静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第23号（1992.3）31～50

文字式の指導について

Teaching Letter Formulas

国宗　進
Susumu KUNIMUNE

(平成3年10月11日受理)

I　研究の目的

中学校数学科での文字式についての指導内容は、次の4つに分けて考えることができる。

(1)　数量または数量の関係を文字式によって表現すること（以下、これを「表現」と書く）

(2)　文字式の表す内容を読み取ること（以下、これを「読式」と書く）

(3)　文字式を計算すること（以下、これを「計算」と書く）

(4)　文字式をいろいろな場面で利用すること

この中の(4)の内容については、さまざまな場面での利用が考えられるが、それは大きく

ア「文字式による論証」　　イ「方程式や関数の場面での利用」

の2つの指導場面に分けられる。ここで、アは、中2や中3での指導において、文字式による証明の問題等について式により思考を進めていく場面を指している。

中学校現場での数学の学習指導を通して、文字や文字式に関する中学生の認知様式とそこに見られる文字概念の形成過程を発達的に分析してみると、いくつかの質的に異なった段階が存在するように思われる。

筆者は、1987年の4月からグループを組んでこの文字教材に関する問題に取り組み、次のような手順で研究を進めている。

1．子どもの行動を現象的に観察し、子どもの文字認知や文字式による論証の理解についての発達の様相を解明し、発達段階を決める。

2．指導の対象になっている子どもが、1．で設定した発達段階のどこにとどまっているのか、その実態を明らかにする。

3．子どもの文字認知や文字式による論証の理解についての発達を促進するための、指導内容や指導方法を検討する。

ここに示した研究の手順は、1．2．3．の順に整然となされるものではない。筆者らは現在のところ、1．2．を中心に検討しながら、3．の具体的な指導内容や指導方法についても考察しているところである。

本稿は、その研究の一環であり、次のことを目的とする。

1）縦断的な調査を通して、子どもの「文字認知」や「文字式による論証」についての理解、及びそれらの関連に関する発達の現状を明らかにする。

2）授業を通して、子どもの「文字式による論証」についての理解度の深まりを検討する。

Ⅱ 研究の内容

1．Hart らの研究についての検討

子どもの文字の理解については、K.M.Hart らの研究[1)]が知られており、筆者らの研究にとって参考になる点が多い。この項では、本研究と Hart らの研究の関係について述べ、そこでの問題点を指摘する。

Hart らは、子どもの「文字の解釈のしかた」として、次の6つの種類を挙げている。

① Letter evaluated （数値化された文字）
② Letter not used （使われない文字）
③ Letter used as an object （ものとしての文字）
④ Letter used as a specific unknown （特定の未知の数量としての文字）
⑤ Letter used as a generalised number （一般化された数としての文字）
⑥ Letter used as a variable （変数として使われる文字）

そして、これらの文字が使われている様子を検討し、子どもの「文字の理解の過程」を次の4つの Level に分けている。

[Level Ⅰ] ―― 文字を、上記①、②、③として解釈する。
[Level Ⅱ] ―― 文字を、一貫しては上記④、⑤、⑥とみることはできない。
[Level Ⅲ] ―― 上記④に関しては正しく解釈することができる。
[Level Ⅳ] ―― 文字を正しく解釈できる。

表1 Hartらの「文字の解釈のしかた」についての問題

	Level Ⅰ	Level Ⅱ	Level Ⅲ	Level Ⅳ
① 数値化された文字	*What can you say about a if a+5=8	*What can you say about u if u=v+3 and v=1 *What can you say about m if m=3n+1 and n=4	*What can you say about r if r=s+t and r+s+t=30	
② 使われない文字	*if a+b=43 a+b+2=	if n-246=762 n-247=	*if e+f=8 e+f+g=	
③ ものとしての文字	*2a+5a=	*2a+5b+a=	*3a-b+a=	*(a-b)+b=
④ 未知の数量としての文字		Add 4 onto n+5	*Add 4 onto 3n+4	*Multiply n+5 by 4
⑤ 一般化された数としての文字			*what can you say about c if c+d=10 and c is less than d	*L+M+N=L+P+N is Always Sometimes Never true (when)
⑥ 変数として使われる文字				*Which is larger, 2n or n+2? Explain

Hartらの調査では、子どもの6つの「文字の解釈のしかた」①〜⑥について、前のページの表1にまとめておいた問題を使って考察している。

また、子どもの「文字の理解の過程」についての Level Ⅰ〜 Level Ⅳの段階判定問題は、表1の中のマーク＊を付けた問題にさらに、水準Ⅰについては3問を加えて計6問、水準Ⅱについては4問を加えて計7問、水準Ⅲについては3問を加えて計8問、水準Ⅳについては5問を加えて計9問、総計30問から構成されている。

この調査を日本の子ども達にも実施したところ、驚くほどのよい結果を得ている[2)]。その結果と Hart らの調査結果を比べてみると、英語圏にあるイギリスの子ども達と日本の子ども達との間には、文字の理解の様相に違いがあることは明らかである。

例えば、「②使われない文字」に関して用いられた問題「e＋f＝8のときe＋f＋g＝　」では、イギリスの子どもには15という誤答がみられるという。その理由は、gがアルファベットの第7番目の文字に当たることから、e＋f＝8ならばe＋f＋g＝8＋7＝15としたための誤答であるという。このような誤答やその原因は、日本の子ども達にはみられない。

また、「③ものとしての文字」に関して用いられた問題は、

1) 2a＋5a　　2) 2a＋5b＋a　　3) 3a－b＋a　　4) (a－b)＋b

であるが、この問題についてのイギリスの14才の子ども達の正答率は順に86%、60%、47%、23%であり、1)から4)へといくにつれて下がっていく。それに対して、中学校第1学年の日本の子ども達に、正負の数の指導後（文字や文字式の指導前）にこれと同一の問題で行ったある調査の結果によれば、順に45%、58%、55%、73%という正答率であった。1)から4)への順次性はみられなかったのである。イギリスの子どもの多くは、2aを two apples、3bを three bananas ととらえ、2a＋3bを、2つのリンゴと5つのバナナを合わせると全部で5個だから2a＋3b＝5abとするようである。同じ誤答は日本の子ども達にも文字学習の初期によくみられるが、その原因は、算数では答えは2+3ではなく5である、だから＋の演算記号を残したままの2a＋3bを答えとすることにある種の不安が付きまとい、5abとしてしまうといわれている。

次に、Ⅰで述べた日本の中学校数学科での文字式についての指導内容という観点から Hartらの調査問題を検討してみると、「計算」については、「①数値化された文字」と「②使われない文字」に関する問題が、方程式を解く問題や代入計算に関連し、「③ものとしての文字」に関する問題が、文字式の計算の問題に大きく関連していることがわかる。

「表現」については、「④未知の数量としての文字」に関する問題が関連し、また、Level Ⅳの段階判定問題として、次の1問が採用されている。

Blue pencils cost 5 pence each and red pencils cost 6 pence each. I buy some blue and some red pencils and altogether it costs me 90 pence.

