小・中学校における変数の扱いに関する研究

A Study on Teaching Variables in Elementary and Lower Secondary School

国宗　　進
Susumu KUNIMUNE

（平成5年10月12日受理）

I　研究の目的

本稿は、子どもの文字や文字式についての理解に関するものである。

ａやｘの文字そのものの導入は小学校第5学年で行われるが、それに先立って、第3学年では□が、第4学年では□、△が取り上げられる。中学校では、文字や文字式を形式的に操作して考察を進めていくことが学習の中心をなしている。続く高等学校以降、文字や文字式を十分に駆使して思考を進めて行くことが、数学学習の中心である。

このような数学学習における文字使用の重要性にもかかわらず、中学校数学科における指導では、文字に関する内容を理解するのにかなりの抵抗を示す生徒が多くみられるといわれている。その理由としてはいろいろと挙げられるであろうが、子どもの文字や文字式、特に変数としての文字のとらえ方に問題があるように思われる。

ところで、中学校数学科での文字や文字式についての指導内容は、次の5つに分けて考えることができる。

(1)　数量または数量の関係を文字式によって表現すること
(2)　文字式を計算すること
(3)　文字式の表す内容を読み取ること
(4)　文字式をいろいろな場面で利用すること
(5)　文字や文字式の意味を理解すること

この中の (4) の内容については、さまざまな場面での利用が考えられるが、それは2つの指導場面、「文字式による論証」と「方程式や関数の場面での利用」に大きく分けられる。ここで、前者は、中2や中3での指導において、文字式による証明の問題等について式により思考を進めていく場面を指している。

筆者はグループを組んでこれらについての研究を行っているが、そこでは、特に (4) や (5) に関連して、子どもの「変数についての理解」に関する様相を明らかにすることが中心課題の1つになっている。これまでにも、変数の意味について検討し、文字概念の形成に関する望ましい授業のあり方を探る中で、子どもの「変数についての理解」に関する様相を観察、調査し、分析してきた。[1)]

そこでは、文字概念の形成に関する望ましい授業のあり方を解明するために、次のような手順で研究を進めている。

① 子どもの行動を現象的に観察し、発達していくそれぞれの行動相互のつながりを解明し、それらの順次性を考えて発達段階を決める。

② 指導の対象になっている子どもが、発達段階のどこにとどまっているのか、その実態を明らかにする。

③ 子どもの発達を促進するためには、どのような指導内容、指導方法がよいのかについて実証的検討を行う。

現在のところ、①②を中心とし、③についても実験授業を通して考察を進めているが、文字、特にその変数的な扱いについて、教育実践を通した多くの知見をまとめ、そこでの問題点を検討しておくことは、子どもの文字や文字式についての理解に関する研究を進めるうえで意義のあることと考える。

以上のような問題意識のもとに、本稿では次のことを目的とする。

1）文字や文字式の使い方についての発展の様子を、数学史の立場から概観する。

2）主に中学校数学科での変数や変域の扱いの変遷を、学習指導要領や教科書等の記述によって検討する。

3）中学校数学科における変数の扱いに関する問題点について、小学校算数科での実践研究も参考にして検討する。

II 研究の内容

1 文字や文字式の使い方の発展

ここでは、文字や文字式の使い方についての発展の歴史を概観する。

アレキサンドリア時代のディオファントス（A.D.300年頃）の『数論』には、代数とみなされる種類の計算が載っていて、「その計算は未知量をもち、式が立てられ、その未知量の値を求める操作が行われている」。そこでの「代数はすべて、全くの確定数を求めること」であって、「その代数的手法は、われわれが用いる場合と同じ一般性をもって用いられていない」といわれている。[2)]

ルネッサンスの時代は記号の整備に始まったということができるが、その一方で、未知数や任意の定数についての文字の使用に関する発展も始まっている。

イタリアの修道士パチオーリは、1494年に『算術、幾何、比および比例大全』を著している。これはパチオーリ自身の著作や当時の一般的知識を集大成したものであるが、そこでは、未知数 cosa，その平方 censo，立方 cubo が、それぞれ co，ce，cu で表されている。このような記号化によるものは、Coss 記号の代数学といわれる。

また、ドイツのシュティーフェルは、1544年の『算術全書』の中で、2次方程式の係数に負の数を採用し、多くの形の例を1つの形式に整理することができた。その彼でさえ、方程式の解として負の数を認めることはできなかったという。

