

## 文字式による論証の指導について

### Teaching about Demonstration by Means of Letter Formulas

国宗 進・鈴木 裕\*・川村 雄司\*\*・山口 智子\*\*

Susumu KUNIMUNE, Yutaka SUZUKI, Yuji KAWAMURA and Tomoko YAMAGUCHI

（平成4年10月12日受理）

#### I 研究の目的

中学校数学科での学習指導を通して、子どもの文字や文字式に関する認知様式とそこに見られる文字概念の形成過程を発達的に分析してみると、そこにはいくつかの質的に異なった段階が存在するように思われる。

筆者らは、1987年の4月からグループを組んでこの文字教材に関する問題に取り組み、次のような手順で研究を進めている。

1. 子どもの行動を現象的に観察し、子どもの文字式による論証についての理解に関する発達の様相を解明し、発達段階を決める。
2. 指導の対象になっている子どもが、1. で設定した発達段階のどこにとどまっているのか、その実態を明らかにする。
3. 子どもの文字式による論証についての理解に関する発達を促進するための、指導内容や指導方法を検討する。

ここに示した研究の手順は、1. 2. 3. の順に整然となされるものではない。筆者らは現在のところ、1. 2. を中心に検討しながら、3. についても具体的に考察している。本稿はその研究の一環である。

ところで、中学校数学科での文字式についての指導内容は、次の4つに分けて考えることができる。

- (1) 数量または数量の関係を文字式によって表現すること（以下、これを「表現」と書く）
- (2) 文字式を計算すること（以下、これを「計算」と書く）
- (3) 文字式の表す内容を読み取ること（以下、これを「読式」と書く）
- (4) 文字式をいろいろな場面で利用すること

この中の(4)の内容については、さまざまな場面での利用が考えられるが、それは大きく「文字式による論証」と「方程式や関数の場面での利用」の2つの指導場面に分けられる。

本稿では、特に文字式による論証に着目し、次のことを目的とする。

- ・ 3時間連続の実験授業を実施し、その結果の検討を通して、生徒の文字式による論証についての理解度の現状とその深まりについて明らかにする。

II 研究の方法

本研究では、「授業を通して、生徒の文字や文字式についての理解度をとらえる」という立場に立っている。(授業を重視する理由は、既に述べてある<sup>1)</sup>。) 授業でその理解度をとらえるために、次の方法によって資料を得て、それを事後に分析する。

- ①対象生徒一人ひとりが「文字認知」の発達段階、および文字式による論証についての理解に関する発達段階のどこにとどまっているかを、事前調査を通してとらえておく。
- ②生徒が問題を解決する際の考え方をワークシート(以下WSと略記する)に書かせる。
- ③事前調査に基づいて観察生徒を決め、それらの生徒について、授業観察者がワークシートの記述の仕方、つぶやきや近くの生徒との意見交換の状況等を克明に記録する。
- ④授業の状況をビデオに収録する。
- ⑤一連の授業終了直後に、それらの授業についての感想を書かせる。
- ⑥観察生徒や授業中に興味ある言動をした生徒を対象に面接を行う。
- ⑦授業実施2週間後にポストテストを行う。

なお、今回は、中学3年生を対象とした、3時間連続の授業を分析の対象とする。

III 研究の内容

1. 実験授業実施のねらい

これまでの実験授業の分析、検討の結果によれば、ある性質が成り立つことを一般的に説明するという「論証」の場面では、多くの生徒が文字をなかなか使えないし、使おうというアイデアさえ浮かばないことがわかっている<sup>2)</sup>。その理由としては、次のことが挙げられる。

- ・数の場合はわかるが、文字を使うとなると数量を表現できない。
- ・文字式で表現できたとしても、それを計算して目的に合うように式変形することや、その式の意味を読むことができない。
- ・文字は一般性を有することを理解していない。
- ・帰納的な説明で十分であると考え、文字式を使った論証の必要性を理解していない。
- ・その授業で取り上げた問題に固有な数学の知識・理解が不十分である。

このような経過に基づいて、今回は、中学3年生を対象に行われる「文字式の利用」の3時間について実験授業を行い、そこでの生徒の文字や文字式についての理解度をとらえることにする。その主な理由は、生徒の毎時間の変容とともに、「文字式の利用」という一連の授業を通しての変容を探ることにある。

2. 各時間の課題とその特徴

3時間の授業のねらいは、次の通りである。

- ・整数や図形についての性質が成り立つことを、文字式を使って説明することができる。また、文字式を使うと、ある性質が成り立つことを一般的に簡潔に説明できることを理解する。

第1時の課題

「2つの続いた偶数の積に1を加えた数は、もとの2つの偶数の間の奇数の2乗に等しい」ことを証明するものである。

A	2	4	6	8	10	12	14	...
		∖	∧	∖	∧	∖	∧	∖
B		8	24	48	□	□	□	...
C		9	25	49	□	□	□	...

整数に関するこの課題では、偶数や奇数の式表現が多様であり、多項式の展開や因数分解を使った式変形が必要とされる。

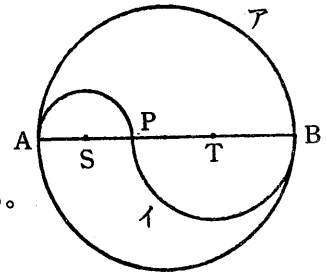
第2時の課題

例えば  $35^2 = (3 \times 4) \times 100 + 5^2$  のような「1の位が5である2桁の整数の2乗についての速算の方法が正しい」ことを証明するものである。

整数に関するこの課題は、すべての場合を調べあげるといって完全帰納法による説明が可能であるという点で、第1時や第3時の課題と大きく異なっている。 $(10a+5)^2$  という十進法に基づく表現、また、多項式の展開や因数分解を使った式変形が必要とされる。

第3時の課題

「右の図のように、長さ12cmの直径ABを、点Pで2つの線分に分け、それぞれを直径とする半円S、Tをかく。点Pは直径AB上のどの点でもよいとすると、図のAの長さといの長さは等しい」ことを証明するものである。



図形に関するこの課題は、式計算の部分は1年生でも可能である。

**3. 対象生徒の段階判定**

授業を行うに当たって、対象生徒30名の「文字認知」、および文字式による論証についての理解に関する発達段階の段階判定を行った。なお、設定している各段階は次の通りである。

(各段階判定のための問題、解答の分類基準、段階判定基準等の詳細は、文献<sup>3)</sup>を参照)

《「文字認知」の発達段階》

- [水準0] … 「計算」、「表現」、「読式」ともに通過せず。
- [水準Ⅰ] … 「計算」のみ通過。
- [水準Ⅱ] … 「計算」、および、「表現」、「読式」の一部が通過。
- [水準Ⅲ] … 「計算」、「表現」、「読式」ともに通過。

文字認知というからには、変数の概念等をも含む幅広いものとしてとらえる必要があるが、ここでは、中学校での指導内容として大きな位置を占める「計算」、「表現」、「読式」についての理解度に限定して考える。変数の概念等については検討中であり、いずれ報告する。

《文字式による論証についての理解に関する発達段階》

- <水準0> … 無回答、あるいは、問題文を繰り返していたり説明になっていない。
- <水準Ⅰ> … 文字式を使わずに、具体的な数値をあげたり、ことばで説明しようとする。
- <水準Ⅱ> … 文字式を使うが、不適切な使い方をする。
- <水準Ⅲ> … 文字式を使って正しく説明する。

その段階判定の結果は、表1の通りである。

なお、以後の記述では、対象生徒30名の一人ひとりに番号を付けて、生徒No.1, No.2, …, No.30と呼ぶことにする。

表1 対象生徒の段階判定 (n=30)

計	5	6	1	18	30
<水準Ⅲ>				10	10
<水準Ⅱ>		1		6	7
<水準Ⅰ>	2	2	1		5
<水準0>	3	3		2	8
論証/認知	[水準0]	[水準Ⅰ]	[水準Ⅱ]	[水準Ⅲ]	計

#### 4. 各時間の授業についての検討

授業の実際は次の通りである。

日時 第1、2時 — 1992年5月15日(金) 2校時、5校時、第3時—同16日(土) 5校時

対象 東京都公立中学校第3学年5組 男子16名、女子14名、計30名

授業者 鈴木裕

観察者 小高博、国宗進、小関照純、熊倉啓之、羽住邦男、川村雄司、鈴木真佐子、山口智子

##### (1) 第1時の授業

###### 1) 授業の流れ

(紙数の関係から、授業記録は省略する。第2、第3時も同様である。)

- ①「2つの続いた偶数の積に1を加えた数」と「もとの2つの偶数の間の奇数の2乗」とは等しいことを、全体の場で発見させる。
- ②①で発見した性質が成り立つことを、他の数値で確認させる。(WS 1)
- ③どんな2つの続いた偶数であってもなるのかを問い、その理由も書かせる。(WS 2)  
P<sub>1</sub> 全部の数で調べたわけではないからわからないが、なると思う。
- ④すべての数で調べればよいのかを問う。  
P<sub>2</sub> すべての偶数について調べるのは無理。  
P<sub>3</sub> いろんな数で調べるときには、どんな数でもとれる文字を使ったらいい。
- ⑤2つの続いた偶数を、文字式を使って表現させる。(WS 2')  
P  $(2n, 2n+2)$ 、 $(x+1, x-1)$ 、 $(a, a+2)$ 、 $(2n, 2m)$
- ⑥⑤で発表された偶数の表現をもとに、再度説明を書かせる。(WS 3、4)

###### 2) 学習進行に合わせた考察

生徒のWSへの記述内容を中心に、学習の進行に合わせて考察する。

###### WS 1の分析

WS 1では、授業者の計算の仕方を生徒が発見し、その2通りの計算方法が等しくなるという性質の理解と確認のために、他の2つの連続する偶数で確認させている。そこでの生徒の解答は、次のように分類できた。

- aタイプ…規則を正しく確認しているもの(24名)
- bタイプ…2乗の計算結果との比較をせず、WSの表記をまねているだけのもの(2名)
- cタイプ…規則を正しくとらえることができなかったもの(3名)
- dタイプ…白紙のもの(1名)

上で示したタイプ別にみると、aタイプの解答をした24名(80%)の生徒がここでの性質について確認できている。cタイプのうちの1名は、最初は正しく確認しながら、途中から適当な偶数の間で計算し、混乱している。

なお、この段階で、課題として取り上げた命題の拡張に当たる「続いた2つの奇数の積に1を加えた数は、もとの2つの奇数の間の偶数の2乗に等しい」ということを確認している生徒が2名いたが、これ以降の学習では、両名とも文字式を使っていこうとする姿勢が見られなかった。この生徒たちが、文字式を使って説明することの意義を理解できたとき、彼らの拡張の考えがどう生かされていくか興味あるところである。

また、B列やC列（前項で示した課題参照）の階差をとって、関数的な見方をしていた生徒が2名いた。このような見方は、この課題の解決に役立つものではないが、他の数列の性質を発見していく糸口となり得るため、個別にでも取り上げたいものである。