If b is the number of blue pencils bought and if r is the number of red pencils bought, what can you write down about b and r? （下線筆者）

「読式」については、Level Ⅳの段階判定問題として、次の1問だけが採用されている。

What does 4c ＋3b stand for (if cakes cost c pence each and buns b pence each, and if 4 cakes are bought,etc)? （下線筆者）

また、「文字式による論証」については、関連する問題は皆無である。これは、イギリスでの指導内容ではないためであろう。

以上のような日本の子どもとイギリスの子どもとの文字の理解の様相の違いや、文字式につ

いての指導内容という観点からの検討の結果を考慮すると、Hart らの「文字の解釈のしかた」、「文字の理解の過程」や調査問題を参考にしつつも、「表現」や「読式」についての観点をもっと重視したり、「文字式による論証」についての理解度という観点を加えるなど、日本の子ども達の実状に合った調査問題を作成し、その理解の様相を検討する必要があると考える。

2．段階設定と段階判定問題

1．で述べたような Hart らの調査問題や、数学科での文字式についての指導内容の検討、そして、それらと平行して行った何回かの実態調査や授業時における観察の記録、プロトコールなどを検討、分析した結果、筆者らは、子どもの文字や文字式の理解の様相をまず「文字認知」と「文字式による論証についての理解度」という２つの方向からとらえることにした。

設定した発達段階やその現状をとらえるための段階判定問題は、次の通りである。

2－(1)　「文字認知」の発達段階

子どもの「文字認知」についての理解度には、次の水準があると考えられる。

《「文字認知」の発達段階》

[水準０]……「計算」、「表現」、「読式」ともに通過せず。

[水準Ⅰ]……「計算」のみ通過。

[水準Ⅱ]……「計算」、および、「表現」か「読式」の一方が通過。

[水準Ⅲ]……「計算」、「表現」、「読式」ともに通過。

文字認知というからには、変数の概念等をも含む幅広いものとしてとらえる必要があるが、ここでは、中学校での指導内容として大きな位置を占める「計算」「表現」「読式」についての内容を生徒はどのように理解しているのか－これを本稿では以下、生徒の「文字認知」と書く－に限定して考えることにする。変数の概念等については、いずれ報告したいと考えている。

なお、ここでの段階の使い方は、ピアジェの「段階」の使い方[3]のうち、実験データの分析における段階という使い方である。その場合多くはⅠ～Ⅲの３段階に分けられ、第Ⅰ段階は実験課題に失敗、第Ⅱ段階は部分的成功、第Ⅲ段階は完全な成功に対応している。

また、その段階判定のための問題は、次のページの$\boxed{1}$～$\boxed{5}$である。問題$\boxed{1}$、$\boxed{2}$、$\boxed{3}$は「計算」の問題として、$\boxed{4}$は「表現」の問題として、$\boxed{5}$は「読式」の問題として採り上げている。なお、これらを Hart らの調査問題と関連づけると、$\boxed{1}$は「③ものとしての文字」に、$\boxed{2}$は「①数値化された文字」に、$\boxed{3}$は「②使われない文字」についての問題に対応づけられるであろう。

ここで、「計算」、「表現」、「読式」を通過したと判定するのは、「計算」の問題$\boxed{1}$～$\boxed{3}$の12問中、「表現」の問題$\boxed{4}$の４問中、「読式」の問題$\boxed{5}$の４問中のそれぞれ３／４が正答の場合であるとした。(基準設定の観点、採点の基準等の詳細は、文献[4]を参照)

2－(2)　文字式による論証についての理解に関する発達段階

子どもの「文字式による論証」についての理解度には、次の水準があると考えられる。

《文字式による論証についての理解に関する発達段階》

<水準Ⅰ>……文字式を使わずに、具体的な数値をあげたり、ことばで説明しようとする。

<水準Ⅱ>……文字式を使うが、不適切な使い方をする。

<水準Ⅲ>……文字式を使って正しく説明する。

また、その段階判定のための問題は、次のページの$\boxed{6}$である。

(解答の分類基準、段階の判定基準等の詳細については、文献[5]を参照)

1 次の計算をしなさい。

(1) $2a+5a$　　(2) $2a+5b+a$

(3) $-4(3a+7b)$　　(4) $3(10a-6b)-2(4a-b)$

2 次の方程式を解きなさい。

(1) $x+5=8$　　(2) $5x-20=0$

(3) $4x-3=2x+7$　　(4) $-4(3x-7)=10-2x$

3 次の□にあてはまる数を求めなさい。

(1) $a+b=43$のとき、$a+b+2=\square$

(2) $x=4$のとき、$3x+5=\square$

(3) $a=2$、$b=-3$のとき、$-4a+b=\square$

(4) $x=y+z$、$x+y+z=30$のとき、$x=\square$

4 次の数量を表す式を書きなさい。

(1) 男m人、女n人の学級全体の人数

(2) x㎞の道のりを毎時5㎞の速さで歩いたときにかかる時間

(3) 整数mを使って、偶数を表せ

(4) ある整数xを8でわったときの商がaで余りが5であるときの、この整数x

5 次の問いに答えなさい。

(1) ケーキ1個の値段がa円、パン1個の値段がb円であるとき、$4a+3b$は何を表しているか。

(2) 峠をはさんでa、b 2つの村がある。ある人が、A村から峠までは3㎞／時の速さで、峠からB村までは5㎞／時の速さで歩いてB村へ行った。A村から峠まではa時間、A村からB村まではb時間かかったという。

上のことがらで、次の式は何を表しているか。

① $b-a$　　② $5(b-a)$

(3) 整数を表す文字をnとするとき、次の式は何を表しているか。

$2n+1$

(4) ある2けたの整数と、その整数の十の位の数と一の位の数を入れかえた整数は、$10a+b$、$10b+a$と表せる。
$(10a+b)+(10b+a)$
を右のように変形すると、
$11(a+b)$
となる。

$$
\begin{aligned}
&(10a+b)+(10b+a)\\
&=10a+b+10b+a\\
&=11a+11b\\
&=11(a+b)
\end{aligned}
$$

このことから、この2けたの整数について、どのようなことがいえるか。

6 右のカレンダーをもとにして、次の問いに答えなさい。

右のわくに囲んだように、
たてに3つ続いている数の和は、まん中の数の3倍になっています。

このことがどこでもいえることを説明しなさい。

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

3．縦断的調査による検討

これまでにも、子どもの「文字認知」や文字式による論証についての理解度に関する何回かの実態調査を行い、それを検討、分析してきたが、その多くは横断的な調査によるものであった。今回は、指導者の授業の持ちかたの状況から同一生徒を追跡することが可能になり、縦断的な調査データを得ることができた。なお、中学校での縦断的調査の実施には様々な困難が伴うためか、文字や文字式の指導に関しては太田の研究6)があるだけである。

