用化されているAT板, BT板等の水晶振動子板は、これらの平面に含まれており、この立場からも興味深い考察対象と言える。

(1)式において、 $\varphi = 0$ とおくと、

$$f(\theta, 0) = f(\pi - \theta, 0) = f(\pi - \theta, 2q\pi/6) = f(\theta, 2q\pi/6),$$

$$q = 0, 1, \dots, 5 \tag{17}$$

となる。すなわち、

$$\varphi = 0, \frac{2\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{6\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}$$

の6個の平面相互の弾性振動の性質は等価であり、かつ、いずれも、 θ に関して2回回転対称を所有している。いわゆるPY板 ($m = 0$)は $\varphi = 0$ の平面に相当しており、このPY板と弾性振動の性質が全く等価な平面は6方向にあることになる。

一方、(1)式において、 $\varphi = \pi/6$ とおくと、

$$f(\theta, \pi/6) = f[\theta, (4q + 1)\pi/6] = f[\pi - \theta, (4q + 3)\pi/6],$$

$$q = 0, 1, 2 \tag{18}$$

となる。すなわち、

$$\varphi = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6} \quad \text{と} \quad \varphi = \frac{3\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

との各々3平面における弾性振動の諸性質は、等価であり、しかも2つの群は互に2回回転対称の関係にある。いわゆるPX板 ($l = 0$)は $\varphi = 3\pi/6$ の平面の相当しており、この平面と弾性振動が全く等価な平面は3方向にあり、更に、 θ に関して180°回転対称をもつ等価な平面が3方向にあることになる。

これらの6個の平面は、各々結晶の2回回転軸に垂直な方向に存在する(図2)。このことは、これらの6個の平面内の任意方向に伝播する3種類の弾性波モードのうち、1種類の横波モードが、変位方向が2回回転方向であるpureな横波となっていることを意味する。というのは、(9)、(10)式において、6個の平面内で波数ベクトル

$$\mathbf{k} = [\alpha \cos(2s + 1)\pi/6, \alpha \sin(2s + 1)\pi/6, n],$$

$$\alpha = \sin\theta, s = 0, 1, \dots, 5$$

をもつ弾性波に対して、

$$\Gamma_{16}' = \Gamma_{56}' = 0, \tag{19}$$

が成立するからである。すなわち、Y'方向(basal plane内)、従って2回回転軸方向に変位する横波はpureであり、それらの横波の固有値 ρv^2 は、

$$\rho v^2 = \Gamma_{66}' \tag{20}$$

である。s = 0とs = 1の場合について、(20)式を具体的に書くと次の如くなる。

$$(i) \quad s = 0: \quad \varphi = \pi/6 \quad (l = \sqrt{3}m)$$

$$\rho v^2 = 4m^2 C_{66}^E + n^2 C_{66}^E - 4mn C_{14}^E + \frac{(-4m^2 e_{11} + 2mne_{14})^2}{4m^2 \epsilon_{11}^S + n^2 \epsilon_{33}^S}$$

$$= \sin^2\theta C_{66}^E + \cos^2\theta C_{44}^E - 2\cos\theta \sin\theta C_{14}^E + \frac{(-\sin^2\theta e_{11} + \sin\theta \cos\theta e_{14})^2}{\sin^2\theta \epsilon_{11}^S + \cos^2\theta \epsilon_{33}^S} \tag{21}$$

(ii) $s=1$: $\varphi=3\pi/6$ ($l=0$)

$$\begin{aligned} \rho v^2 &= m^2 C_{66}^E + n^2 C_{44}^E + 2mn C_{14}^E + \frac{(m^2 e_{11} + n m e_{14})^2}{m^2 \epsilon_{11}^S + n^2 \epsilon_{33}^S} \\ &= \sin^2 \theta C_{66}^E + \cos^2 \theta C_{44}^E + 2 \sin \theta \cos \theta C_{14}^E + \frac{(\sin^2 \theta e_{11} + \sin \theta \cos \theta e_{14})^2}{\sin^2 \theta \epsilon_{11}^S + \cos^2 \theta \epsilon_{33}^S}. \end{aligned}$$