WS 2の分析

WS 2では、確認した命題について、「どんな2つの続いた偶数についてもなると思うか、思わないか」を判断させ、その理由を書かせた。

生徒の判断は、「思う」が27名、「思わない」が2名、無答が1名であった。

「思う」とした生徒の理由は、次のように分類できた。

a<sub>1</sub>タイプ…文字を使って正しく説明しているもの

a<sub>2</sub>タイプ…文字を使って説明しようとしたが、正答にまでは至らなかったもの

[例1] 表現が不適切なもの

i)  $2n \times 4n = 2n \times 4n / 2 \times 2n \times 4n / 2, \dots, 8n^2 = 8n^2 / 2 - 1$  (1名)

ii)  $2x \times 4x + 1 = 8x^2 + 1, 2n \times 4n + 1 = (2n + 1)^2, 8n^2 + 1 = 2n^2 + 4n + 1$  (2名)

iii) a、bをそれぞれ前の偶数、後ろの偶数として（筆者解釈）

B列はab、それに1を加えてab+1

C列は、 $(a + 1)(b + 1) = ab - a + b - 1$  (1名)

iv) n、mは整数、偶数を2n、2mとする。

続いた偶数の積は、 $2n \times 2m = 4mn$ 。奇数は、 $2n + 1, 2m + 1$ 。

$(2n + 1)(2m + 1) = 4mn + 1$  (1名)

[例2] 偶数、奇数の表現はできているが、計算に誤りのあるもの

nを整数とすると偶数は2n、それに続く偶数は2n+2。

その間の奇数は2n+1と表せる。

$2n \times (2n + 2) + 1 = 2n(2n + 2) + 1 = 4n^2 + 2n + 1$

$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 2n + 1, \dots, = 2n(2n + 2) + 1$  (1名)

[例3] 証明すべき命題を文字式で羅列しただけで終えているもの

$2A \times (2A + 2) = (2A + 1)^2 (= 4A^2 + 4A + 1)$  (1名)

bタイプ…帰納的に説明しているもの

[例4] ・(32まで) やって見たらそうなったから、きっと続けてもなると思う。

・数を書いてやってみると、1番でやったようになった。(各1名)

cタイプ…その他のもの

[例5] ・前の授業でやってみたくて、奇数×奇数=奇数は、…

・偶数×偶数…

・奇数は、偶数に1を加えたものだから。

・1の位が2×4、4×8になっているところは9になる。(各1名)

dタイプ…白紙のもの (10名)

表2 「思う」とした生徒のタイプ別人数(n=27)

このタイプの別の人数は、表2のようになる。

タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b	c	d
人数	4	7	2	4	10

a<sub>1</sub>、a<sub>2</sub>タイプの解答をした11名が文字

を使っていたが、その理由までも正しく説明した生徒(a<sub>1</sub>タイプ)は4名であった。また、正

答にまでは至らなかった $a_2$ タイプの解答をした7名のうちの5名が表現に誤りがあった。文字式を使う構えがある生徒にとってさえも、文字式での表現は身に付きにくいものであるといえよう。ここで、 $a_2$ タイプのつまずきの原因を詳しく検討してみる。

- ・[例1]の解答は、文字式を使う姿勢がみられるものの、表現でつまずいている。i)、ii)は、 $2n+2$ とするところを $2(2n)$ と表現し、 $4n$ としたのであろう。しかも、i)は、奇数を「2つの続いた偶数の間」ということから、 $2n \times 4n / 2$ と表現したのであろう。
- ・[例1]のiii)、iv)は、2つの続いた偶数の関係を正しく表現できていないための誤答である。1文字で説明できるのに、2文字を使っている。逆に、例えば、「奇数と奇数の和は偶数である」ことは2文字によって証明され、同一文字を使っては誤りになる。このような使い分けの判断は、生徒にとって非常に困難であると考えられる。授業後に行った面接のプロトコルによれば、iii)の解答をした生徒No.11は、「同じ文字だと何か…。違う数を入れられるようにと思った。」と述べており、2文字の使い分けの難しさを示して興味深い。
- ・[例2]は、展開公式を誤用して $(2n+1)^2 = 4n^2 + 2n + 1$ とし、これに $2n(2n+2) + 1$ の結果を合わせているものの、ほぼ説明は完成しており、説明の方針は理解しているといえよう。
- ・[例3]は、文字式での表現はできているが、説明の方針はとらえていないとみられる。ところで、一般に命題の内容をとりあえず文字式で表現している解答には、次の2通りの場合が考えられる。

ア) 証明すべき内容として書き上げ、その方針としているもの

イ) 命題の内容を左から右に文字式で置き換えているだけのもの

ア)は[例1]のi)、ii)にみられ、イ)はこの[例3]が典型的である。

また、帰納的に説明しているbタイプの解答をした生徒であるが、WS1での計算だけから帰納している者と、WS2でさらに計算をしたうえで帰納している者がいた。

一方、「思わない」と判断した生徒2名の理由は、「問題の意味がわからなかった」、「だいたいのところまでは続くと思うけど、数は無限にあるから無理だと思う」であった。

次に、タイプ別の解答を論証、「文字認知」の発達水準別に分類すると、表3、表4を得る。

表3 タイプ別、論証の水準別分布(n=30)

論証\タイプ	$a_1$	$a_2$	b	c	d	「思う」以外	計
〈Ⅲ〉	4	4			1	1	10
〈Ⅱ〉		2	2		3		7
〈Ⅰ〉				2	3		5
〈0〉		1		2	3	2	8
計	4	7	2	4	10	3	30

表4 タイプ別、「文字認知」の水準別分布(n=30)

認知\タイプ	$a_1$	$a_2$	b	c	d	「思う」以外	計
[Ⅲ]	4	7	1		5	1	18
[Ⅱ]					1		1
[Ⅰ]			1	3	2		6
[0]				1	2	2	5
計	4	7	2	4	10	3	30

表3、4から、次のことが指摘できる。

ア、文字式を使って正しく説明している $a_1$ タイプの4名はいずれも、論証、「文字認知」の段階とも水準Ⅲである。

イ、 $a_2$ タイプの解答をした生徒7名のうちの6名は、論証、「文字認知」の段階とも水準Ⅱ以上である。文字式を使っているものの、その表現に戸惑っていた。

ウ、dタイプの解答が多いのは、この課題が、文字式を使わないとすると言葉や言葉の式で解答することが困難であるからであろう。これらの生徒のほとんどが自分なりの解答を得られ

ていない。こうした生徒で「文字認知」の段階が[水準Ⅲ]の5名のうち4名が、論証の段階が〈水準Ⅱ〉以下であり、文字式での説明の意義を理解するには至っていないと思われる。

なお、WS 2で、「なると思う」と答えた27名(90%)の生徒のうち、その理由は白紙であった者が10名いた。授業中に行われたその理由についての討論の中に現れている生徒の考えには、表現こそ異なっているが、授業者の「何か思っているところは共通してるんだね」の通り、なるとは思いつつも、場合をつくしているわけではないし、言い切ってよいのだろうかという葛藤が感じられる。

WS 2' の分析

WS 2' は、配布されたWSに用意されていたものではなく、授業者がWS 2への生徒の反応から、その場で設け、2つの続いた偶数を文字を使って書かせたものである。その場面では、授業者が「すべての数調べりゃいいんだよね…やる？」と完全帰納法を引き合いに出して生徒を揺さぶる発問を投げかけることによって、「いろいろな数で調べるときには、どんな数でもとれる文字を使ったらいい」という生徒の発言を引き出し、学級全体で文字を使っていこうという方針を確認している。そこでの生徒の解答は、次のように分類できた。

a<sub>1</sub>タイプ…文字を使って正しく表現しているもの

[例1] nを整数として、2n、2n+2 (6名)

[例2] xを奇数として、x+1、x-1 (2名)

[例3] aを偶数として、a、a+2 (1名)

[例4] n、mは続いた整数として、2n、2m (1名)

a<sub>2</sub>タイプ…文字を使うが、正しく表現されていないもの

[例5]  $\cdot x \quad y \quad a$   
 $\quad \quad \quad \vee \quad \quad \vee$   
 $\quad \quad \quad xy \quad ya$  「2と4をxとyとすると、 $x \times y$ 」 (4名)

$\cdot$  「2n、2m」、「2n、4n」、「a、2a」、「偶数と偶数の間の数をxとする」、  
 「2nを偶数とする」 (各1名)

cタイプ…その他のもの

[例6] 数値計算をしている (2名)

dタイプ…白紙のもの (9名)

表5 WS 2' のタイプ別人数 (n=30)

このタイプ別の人数は、表5のようになる。

タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	c	d
人数	10	9	2	9

文字を使って正しく表現できた生徒

(a<sub>1</sub>タイプ)の水準を調べてみると、いずれも論証の段階が〈水準Ⅱ〉以上で、「文字認知」の段階が[水準Ⅲ]である。また、WS 2の時点で、正しく表現していた生徒は、WS 2のa<sub>1</sub>タイプ4名とa<sub>2</sub>タイプ中の[例2]、[例3]の解答をした各1名の計6名であったが、WS 2'では10名に増えている。ただし、WS 2では文字を使おうとしていた生徒が11名いたが、WS 2'で文字を使って正しく表現した10名中の9名がその中に含まれている。以上のことと、これが文字を使っていこうという方針が示された後の反応であることとを考慮すると、新たに正しく表現できた生徒は僅かである。

さらに、c、dタイプの11名の生徒は、文字式で表現するという指示にもかかわらず、文字

を使ってさえない。そのうちの9名は、論証の段階が〈水準Ⅰ〉以下である。このような生徒への、表現についての指導の必要性を感じる。

### WS 3の分析

ここでは、WS 2' に書いた続いた2つの偶数の文字式での表現の中から、それを使って説明してみようというものを選択させている。

生徒から発表された内容は、WS 2' の [例1]～[例4]であり、その選択の結果は表6のようになる。

表6 選択した文字別の人数(n=30)

タイプ	[例1]	[例2]	[例3]	[例4]	その他
人数	13	4	4	1	8

その他については、aを奇数として、偶数はa+1としただけのものと、nを整数として、続いた偶数はn+2としただけの生徒が、それぞれ1名、それ以外は白紙である。

### WS 4の分析

WS 4では、WS 3で選択した表現を使わせて、文字式による説明を書かせている。そこで生徒の解答は、次のように分類できた。

a<sub>1</sub>タイプ…文字式を使って正しく説明しているもの (8名)

a<sub>2</sub>タイプ…文字式を使って説明しようとしたが、正答にまでは至らなかったもの

・表現や計算はできているもの

[例1] nを整数とする。

$$2n(2n+2)+1=4n^2+4n+1, 4n^2がなにかの2乗になる。(1名)$$

[例2]  $2n \times (2n+2) = (2n+1)^2$

$$4n^2+4n=4n^2+4n+1$$

$$4n^2+4n-4n^2-4n=1$$

(1名)

[例3] n, mは続いた整数、偶数を2n, 2mとする。

$$2n \times 2m = 4mn \quad \text{中の奇数は} 2n+1, 2m+1$$

$$(2n+1)(2m+1) = 4mn + 2n + 2m + 1$$

(1名)

[例4] WS 2の [例4]

(1名)

・表現、または、計算でつまづいているもの

[例5]  $\cdot 2n \times 2n + 2 = 4n^2 + 2, 2n + 1 \times 2n + 1 = 4n^2 + 2$

$$\cdot (a-1)(a+1) = a^2 - 1 = (a+1)^2$$

(計4名)

[例6] 続いた偶数を2n, 2n+2として

$$2n \times (2n+2) = 2n \times (2n+2) / 2 \times 2n \times (2n+2) / 2 - 1$$

$$4n^2 + 2 = 4n^2 + 2 / 2 \times 4n^2 + 2 / 2$$

$$4n^2 + 2 = 16n^2 + 2 - 1$$

(1名)

cタイプ…その他のもの

[例7]  $\cdot 2n, 2n+2$ のnに5を代入すると、 $2 \times 5 = 10, 2 \times 5 + 2 = 12$ となる。

・奇数は偶数に1を加えたもの、または、1を引いたものだから。(各1名)

dタイプ…白紙のもの (11名)