3次方程式の解法に関連しては、カルダーノとタルタリアとの先陣争いについての論争が有名であるが、そのカルダーノの『大なる術』が1545年に出版され、3次、4次方程式の解法が知られるようになった。この著作には、さまざま形の3次方程式の解法が詳しく述べられているが、各項の係数は正でなければならなかったので、1つの式ですべての3次方程式を表すまでには達していない。興味深いことに、取り上げた特定な数係数の方程式が、同時に一般的な場合も表していると考えていた。例えば、$x^3+6x=20$ という方程式が、$x^3+px=q$

という形の式すべてを代表するものとして扱われている。まだこのような文字の使い方ではあったが、この『大なる術』の公表が、その後の代数学の様々な研究分野に与えた影響には計り知れないものがある。

代数学の実質上の創始者といわれ、16世紀フランス最大の数学者とされるヴィエト（ラテン名ヴィエタ）は、1591年の『解析法入門』の中で、未知の量をA，E，I，O，Uのような母音大文字で、既知または定められている大きさや数をB，G，Dのような子音大文字で表している。ここにおいて代数学では初めて、未知量の概念とパラメーター概念との区別が明確になされた。このことは、既知の数を文字で表して一般的に考えることを可能にし、代数を理論化するのに大きな役割を果たすことになった。

現在のように既知の数をアルファベットの初めのほうの文字a，b，cなどで、未知の数を終わりのほうの文字x，y，zなどで表したり、x^3，x^4などの表記を確立したのは、フランスのデカルトである。それは『方法序説および三試論』の中の『幾何学』や『精神指導の規則』において示された。ここに至って、記号代数学が完成する。[3)]

以上概観したように、文字は未知数として使われ始め、その後永い年月を経て、ヴィエトによって任意の数を表すものとして使われるようになる。文字が変数として使われるのは、さらにまたその後のことであった。[4)]

2　数学教育における変数や変域の扱いの変遷

ここでは、中学校数学科での変数や変域の扱いの変遷について、学習指導要領の記述や当時のことについて述べた文献、および教科書の記述等によって検討する。変数は関数と独立に考えられるが、変数は関数の概念と関連させて語られることが多いので、必要に応じて関数の扱いについても触れることにする。

（1）初期の段階での変数、関数の扱い

関数概念を数学教育の場に取り入れよとの主張が20世紀初頭になされたことは衆知のことであるが、当時の関数思想や変数は実際の数学教育の場でどのように取り上げられたのであろうか。それについて、佐藤良一郎は「当時考えられた函数思想というのは、現代的な意味での函数思想とちがって、直観的であった」という。[5)]

「二つの変数x，yがあって、xの値が定まるとそれに伴ってyの値がただ一つに定まるとき、yはxの函数であるという」として関数を理解し、「このような考え方で、卑近な自然現象や社会事象を観察把握させること、そしてそのための道具として表やグラフや式を取り扱うということが、函数思想の涵養であるとした」というのがその状況であった。この場合、xの値やyの値というのは、「別に数だけに限るというのではなかったが、集合という考えを表面にあらわに出すことはなかった。」というのは注目に値する。

そして、変数については、次のような理由から「いろいろの値をとりうる記号である」というように「漠然ととらえ」ていたという。[6)]

「大学では、集合論や群論というものは講義されていた時代ではあるが、集合という考えを、初等の数学教育に持ちこもうという企ては誰もしなかった。むつかしいと考えたからである。もちろん、だから、『集合の任意の要素を表わす記号を変数といい、その集合をその変数の変域という』といったような思想は、まだ現われていなかった。少なくとも筆者の視聴のとどく

範囲にはそういう思想はなかった。」

このような意味からすると、当時の変数という考えは「いわば、直観的未分析のものであった」というのが佐藤の考えである。

上に引用した「直観的未分析」といわれる関数の定義にしても、変数の定義にしても、現在の中学校の教科書にみられるものとほぼ同様であることは興味深い。

（2）学習指導要領での記述

昭和26（1951）年版

いわゆる生活単元学習の学習指導要領（試案）は中学校高等学校が1冊になっており、300ページ程の分厚いものである。現在の学習指導要領中の数ページの数学の部分と1冊の指導書数学編が一緒になっていたと考えればよいであろうか。