この項では、公立中学校1学級生徒を対象に、1年生の時の調査と3年生になって行った調査の結果を比較して、「文字認知」や文字式による論証についての理解度、およびそれらの関連についての発達の様相を縦断的に検討する。

3－(1)　「文字認知」に関する調査

1．目的　中学生の「文字認知」についての現状を、縦断的調査により明らかにする。

2．方法

1）調査対象　東京都公立中学校生徒第3学年1クラス

2）調査時期　第1学年時　1989年12月、第3学年時　1991年5月

3）調査方法　両学年時とも同一問題で実施、時間制限はしなかったがだいたい20分間で終えている。

4）調査問題　前のページの問題1～5

3．結果と考察

段階判定の対象とした生徒は、1年時、3年時ともに調査データが揃っている34名であるが、このうちの2名は段階判定不能であった。（2名ともに1年時において、「計算」はできないが「表現」または「読式」ができていた。）

ここではこれ以降、この2名を除いた32名について分析していく。

段階の判定基準をもとに、1年時、3年時の調査結果を調べてみると、各発達段階別の分布について次の表2を得る。また、その推移を図に表すと、次の図1を得る。

表2　段階別分布　数値は人数(n=32)

学年	[0]	[I]	[II]	[III]
1年時	9	5	11	7
3年時	2	3	7	20

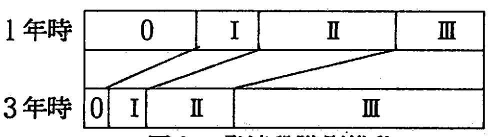

図1　発達段階別推移

以下、気付いたことを述べる。

ア、[水準0] の生徒は1年時で9名であったが、3年時では2名に減っている。つまり、3年時では、32名中の30名（94％）は「計算」ができている。文字式の「計算」は、練習すればある程度身に付いていくことを示している。

イ、3年時では、20名（63％）の生徒が [水準III] に達している。「文字認知」についての発達の現状は、まずまずの状況にあるといってよいであろう。

次に、生徒一人ひとりの1年時から3年時への発達段階の変化を調べ、それらを分類すると次のようになる。

1学年時 3学年時	人数
[0] → [0]	2
[0] → [I]	3
[0] → [II]	2
[0] → [III]	2

1学年時 3学年時	人数
[I] → [II]	2
[I] → [III]	3
[II] → [II]	2
[II] → [III]	9
[III] → [II]	1
[III] → [III]	6

この表から、次のことが指摘できる。

ウ、1年半の数学学習の結果、「文字認知」について、多くの生徒がより好ましい方向へと発達を遂げている。特に、1年時に[水準II]にいた生徒は全体の約1/3であったが、その多くは、3年時には[水準III]に達している。1年時に[水準II]にいる生徒は、中学校の学習でいずれ[水準III]へ上がるものと考えられよう。

だがその1年半に、[水準0]にとどまったままの生徒が2名、[水準II]にとどまったままの生徒が2名いる。また、1名の生徒は[水準III]から[水準II]へとダウンしている。「表現」や「読式」についての問題に対する解答の不十分さがその理由であるが、1年半の学習が、これらの生徒の「文字認知」についての安定さを高めるという点では大きな効果をあげなかったといえるであろう。このような生徒に対するきめ細かな指導が必要である。

3−(2) 文字式による論証についての理解に関する調査

1．目的 中学生の文字式による論証についての理解に関する現状を、縦断的調査により明らかにする。

2．方法

1）調査対象 東京都公立中学校生徒第3学年1クラス

2）調査時期 第1学年時 1989年12月、第3学年時 1991年5月

3）調査方法 両学年時とも同一問題で実施、時間制限はしなかったがだいたい15分間で終えている。

4）調査問題 前々ページの問題6

3．結果と考察

段階の判定基準をもとに、1年時、3年時の調査結果を調べてみると、各発達段階別の分布について次の表3を得る。また、その推移を図に表すと、次の図2を得る。

表3 段階別分布 数値は人数(n=32)

学年	〈0〉	〈I〉	〈II〉	〈III〉
1年時	20	2	5	5
3年時	12	3	5	12

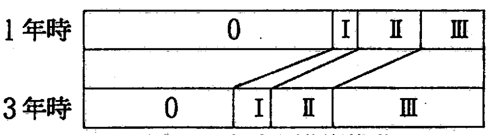

図2 発達段階別推移

以下、気付いたことを述べる。

ア、<水準I>以下の生徒は、1年時で22名（69%）、3年時で15名（47%）いる。中3になっても全体の約半数の生徒が、文字を使って証明しようとしていない。文字を使って証明してみようという意識が極めて低いのである。

このことは、中2、中3の生徒に対してかなり文字に関する指導が行われている現状を

考えると、重大な問題である。文字式による論証についての理解を深めるための意図的な指導が必要である。

イ、＜水準Ⅱ＞以上の生徒の割合は１年時で約１／３、３年時で約１／２であるが、それらの分布のようすには大きな違いが見られる。１年時では、＜水準Ⅱ＞と＜水準Ⅲ＞にほぼ同じように分布しているが、３年時には、その多くが＜水準Ⅲ＞に達している。つまり、＜水準Ⅱ＞にいる中１の生徒の多くは、その後の１年半ほどの文字に関する学習によって＜水準Ⅲ＞に上がるということができる。

１年生のときに＜水準Ⅱ＞へと高めておくような指導が望まれる。

次に、生徒一人ひとりの１年時から３年時への発達段階の変化を調べ、それらを分類すると次のようになる。

1学年時　3学年時	人数
＜0＞→＜0＞	11
＜0＞→＜Ⅰ＞	1
＜0＞→＜Ⅱ＞	5
＜0＞→＜Ⅲ＞	3
＜Ⅰ＞→＜0＞	1
＜Ⅰ＞→＜Ⅲ＞	1

1学年時　3学年時	人数
＜Ⅱ＞→＜Ⅰ＞	1
＜Ⅱ＞→＜Ⅲ＞	4
＜Ⅲ＞→＜Ⅰ＞	1
＜Ⅲ＞→＜Ⅲ＞	4

この表から、次のことが指摘できる。

ウ、1年時に＜水準０＞にいた生徒20名のうちの11名は、中３になっても＜水準０＞にとどまったままである。１年半もの文字に関する学習が、これらの生徒の「文字式による論証についての理解」に関する発達に、何ら影響を与えなかったことになる。このような生徒に対する意図的な指導が望まれるとともに、文字式による論証についての指導内容、方法についての再検討が急務である。

エ、１年次に＜水準０＞にいたが、３年次には＜水準Ⅱ＞や＜水準Ⅲ＞へと上がった生徒が８名もいる。文字を使おうとするようになるにはある程度の文字使用の経験が必要であろうが、特にどのような指導によってこれらの生徒に変容がもたらされたのかは、今回の調査では明らかにならなかった。縦断的調査と実際に行われた指導との両者を合わせ考えて、発達を促進するための原動力を検討する必要がある。