このタイプ別の人数は、表7のようになる。

次に、タイプ別の解答を論証、「文字認知」の発達水準別に分類すると、表8、9を得る。

表7 WS 4のタイプ別人数(n=30)

タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	c	d
人数	8	9	2	11



表8 タイプ別、論証の水準別分布 (n=30)

論証\タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	c	d	計
〈Ⅲ〉	5	5			10
〈Ⅱ〉	2	3		2	7
〈Ⅰ〉			1	4	5
〈0〉	1	1	1	5	8
計	8	9	2	11	30

表9 タイプ別、「文字認知」の水準別分布 (n=30)

認知\タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	c	d	計
[Ⅲ]	7	8		3	18
[Ⅱ]				1	1
[Ⅰ]	1	1	2	2	6
[0]				5	5
計	8	9	2	11	30

表8、9から次のことが指摘できる。

- ア、WS2で正答であった生徒に加えて、新たに4名が正答を得ている。その4名のうち、WS2の時点で文字式を使っていた生徒は3名で、文字式による表現を確認したことが正しい説明につながったようである。論証の段階が〈水準0〉の生徒が1名いるが、その生徒も表現の確認によって正しい説明をしている。
- イ、WS2'からWS3にかけて、文字式での表現を確認したにもかかわらず、文字式を使わなかった生徒が13名いる。このうちの11名が、論証の段階が〈水準Ⅰ〉以下に留まっており、これらの生徒に対する説明の方針やその意義についての指導が必要であろう。
- ウ、a<sub>2</sub>タイプには、奇数の表現や計算にまだ誤りがあるが、論証能力の段階の高い生徒が多い。論証の段階が〈水準0〉の生徒は、選択した表現を単に演算記号で結んでいるだけである。

3) 第1時全体を通しての考察

ここでは、WS2、4の記述から、討論前後の生徒の解答の関連を、授業後の生徒の感想も併せて検討する。それらは、表10のように分類された。

表10 WS2、WS4、および「文字認知」の段階、論証の段階の関連 (n=30)

WS2→WS4		発達段階		人数	WS2→WS4		発達段階		人数
タイプ	タイプ	[認知]	<論証>		タイプ	タイプ	[認知]	<論証>	
a <sub>1</sub>	a <sub>1</sub>	[Ⅲ]	<Ⅲ>	4	d	a <sub>2</sub>	[Ⅲ]	<Ⅲ>	1
a <sub>2</sub>	a <sub>1</sub>	[Ⅲ]	<Ⅲ>	1			[Ⅲ]	<Ⅱ>	2
		[Ⅲ]	<Ⅱ>	1	d	c	[Ⅰ]	<Ⅰ>	1
		[Ⅲ]	<0>	1	d	d	[Ⅲ]	<Ⅱ>	1
a <sub>2</sub>	a <sub>2</sub>	[Ⅲ]	<Ⅲ>	3			[Ⅲ]	<0>	1
		[Ⅲ]	<Ⅱ>	1			[Ⅱ]	<Ⅰ>	1
b	a <sub>1</sub>	[Ⅲ]	<Ⅱ>	1			[Ⅰ]	<0>	1
b	d	[Ⅰ]	<Ⅱ>	1			[0]	<Ⅰ>	1
c	a <sub>2</sub>	[Ⅰ]	<0>	1			[0]	<0>	1
c	c	[Ⅰ]	<0>	1	思わない	a <sub>2</sub>	[Ⅲ]	<Ⅲ>	1
c	d	[Ⅰ]	<Ⅰ>	1	思わない	d	[0]	<0>	1
		[0]	<Ⅰ>	1	無答	d	[0]	<0>	1

表10から、次のことが指摘できる。

- ア、a<sub>1</sub>→a<sub>1</sub>の生徒4名は、WS2での自分の解答を一貫して書いていた。これら全員が「文

字認知」、論証の段階とも水準Ⅲであり、問題はないようにみえる。ただ、これらの生徒にとってのこの授業の価値を考えると、例えば、他の生徒の文字式での表現をどうとらえていたのかを明らかにしておく必要がある。

- イ、WS 2 で不十分ながら文字を使う構えをみせていた生徒 ( $a_2$ タイプ) のうちの3名は、 $a_2 \rightarrow a_1$ の変容を遂げている。そのうちの2名は、表現上のつまずきを解消している。もう1名の生徒No.30は、表現をかえることによって誤っていた計算を正しく行っており、「因数分解の内容が少しずつはいついていたと思ったけど、そこらへんはよくわからなかった」という感想からも、この時間の自分のつまずきを的確にとらえていたと思われる。
- ウ、WS 2 で文字を使えなかったタイプ b、c、d の解答をした生徒については、 $b \rightarrow a_1$  (1名)、 $c \rightarrow a_2$  (1名)、 $d \rightarrow a_2$  (3名) の計5名が文字を使つての説明に取り組んでいる。授業直後の感想で「どんな偶数でも表せることが分かっておもしろかった」と書いた生徒No.17や、「自分なりにはわかっていたけど、書いて説明しろといわれるとうまく書けませんでした」と書いた生徒No.13にとって、この授業は、文字式を使って説明することの意義をとらえるきっかけになり得たものと考えられる。

一方、これら5名の生徒のうちの4名が論証の段階が〈水準Ⅲ〉であったことも考慮すると、この授業では、文字式での表現の確認をしたにもかかわらず、論証の水準の低い生徒には、有効には働かなかった感がある。計算の対象としてだけでなく、文字式を利用していく場面を機会あるごとに生徒に与えていく必要性を強く感じる。

WS 4 での生徒の反応の特徴から、本授業について次のことが指摘できる。

- ・  $a_1$ 、 $a_2$ タイプの解答をした生徒は、文字式を使つていく意味をとらえることができた。
- ・ c、dタイプの解答をした生徒は、文字式での表現まで与えても、それを生かすことができなかった。これらの生徒に対して、このような授業を繰り返すことだけでよいのかを検討する必要がある。

## (2) 第2時の授業

### 1) 授業の流れ

- ①速算のルールが発見できたかどうかを書かせる。(WS 1)
- ②速算のルールを他の具体的な数で確認させる。
- ③速算のルールが下1桁が5である他の2桁の自然数についても成り立つかどうかを問い、その理由も書かせる。(WS 2)
- ④解答を発表させる。  
P<sub>1</sub>:  $55 \times 55 \sim 95 \times 95$ を、速算のルールに従って計算した答えと、普通に計算した答えが等しくなったから成り立つ。(完全帰納法)
- ⑤完全帰納法による説明でもよいことを確認するとともに、それ以外の方法で説明した者がいないかを問う。  
P<sub>2</sub>: もとの数の十の位の数を  $a$  とおくと、結果の百の位以上の数は  $a(a+1)$  となることはわかったが、次にどうすればよいのがわからなかった。
- ⑥もとの数の十の位の数を  $a$  とおくと、下1桁が5である2桁の自然数がどう表されるかを書かせる。(WS 3)

⑦  $(10a+5)^2$ が、下2桁が25で百の位以上の数が $a(a+1)$ となることを説明させる。

$$P_3: (10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25$$

2) 学習進行に合わせた考察

WS 1 の分析

WS 1 には、生徒自身が発見した速算のルールを記述させた。生徒の解答は、次のようなタイプに分類できた。

a…何らかの速算のルールを発見しているもの

a<sub>1</sub> タイプ…下二桁は25、百の位以上の数は  $a^2+a$

a<sub>1</sub>' タイプ…下二桁は25、百の位以上の数は  $a(a+1)$

なお、そのルールを、いずれも言葉もしくは具体的な数で述べており、文字を使った生徒はいなかった。

a<sub>2</sub> タイプ…  $(10+5)^2 = 10 \times 10 + 2 \times 5 \times 10 + 5 \times 5$

b…何らかの規則性に目をつけているが、速算のルールの発見には至っていないもの

b<sub>1</sub> タイプ… $15^2, 25^2, 35^2, 45^2$ を比べると、200、400、600、800と増える

b<sub>2</sub> タイプ… $15 \times 15 = 20 \times 20 - 15 \times 10 + 5 \times 5$

$$25 \times 25 = 30 \times 30 - 25 \times 10 + 5 \times 5$$

$$45 \times 45 = 50 \times 50 - 45 \times 10 + 5 \times 5$$

c…その他のもの

c<sub>1</sub> タイプ… $(10a+b)(10a+b) = 100a^2 + b^2$

c<sub>2</sub> タイプ…「十の位と一の位を分けて」、「一の位の」という記述だけのもの

d…白紙のもの

表11 WS 1 の解答タイプ別人数 (n = 30)

タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>1</sub> '	a <sub>2</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	d
人数	5	1	2	3	1	1	3	14

このタイプ別の人数は、表11 となる。

ア、この授業で取り上げたかっ

た速算のルールを発見した生徒は、a<sub>1</sub>、a<sub>1</sub>' タイプの6名(20%) だけであり、白紙の生徒が14名(47%) もいた。このルールを発見するためには、「結果どうしを見比べる」、「もとの数と結果を関係付ける」、という2つの視点を持たなければならない。このような考え方が難しかったために、白紙の生徒が多く、正答であった生徒が少なかったと考えられる。

イ、a<sub>2</sub>タイプの解答をした生徒2名のうちの1名は、 $(10+5)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 5 + 5^2 = \dots$ と展開公式を使って計算していたが、机間巡視をしてきた教師の「これで暗算できるの?」という言葉に、びっくりしていた。この生徒は、授業後の面接で「簡単に計算するために、前に『計算の工夫』をやったときに、こういうふうにしたから、こうやってみた」と答えている。本人は、自分のやり方は速算と考えていた。

ウ、b<sub>1</sub>タイプの解答をした生徒は、結果どうしを見比べているが、もとの数と結果とを関係付けると意識が薄いために、ルールが発見できなかったものと考えられる。

WS 2 の分析

WS 2 には、速算のルールが、一の位が5である他の2桁の数にもあてはまるかどうかの判断とその理由を記述させた。

生徒の判断は「あてはまる」としたものが27名、「あてはまらない」としたものが2名、「白紙」が1名であった。

あてはまるとした理由は、次のように分類できた。

a<sub>1</sub>タイプ…文字式を使って正しく説明しているもの

a<sub>2</sub>タイプ…文字式を使って説明しようとしたが、正答にまでは至らなかったもの

[例1] xを整数とする。1から9までの数とする。

$$(10x+5)^2=100x+100x+25=100x(1+1)+25$$

[例2]  $(10x+5)(10x+5)=100x^2+100x+25$

$$x^2+x+25$$

・xを25×25の場合は2（筆者注：十の位の数のこと）とする。

$$100x^2+100x+25に代入 (100 \times 4)(100 \times 2)$$

[例3] 十の位をaとする  $a \times (a+1), a^2+a$

[例4] nを整数とすると

b<sub>1</sub>タイプ…完全帰納法によるもの

[例5] 55<sup>2</sup>、65<sup>2</sup>、75<sup>2</sup>、85<sup>2</sup>、95<sup>2</sup>を計算した答えと速算のルールによる答えを比較しているもの

b<sub>2</sub>タイプ…2、3の例で帰納的に確かめているもの

cタイプ…その他の解答

[例6] すべてについてやっていないけど、できると思う

[例7] 上の数の一の位が5ならば、(下の数の十の位)×(上の数の一の位)は、5か0に必ずなるので、答えの下2桁が必ず25になる など

dタイプ…白紙のもの

表12 解答のタイプ別人数(n=27)

タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	c	d
人数	1	4	9	6	4	3

あてはまるとした理由のタイプ別の人数は、

表12のようになる。

文字を使って説明しようとした生徒(a<sub>1</sub>、

a<sub>2</sub>タイプ)は5名(17%)であるのに対して、帰納的な方法で説明しようとした生徒(b<sub>1</sub>、b<sub>2</sub>タイプ)は15名(50%)であった。