そこでの指導内容は、「教師の責任を遂行するための手がかりとなる参考資料として考えられた」中学校数学科指導内容一覧表で示され、「生活経験」「理解および能力」「用語」の3つの柱だてで記述されている。[7] そこでの文字や文字式に関する内容を列挙すると、次のようである。（丸番号は生活経験、・は理解および能力の欄の記述）

中学校第2学年

④ 日常生活に現れる量や、その間の関係を文字や式によって表わす。

・文字を用いて、数や量を表わしたり、表わされたものを理解したりする。

⑥ 日常生活に起る問題を、方程式を用いて解く。

・未知の量をxなどの文字を用いて表わす。

中学校第3学年

⑤ 日常生活に用いられる基礎的な公式や等式を知ったり、用いたりする。

・公式の中にある必要な文字を未知数として、その式を解く。

⑦ 自然や社会におけるいろいろな現象を理解するのに、関係概念を用いる。

・関係ある二つの変数について、一つの変数がわずかに変化した場合に、他の変数は、だいたい前者に比例して変化することを知り、これを用いる。

この一覧表に続く「指導内容の説明」では、次のように具体的に述べられている。

「§1．数　II．分数」の箇所では、「生徒が理解すべきことは、文字でかかれた分数についても、普通の分数と同じ原理で計算できることである。こうして、数という表現の世界から、文字を用いた変数という表現の世界へと、生徒の理解を高めていくことが、中学校での仕事である。」という記述がある。また、「§4．比および数量関係　II．数量関係」のところでは、「変量や変数の考えを、はっきりとりあげて指導するのは、中学2年からの仕事」ではあるが、その素地として中学1年では、次のことを理解するように指導する必要があるとしている。

「（1）時刻や時間によって変る量は、時刻や時間に対応させて時間の流れの順序に比較していくときに、しだいに増加するとか減少するとかいうことばが用いられること。

（2）物の代価・仕事の量など、日常に必要となる数量の値が、どんな要素によって決まるかを理解すること。

（3）和の形になる量は、各項が決まれば決まる。また、積の形になる量は、各因数が決まれば決まること。」

「§6．代数的表現」のところでは、「文字の表わす意味」として次のことをあげている。

「(1) 式中の文字は、問題になっている量、数あるいは式などを一般的に表わしたもので、問題の条件の許す範囲で、どんな数値でもとりうる。
(2) 文字は、普通の数と同じように取り扱って、計算の対象とすることができる。
(3) 異なる文字は、異なる対象を表わす。」

「数量の関係を表わす式についての指導」の箇所では、文字を用いて関係を表すことの利点の一つとして、次のことをあげている。

「・式の中の、ある一つの文字を未知数と考え、他の文字を既知数と考えると、公式は一つの方程式とみられる。したがって、それを解けば、未知数と考えた量を表わす公式が作れる。
・式中の文字や項を一つの変数とみると、公式は、それらの変数の間の対応の関係を示したものとみることができる。」

以上みてきたように、ここでの記述は、方程式での文字は未知数と明示し、文字を変数としてみる見方は代数的表現および関数との関連として位置づけられている。また、変域の言葉そのものは使われていないが、文字の表す意味のところでの「問題の条件の許す範囲で、どんな数値でもとりうる」という記述の中に、変域への着目をわずかに読み取ることができる。また、「異なる文字は異なる対象を表す」という文字使用上の約束が明示されている点が特色である。現在の指導に比べると、指導の時期が全般的に1，2年程後退していることは、よくいわれている通りである。

この生活単元学習の学習指導要領が発表されると同時に、それを改正するための研究が各種研究団体によって進められた。そこでの意見を井上義夫氏は次の7点にまとめている。[8]

① 小学校で、小数・分数の四則の仕上げをすること
② 小学校の図形教材を充実させること
③ 中学校で、文字の導入の時期を早め、式計算を充実させること
④ 小・中を通じて、関数教材を充実させること
⑤ 中学校に2次方程式を
⑥ 中学校で、初等幾何を
⑦ 高校の必修としての関数教材の充実…微積分の初歩を必修の内容に…

④については、「関数的な見方の扱いは、主として、比例・反比例までの範囲に止まっていた。これに対して、変数と変数との間の対応という考えをもっと強く打ち出し、取り扱う関数の範囲も、より広くしようという方向で、研究が進められた。」という。既に教育現場では、関数指導において対応の概念が強調され、変数の扱いも着目され強調されていたのである。