(22)

今、(22)式において、 $\epsilon_{11}^S = \epsilon_{33}^S$ とすれば、結晶座標表示で求められている結果¹⁶⁾と一致する。また、(21)式と(22)式とは一見、異っているように見えるが、 $\theta \rightarrow \pi - \theta$ とすれば、全く同一式となる。このことは前に考察した結果と一致する。

温度依存性が小さいゆえに実用化されているAT板は、(22)式のモード中、 $\theta_{AT} \doteq 55^\circ$ の場合に相当する。以上の考察より、AT板は

$$(\theta_{AT}, 3\pi/6), (\theta_{AT}, 7\pi/6), (\theta_{AT}, 11\pi/6),$$

$$(\pi - \theta_{AT}, \pi/6), (\pi - \theta_{AT}, 5\pi/6), (\pi - \theta_{AT}, 9\pi/6)$$

の6方向から得ることが出来る。しかし、振動子板で考えれば、 θ_{AT} と $\pi - \theta_{AT}$ とは全く同一なものであり、事実上は3方向からしか得られないと考えてよい。

6 まとめ

水晶の弾性振動に対して、極座標 (θ, φ) に関する高い対称性が存在する。本論文の目的は、数値計算によらず、圧電効果も含めた形で、水晶の弾性振動の対称性を解析的に証明することであった。圧電効果項を含んだ、回転座標表示の弾性波方程式を用いることによって、本研究の意図を達成することが出来た。本研究を通じて、水晶の弾性振動に存在する対称性は、水晶の弾性波過動方程式が、水晶の点群 $D_3 - 32$ の結晶対称操群と反転操作 I とに対して不変であることに起因することがわかった。また、本研究は、平面 $(\varphi = p\pi/6, p=0, 1, \dots, 11)$ における弾性振動の対称性をはじめとする水晶の弾性振動の諸々の対称性を統一的に理解することを可能にしたと言える。

文 献

- (1) I. Koga, : "Notes on Piezoelectric Quartz Crystals", Inst. of Radio Engineers 24, pp.510~531(1936)
- (2) W. G. Cady, : "Piezoelectricity", p.142, Dover Publications, Inc., New York (1964)
- (3) 古賀逸策 : "圧電気と高周波", pp.84-92, オーム社 (昭13)
- (4) I. Koga, : "Equivalence of Two Piezoelectric Oscillating Quartz Crystals of Symmetrical Outlines with Respect to a Plane Perpendicular to an Electrical Axis", Phil. Mag. 27pp.640-643 (1939)
- (5) 有賀正直 : "水晶の断熱弾性定数とその温度特性について", 東工大学報2, p.42 (1956)
- (6) 大森訳, M. J. P. musgrave著 : "結晶音響学—結晶の弾性波および振動学入門", p.82 内田老鶴圃新社 (昭53)
- (7) A. W. Warner., M. Onoe, and G. A. Coquin, : "Determination of Elarstic Piezoelectric Constants for Crystals ($3m$)", J. Acoust. Soc. Am. 42, pp.1223-1231 (1967)
- (8) J. R. Neighbours, and G. E. Schacher, : "Determination of Elastic Constants from Sound-Velocity Mearsurement in Crystals of General Symmetry", J. Appl. Phys. 38, pp.5366-5376 (1967)
- (9) A. W. Lawson : The Vibration of Piezoelectirc Plates", Phys. Rev. 62, pp.71-76 (1942)