一方、あてはまらないとした2名の解答は、次のように分類できた。

eタイプ…3桁のかけ算をしているもの

fタイプ…白紙のもの

次に、タイプ別の解答を論証、「文字認知」の発達水準別に分類すると、表13、14を得る。

表13 タイプ別、論証の水準別分布(n=30)

表14 タイプ別、「文字認知」の水準分布(n=30)

論証\タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	c	d	e	f	白紙	計
〈Ⅲ〉	1	1	3	1	2	2				10
〈Ⅱ〉		2	2	2	1					7
〈Ⅰ〉			1	2	1		1			5
〈0〉	1	3	1		1	1			1	8
計	1	4	9	6	4	3	1	1	1	30

認知\タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	c	d	e	f	白紙	計
[Ⅲ]	1	4	6	2	3	2				18
[Ⅱ]								1		1
[Ⅰ]			3	2			1			6
[0]				2	1	1			1	5
計	1	4	9	6	4	3	1	1	1	30

表13、14から、次のことが指摘できる。

ア、文字を使って説明しようとした  $a_1$ 、 $a_2$  タイプの生徒 5 名全員とも、「文字認知」の段階が[水準Ⅲ]であり、そのうちの 4 名は論証の段階が(水準Ⅱ)以上である。完全帰納法で説明できるこの課題の場合にも文字を使おうとしており、文字の簡潔さやその一般性をとらえているのであろう。

イ、帰納的な方法で説明しようとした  $b_1$ 、 $b_2$  タイプの生徒の論証の段階は(水準 0)～(水準Ⅲ)に散らばっている。

この課題は完全帰納法によっても証明できる。「文字認知」の段階が[水準Ⅲ]、論証の段階が(水準Ⅱ)である生徒No.1は、第 1 時で文字を使っていながら、ここでは完全帰納法で示している。その理由は、全部やった方が早いと思ったからだと授業後の面接で言っている。また、論証の段階が(水準Ⅲ)であって  $b_1$  タイプの解答をした生徒No.26は、WS に記入する前に「これ、計算すればいいの？」と隣の生徒に尋ねている。これらの生徒の解答は、完全帰納法のようにになっているが、実はただ計算しただけであるとも考えられる。一般的に証明することを意識して完全帰納法を用いたわけではないという生徒も多いのではないかと考えられる。

ウ、c タイプの生徒 4 名は、さまざまな不完全な説明をしている。そのうちの 3 名が論証の段階が(水準Ⅲ)、「文字認知」の段階が[水準Ⅱ]以上である。これら 3 名は、考える方向が見つからなかったのであろう。

#### WS 3 の分析

WS 3 には、十の位の数を  $a$  とおいて、何十 5 という数を式で記述させた。生徒の解答は、次のようなタイプに分類できた。

a タイプ…正しく表現しているもの

$$\cdot 10a+5 \quad \text{または、} (10a+5)^2$$

b タイプ…正しく表現していないもの

$$\cdot 10a \times 5 \quad \cdot a+5 \quad \cdot a5$$

d タイプ…白紙のもの

表15 WS3のタイプ別人数(n=30)

タイプ	a	b	d
人数	21	4	5

このタイプ別の人数は、表15のようになる。

正しく表現できた生徒は 21 名 (70%) で、まずまずである。だが、授業では文字を使って表現することに対して、生徒は大きな抵抗を示した。後で WS に書き足して正答となっている解答も多いと思われる。

b タイプの誤答の中では、 $a+5$  としたもののが 3 名と最も多かった。

#### WS 4 の分析

WS 4 には、 $(10a+5)^2$  は、下 2 桁が 25 で、百の位以上の数は  $a(a+1)$  または  $a^2+a$  の形で表されることを説明させた。生徒の解答は、次のようなタイプに分類できた。

$a_1$  タイプ…正しく説明できているもの

[例 1]  $(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$

[例 2]  $a$  を整数とする

$$(10a+5)^2=100a^2+100a+25$$

$$100\{a(a+1)\}+25=100(a^2+a)+25=100a^2+100a+25$$

a<sub>2</sub>タイプ…計算ミスをしているもの

[例3] aを1から9までの整数とする

$$(10a+5)^2=100a+100a+25=100a(1+1)+25$$

a<sub>3</sub>タイプ…説明の方針ははっきりしないが、式変形は正しいもの

[例4]  $(10a+25)^2=100a^2+100a+25$ ,  $a \times (a+1)$  100の位の数?

[例5]  $(10a+5)^2=100a^2+100a+25$

[例6]  $(10a+5)^2=100a^2+100a+25=25(4a^2+4a+1)=25(2a+1)^2$

a<sub>4</sub>タイプ…説明の方針がはっきりせず、式変形が正しくない、もしくは式変形をしていないもの

[例7]  $(10a+5)^2=100a^2+1+25$ ,  $a \times (a+1) \rightarrow a^2+a+25$

[例8]  $(10a+5)^2=100a^2+25$

[例9]  $(10a+5)^2=(10a+5)(10a+5)=100$

[例10]  $(10a+5)^2$

a<sub>5</sub>タイプ…その他の解答

[例11]  $10a+5 \times (10a+5+1)$

[例12] 25

$\frac{\times 25}{8 \quad 25}$  →文字の式で表す 十の位→aとおく  $\frac{2a \times 10 + 5}{2 \times 2 \times 2 \quad 5 \times 5}$

dタイプ…白紙のもの

表16 WS3の解答タイプ別人数(n=30)

タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	d
人数	5	1	11	5	2	6

このタイプ別の人数は、表16のようになる。

白紙の生徒6名を除いた24名は、全員文字を使って説明しようとしている。教師が「文字

を使って説明してください」と発言していることから、当然の反応であろう。

ここで、タイプ別の解答を論証、「文字認知」の発達水準別に分類すると、表17、表18を得る。

表17 タイプ別、論証の水準別分布(n=30)

論証\タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	d	計
<Ⅲ>	5	1	3	1			10
<Ⅱ>			4	1	1	1	7
<Ⅰ>			2	1	1	1	5
<0>			2	2		4	8
計	5	1	11	5	2	6	30

表18 タイプ別、「文字認知」の水準別分布(n=30)

認知\タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	d	計
[Ⅲ]	5	1	8	2	1	1	18
[Ⅱ]						1	1
[Ⅰ]			3	2		1	6
[0]				1	1	3	5
計	5	1	11	5	2	6	30

表17、表18から、次のことが指摘できる。

ア、ほぼ正しく説明している6名(a<sub>1</sub>、a<sub>2</sub>タイプ)の生徒はいずれも、論証、「文字認知」の段階ともに水準Ⅲであり、文字式のもつ一般性について理解していると思われる。

イ、説明の方針ははっきりしないが、式変形は正しい解答(a<sub>3</sub>タイプ)をした生徒が11名(37%)おり、タイプ分けをした中で最も人数が多かった。これらの生徒の大部分は、[例5]のような解答をしている。

$100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$ 、もしくは  $=100(a^2+a)+25$ と目的に応じた式変形をしなければならないのであるが、それには結論を意識して式の左辺を読み、右辺のように変形しなければならない。これが生徒にとって難しかったと考えられる。

エ、 $a_5$ タイプで[例11]の解答をした生徒No.13は、「文字認知」の段階が[水準Ⅲ]、論証の段階が(水準Ⅱ)であるが、文字で表現することにとまどいをみせた。最終的には正しく表現したが、WS 4では、WS 3で表現した式をそのまま使わず、不適切な文字の置き方をしている。なぜそのように解答したのかは、今回の面接では明らかにならなかった。

オ、白紙であったdタイプの生徒が6名いる。全く授業についてこれなかった生徒もいると思われるが、論証、「文字認知」の段階ともに水準Ⅱ以上の生徒もいる。このような生徒がどこでつまづいているのかを明らかにする必要がある。

3) 第2時全体を通しての考察

ここでは、WS 2、WS 4の解答、および「文字認知」の段階や、論証の段階の関連を授業後の生徒の感想も合わせて検討する。それらの関連を分類すると、表19、表20を得る。

表19 WS 2、WS 4、および「文字認知」の段階、論証の段階の関連 (n=30)

WS2→WS4 タイプ タイプ	発達段階 [認知] (論証)	人数	WS2→WS4 タイプ→タイプ	発達段階 [認知] (論証)	人数
$a_1$ $a_1$	[Ⅲ] (Ⅲ)	1	$b_2$ $a_1$	[Ⅲ] (Ⅲ)	1
$a_2$ $a_2$	[Ⅲ] (Ⅲ)	1	$a_3$	[Ⅰ] (Ⅱ)	1
$a_4$	[Ⅲ] (Ⅱ)	1		[Ⅰ] (Ⅰ)	1
$a_3$ $a_3$	[Ⅲ] (Ⅱ)	1	$a_4$	[0] (Ⅰ)	1
	[Ⅲ] (0)	1	d	[Ⅲ] (Ⅱ)	1
				[0] (0)	1
$b_1$ $a_1$	[Ⅲ] (Ⅲ)	2			
$a_3$	[Ⅲ] (Ⅲ)	1	c $a_3$	[Ⅲ] (Ⅲ)	1
	[Ⅲ] (Ⅱ)	1		[Ⅲ] (Ⅱ)	1
	[Ⅲ] (0)	1	$a_4$	[Ⅲ] (Ⅲ)	1
	[Ⅰ] (Ⅰ)	1	$a_5$	[0] (Ⅲ)	1
$a_4$	[Ⅰ] (0)	1	d $a_1$	[Ⅲ] (Ⅲ)	1
$a_5$	[Ⅲ] (Ⅱ)	1	$a_3$	[Ⅲ] (Ⅲ)	1
d	[Ⅰ] (0)	1	d	[0] (0)	2
			e $a_4$	[Ⅰ] (0)	1
			f d	[Ⅱ] (Ⅰ)	1

表19、表20から次のことが指摘できる。

- ア、WS 2で $a_1$ タイプの解答をした生徒1名は「文字認知」、論証の段階ともに水準Ⅲであるが、WS 4でも全く同じ内容を記述している。本時のねらいを十分達成できたであろう。
- イ、WS 2で不完全ながらも文字を使って $a_2$ 、 $a_3$ タイプの解答をした生徒4名は、WS 4でも $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$ タイプの不完全な解答であった。しかし、これらの生徒は授業中のWS 4の記述後の教師の説明により、本時のねらいをほぼ達成できたのではないかと考えられる。WS 2、WS 4共に $a_3$ タイプの解答をした生徒No.11は、授業後の感想で、「問題の数字がかわっても、とけるやり方ができるためには、文字の計算を使った方がいいし、その問題で

表20 WS 2とWS 4における生徒の変容

WS2→WS4			WS2→WS4		
タイプ	タイプ	人数	タイプ→タイプ	人数	
a	a <sub>1</sub>	1	c	a <sub>3</sub>	2
	a <sub>2</sub>	1		a <sub>4</sub>	1
	a <sub>3</sub>	2		a <sub>5</sub>	1
	a <sub>4</sub>	1	d	a <sub>1</sub>	1
b	a <sub>1</sub>	3		a <sub>3</sub>	1
	a <sub>3</sub>	6		a <sub>4</sub>	1
	a <sub>4</sub>	2		d	3
	a <sub>5</sub>	1			
d	3				