オ、１年時に＜水準Ⅱ＞、あるいは＜水準Ⅲ＞でありながら、３年時には＜水準Ⅰ＞へとダウンした生徒が、それぞれ１名ずついる。この２名は、１年時には文字を使おうという構えがあったにもかかわらず、３年時にはそれが消えてしまっているのであろうか。そこで、この２名の生徒Ａ君、Ｂさんに調査実施後面接をしてその考えを問うてみたところ、次のような解答が得られた。

まず、１年時に＜水準Ⅱ＞であったＡ君については次の通りである。なお、教師をＴと書くことにする。

T_1　（カレンダーについての調査問題6を示して）この問題見たことある？

A_1　ある。

T_2　どういう問題だった？

A_2　（覚えている）

T_3　どうやって説明すればいいの？

A_3　文字をおく。まん中の数をｘとすると、上の数は $x-7$、下の数は $x+7$ で、
$x-7+x+x+7=3x$，$3x\div 3=x$ だから、まん中の３倍になっている。

T_4　実は３年になってやったときにはできていなかったんだけれど、どうして？

Ａ　……（よくわからない）

T_5　今は文字を使って説明できるんだね。

A_4　できます。

Ａ君は文字を使っていとも簡単に証明した。この面接は、本稿の次項で検討される３年生を対象とした授業の後に行われたが、その授業において、Ａ君は文字を使っての証明の意義を十分に納得したことが観察されている。この面接の結果からは、３年時の調査の時点でなぜ文字を使おうとしなかったかは、明らかにならなかった。

次に、１年時に＜水準Ⅲ＞であったＢさんについては次の通りである。ＴやＢの言動については、T_3までは A君の場合と同様であった。

B_1　まん中の数から７をひけば上の数で、７をたせば下の数になる。だから、３つの数をたすとまん中の３倍になる。

T_6　文字を使って考えられる？

B_2　考えられる。（Ａ君と同様の文字を使った説明をする。）

T_7　実は１年の時は文字を使って説明して、３年になってやったテストの時は文字を使っていないんだけれど。

B_3　文字を使っても考えられるけれど、この時は＋、－で考えられる。

T_8　文字を使うか使わないか、どう使い分けているの？

B_4　ひらめきかな。

Ｂさんは、１年時に文字を使って証明したし、この面談の時にも指示されればスラスラと証明する。だが、T_8の「文字を使うか使わないか、どう使い分けているの？」という問いかけに「ひらめきかな」と答える様子からは、文字を使って証明することの意義を十分にとらえているとは言いがたい。むしろ、文字式による証明と文字を使わない言葉による説明とを同等にとらえているように思われる。文字を使って証明できることと、そのように証明することの意義をとらえていることとは、別のことである。文字式による論証の指導の難しさを感じる。

なお、ここでのＡ君やＢさんの文字式による論証についての理解度は、面接の結果明らかになったものである。ペーパーテストの限界を表しているとともに、このような方法をよりいっそう重視することの重要性を痛感する。

3－(3)　「文字認知」と「文字式による論証についての理解度」との関連

ここでは、(1)で検討した「文字認知」と、(2)で検討した「文字式による論証についての理解度」（以下、「論証能力」と呼ぶ）との関連について述べる。

１．調査結果

この両者の関連を検討するために、(1)で述べた「文字認知」と(2)で述べた「論証能力」との結果を相関表で表すと、次の表４、表５のようになる。これらの図では、横軸に「文字認知」の発達段階を、縦軸には「論証能力」の発達段階をとってある。

表4　1年次の分布　　数値は人数(n=32)

計	9	5	11	7	32
<水準Ⅲ>			3	2	5
<水準Ⅱ>		2		3	5
<水準Ⅰ>		2			2
<水準0>	9	1	8	2	20
論証/文字認知	[0]	[Ⅰ]	[Ⅱ]	[Ⅲ]	計

表5　3年次の分布　　数値は人数(n=32)

計	2	3	7	20	32
<水準Ⅲ>			2	10	12
<水準Ⅱ>			2	3	5
<水準Ⅰ>				3	3
<水準0>	2	3	3	4	12
論証/文字認知	[0]	[Ⅰ]	[Ⅱ]	[Ⅲ]	計

次に、生徒一人ひとりの1年時から3年時への両発達段階についての変容をとらえるために、1年時の水準が3年時にはどの水準に変わったかを示したものが図3である。

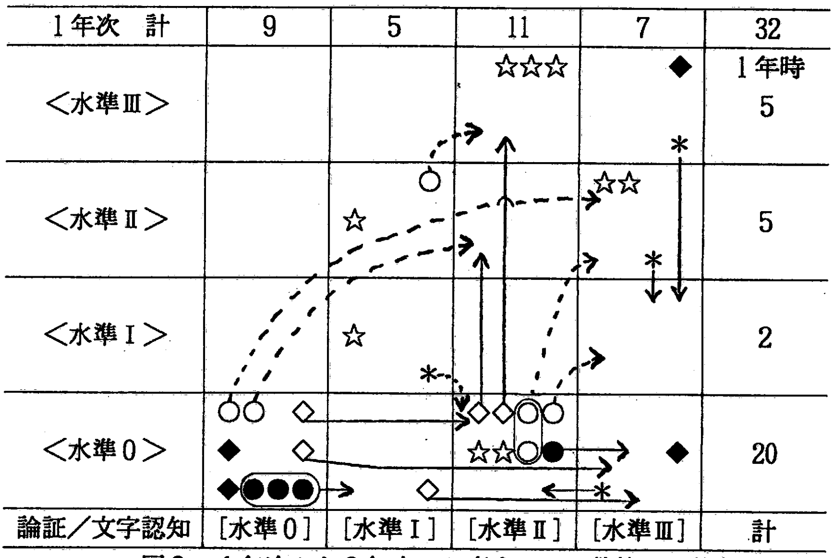

図3　1年次から3年次への変容　　　数値は人数(n=32)

図3で、一人ひとりの生徒を表す印は、次のように使い分けられており、印を示した位置が1年時の水準、矢印の先端の位置が3年時の水準を表している。

- ◆　変容なしの生徒
- ●　右方向への1ますだけの変容、つまり、文字認知の段階が1段階上がった生徒
- ◇　右方向、あるいは真上へ2ます以上変容した生徒

○　右上方向へ変容した生徒

☆　文字認知、論証能力の段階ともに水準Ⅲに到達した生徒

＊　水準がダウンした生徒

なお、☆の生徒の変容を示す矢印は省略してある。

2．結果の考察

以下、気付いたことを述べる。

ア、論証能力が＜水準Ⅱ＞以上の生徒は、1年時で10名（31％）、3年時で17名（53％）いる。これに対して、文字認知に関する発達段階が［水準Ⅱ］以上である生徒は、1年時で18名（56％）、3年時で27名（84％）おり、まずまずといえる。