昭和33 (1958) 年版

いわゆる系統学習の学習指導要領は、それ以降の指導要領の内容の記述のスタイルに近いものになっている。

第1学年の式の内容の (1) の小項目として、次のことがあげられている。

「ア 式の中の文字は、数の代りの記号であること。
イ 式の中の文字に、数値を代入して式の値を求めること。」

その扱いの程度については、文部省指導書[9]で、「第1学年では、任意の数、定数としての文字の取扱にじゅうぶん慣れるよう指導されなければならない。変数としての考え方や見方は第1学年では、しだいに伸ばしていくが、そのねらいの内容を重点的に取り扱うのは第2学年

においてである。」と述べている。

文字は第2学年で本格的に指導された。その内容の表現には当時の文字に対する考え方がよく現れているので、以下にそのまま引用する。

「(1) 文字および文字を用いた式の意味の理解を深め、数量の間の関係を表現する能力をいっそう伸ばす。

ア　文字で表わされた式を一つの数とみること。

イ　式の中の文字を変数としてみること。

ウ　等式の中のある文字を未知数としてみること。

エ　未知数として一つの文字を用いて、数量の間の関係を方程式に表わすこと。

オ　未知数として二つの文字を用いると、数量の間の関係が方程式に表わしやすくなること。

カ　式が表わす関係は、用いる文字にはかかわりなく、式の形のみに依存すること。

キ　文字を用いて数量の間の関係を表わしたとき、文字のとりうる値の範囲に制約のあること。」

方程式の中の文字を未知数と明示し、用語としても「未知数」をあげている。また、キでは変域に対する配慮も明確に述べている。文字の取り扱いについての基本的な考え方が箇条書き的に明示されたということができる。

なお、第2学年の数量関係では、「必要に応じて、公式の中のある文字を変数、他の文字を定数とみなして、比例関係や一次の関係を見いだすことができるようにする。」と記述されており、用語として「変数」「定数」があげられている。これについては、例えば S＝1/2ａｈ のような公式において、Ｓとｈを変数、ａを定数とみると、Ｓはｈに比例するとみられるようにすることが例示されている。このことに関する当時の議論として、「生徒にとっては、一つの公式の中で、文字を変数や定数とみて、どの一般の比例関係になっているかを見いだすことは、容易なことではない」ということがいわれたという。[10]

また、この時期のこととして、植竹恒男は、昭和35年の高等学校学習指導要領の改訂を受けた教科書作りに当たって、「変数も『ある集合の元を表わす文字』というような考えかたで定義したかったが、高等学校の学習内容だけではあまりにも積み上げが足りなかった。やはり小学校や中学校から『その気になって』素地を作ってくる必要があった。」と述べている。[11] それに先立つ昭和29年頃には高等学校の教科書編集にあたって変数の定義が問題になり、「ある文字がいろいろな数を表わすと考えられるときその文字を変数という」という定義になったとも述べている。生徒の学習状況と数学的な定義との協調が探られていたということができるであろう。

昭和44 (1969) 年版

いわゆる現代化の学習指導要領では、中学校第1学年で、集合の要素間の対応として関数が定義されている。その記述は次の通りである。

「二つの集合について、その要素の間の対応関係を考え、関数についての理解を深める。

ア　変数と変域の意味。　　　　イ　関数の意味。」

この変数や変域の扱いに関連して、文部省指導書[12]では、「集合の要素は数だけに限らないから、変数は必ずしも数だけをとりうるものでないことに注意しなければならない。」「関数のとる値の変化の様子を考察するときは、変数のとりうる要素の範囲が明確であることが前提で

あり、ここに変域について理解させる必要がある。」と述べている。

数・式についての内容の解説では、「従前の学習指導要領では、第1学年で『式の中の文字は、数の代わりの記号であること』が示されていたが、このような式の中の文字の意味については今回は特に明示してはいない。これは文字の使い方をさらに広くしよう、という考え方からでているものである。」と述べて、その立場を明確にしている。また、小学校で指導される□や△、aやxなどの文字について、「それらの記号が単に特定の数を表わす記号としてだけでなく、ある範囲の数をいろいろにとりうる記号である見方をしだいにさせている」と述べており、小学校の段階からそれらを変数的にとらえるような指導が行われることへの期待を明言している。