※) 表20では、WS 2を次のようにまとめた。

a<sub>1</sub>～a<sub>3</sub> → a  
 b<sub>1</sub>、b<sub>2</sub> → b  
 d、e、f → d

でできた数字を文字とおいて、やってみれば、とける時もあるということがわかった。」と書いている。文字のもつ一般性を意識し始めている。

ウ、WS 2で帰納的な方法で説明をした生徒 (b<sub>1</sub>、b<sub>2</sub>タイプ) 15名のうちの3名が、WS 4で正答を得ている。この3名はいずれも、「文字認知」、論証の段階ともに水準Ⅲである。

このうちのある生徒No.26は、WS 4を書き終えてから、自分のやり方を周りの生徒に説明していた。また、その後の教師の説明にもうなずいていた。今回の授業によって、この生徒は文字の簡潔性、一般性を強く意識したであろう。

エ、WS 2で帰納的な方法で説明をした生徒 (b<sub>1</sub>、b<sub>2</sub>タイプ) 15名のうちの6名が、WS 4でa<sub>3</sub>タイプの解答をしていた。WS 4の考察で述べたように、これらの生徒は目的に応じた式変形ができなかったと考えられる。しかし、教師の説明は理解できたであろう。

このうちのある生徒No.23は、授業後の感想で「授業がおもしろく感じた。(中略) 授業の目的は、 $\times$ 数を文字におきかえる $\times$ ということだと思った。」と書いている。この生徒は、「文字認知」の段階が[水準Ⅲ]、論証の段階が〈水準0〉であるが、今回の授業を通して、文字式の簡潔性、一般性を感じ始めたものと思われる。

オ、WS 2でb<sub>1</sub>、b<sub>2</sub>、c、d、e、fタイプの解答をした生徒で、WS 4でa<sub>4</sub>、a<sub>5</sub>、dタイプの解答をした12名のうち、「文字認知」、論証の段階ともに水準Ⅰ以下の生徒は7名いた。これらの生徒が今回の授業で文字の簡潔性、一般性をとらえることができたかは疑問である。まず文字式の表現や、計算、読式について、丁寧な指導が必要であると考えられる。

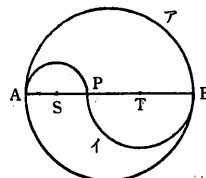
以上見てきたように、WS 2とWS 4の課題に対する一人ひとりの生徒の反応の特徴から、本授業について次のことが指摘できる。

- ・WS 2でa<sub>1</sub>、a<sub>2</sub>、a<sub>3</sub>タイプの解答をした生徒と、WS 4でa<sub>1</sub>、a<sub>2</sub>タイプの解答をした生徒は、本時のねらいを達成することができたと考えられる。
- ・WS 4でa<sub>3</sub>タイプの解答をした生徒には、本時のねらいをほぼ達成することができた者が多いと考えられる。
- ・WS 4でa<sub>4</sub>、a<sub>5</sub>、dタイプの解答をした生徒の中には、指導者の文字式を使った説明が理解できなかった者もかなりいると考えられる。



(3) 第3時の授業

1) 授業の流れ



- ①問題1 (右の図で、点PがABの中点の場合、アとイではどちらが長い)を問い、その理由も書かせる。(WS1)
- ②円の弧の長さの求め方を確認する。→ $2\pi r$ 、直径 $\times 3.14$
- ③数値計算によって、アとイが同じ長さであることを確認する。→アもイも $6\pi$  cm
- ④問題2 (右の図で、点PがAB上のかってな点の場合、アとイではどちらが長い)を問い、その理由も書かせる。(WS2)
- ⑤解答を発表させる。

P<sub>1</sub> アは $12 \times \pi \div 2$ 、イは $12\pi \div 2 = 6\pi$ 、 $\times \pi$ と $\div 2$ は、アでもイでもその他の場合でも共通だから、残った直径で比べればいい。直径12cm上の点Pは $AP + PB = 12$ cmがいえるので、Pをどこにとっても、アとイの長さは変わらない。

P<sub>2</sub> 2つの半円のどちらかの直径をaとする。

アの長さは $6\pi$ 、イの長さは、 $(12-a)\pi \times \frac{1}{2} + a \times \pi \times \frac{1}{2} = 6\pi$ だから、アとイの長さは同じ。

P<sub>3</sub> 直径の長さをy、APの長さをx、PBの長さをaとする。アの長さ  $\frac{1}{2}\pi y$ 、

イの長さ  $(x \times \pi \div 2) + (a \times \pi \div 2) = \frac{1}{2}\pi(x+a)$ 、 $y = x+a$ だから、アとイの長さは等しい。

- ⑥文字を使うと一般的に説明できることをまとめる。

2) 学習進行に合わせた考察

WS1の分析

WS1には、問題1についての解答を記述させた。なお、解答の途中に、円周の求め方を「半径rの円周の長さは $2\pi r$ 」、「円周は直径 $\times 3.14$ 」と、学級全体で確認している。

この問題1に対する生徒の解答は、次のようなタイプに分類できた。

aタイプ…文字を使って正しく説明しているもの

[例1] (図の中の直径APの部分にaと書き)

$$2a \times \frac{1}{2}\pi = a\pi \quad (\text{アの長さ}) \quad \frac{1}{2}a \times 2\pi = a\pi \quad (\text{イの長さ}) \quad \text{同じになる}$$

b<sub>1</sub>タイプ…数値計算により正しく説明しているもの

[例2] ア  $12\pi \times \frac{1}{2} = 6\pi$     イ  $6\pi \times \frac{1}{2} \times 2 = 6\pi$

アの長さといの長さを計算すると同じになるから。

b<sub>2</sub>タイプ…数値計算により説明しようとしたが、計算ミスをしたもの

[例3] 同じだと思う。ア  $12\pi$     イ  $6\pi + 6\pi = 12\pi$     など

cタイプ…その他の解答

[例4] 「AB $\pi$ 」とだけ書いているもの

[例5] 「両ほうとも等しい」とだけ書いているもの    など

dタイプ…白紙のもの

表21 問題1の解答タイプ別人数(n=30)

タイプ	a	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	c	d
人数	1	16	2	3	8

このタイプ別の人数は、表21のようになる。

問題1の条件からも当然の結果であるが、数値計算をした生徒(b<sub>1</sub>、b<sub>2</sub>タイプ)が、全体の60%を占めている。また、わずか1名

ではあるが、APの長さをaとおいて説明したaタイプの生徒がいる。数値計算によって解決できる場面でも、文字式を使って解決しようという構えがあることに驚きを感じず。一方、解答の途中で円周の求め方を学級全体で確認したにもかかわらず、白紙の生徒が8名いた。これらの生徒のつまづきの原因を明らかにする必要がある。

#### WS2の分析

WS2には、問題2についての解答を記述させた。問題2では「点Pは直径AB上のどの点でもよい」という条件であるから、図の中のアの長さといの長さを比べるには、文字を使って考えざるをえない。

この問題2に対する生徒の解答は、次のようなタイプに分類できた。

a<sub>1</sub>タイプ…文字式を使って正しく説明しているもの

[例6] (図をかいてASの部分にrと書き)

$$\{2\pi r + (12 - 2r)\pi\} \times \frac{1}{2} = \{2\pi r + 12\pi - 2\pi r\} \times \frac{1}{2} = 6\pi \quad (\text{イの長さ})$$

$$12\pi \times \frac{1}{2} = 6\pi \quad (\text{アの長さ})$$

どこに点をとっても同じ長さになる

次の[例7]のように、直径ABの長さも文字で表し、より一般的な説明をしていた生徒が2名いた。

[例7] 線分ABをaとする。Sをbとする。

$$\text{アの長さ} \quad \pi a \div 2$$

$$\text{イの長さ} \quad \pi b \div 2 + \pi(a - b) \div 2 = \pi b / 2 + \pi a / 2 - \pi b / 2 = \pi a / 2$$

a<sub>2</sub>タイプ…文字式を使って説明しようとしたが、正答にまでは至らなかったもの

[例8] APの長さを12-x、BPの長さをxとする。

$$\text{ア} \quad 12\pi / 2 = 6\pi$$

$$\text{イ} \quad (12 - x)\pi / 2 = (6 - x) \text{と約分してしまっている。}$$

bタイプ…ことばの式を使って説明しようとしているもの

[例9] アは6πと表される。[12×π=12π、12π÷2=6π]

×πと÷2はアでもウ(半円Sの弧)でもエ(半円Tの弧)共通(かわらない)

だから残った直径で比べてみると、12cmの直径上でとるPでは、AP+PB=12cmがいえ。基本の直径はアでもイ(ウ+エ)でもかわらないので、どこにPをとってもア、イの長さはかわらない(同じ)。

[例10] アの直径もイの直径(AP+BP)も、AP+BPの比がかわるだけで直径の長さはかわらないから

[例11] 同じ。もしPBが短くなってもAPが長くなる。だから、PをABのどこにとってもアとイの長さは同じになる。

cタイプ…その他の解答

[例12] ア  $2 \times \pi \times 6 \div 2 = 6\pi$ 、イ  $2 \times \pi \times A = 2\pi A$  など

dタイプ…白紙のもの

このタイプ別の人数は、表22のようになる。

文字式を使って説明した生徒(a<sub>1</sub>、a<sub>2</sub>)

表22 問題2の解答タイプ別人数(n=30)

タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b	c	d
人数	10	3	3	3	11

タイプ) が13名(43%)いる反面、白紙であった生徒が11名(37%)いる。この結果をより詳しくとらえるために、タイプ別の解答を論証、「文字認知」の発達段階別に分類すると、表23, 24を得る。

表23 タイプ別、論証の水準別分布 (n=30)

論証\タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b	c	d	計
<Ⅲ>	8	1	1			10
<Ⅱ>	2	1	2		2	7
<Ⅰ>				2	3	5
<0>		1		1	6	8
計	10	3	3	3	11	30

表24 タイプ別、「文字認知」の水準別分布 (n=30)

認知\タイプ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b	c	d	計
[Ⅲ]	10	3	3		2	18
[Ⅱ]					1	1
[Ⅰ]				2	4	6
[0]				1	4	5
計	10	3	3	3	11	30

表23から、次のことが指摘できる。

ア、問題2で文字式を使って説明したa<sub>1</sub>、a<sub>2</sub>タイプの生徒は、1名を除いて、論証の段階が<水準Ⅱ>以上である。これらの生徒は、文字式を使わざるをえない具体的な場面に直面すると、一貫して文字式を使って説明しようとする構えができていると判断できる。

今回の「式の利用」の3時間の授業が、これらの生徒の文字式による論証についての理解を一層確かなものにしたといえるであろう。

イ、ことばの式を使って説明しようとしたbタイプの生徒3名は、いずれも論証の段階が<水準Ⅱ>以上であった。これらの生徒が文字式を使って説明することをどのようにとらえているのか、興味のあるところである。もし、ことばの式を使って説明することと、文字式を使って説明することとを同等に考えているのであるならば、問題であろう。

ウ、その他の解答としてまとめたcタイプの生徒3名は、いずれも論証の段階が<水準Ⅰ>以下であった。WSに自分の考えを何か書こうとしており、学習に前向きに取り組もうという姿勢がうかがえるだけに、これらの生徒に対するきめの細かい指導の必要性を感じる。

エ、白紙であった生徒が11名(37%)いる。

このうちの2名は、論証の段階が<水準Ⅱ>であり、問題1で正答を得ていながら問題2では白紙であったのは、文字式を使って説明することの意義を十分には理解していないためであろう。また、残りの9名は、<水準Ⅰ>以下である。

これら白紙であった11名の生徒は、本授業で文字式を使って説明することを考えなかったのであろうか、あるいはまた、文字式を使って説明しようとしたがABの長さをxとおくなどの表現上の困難さのために白紙であったのであろうか。