それまでの文字式についての学習が、文字認知の発達を促進させる点ではよく行われていたが、論証能力を高めるという点についてはあまり有効ではなかったといえるであろう。

イ、論証能力が＜水準0＞または＜水準Ⅰ＞の生徒は、1年時で約2／3、3年時では約1／2いるが、特に＜水準0＞の生徒は、両学年時とも文字認知に関する発達段階は［水準0］～［水準Ⅲ］に散らばっている。つまり、文字を使って証明しようという態度ができていなくても、文字認知に関する発達段階は高まっていくということができる。それだけに、論証能力も高めるための意図的な指導が必要である。

ウ、文字認知に関する発達段階が［水準0］である生徒は、1年時で9名、3年時で2名おり、これらすべての生徒の論証能力は＜水準0＞である。

文字式の指導が日々行われている現在、このような生徒に対するきめ細かい指導の必要性を感じる。

エ、文字認知に関する発達段階が［水準Ⅰ］である生徒は、1年時で5名、3年時で3名いる。これらの生徒の論証能力をみると、1年時では＜水準0＞から＜水準Ⅲ＞に散らばって分布しているのに対して、3年時では全員が＜水準0＞にとどまったままである。

1年時ではまだ文字についての学習が十分でないために、その後の学習によって［水準Ⅱ］、［水準Ⅲ］へと発達していく予備軍が［水準Ⅰ］に分布していると考えられる。これに対して3年時の3名の生徒は、それまでの学習によって、「計算」技能の面では充実したが「表現」や「読式」を理解するには至らず、論証能力の高まりもないままでいる。これらの生徒の「表現」や「読式」の力および論証能力を高める意図的な指導が必要である。

オ、文字認知に関する発達段階が［水準Ⅲ］である生徒は、1年時で7名、3年時では20名おり、圧倒的に3年時が優位である。

このうち、3年時に論証能力が＜水準0＞である生徒は、それまでの文字式についての学習によって、文字認知に関する発達段階はようやく［水準Ⅲ］に達したものの、論証能力については発達しなかったと考えられる。これらの生徒の論証能力も高める必要がある。

以上、「文字認知」や文字式による論証についての理解度、およびそれらの関連についての発達の様相を縦断的に検討した。その結果は、これまでに行った何回かの横断的な調査を通しての検討の結果[7)]とほぼ同様である。従来の数学指導によって、「計算」「表現」「読式」という意味での「文字認知」の発達は保証されるが、文字式による論証についての理解に関する発達を促進させるためには、意図的な指導が不可欠である。その指導内容、指導方法の検討が望まれる。

4．授業を通しての検討

4－(1)　実践記録の重視

本研究は、数学の抽象概念の１つである「文字」概念の形成とその指導法の追及を目的としている。

教育現場で指導している概念は、論理学的な意味での正しい概念よりは、むしろ動揺する概念である。そこでは、個人間や個人内あるいは集団内で、概念がどのように揺れ動くか、同じ概念の内包や外延がどのように変化するか、そしてそこから科学的に正しい概念がいかに獲得されるのかということが問題である。

教育実践のなかでの子どもの発達の事実を、何を資料として把握するかは、それ自体が大きな問題であるが、そこでは、子ども自身の表現物が決め手となることは間違いない。そのためには、教師の働きかけとそれを受けての子ども自身の表現の変化、発達のリアルな記述を含んだ実践記録が蓄積されなければならないと考え、筆者らは、授業中のプロトコール、ワークシートに子どもがかいたもの等の分析をもとに、授業の評価を行っている。

ところで、滝沢は、「最近の発達心理学の著しい特徴は、それぞれの子どもがそれぞれ固有の道をたどるという多元的発達観の立場に立って、現実の教育場面で複雑な意味のある課題に直面する子どもの認知発達を研究する方向にむかっているという点にある」と言っている[8)]。また、若井は、児童心理学の「最近の新しい研究トピックスまたは特徴的傾向」として、6点を挙げ、その中で次のことを指摘している[9)]。

・“domain specificity”の強調
・研究方法論上の問題：現象学的アプローチ、個性記述的アプローチ
・（心理）現象を日常的文脈のなかで扱うようになりつつあること

このような発言を引用するまでもなく、子どもの文字や文字式のとらえ方やその変容をさぐるには、文字や文字式が学校での学習によることの大きい内容だけに、まさに数学の「授業」という日常的文脈のなかでそれをとらえることが不可欠である。

この項では、文字式による論証についての授業を検討し、そこでの子どもの理解の様相について考察する。筆者らは、子どもはあることがらが成り立つことを説明するという「論証」の場面に当面しても、文字をなかなか使えないのではないか、文字を使おうというアイディアさえ浮かばないのではないかと予想し、これまでに次のような実験授業を行いそこでの子どもの文字や文字式の使い方を観察してきた。

１年生を対象に、文字式を利用して問題解決をはかる場面での授業
２年生を対象に、「式の計算」の導入場面、及び「式の利用」の場面での授業

その結果は、予想通り、帰納的な方法でよしとする生徒が多く、文字使用を考える者はごく少数であった。

そこで今回は、３年生を対象に「式の利用」の場面での実験授業を行い、上と同様の観点で考察することにした。その際、目的にあった式変形を行い論理を展開していくことになるが、それを子どもはどのようにとらえているのかについても考察する。

なお、今回の実験授業の実施に当たっては、２項で述べた「文字認知」や文字式による論証についての理解に関する調査を事前に行い、授業の対象生徒がどの発達段階にいるかを前もってとらえておいた。そして、対象生徒がこの授業によってどのように変容するかについても合わせ考えることにした。

4－(2)　授業の実際

日　時　1991年5月18日　9:40～10:30

授業者　中西知真紀

観察者　小関熙純、鈴木裕、国宗進

対　象　東京都公立中学校　第3学年5組39名(男子20名、女子19名)

1）学習のねらい　「文字式を使うと、整数についての性質が成り立つことを簡潔に一般的に説明できる」ことを理解する。

2）指導案　(略)

課題には、「一の位が5である数の2乗の計算の結果は、下2桁の部分は25であり、百の位以上の数は、もとの数の十の位の数とその数に1を加えた数との積になる」という性質がとりあげられた。この速算のルールを帰納的に発見し、それを文字を使って証明するというのが、授業の大きな流れである。

3）授業記録

授業開始後、TはPに$15^2=225$、$25^2=625$、$35^2=1225$、$45^2=2025$、……を計算させ、TとPとの応答により、上に述べたような速算のルールがあることを確認する。そのやりとりの間に、教師にはT_1～T_{17}、生徒にはP_1～P_7の発言、及びワークシート（以下、これをWSと略記する）の記述が2度あった。以下の発言の中での「2つの規則」や「ルール」とは、速算のルールのことを指している。

T_{18}　2つの規則が出てきたけれど、この規則は他の数でも成り立つのでしょうか？「…」と書いてあるけど、数はもっとたくさんあるはずです。他の数でも確かめて下さい。WSの3に書いて下さい。　WS3

P　(なんらかの数で確かめている)