方程式や不等式に現れる文字xについては、「未知数という考えでなく、ある集合の数をいろいろとりうるという見方をさせる」と述べている。また、第2学年での2元1次方程式に関連して、「二つの文字を未知数としてみるのでなく、変数とみて、それぞれの変域が明確になっていれば、それぞれの数値を代入して、等式の真偽を判断することができる。」とし、方程式と不等式を解の集合を決めるための条件として統合的にみるようにしている。

このように、変数、変域、関数について、集合を前面に出した定義や取り扱いが明示されている点で、そして、第2学年では関数記号fが、第3学年では定義域や値域、逆関数が取り上げられた点で、極めて数学的であったことが特徴である。変数は必ずしも数だけをとりうるものでないことを明示しているのは、このときだけである。

昭和52（1977）年版

いわゆる基礎・基本の学習指導要領では、変数、変域はそれまでと同様に第1学年で扱われているが、集合の要素間の対応としての関数の定義は第3学年での扱いになっている。

変数の扱いの程度について、文部省指導書[13]では、第1学年では「具体的な事象における変化の考察の場面で、変量としてとらえる」、第3学年での集合の要素間の一意対応として関数を理解させる場面では「変数はその集合の任意の要素を表すもの」としてその意味を明確にすると述べられている。また、第3学年での定義域と値域については、「それらを集合としてとらえることによってその意味が一層明確になる」としている。

集合の要素間の対応としての関数の定義が第3学年の扱いに後退したわけであるが、その理由として、国家名とその首都名との対応などのように、それほど意味のないものを取り上げ過ぎたという指導上の問題とともに、集合批判に代表されるマスコミ等の論調の影響が考えられる。もっとも、変数を「集合の任意の要素を表すもの」とする扱いが指導書に明示されていることは、上に述べた通りである。

平成元（1989）年版

現行の学習指導要領では、変数、変域は第1学年の用語・記号の欄に示され、また、第3学年の定義域、値域の用語は削除されている。文部省指導書[14]では「事象における変化の考察において、伴って変わる二つの数量についての変化や対応の仕方に着目することを通して、変数についての理解を深めるとともに、その変数がとり得る値の範囲を明確にすることも大切である。」と書かれ、集合としての扱いは前面にはみられなくなった。第3学年での集合の要素間の対応としての関数の定義についても、みられない。

数学教育の現代化によってもたらされた、集合をベースにして思考の対象を明確にするという主張は、変数、変域、関数の定義については、2回の改訂を経て消滅したと位置付けること

ができるであろう。

（3）教科書の記述の検討

ここでは、教科書の記述によって、変数や変域の扱いの変遷について検討する。

戦後の中学校数学科の教科書を検討するに先立って、1930年代の高等小学校での扱いについてみておく。平林一栄が指摘するように、「わが国の現在の中学校の性格を歴史的にとらえようとすれば、初等教育の上段階と考えられた『高等小学校』と、中等教育の下段階であった旧制の『中学校、高等女学校』の低学年の部分をかえりみる必要がある。」[15] 吉田稔も、高等小学校の教育への着目の必要性を主張している。[16]

1937（昭和12）年～1939（昭和14）年の『高等小学算術書』[17] によれば、方程式中の文字について、第1学年のII代数式［代数的解方1］のところで、

「x×（1＋0.03）＝100 ヤ x＋（x－1.4）＝8.6 ノヤウナ，未知数ヲ含ム等式ヲ方程式トイヒ，方程式ヲ用ヒテ問題ヲ解クコトヲ代数的解方トイフ.」

第2学年の教師用書では、

「方程式ヲ満足セシムル未知数ノ値ヲ，ソノ方程式ノ根トイフコトヲ教フベシ.」

と述べている。また、関数については、第3学年のIII代数式［函数］のところで、

「一般ニ甲ノ数ト乙ノ数トノ間ニ或関係ガアッテ，甲ノ数ガ変化スレバ乙ノ数モ変化シ，甲ノ数ガ定マレバ乙ノ数モ定マル場合ニ，乙ノ数ハ甲ノ数ノ函数デアルトイフ.」

として定義している。

以上のように、方程式の解は未知数と明示し、関数の定義は変化と対応の観点を盛り込んで行われるが、変数や変域への着目についての特別な記述はみられない。

続いて以下、戦後の中学校数学科における変数や変域の扱いについて、1つの出版社が発行した教科書[18] をほぼ10年間隔で取り上げ、そこでの記述を順に概観する。なお、変数概念を基盤として定義される関数の定義についても、必要に応じてみておくことにする。