今回の一連の授業が、これらの生徒にどのような影響を与えたのかを見極め、きめの細かい指導のあり方を検討する必要がある。

また、表24からは、次のことが指摘できる。

オ、ある生徒が文字式を使って説明しようとしたかどうかは、その生徒がとどまっている論証の段階との関連が深い。表24からわかるように、今回の授業での生徒の反応からは、「文字認知」との関連も大きいといえることができる。問題2に対して文字式を使って説明した生徒(a<sub>1</sub>、a<sub>2</sub>タイプ)13名全員の「文字認知」の段階が[水準Ⅲ]であることは、興味深い。

カ、「文字認知」の段階が[水準Ⅰ]の生徒6名、[水準0]の生徒5名は、いずれもcまたはdタイプの解答をしていた。[水準Ⅰ]であっても、つまり「計算」はできていても、文字を使っ

て説明しようとはしていなかったことを考えると、「式の利用」の学習に臨むにあたって、これらの生徒の「文字認知」の段階を[水準Ⅱ]以上に高めておく必要があるといえよう。

### 3) 第3時全体を通しての考察

ここでは、一人ひとりの生徒の問題1での解答、問題2での解答、および「文字認知」の段階、論証の段階の関連を、授業後に行った面接のプロトコルも合わせて検討する。それらの関連を分類すると、次の表25を得る。

表25 問題1、2および「文字認知」の段階、論証の段階の関連(n=30)

問題		発達段階		人数	問題		発達段階		人数
1	2	認知	論証		1	2	認知	論証	
a	a <sub>1</sub>	[Ⅲ]	<Ⅲ>	1	c	c	[Ⅰ]	<Ⅰ>	1
b	a <sub>1</sub>	[Ⅲ]	<Ⅲ>	7			[Ⅰ]	<0>	1
		[Ⅲ]	<Ⅱ>	2			[0]	<Ⅰ>	1
b	a <sub>2</sub>	[Ⅲ]	<Ⅲ>	1	b	d	[Ⅲ]	<Ⅱ>	1
		[Ⅲ]	<Ⅱ>	1			[Ⅲ]	<0>	1
		[Ⅲ]	<0>	1			[Ⅰ]	<Ⅱ>	1
b	b	[Ⅲ]	<Ⅲ>	1	d	d	[Ⅱ]	<Ⅰ>	1
		[Ⅲ]	<Ⅱ>	2			[Ⅰ]	<Ⅰ>	1
							[Ⅰ]	<0>	2
							[0]	<Ⅰ>	1
							[0]	<0>	3

表25から、次のことが指摘できる。

ア、問題2でa<sub>1</sub>、a<sub>2</sub>タイプの解答をした生徒13名全員は、問題1で正答を得ており、「文字認知」の段階も[水準Ⅲ]である。論証の段階もまた、1名を除いて<水準Ⅱ>以上である。

この1名の生徒No23は、論証の段階が<水準0>であるが、授業で問題2を提示されると、図をかいてすぐにAPをx、PBを12-xとおいたが、その後は筆が進まず時間切れになっている。授業終了直後の感想では、3時間の授業の目的は「数を文字でおきかえるという事だと思った」と書き、授業後の面接では、「文字式の計算ミスで先に進めなかった」と言っている。この生徒は、今回の一連の授業によって、文字式を使って説明することの意義をとらえ始めているものと考えられる。

イ、アで取り上げた13名のうちのある生徒No11は、論証の段階が<水準Ⅱ>であったが、長さ12cmが与えられている直径ABをも文字で表して説明している。その点に関する面接時のプロトコルは次の通りである。

P 当てはめられるようにした。

T 式に？

P そう。全部どんな場合でもいようにしようとした。

T 2つの(半円S、Tの)半径をa、xとするのはわかるけど、(もとの半円の)直径は12cmとわかっているのにyとしたのはなぜ？

P この問題だけじゃなくて、できるようにした。

この生徒は、文字式のもつ一般性を十分に理解したものと考えられる。

ウ、問題2でbタイプの解答をした生徒3名は、全員問題1では正答を得ており、「文字認知」の段階は[水準Ⅲ]、論証の段階も<水準Ⅱ>以上である。これらの生徒に対して、ことばの式による説明と比較しながら、文字式を使って説明することの意義を理解させるための指導を行う必要がある。

エ、問題1、2ともにcタイプの解答をした生徒3名は、いずれも「文字認知」、論証の段階ともに水準Ⅰである。これらの生徒に対してきめの細かい指導を考える必要がある。

オ、問題1ではbタイプの解答により正答を得ながら、問題2は白紙(dタイプ)であった生徒が3名いた。これらの生徒は、数値計算の場合はよいが、文字使用の場合ではどのように手をつけてよいかかわからないでいる。

このうちのある生徒No17は、WS2は全くの白紙であったが、観察者の記録によれば、授業後半での3通りの説明(授業の流れ⑤の $P_1 \sim P_3$ )に対してそれぞれ「わかった」と反応する。また、No11の説明を一番わかりやすいとし、Tの「No11の説明は、12cmの場合に限らなくてもいい」という説明に何度もうなずいている。

また、他の生徒No24は、授業直後の感想に「消しゴムが使えないので、プリントにかくのに勇気がいりました。3時間目ともなるとだいたいぶなれたみたいで、思いついたことがスラスラとかけました。(中略)1,2,3時間目とも、最後の方にはわかるようになったので、“なるほど”とか“なーんだ”とかいろいろ感想はありました。」と書いている。

授業に積極的に参加している生徒達だけに、的確な指導を考える必要がある。

カ、問題1、2ともに白紙(dタイプ)であった生徒が7名おり、このうちの3名は「文字認知」、論証の段階ともに水準0である。今回の授業がこれら7名の生徒にどのような影響を与えたのであろうか。

「文字認知」の段階が[水準Ⅱ]のある生徒No19は、 $P_2$ の説明に対して、「文字式で説明してくれたからわかりやすかった」と言っている。

一方、「文字認知」、論証の段階ともに水準Ⅰのある生徒No21は、授業直後の感想に「図形は全くだめだったので全然わからなかった。でも、みんなの意見をきいてからよくわかった」と書いている。この生徒は図形に関する課題であるというだけで抵抗感を示していることがわかる。

以上みてきたように、問題2に対する一人ひとりの生徒の反応の特徴から、本授業について次のことが指摘できる。

- ・  $a_1$ 、 $a_2$ タイプの解答をした生徒は、本時の学習のねらいを達成することができた。
- ・ bタイプの解答をした生徒は、ことばの式による説明の不十分さを徐々に感じ始めており、本時のねらいをほぼ達成することができたと考えられる。
- ・ c、dタイプの解答をした生徒が、文字式を使った説明をどのようにとらえたかについては、今回の授業からは明らかにならなかった。課題2を提示し、「これを文字式を使って説明しなさい」と問いかけたならば、これらの生徒はどのように反応するのか、興味のあるところである。授業を通して検討する必要がある。
- ・ 本時の授業は今回の一連の授業の最後にあたるが、特に表23や表24に顕著に表れている通り、事前調査での「文字認知」の段階や論証の段階によって解答のタイプが決まっている。段階判定のための評価問題が妥当であったことを裏付けているものと考えられる。

5. 3時間を通しての変容

各時間とも、WS 2では、提示された課題をどのように解決するかを直接書かせている。ここでは特にWS 2での記述を取り上げる。その解答やポストテストの結果等を分析することによって、今回の一連の授業において一人ひとりの生徒が問題を解決するのに文字式を使おうとしたかどうかの変容をとらえることができると考える。

なお、ポストテストの問題は次の通りである。

「2つの続いた奇数の積に1を加えた数は、もとの2つの奇数の間の偶数の2乗に等しいことを証明明しなさい。」	A	1	3	5	7	9	11	13	...
			∖	∧	∧	∧	∧	∧	∧
	B	3	15	35	□	□	□	□	...
	C	4	16	36	□	□	□	□	...

(1) 学級全体としての変容

まず、学級の30名の生徒が文字の使用に関してどのように変容したかを検討する。

各時間のWS 2での解答のタイプ、およびポストテストでの解答の水準を分類すると、次の表26、27を得る。なお、bタイプは、第1、第2時では帰納的に説明しようとしたもの、第3時ではことばの式を使って説明しようとしたものであり、bタイプ以外のそれぞれは、各時間とも次のように共通の使い方をしている。

- a<sub>1</sub>タイプ…文字式を使って正しく説明しているもの
- a<sub>2</sub>タイプ…文字式を使って説明しようとしたが、正答にまでは至らなかったもの
- cタイプ…その他の解答
- dタイプ…白紙のもの

表26は、3時間の授業のWS 2で、少なくとも1度は自ら進んで文字を使って問題を解決しようとした生徒、つまり、a<sub>1</sub>タイプかa<sub>2</sub>タイプの解答をした生徒16名について、また、表27は、そこでは文字使用が1度もみられなかった生徒14名についてまとめたものである。

表26 解答の推移-文字使用(n=16)

1時	2時	3時	ポストテ	生徒No
a <sub>1</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>1</sub>	II	18
a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>1</sub>	III	27
a <sub>1</sub>	b	a <sub>1</sub>	III	6
a <sub>1</sub>	d	a <sub>1</sub>	III	4
a <sub>2</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>1</sub>	III	11
a <sub>2</sub>	b	a <sub>1</sub>	III	26, 30
d	c	a <sub>1</sub>	II	5
×	c	a <sub>1</sub>	III	10
d	d	a <sub>1</sub>	III	20
a <sub>2</sub>	b	a <sub>2</sub>	III	9
d	b	a <sub>2</sub>	III	13, 23*
a <sub>2</sub>	a <sub>2</sub>	b	II	15
a <sub>2</sub>	a <sub>2</sub>	d	III	24*
a <sub>2</sub>	c	b	III	28

表27 解答の推移-文字使用せず(n=14)

1時	2時	3時	ポストテ	生徒No
b	b	b	III	1*
b	b	d	III	17*
c	b	c	0	16
c	×	c	III	14
c	c	c	II	22
c	b	d	II	12
d	b	d	0	25, 29
d	b	d	I	8
d	b	d	II	7*, 21
d	d	d	0	2, 3
d	d	d	III	19