T_{19}　P_8君、何で確かめましたか。

P_8　95^2は9025でなっています。

T_{20}　(95^2を、ルールを使って計算したものと実際に平方したものを示し、確認する)
他にもいろいろな例で確かめているようですね。
(黒板で、5^2や125^2でも成り立つことを確認)　$○5^2=\square 25$　　$125^2=15625$
$○\times(○+1)$　　$12\times(12+1)$

T_{21}　何十5の2乗は、下2桁が25で、百の位以上の数は、$○\times(○+1)$という数になるという規則がありそうですが、(このルールの説明のときに、次のように、百以上の数と下2桁の数とを分けた式を板書した)

$225=200+25$　$625=600+25$　$1225=1200+25$　$2025=2000+25\cdots$

何十5という数はもっともっとたくさんあります。この規則は必ず成り立つといえるのでしょうか？　なると思う人は「なると思う」、必ずしもなるとは限らないと思う人は、そのように書きなさい。その理由も書きなさい。　WS4

T_{22}　あまり筆が進んでいないようですね。それじゃ、やめて。WSの4に結論だけはしっかり書いて下さい。なると思う人は「なる」、そうとは限らないと思う人はそのように。

T_{23}　「なる」と思う人は？

P　(ほとんど全員が挙手)

T_{24}　「そうとは限らない」と思う人は？

P　(3名挙手)

T_{25}　なぜならないと思うの？

P_9　2乗する数の一の位が5でない場合を考えていました。

T_{25}　なるほど。でもこの場合は、それを入れないで考えてみましょう。何十5の場合はなると思いますか？

P_9　なると思います。

T_{27}　他の人はどうですか？

P_{10}　なると思います。

T_{28}　それじゃ、全員の人がなると思うんだね。でも、そうなることは説明できなければ納得できません。そこで、その理由を説明しなければならないけれど、なかなか筆が進まないようです。ヒントを出すよ。$(○5)^2=□25$になることを示すんだね。具体的に35という数なら3を使って説明できるけど、○という数がいろいろ変わるからうまくいかないね。そこで、何かを使うのです。何かを使ってうまく説明していくのです。もう一度、なると思う理由を書きなさい。　WS5

P　(半数ぐらいの生徒は、文字を使って説明しているようである)

T_{29}　うまく説明できたかな？　何を使って説明すればいいのでしょう？

P_{11}　文字を使えばいいと思います。

T_{30}　$(○5)^2$を計算するのだから、この○を何かの文字で表す。xでもaでもmでもいいけれど、一応aで表そうか。それじゃあ、この$(何十5)^2$という数を文字aを使って表して下さい。(途中で、「何十5という数を表すんだよ」と何回も言う。)　WS6

T_{31}　聞くよ。

P_{12}　$(10a+5)^2$です。

T_{32}　こうなった人？

P　(半数位の者が挙手)

T_{33}　(a5)とした人はいないかな？　これではだめだね。文字式の約束で、a5はa×5の意味で、35を表したいと思っても3×5＝15になってしまいます。

T_{34}　さあ、$(10a+5)^2$を使ってどう説明すればよいか、もう一度考えて下さい。　WS7

(机間巡視中、「あれ、公式を覚えていない人がいるな」と言い、$(a+b)^2$の公式を板書し、確認する)

T_{35}　さあこの式はどうなった？　1行目は？

P_{13}　$=100a^2+100a+25$

T_{36}　($a^2+2ab+b^2$の公式にあてはまることを確認する)

T_{37}　この後、どうやって説明していけばよいですか？　WSの8に書きなさい。　WS8

T_{38}　さあ、うまく説明できましたか？

P_{14}　黒板の所で説明) 私は逆に考えたのですが、○×(○+1)が百の位以上の所にくるので、$a\times(a+1)=a^2+a$で、これを100倍して、式の$100a^2+100a$と等しくなることがわかります。

T_{39}　なるほど、(確認する) これ以外の考え方でやった人は？

P15　僕は次のように変形して考えました。

$$100a^2+100a+25=100(a^2+a)+25=100a(a+1)+25$$

T_{40} （補足説明し、確認）このように文字を利用すれば、何かの性質を一般的に説明することができます。次の時間も、このような文字式の利用について学習していきましょう。

4－(3)　考察

1）対象生徒の段階判定

事前調査の結果に基づいて、「文字認知」や文字式による論証についての理解に関する発達段階別の分布を相関表にまとめると、次の表6を得る。

表6　事前調査での段階別分布　　(n=39)

計	2	5	9	23	39
＜水準Ⅲ＞			2	11	13
＜水準Ⅱ＞			3	3	6
＜水準Ⅰ＞				4	4
＜水準0＞	2	5	4	5	16
論証/文字認知	［0］	［Ⅰ］	［Ⅱ］	［Ⅲ］	計

全体的な傾向としては「文字認知」についての発達はまずまずであるが、文字式による論証についての理解度は、＜水準Ⅰ＞以下と＜水準Ⅱ＞以上にほぼ半々に別れている。

2）学習進行に合わせた考察

ここでは、ワークシート（以下、これをＷＳと略記する）の記述の分析を中心に、学習進行に合わせ、幾つかの部分に分けて考察する。

①　速算のルールの発見、確認

授業記録ではその詳細な記述を省略したが、本時で考えた速算のルールについては、「下２桁の部分が25である」ことは35名（90％）の生徒が発見している。これに対して、「百の位以上の数は、もとの数の十の位の数とその数に１を加えた数との積である」ことは14名（36％）の生徒だけが見いだすことができた。なお、14名のうちの１名だけが、そのルールを「もとの数の十の位の数の２乗と十の位の数との和である」として述べている。

ＷＳ３で、15^2、25^2、35^2、45^2以外の数についてもこのルールが適用できるのを確かめることは、ほとんどの生徒が何等かの数値で確認できている。また、９名の生徒は、一の位が５以外の数についてもその２乗を計算しており、その結果「一の位が５以外の数にはこのルールを適用できない」ことをとらえていたものと思われる。

②　「必ず成り立つといえるか」に対する反応

ＷＳ４は、Ｔの「この規則は必ず成り立つといえるのか」という問いに対する答えを書かせたものであるが、39名中の37名が「なる」と判断している。その理由についてはほとんどが白紙であり、わずか４名の生徒だけが文字を使っての説明をしている。また、そのうちの１名だけが正答であった。

このことから、文字を使わなかった35名（90％）の生徒すべてが文字を使おうとしていなかったと断定してしまうのは早計すぎるであろうが、後のＷＳ６で文字を使って$(何十5)^2$を表現する際に学級の2/3が$10x+5$と表現できていることを合わせて考えると、「必ず成り立つといえるのか」という問いかけに対して、文字を使おうとする生徒がいかに少ないかがわかる。

なお、文字を使わなかった生徒の中には、「なんとなく。今までやった数が全部なったのだ

から」、「２種類のやり方でなったから」(筆者注：２つの具体的な数で確かめたからなるという意味）というように、帰納的に考え、その結果必ず「なる」と判断した者もみられる。