1950年代

ここで取り上げた昭和33年度版の教科書は、昭和26年（1951）の学習指導要領（試案）のもとでのものである。

文字式を計算することは第2学年で扱われた。第2学年の「方程式」では、

「式にふくまれている文字に、ある特別な値を代入したときだけ両辺が等しくなるような等式を方程式という。そして、その文字を未知数、その特別な値を根という。」

「方程式を解くには、未知数xをふくんだ項を左辺に、…」

第3学年では、

「連立方程式は未知数が2つあってどうして解いていいかわからない。未知数が1つだけの方程式になおせるなら、つごうがいい。」

というように、1元1次方程式、連立2元1次方程式の解を「未知数」として明確に位置付けている。

第2学年の「比例と反比例」では、式y＝ax（aは一定の値）について、「この一定の値aを、比例定数という」とあるが、定数そのものの定義は3学年を通じて与えられていない。

第3学年の「座標とグラフ」では双曲線が扱われるが、「この放物線は第3、第4象限にないのはなぜか」という問いに、わずかに変域への着目がみられる。また、章末の「研究－問題

と式とグラフー」では、問題に述べられていることを式やグラフに表した場合、「問題の意味より広くなっている場合がある」ことについて、注意を促している。これら2カ所だけが変域についての内容を暗示させるものである。

以上述べたように、この時期の記述は、変数の用語は勿論、変域に関する内容についてもほとんど触れていないということができる。また、未知数という用語を前面に出して方程式の解を扱っている点が特徴的である。

1960年代

ここで取り上げた昭和41年度版の教科書は、昭和33年（1958）の学習指導要領のもとでの最初の38年度版に続くものである。

第1学年で比例・反比例が取り上げられ、第2学年の「式の値の変化とグラフ」では、1次関数の学習の冒頭で、次のように変数を定義する。

「式ｙ＝0.5ｘ＋3　のｘやｙのように、いろいろな値をとることのできる文字を変数といい、0.5や3，または円周率πのようにきまった数、または、きまった数を表わす文字を定数という。」

なお、これに続く1次関数の定義は、次の通りである。

「二つの変数ｘ，ｙがあって、ｙがｘの一次式で表わされるとき、つまり、ｙ＝ａｘ＋ｂ（ａ，ｂは定数、ａ≠0）という関係があるとき、ｙはｘの一次関数（一次函数）であるという。」

変域の用語は3学年を通じて使われないが、第3学年の「関数とグラフ」では、「変数ｘの値」という表現とともに、それは「不等式を使って、0＜ｘ＜180と書き表わすことができる」という記述がみえる。なお、その直前では、関数を次のように定義している。

「二つの変数ｘ，ｙがあって、ｘの値がきまると、それに対応してｙの値もきまるとき、ｙはｘの関数（函数）であるという。」

以上述べたように、この時期の記述は、変数、1次関数、関数それぞれの定義は今日使われているものとほぼ同様に行われているが、変域の用語はみられない。

1970年代

ここで取り上げた昭和50年度版の教科書は、昭和44年（1969）の学習指導要領のもとでの最初の47年度版の1/4改訂版である。

まず第1学年の「方程式・不等式」の初めに、次のように変数、変域を定義している。

「ある集合Ａのどの要素をも表すことのできる文字として、たとえば、ｘを使うとき、ｘを変数といい、集合Ａを、ｘの変域という。」

2章後の「関数」では、関数を定義した後、次のように変数について述べている。

「式ｙ＝2ｘ－4やｙ＝kxで、文字ｘ，ｙはいろいろな値をとることができるから変数である。しかし、式ｙ＝2ｘ－4の2，－4や、式ｙ＝kxのkの値は一定で変わらない。このように、2，－4のような数、およびkのように、一定の数を表すとみられる文字を、変数に対して定数という。」

なお、これに先立って述べられている関数の定義は、次の通りである。

「二つの集合Ｘ，Ｙがあって、Ｘのどの要素ｘに対しても、Ｙの要素ｙがただ一つだけ対応するとき、その対応をＸからＹへの関数という。また、このとき、『ｙはｘの関数である。』ともいう。」