(注) 番号の脇に\*印を付けた生徒については、次の項で詳しく述べてある。

- この表26、27から、次のことが指摘できる。
- ア、3時間を一貫して文字を使おうとした生徒は、No18,27,11のわずか3名である。全体的な傾向として文字を使おうとする構えに欠けているといえよう。文字式を使うことの意義を理解させる必要がある。
- イ、第3時では、課題に当面して文字を使おうとした生徒が13名おり、このうちの10名が正答を得ている。これを第1時での解答と比べると、正答を得た生徒が増えている。第1時の課題を解決するには式の展開や因数分解についての計算が必要とされるが、第3時では式表現やその変形が比較的容易であることがその理由であろう。あるいはまた、第1時、第2時の授業を通して、文字を使うことの意義をとらえた生徒が増えたためとも考えられる。
- ウ、表26にまとめた16名の生徒の「文字認知」の段階を調べてみると、驚くことに全員が[水準Ⅲ]である。また、生徒No23,24の2名を除いた14名の論証の段階は<水準Ⅱ>以上である。このこととポストテストの結果とを合わせてみると、これらの生徒は、一連の授業のねらいを達成できたといえよう。また、課題に当面して文字を使おうとするためには、「文字認知」の段階を高めておく必要があるようにも考えられる。
- これらのことはまた、論証や「文字認知」の段階判定の結果により、課題を解決するのに文字を使おうとするかどうかがかなりの程度まで予測できることを示している。
- なお、上で除いた2名の生徒No23,24はともに論証の段階が<水準0>であったが、感想文等の記述内容からも、一連の授業によって、一般的に説明することの意味や文字を使うことの有用性をとらえ始めているものと考えられる。(この2名については、次の項で詳しく検討する。)
- エ、第2時で帰納的に説明しようとした生徒は15名いるが、そのうちの9名が3つの課題に対して全く文字を使おうとはしていない。この9名のうち、完全帰納法によった生徒は4名、2、3の具体例で確かめた者が5名である。第2時で帰納的に説明しようとした生徒(bタイプ)が増えているが、それは、「証明する」ということを意識して(完全)帰納法を用いたわけではないと判断できる。
- オ、第1時、第2時ともに一貫して帰納的に説明しようとした生徒は、No1、17の2名だけである。これらの生徒は、第3時では文字使用すらみられなかったが、ポストテストでは文字を使用し正答を得ている。この2名の生徒は、一連の授業によって、帰納的な方法と文字式を使った方法との調べ方の違いに目を向けることができたものと考えられる。(この2名については、次の項で詳しく検討する。)
- カ、生徒No14,16,22の3名は、課題に当面して、とにかく自分の考えをいろいろと書いている。正答には程遠い内容の記述ではあるものの、授業に真剣に取り組もうという姿勢があるだけに、これらの生徒に対するいっそうきめの細かい指導が望まれよう。
- キ、3つの課題の多くに対して白紙であった生徒が9名いる。しかも、文字使用に関する変容はほとんどみられなかった。これらの生徒が文字を使った説明をどのようにとらえたかを明らかにするとともに、「式の利用」の授業構成を再検討する必要がある。
- ク、3時間のWS2はいずれも白紙であるにもかかわらず、ポストテストでは<水準Ⅲ>と判定された生徒No19がいる。この生徒は、感想文や面接の結果から判断すると、授業中の他の生徒の文字を使った説明を聞いて、文字使用の有用性をとらえ始めたものと考えられる。
- ケ、授業実施2週間後に行ったポストテストによる段階判定の結果をみると、<水準Ⅲ>が17

名、〈水準Ⅱ〉が7名、〈水準Ⅰ〉が1名、〈水準0〉が5名である。事前調査の段階判定は、順に10, 7, 5, 8名であったことと比べると、文字を使おうとした生徒が7名増えて24名(80%)になっている。その理由として、一連の授業によって文字を使うことの意義をとらえた生徒が増えたことがあげられよう。

そこで、授業のどの部分が生徒一人ひとりに変容をもたらしたのかを検討してみると、3時間のどの授業においても文字を使った説明が紹介され、その簡潔さ、明確さが確認されたことがその大きな理由であろうと考えられる。さらに、第1時、第2時では帰納的な方法について、第3時ではことばの式を使った説明について、文字を使った説明との比較検討がなされたことも、有効であったと考えられる。

## (2) 個々の生徒の変容

ここでは、観察生徒や興味深い反応を示した生徒の理解の様相について、個別に述べる。

### ① 生徒No23について

今回の一連の授業で大きく変容した生徒である。

この生徒は、事前調査では論証の段階が〈水準0〉と判定されたが、第3時では文字を使って説明しようとしている。また、「文字認知」の段階は[水準Ⅲ]である。

この生徒の3時間分のWS2での解答と、ポストテストでの論証の段階は、右の通りである。(各時間の解答のタイプ分けは、それぞれの時間のものに準ずる。)

時期	第1時	第2時	第3時	ポストテスト
タイプ	d	b	a <sub>2</sub>	(水準Ⅲ)

第1時での記述は白紙であるが、連続する2つの偶数やその間の奇数を表現できなかったことがその原因と考えられる。それは、WS2'で、文字を使おうとしたものの表現できなかったこと、および授業終了直後の感想でも、「文字におきかえるのが、すごく苦手だということを実感した」と書いていることなどから判断できる。

この生徒は、数学があまり得意ではなく、普段からそれほど数学に興味を示さない。数学ができるようになりたいという気持ちは持っているが、事前調査の結果からもわかる通り、物事を論理的に筋道立てて考えることがあまり得意でなく、難しい課題に直面したときにはあきらめることも早い。

この生徒にとってみれば、証明の必要性はある程度わかっている、文字の使い方、特に、表現の仕方の不十分さから、文字式を使った証明をすることには苦手意識を抱いていると考えられる。そのためか、第2時では文字を使わず、完全帰納法による解答をしている。そのときには、授業観察者の記録によれば、「全部やった。証明のクソもない。全部やった。」とつぶやいている。このようにこの生徒は、具体的な数を使って完全帰納法により証明できたことによって、すべての場合を調べ尽くすという新たな経験をしたと考えられる。

第3時では、課題が連続量に関するものであることから、完全帰納法は使えず、文字を使わざるを得ない状況に追い込まれていった。またこの課題は、文字を使って数量を表現することが比較的やさしいこと、そして授業後の面接で明らかになった「(以前の)授業でどんな問題か忘れちゃったけど、何かをxとおくと、もうひとつの方は、(もとの数-x)と表せることをやった記憶があった」ということも重なって、文字を使おうとしたものと考えられる。

さらに授業後の面接で、帰納的に示せばよいとは考えなかったのかという趣旨の問いかけに対して、「そうやっても、全部で言い切れるとは…っていわれちゃうと困るから、違う方法で



考えてみようと思った」と答えている。途中で計算ミスがあったために正答には至らなかったものの、この生徒は、授業のねらいを達成できたと考えてよいであろう。

なお、この授業から約4カ月後の『2次方程式の応用』の授業の後に、この生徒が「先生、今日の授業は2問とも全部解けたよ。やっと、文字が使えるようになった。」と話しかけてきたことが、たいへん印象的であった。

今回の一連の授業は、この生徒が文字を使うことの有用性を理解するという点で大きく寄与したことは間違いない。

### ②生徒No24について

この生徒は、事前調査では論証の段階が〈水準0〉と判定されたが、文字を使って説明しようとしている。また、「文字認知」の段階は〔水準Ⅲ〕である。

この生徒の3時間分のWS2での解答と、ポストテストでの論証の段階は、右の通りである。

時期	第1時	第2時	第3時	ポストテスト
タイプ	a <sub>2</sub>	a <sub>2</sub>	d	(水準Ⅲ)

この生徒は、観察生徒ではなかったため、授業中の詳しい観察記録は残っていないが、WSに残された解答によれば、第1時、第2時ともに文字を使って数量を的確に表現することができなかったことがわかる。

この生徒は、「文字認知」の段階は〔水準Ⅲ〕であるから、事前調査の表現の問題については正答しているので、その他のいろいろな数量についても文字を使って的確に表現できるようになれば、文字を使おうという姿勢はできつつあるので、正答に至る可能性は高いと考えられる。このことは、授業終了直後の感想でも、「1、2、3時間目とも、最後の方にはわかるようになったので、“なるほど”とか“なーんだ”とか、いろいろ感想はありました」と書いてることや、ポストテストでは正答を得ていることからもうなずけるであろう。

### ③生徒No1について

この生徒は、事前調査では論証の段階が〈水準Ⅱ〉と判定されたが、授業では3つの課題に当面して自ら進んで文字を使って説明しようとしなかった。また、「文字認知」の段階は〔水準Ⅲ〕である。

この生徒の3時間分のWS2での解答と、ポストテストでの論証の段階は、右の通りである。

時期	第1時	第2時	第3時	ポストテスト
タイプ	b	b	b	(水準Ⅲ)

第1時では、「2つの続いた偶数の積に1を加えた数は、もとの2つの偶数の間の奇数の2乗に等しい」という性質に気付いた後、さらにこの性質が偶数と奇数をいれかえても成り立つことを発見している。このことは、WS1の欄外に計算の跡が見られることや、授業終了直後の感想にも書いてあることからわかる。

WS2では、授業観察者の記録によれば、教師の発問に対して直ちに「思う」と書くが、その理由については、欄外に具体的な数でいくつか調べた後、「数を書いてやってみると、(WS)1でやったようになった」と書き、その後また、WS1の枠内の数で考えていた。

教師の、「(この性質が成り立つ)思う人は？」という趣旨の発問に対して挙手した後、その理由としては、生徒No17の帰納的な説明に同意している。

その後、生徒No26による「皆でいろんな数を調べたけど、それは全部の数で調べたわけではないからどんな数でもなるかわからない」という帰納的な説明の不十分さを指摘した発言に対しては、「わからない」と答えている。そこで、生徒No26が再度説明し、さらに生徒No23が念をおすように説明すると、「わかった」と答えた。

この場面に関して、本当に帰納的な説明の不十分さを理解できたかどうか疑問があるという授業観察者の指摘もあったので、面接を行い追究することにした。そのプロトコルは、以下の通りである。

T ; P<sub>26</sub>、P<sub>23</sub>が「『いろいろな数について調べたから』では理由にならない」と言ったのはなぜだろうか。

P<sub>1</sub> ; もしかしたら、もっとずっと先の方で違うかもしれないから。

T ; とすると、どうやって説明したらいいんだろう。

P<sub>1</sub> ; 文字でおいて説明していけばよい。

T ; なぜ？

P<sub>1</sub> ; どんな数でも当てはまるから。

この記録からは、少なくとも面接を行った時点では、帰納的な説明の不十分さについても、また、文字式を使った証明の一般性についても理解していると考えられる。ただし、この面接は一連の授業の後に行われたものであり、第1時の授業中にこの生徒がどこまで理解していたかについては判明しなかった。

第2時では、授業観察者の記録によれば、WS2で「思う・思わない」の判断を下す前に、教師に「何桁でもいいの？」と質問し、「2桁」という答えを聞くとすぐに「思う」と書いて完全帰納法による確認にとりかかった。そして、確認後は寝てしまった。

教師が理由を確認しているときの、「全部確かめなければ分からない」という趣旨の他の生徒の発言にうなずき、教師の「2桁なら、なると言い切ってよいか」という問いかけに、自信なさそうに後から挙手している。しかし、その後の文字の説明になると聞いていない。

授業後の面接で、完全帰納法で解答した理由を聞いたところ、「2桁の数だったから、全部やっちゃったほうが早いと思った」という趣旨の答えをしている。

第3時では、WS2の「同じになる理由」は、「もし、PB(PA)が短くなくても、AP(BP)が長くなる。だから、PをAB上のどこにとっても、AとIの長さは同じになると思う。」と、ことばによる不完全な説明にとどまっている。

しかし、その後文字式を使って説明した2名の生徒の説明に対して「説明が分かった人？」という問いかけに、2回とも迷わずに挙手していた。そして、一番わかり易い説明としては、自分と同じことばによる説明には賛同せず、この2名による文字を使った説明を選んでいる。

この生徒は、第3時のこのような反応や授業後の面接、ポストテストの結果、事前調査での論証の段階が〈水準Ⅱ〉であることを考え合わせると、文字のもつ一般性や文字式による論証の一般性について一応理解していると判断してよいと考える。

普段の学習状況についての観察によれば、この生徒は直観的に物事を考える能力に優れ、ある規則を帰納的に見抜くことなどには大変興味を示して取り組むが、それを論理的に証明する段階になると急に意欲が減退しがちである。このような傾向から、よほど追い込まれた状況にならない限り、抽象よりは具体、演繹よりは帰納といった思考を選択する可能性が強い。今回の授業でも、文字式による論証のもつ一般性について一応理解しているものの帰納的な方法によったのは、そのあたりに原因があろう。機会あるごとに、論証のもつ一般性について意欲的に考えさせるなど、時間をかけて指導していく必要があるだろう。