ところで、先に述べた文字を使った４名の生徒の、事前調査での「文字認知」と「論証能力」の発達段階は、いずれの段階とも水準Ⅲである。文字を使ったが正答ではなかった３名の生徒のうちの１名は、この授業中に正答を得たが、残りの２名は$(10a+5)^2=100a^2+100a+25$まで式変形したところで止まっている。これ以降は目的にあつた式変形が要求されるわけだが、その成否と文字を使おうとする構えとは別のことであると考えられる。

③　「何かを使う」という暗示

ＷＳ５では、再度「なる」と判断できる理由を書かせている。その前には「何かを使うのです。何かを使ってうまく説明していくのです。」という文字使用を暗示させるＴの発言があったが、約半数の19名が文字を使って説明しようとしている。このうちの４名は式を使って最後まで正しく説明している。また、１名はその途中であるが、説明の方針は明確になっている。この19名のうちの12名の生徒だけが、$10a+5$あるいは$(10a+5)^2$を正しく表現している。だが、次のＷＳ６のところでも述べるように、「(何十５$)^2$を文字を使って表しなさい」と指示されると26名の生徒が正答を得ることができる。つまり、その差14名の生徒は、文字表現はできるものの、それを説明の場面で使えなかったということになる。数量を正しく表現できることは文字式を使った論証には不可欠のことであるが、表現できたからといって、それを説明の場面で使えるわけではない。

④　文字を使っての表現

その後、P_{11}「文字を使えばいいと思います」という発言を通して学級全体で文字の使用を確認した後、Ｔはまずｗｓ６に「一の位が５である数」を文字を使って表すように指示する。その記述の際、Ｔは「何十５という数を表すんだよ」と繰り返している。この問いに対する正答は26名で、誤答５名、白紙８名であった。なお、誤答の内容は、$x+5$が５名、$5x$が１名、＿５が１名である。

ＷＳ７では、P_{12}「$(10a+5)^2$」と学級全体で式表現を確認した後、再度「どう説明すればよいか」を記述させる。そこでは、ＷＳ５で既に正答を得ている４名に、４名を加えた計８名が正答を書いている。さらに時間をおいた最終のＷＳ８では、もう２名ふえて、10名が正答を得るに至っている。

３）観察生徒の様子

この授業では、事前調査によって判定された発達段階に基づいて授業前に何人かの観察生徒を決め、それらを観察者が分担して追跡した。ここでは、筆者が直接担当した４名の生徒の理解の様相について述べる。

①　「論証能力」の段階が＜水準０＞の生徒Ａ君、Ｂさん

この２人は、事前調査で、文字を使うことは勿論帰納的に確かめるまでに至っていない解答をした生徒の中から抽出された。

―Ａ君―

「文字認知」の段階は［水準Ⅱ］である。

授業冒頭の速算のルールの発見では、下２桁の部分、および百の位以上の数値の両者について、そのルールをいとも簡単に発見した。その後、12^2、22^2や13×14のように、一の位が５以外の数の２乗の計算等に没頭する。それによって、この計算のルールは、一の位が５の場合に

ついて成り立つことを確信している。「必ず成り立つといえるか」の問いには、「いろんな数ですでにやった。で、どんな数でもできた。」と、帰納的な説明で満足している。「論証能力」の段階が＜水準０＞であるから、当然の反応であろう。その後、ＷＳ６、７の記述では、指導者の指示もあって $(10x+5)^2$ として文字を使って考え始めたが、最後のＷＳ８では「＋25があり、……」というように式を言葉で言い換えて説明しようとしている。

このＡ君は、速算のルールそのものに大きな興味を示したものの、文字を使った説明の意義をとらえるところまではいかなかったように思われる。

―Ｂさん―

「文字認知」の段階は［水準Ⅲ］である。

授業冒頭の速算のルールは、下２桁が25になることだけを発見できた。他の数でのルールの確認では、55^2、65^2、75^2 を計算し、さらに 73^2 ではルールが適用できないことを指摘している。その後はＴの「何かを使うのです」という暗示にも、その意味がつかめないのであろうか、言葉で説明しようとしている。文字の使用を指示されたＷＳ６以降は白紙である。「文字認知」の段階は［水準Ⅲ］ではあるが、一の位が５である数の文字式表現につまずいたのであろうか。板書された式はその都度ＷＳの欄外にノートしたりと、学習に対する姿勢は前向きであった。

このＢさんは、与えられた課題にまじめに取り組もうとしていたが、この授業で何を身に付けることができたのであろうか。この生徒の１年次の時の段階を調べてみると、「文字認知」、「論証能力」ともに水準０であった。その後のこの２年間の学習で、ようやく「文字認知」の段階の方は［水準Ⅲ］へと上がったのであろう。学習に前向きであるだけに、いっそうきめの細かい指導が必要とされる生徒であると思われる。

② 「論証能力」の段階が＜水準Ⅰ＞の生徒Ｃ君、Ｄさん

この２人は、事前調査で、帰納的な解答をした生徒の中から抽出された。

―Ｃ君―

「文字認知」の段階は［水準Ⅲ］である。

Ｃ君のこの授業での変容は、観察者の立場からすると、まさに劇的であった。

冒頭の速算のルールについては、下２桁が25であることと百の位以上の部分についてのルールの両方を発見する。他の数では 95^2 によってそのルールを確認した。ＷＳ４では「なる」と判断するが、その理由は白紙であり、ワークシートの欄外で数を使って何やら計算しているだけである。ところが、Ｔの「何かを使うのです」という暗示を聞いて、すぐにＣ君は文字を使い始める。しかし、その表現は $(a+5)^2$ であったために、それから先へ進むことができないでいる。その後、Ｔの何回目かの「何十５だよ」という言葉に「アッ！」と小さな叫び声を挙げて $(10a+5)^2$ と正しい表現をする。ところが、この式を $100a^2+100a+25$ と正しく展開したものの、続いて、目的もなく $10a(10a+10)+25$ と変形して行き詰まってしまう。その後しばらく黒板の $25^2=625=600+25$ を眺め、ちょっとうなづいて $100\{a\times(a+1)\}+25$ と変形に成功したのである。

Ｃ君にとっては、この授業での指導者の一言一言が大きな意味を持っていた。Ｃ君の何回もの細かなつまづきは、「何かを使うのです」、「何十５だよ」という指導者の言葉、そして布石として打っておいた 25^2 を $600+25$ と分解した式などによって解決され、その結果Ｃ君は正答へ至っている。この授業は、Ｃ君の前向きな学習態度と相まって、Ｃ君の「論証能力」の段階を大いに高めたものと考えられる。