- (10) 文献(2)のp.318
- (11) J. J. Kyame : "Wave Propagation in Piezoelectric Crystals", J. Acoust. Soc. Am. 21 pp.159—167 (1949)
- (12) A. R. Hutson and D. L. White : "Elastic Wave Propagation in Piezoelectric Semiconductor" J. Appl. Phys. 33 pp.40—47 (1962)
- (13) B. A. Auld : "Acoustic Fields and Waves in Solids" Vol. I, John Wiley & Sons, Inc. New York, pp.298—307 (1973)
- (14) 大森訳, C. J. Bradley and A. P. Cracknell著 : "点群と空間群の表現", p.11. 内田老鶴圃新社(昭50)
- (15) R. Bechmann, A. D. Ballato and T. J. Lukazek : "Frequency-Temperature Characteristics of Quartz Resonators Driven from the Temperature Behavior of the Elastic constants", Proc. Annu. Freq. Cont. 16 pp.77—109 (1962)
- (16) 文献(5)のp.102
- (17) 文献(13)のpp.75—76とp.275

付 録

波数ベクトル方向に x_1' 軸を一致させ、かつ、quasistatic近似を用いて弾性方程式を解いた例は多くあり、⁹⁻¹³⁾結果は次のようになる。

$$\rho \ddot{u}_i' = \partial \tau_{i1}' / \partial x_1' = \left[C_{11m1}' + \frac{e_{1i1}' e_{1m1}'}{\epsilon_{11}'} \right] \left(\frac{\partial^2 u_m'}{\partial x_1'^2} \right) \quad (A \cdot 1)$$

ここで、プライムは任意直交座標表示の物理量を意味し、 ρ は密度、 u_i' は変位、 τ_{ij}' は応力、 C_{ijmn}' は電場一定での弾性定数、 e_{ijr}' は圧電定数、 ϵ_{11}' は歪一定での誘電率を各々意味する。回転座標表示に限定すれば、圧電効果を無視した場合、(A.1)式はNeighbours等⁸⁾の結果と一致する。 C_{ij}' はNeighbours等によって完全に求められている。本研究で用いた回転座標表示での e_{ij}' は、一般の座標変換式¹⁷⁾にNeighbours等の座標変換を代入することによって求めることが出来る。結果を簡単に以下に記す。

座標と応力とに対して、結晶座標系(x_j)から回転座標系(x_i')への変換は次のようになる。⁸⁾

$$[x_i'] = [\delta][x_j], \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (A \cdot 2)$$

ここで、

$$[\delta] = \begin{bmatrix} l & m & n \\ -m\alpha^{-1} & l\alpha^{-1} & 0 \\ -ln\alpha^{-1} & -mn\alpha^{-1} & \alpha \end{bmatrix},$$

$$[\tau_i'] = [\beta][\tau_j], \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (A \cdot 3)$$

ここで、

$$[\beta] = \begin{vmatrix} l^2 & m^2 & n^2 & 2mn & 2ln & 2lm \\ m^2\alpha^{-2} & l^2\alpha^{-2} & 0 & 0 & 0 & -2lm\alpha^{-2} \\ l^2n^2\alpha^{-2} & m^2n^2\alpha^{-2} & \alpha^2 & -2mn & -2ln & 2lmn^2\alpha^{-2} \\ lmn\alpha^{-2} & -lmn\alpha^{-2} & 0 & l & -m & -n(l^2-m^2)\alpha^{-2} \\ -ln\alpha^{-1} & -m^2n\alpha^{-1} & n\alpha & m(1-2n^2)\alpha^{-1} & l(1-2n^2)\alpha^{-1} & -2lmn\alpha^{-1} \\ -lm\alpha^{-1} & lm\alpha^{-1} & 0 & ln\alpha^{-1} & -mn\alpha^{-1} & (l^2-m^2)\alpha^{-1} \end{vmatrix}$$

である。添字は縮約した表現を用いている。以上の変換行列 $[\delta]$, $[\beta]$ とそれらの転置行列 $[\tilde{\delta}]$, $[\tilde{\beta}]$ を用いて、回転座標表示での C_{ij}' と e_{ij}' は次式のように表わされる。^{8, 17)}

$$[C_{ij}'] = [\beta][C_{ij}][\tilde{\beta}] \quad (\text{A} \cdot 4)$$

$$[e_{ij}'] = [\delta][e_{ij}][\tilde{\beta}] \quad (\text{A} \cdot 5)$$