#### ④生徒No7について

この生徒は、事前調査では論証の段階が〈水準Ⅱ〉と判定されたが、文字を使って説明しよう

としなかった。また、「文字認知」の段階は[水準Ⅲ]である。

この生徒の3時間分のWS 2での解答と、ポストテストでの論証の段階は、右の通りである。

時期	第1時	第2時	第3時	ポストテスト
タイプ	d	b	d	〈水準Ⅲ〉

この生徒のWSの記述には、3時間の授業を通して文字を使って数量を的確に表現することができないでいたことが示されており、それはまた、ポストテストでも同様である。事前調査でも、ぎりぎりのところで[水準Ⅲ]、〈水準Ⅱ〉と判定されている。

この生徒が帰納的な説明にとどまっていたのは、文字を使って数量を表現することに対する抵抗が大きかったためであると考えられる。

#### ⑤生徒No17について

この生徒は、事前調査では論証の段階が〈水準Ⅱ〉と判定されたが、文字を使って説明しようとしなかった。また、「文字認知」の段階は[水準Ⅰ]である。

この生徒の3時間分のWS 2での解答と、ポストテストでの論証の段階は、右の通りである。

生徒	第1時	第2時	第3時	ポストテスト
タイプ	b	b	d	〈水準Ⅲ〉

この生徒は、3時間分のWS 2の記述によれば、第1時、第2時では帰納的な説明に終始していたが、第1時で自分自身への発言に対する級友の発言を聞いて帰納的な説明の不十分さを知り、それが第3時へとつながっていったと考えられる。第3時のWS 2の欄は白紙ではあるものの、授業観察者の記録によれば、「隣の生徒No1の(ことばによる不十分な)説明を横目でよんではいるが、自分では書けず、ずっと考えていた」とあり、さらに、その後黒板で何名かの生徒が理由を発表したときには、3名のそれぞれの説明がわかったとして挙手し、文字式を使った説明をした2名のうち、12cmとわかっている直径までも一般化して文字を使った生徒の説明が一番わかり易い説明として選んでいる。

授業直後の感想では、「整数の性質ではおもしろいことが分かった。文字で表せたりでき、どんな偶数でも表せることができる(1回目の授業)ことが分かっておもしろかった。2回目の授業もちゃんと簡単にできて、不思議な感じもした。3回目も文字などで表せて、なっとくした」と書いている。

この感想での文字に対する見方や、ポストテストでも正答していることも含めて、この生徒は、文字式による論証のもつ一般性についての理解を深めたものと考えられる。

なお、この生徒は、昨年度後半はほとんど不登校であり、特に図形の論証や1次関数などのように、論理的思考力や、変数についての見方が大きく養われる授業を受けていない。本来まじめな生徒であるので自力で努力し、この一連の授業の時期が、技能的な計算能力については不十分ながらもようやく追いついてきた時期に当たっていた。しかし、論証については、説明されれば理解できるが自ら演繹的な推論を進めることができるような段階までには至っていなかったと考えられる。早く昨年度のハンディを克服できるように、見守りたい。

## 6. 文字式による論証の指導への示唆

ここでは、以上検討してきたことに基づいて、現在の中学校数学科での文字式による論証の指導についての問題点を考える。

### ① 文字を使って数量を表現することの指導に対する配慮

文字式による論証の場面では、証明すべき命題の中に現れる数量を、まず文字を使って表現する必要がある。今回の授業に関しては、第1時では偶数を $2n$  ( $n$ は整数)と表現し、第2時では一の位が5である2けたの自然数を $10x+5$ と表現することになる。それには、偶数が $2 \times (\text{整数})$ の形で表されることや十進構造そのものについての知識が要求される。また第3時では、一方を $x$ で表し他方を $12-x$ で表さなければならない。

現在の中学校数学科での指導では、ふつう、文字式での表現の扱いについては、中1での文字使用の規約の学習の前後に、簡単に取り上げられるだけである。その背景には、方程式の応用や関数の利用などの場面での式表現を通して、数量を文字式表現する能力が育成されるという考え方があって、中2、中3では取り立てて扱うことはないということであろう。だが、今回の一連の授業でも明らかになったように、文字式での表現力の欠如が論証することのつまづきになっていることを考えると、文字式での表現についての指導を重視する必要がある。その際には、数と対比した扱いが望まれる。

もっとも、文字を使って表現できたからといってその命題が証明できるとは限らないことは、既に指摘した通りである<sup>4)</sup>。

### ② 目的に応じた式変形の場面の重視

今回の授業の第1時では、「2つの続いた偶数の積に1を加えた数」を $2n \times (2n+2) + 1$ で表し、「もとの2つの偶数の間の奇数の2乗」に等しいことを示すという目的で、 $(2n+1)^2$ と変形する。また第2時では、 $(10a+5)^2$ を速算のルールを示しているような形に変形する。文字式で表現できたとしても、それを目的に応じて式変形できないことが論証の大きなつまづきになっていることは、今回の授業でも明らかになった。

文字式の計算は、「計算しなさい」、「展開しなさい」、「因数分解しなさい」という問いかけで扱われることがほとんどであるが、例題などの指導の際に現れる、目的に応じた式変形の場面の扱いを重視する必要がある。そこでは、生徒一人ひとりが目的に応じた式変形を主体的に考える授業展開が望まれる。

その際、目的を達成するためには式をどのような形に変形すればよいのか、また、その式をどう読み取るのかについてのていねいな指導も要求されるであろう。

### ③ 文字を使うことの有用性を知らせる指導の重視

課題に当面してそれを解決するのに、文字式を使って解決しようという構えが欠けている生徒が多いという実態がある。今回の3時間の授業でも、課題に当面して文字を使おうとした生徒は約半数であり、残りの半数は、WSの記述内容で判断する限りでは、自ら進んでは文字を使おうとしていない。文字や文字式を使うことの有用性をとらえていないことがその原因であると考えられる。

今回の一連の授業では、中3での式の計算の指導を終えた後の「文字式の利用」の項で、3つの課題を用意して「文字式を使うと、ある性質が成り立つことを一般的に簡潔に説明できること」を理解させるための指導について検討した。その3時間でとりあげた3つの課題の特徴は本稿の初めに述べてあるが、これら以外で、文字や文字式を使うことの有用性をとらえさせる場面を検討し、授業計画に適切に位置付ける必要がある。

また、既に指摘した通り<sup>5)</sup>、現在は文字式を使った説明があまり扱われていない中1においても、問題の解決に当たって文字や文字式の使用が有効に働くことをとらえさせるための指導

を位置付け、文字学習の早い時期から、計算だけに偏らない、文字使用の意義をもとらえた学習を計画する必要がある。

#### ④ 調べ方の違いに着目させる指導の重視

ある性質が成り立つことを発見する際に、自ら進んでそれを帰納的に検討しようとする生徒はそれほど多くはない。また、帰納的な説明と証明とを同列のものとしてとらえている生徒もいる。

文字式による論証の場面では、性質を帰納的に確かめそれを証明するという授業過程を比較的取りやすいが、それによって、帰納的な説明の特徴と証明による方法の特徴とを比較し、それぞれの方法の長所、短所を明らかにすることができる。今回の一連の授業では、整数や図形について成り立つ性質を生徒自らが発見し、それを文字式を使って証明するという展開を心掛けたが、調べ方の違いに着目させ、文字式による論証のもつ一般性を理解させたいという意図があった。実際の授業では、帰納的な説明や完全帰納法、ことばの式による説明の特徴について全体で検討した。それが、生徒が文字や文字式による論証の有用性を理解することに役立ったことは、既に述べた通りである。

このような授業過程をとって文字や文字式を使うことの意義をとらえさせるための指導を、授業計画に明確に位置付ける必要がある。

#### ⑤ 文字や命題のもつ一般性の強調

文字や、文字式による論証で取り扱われる命題には一般性がある。また、そこで行われる文字式を使った証明にも一般性がある。このことについての理解なくしては、数学学習の価値は半減するといっても過言ではない。④で述べたこととも関連するが、論証のもつ一般性に着目させないと、帰納的に確かめることと文字式を使って証明することを同列のものとしてとらえてしまう生徒が出てくる。「帰納的に確かめられたのに、なにをまた文字式を使って繰り返しているのだろう」と考える生徒もいる。ある命題が成り立つことは一般的に説明することによって保障されることを強調する必要がある。

#### ⑥ 3年間を見通した授業計画の作成

今回の一連の授業では、約半数の生徒が課題に当面して自ら進んで文字を使おうとしなかった。つまり、文字を使おうとする構えは、この種の授業の繰り返しだけでは効率よく形成されないように考えられる。このような状況が生徒の現状であるが、文字の使用を指示されなくても文字を使って証明しようとする構えがあることを期待することは言うまでもない。そこで、命題が成り立つこと説明する場面において、中1や中2の初期には「文字を使って説明しなさい」と文字使用を直接指示し、中2の後半や中3では単に「説明しなさい」と問いかけて自ら文字を使おうとする構えの育成を図るなど、段階を踏んだ授業展開を計画する必要がある。

## IV. おわりに

本稿では、中学校数学科での文字式の指導のうち、特に生徒の「文字式による論証についての理解」に関する様相について、中学校3年生を対象にした3時間連続の実験授業を通して、その一部を明らかにした。そして、文字式による論証についての指導に関する問題点を考えた。

今後の課題として、次のことがあげられる。

1. 中学校2年生を対象にした「文字式の利用」に関する連続授業を実施し、そこでの生徒の文字や文字式についての理解度をとらえる。
2. 今回は、「文字認知」を「表現」、「計算」、「読式」の内容に限定して考察してきたが、そ

れを変数概念等をも含むより広い観点から検討する。

変数に関連しては、「1つの式の中で使われる同じ文字は、同じ数しか表さない」、また、「1つの式の中に現れる同じ数には、同じ文字を使う」ということに関する理解の様相についても検討する<sup>6)</sup>。

3. 文字式による論証について理解しているとは、どういうことを意味するのかを検討する。文字式を使って論証することができることと、その論証がもつ一般性を理解していることは別のことである。文字式による論証ができたからといって、それがもつ意味までも理解しているとは限らない。この両者が備わって初めて、「文字式による論証を理解している」ということができる。このような点について検討を重ねる必要がある。
4. 文字式による論証についての理解の様相は、既に述べた「表現」、「計算」、「読式」や変数とも密接な関係がある。これら全体を包括した子どもの文字認知の発達の様相について追究する。
5. 文字概念の形成に関する望ましい指導系統や指導方法を確立する<sup>7)</sup>。

なお、本稿をまとめるに当たり、次の諸氏には、的確な助言等をいただいた。ここに深く謝意を表したい。

小関熙純(群馬大学教育学部)、小高博(東京都千代田区立九段中)

熊倉啓之(筑波大学附属駒場中・高等学校)、羽住邦男(東京学芸大学附属世田谷中)

鈴木真佐子(静岡大学教育学研究科院生)

=参考文献=

- 1) 国宗進「文字式の指導について」 静岡大学教育学部研究報告第23号 1992 p.42
- 2) 羽住邦男、中西知真紀他「文字式による論証－授業を通しての検討－」日数教学会誌74巻1号 1992 pp.7-15
- 3) 羽住邦男、中西知真紀他「文字式による論証」 日数教学会誌72巻9号 1990 pp.2-10
- 4) 2) に同じ
- 5) 国宗進「文字式による論証」 静岡大学教育学部研究報告第22号 1991 p.68
- 6) 藤井齊亮「児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査」 数学教育学論究 Vol.58 1992 pp.3-27
- 7) 小関熙純、国宗進他「概念形成に関する指導について－文字指導の授業を通して－」 第24回数学教育論文発表会論文集 1991