—Dさん—

「文字認知」の段階は［水準Ⅲ］である。

冒頭の速算のルールについては、下2桁が25であることと百の位以上の部分についてのルールの両方を発見する。他の数では、55^2、65^2、75^2によってそのルールを確認した。ＷＳ４では「なる」と判断するが、その理由は白紙である。Ｔの「何かを使うのです」という暗示を聞いて、Ｄさんは文字を使い始めるが、その表現は$(a+5)^2$である。驚くことに、ここまではＣ君の反応と全く同様の状況である。Ｄさんが表現上の誤りに気付くのは、$(10a+5)^2$の式を学級全体で確認した時である。これを$100a^2+100a+25$と展開するが、そこで止まってしまう。ＷＳ８では説明を試みるが、興味深いことに、Ｄさんのワークシートにはそれまでみられなかった$\bigcirc\times(\bigcirc+1)+25=\bigcirc^2+\bigcirc+25$のような○を使った表現が、文字式と併用されている。

Ｄさんは、この授業において文字を使い始めた。しかし、正しく文字表現できなかったり目的にあった式変形ができなかったために、○を使った説明へと逆戻りしている。文字を使おうという構えがあっても、適確な文字表現や式変形ができなければその目的は達成されないことがわかる。

4）「文字式による論証」の指導への示唆

今回の授業研究によって、「文字式による論証」の指導に関して次のことが明らかになったと考えられる。

ア、速算のルールの発見では、下2桁の部分が25であることはすぐに見いだせるが、百の位以上の数についてはなかなか見いだしにくいようである。だが、これを説明調に生徒に知らせたのでは、ますますその指導は無味乾燥なものになってしまう。

　このような授業のねらいを達成するためには、その計算のルールを納得することが前提であるから、いくつもの具体例を示し、それを通して十分にルールを確認してから調べ方の議論に入ることが大切である。

イ、「必ず成り立つかどうか」という問いに対して、幾つかの数値で確かめたのだからよいと考えている生徒がいる。帰納的な方法は性質の発見等に極めて有効であるが、それを文字を使っての証明と同等にとらえていてはいけない。帰納的な方法の特徴や文字を使った証明の特徴を明確にする指導が必要である。

ウ、Ｔの「何かを使う」という暗示は、一人ひとりの生徒にとってどのような役割を果たしたのであろうか。ワークシートの記述から、「論証能力」の段階が［水準０］である生徒がこのＴの暗示にどう反応したかを調べてみると、これら16名中のたった１名だけが文字を使って説明しようとした。残る15名のほとんどは白紙である。もっとも、このうちの何名かは、文字を使おうと考えても$10a+5$という表現に結びつかなかったための白紙であることも考えられる。このＴの暗示は、［水準０］のほとんどの生徒にとっては効果がなかったようである。だが、［水準Ⅱ］以上の生徒にとっては効果的であった。

エ、数量を文字を使って表現できたからといって、それを説明の場面に生かせるとは限らない。文字を使って表現できるようにする指導とともに、場面に応じて文字式を的確に使うことができるようにするための指導が必要である。

Ⅲ おわりに

本稿では、縦断的な調査を通して、子どもの「文字認知」や文字式による論証についての理解、及びそれらの関連を考察した。その結果、従来の数学指導によって「文字認知」についての発達は保証されるが、文字式による論証については、意図的な指導が必要であることが明らかになった。

また、中学校3年生を対象として文字式による論証についての実験授業を行い、ある性質が成り立つことを帰納的に発見し、それを文字を使って証明する際の子どもの理解の様相について考察した。そこでは、ワークシートの記述や観察生徒の反応の分析を通して子どもの理解度を検討した。それによって、教師の同じ発言が個々の生徒に与える影響の違いや、数量を文字を使って表現することとそれを運用することとの差が明らかになる等、文字式による論証の指導についての幾つかの示唆を得ることができた。

今後の課題として次のことがあげられる。

1．本稿では、「文字認知」について、中学校での文字指導に大きな位置を占める「計算」、「表現」、「読式」についての内容に限定して検討してきた。だが、文字認知というからには、子どもは文字や文字式をどのようにとらえているのかという観点が不可欠である。現在、文字を変数としてとらえているかどうかを、方程式・不等式の場面での調査を通して考察しているところであるが、この点についてよりいっそうの検討が必要である。その際、関数の場面での文字や文字式の使い方についての考察も合わせ考える。

　さらに、この「変数」についての理解と、「文字認知」および「文字式による論証」についての理解度との相互の関連を明確にする必要がある。

2．今回は、これまでの横断的な研究に加えて、1クラスではあるが縦断的な調査に基づいての結果を報告した。今後は、児童、生徒のより長期的な変容を、調査対象を拡大して縦断的に研究する。

　その際、そこで行われた指導についても検討し、どのような指導によって子どもの理解度が深まったのかについても考察する。

3．本稿で検討した実験授業やこれまでの実験授業を通して、「文字認知」や「文字式による論証」についての理解に関する発達を促進するための指導内容や指導方法について、いくつかの示唆を得ることができた。今後は、発達を促進するための指導内容や指導方法についての明確な仮説を設定し、その仮説をもとにした授業を行い検証する。

4．文字式の指導についての授業研究を通して、授業分析の方法そのものについて検討する。本稿の第3項でのBさんの考え方は、面接の結果明らかになったものである。また、4項でのC君は授業での観察生徒であったために、課題に対する考え方やその変容を、先に述べたようにあれほどにも明確にとらえることができた。このような方法をいっそう重視し、子どもの理解度をとらえる必要がある。

　さらには、算数・数学科における「いい授業とは何か」について考察する。

なお、本稿をまとめるに当たり、次の諸氏には、的確な助言等をいただいた。ここに深く謝意を表したい。

小関熙純（群馬大学教育学部）

中西知真紀（東京都世田谷区立深沢中学校）

羽住邦男（東京学芸大学附属世田谷中学校）
鈴木裕（東京都江戸川区立東葛西中学校）
小高博（東京都千代田区立九段中学校）
熊倉啓之（筑波大学附属駒場中・高等学校）

引用・参考文献

1） D.Küchemann "Algebra" in K. M. Hart (ed.) "Children's Understanding of Mathematics 11-16" 1981 pp.102-119
2） 小関熙純・国宗進・中西知真紀・羽住邦男「中学生の文字認知について」群馬大学教育実践研究 第6号 1989 pp.45-64
3） 大浜幾久子 「ピアジェ理論の『保存』と『変形』」 波多野完治（監修）『ピアジェ派心理学の発展Ⅱ－認知発達研究－』 国土社 1982 pp.211-220
4） 羽住邦男・中西知真紀・小関熙純・国宗進 「文字式による論証」 日本数学教育学会誌 数学教育 第72巻9号 1990 pp.2-10
5） 4）に同じ
6） 太田伸也 「文字式に対する認識の発達について」 日本数学教育学会誌 数学教育第72巻7号 1990 pp.2-11
7） 4）に同じ
8） 滝沢武久 「フランスの発達心理学―ピアジェ派心理学を中心に―」 『児童心理学の進歩』 金子書房 1987 p.350
9） 若井邦夫 「第1章概観」 『児童心理学の進歩』 金子書房 1989 p.18