第2学年の「一次関数」では関数記号fが対応の規則として取り上げられ、第3学年では、

「関数 f：x→y において、xの変域を関数fの定義域といい、定義域の各要素xに対応して定まるyの集合を、関数fの値域という。」

として定義域、値域の用語が取り上げられた。

以上述べたように、この時期の記述は、関数の学習に先立つ方程式・不等式に関連して、変数、変域が扱われ、その定義は集合を前面に出した表現になっている点、また、関数の定義も集合の要素間の対応として数学的な記述が取られている点で極めて特徴的である。数学教育の現代化の精神が十分に表れている。

1980年代

ここで取り上げた昭和59年度版の教科書は、昭和52年（1977）の学習指導要領のもと、全面改訂された56年度版の1/4改訂版である。

第1学年の「文字と式」での式の値に続いて、次のように変数、変域を定義する。

「この場合のaのように、いろいろな値をとり得る文字を変数といい、変数のとり得る値の集合をその変数の変域という。」

なお、相前後して示される関数の定義は次の通りである。

「変数x，yがあって、xの値を決めると、それに対応してyの値がただ1つ決まるとき、yはxの関数であるという。」

また、第3学年の「関数」では、対応による関数の定義が次のようになされる。

「ともなって変わる2つの変数x，yの変域をそれぞれX，Yとする。このとき、xのどの値にも、yの値がそれぞれただ1つ対応するならば、その対応をXからYへの関数という。」

変域については集合として明確に定義している。関数の定義については、第1学年では「yはxの関数である」という述語的な定義、第3学年では中学校での関数の学習のまとめという意味で、集合は全面に出さずに「対応」によって定義しており、苦労の跡がうかがえる。

なお、この教科書に続く昭和62年度版での変数の定義は「いろいろな値をとることのできる文字」、変域は「xのとりうる値の範囲」となっていて、それは関数のところで取り上げられている。現代化時代の扱いがじりじりと後退していくように読み取れるであろう。

1990年代

ここでは、平成5年度版の中学校数学科教科書6点[19]すべてについて検討する。各教科書での記述は、次の通りであり、その定義はいずれも関数のところで取り上げられている。

- 「上の式y＝4xで、文字xは1，2，3などの値をとる。このxのように、いろいろな値をとる文字を変数という。文字yも変数である。／変数のとる値の範囲を、その変数の変域という。」
- 「x分後の水の深さをycmとすると、x，yはいろいろな値をとる。このx，yのように、いろいろな値をとる文字を変数という。／このように、変数には、それがとりうる値の範囲がある。その範囲を、その変数の変域という。」
- 「このx，yのように、いろいろな値をとる文字を変数という。／変数xのとりうる値の範囲を、変数の変域という。」
- 「上の例のxのように、いろいろな値をとることができる文字を変数という。文字yも変数である。変数のとることのできる値の範囲を、その変数の変域という。」

- 「問3のx，yのように、いろいろな値をとることができる文字を変数という。／このように、変数のとる値の範囲を、その変数の変域という。」
- 「このように、いろいろな値をとることのできる文字xを変数といい、変数xのとりうる値の集合を変数xの変域という。」

変数の定義は、「いろいろな値をとる（とることができる）文字」として、ほぼ統一されてきている。また、変域の定義は、「変数（x）のとりうる（とることのできる）値の範囲」が5点で、「変数xのとりうる値の集合」が1点ある。

このように、現在使用されている中学校数学の教科書では、変数や変域の定義は、ほぼ統一されたものになっているといえるであろうが、集合の処遇がどのように議論されたのかは明らかではない。

以上みてきたことから、戦後の中学校数学科での指導について、次のようにまとめることができるであろう。

1950年代から変数や変域についての着目は徐々に現れてはいたが、数学教育の現代化の時代に、関数の扱いとともに、集合の概念に基づいてそれらの定義が明確に行われ扱われた。その後は集合に基づいた定義は徐々に後退したが、変数や変域への着目は当然のこととして学習内容に位置付けられているということができる。また、方程式での文字の意味については、現代化時代の前は未知数、現代化のときは変数、その後は未知数と変数との折衷的な扱いということができるであろう。

3　変数の扱いに関する問題点の検討

ここでは、中学校数学科での学習指導における、変数の扱いに関連した文字指導上の問題点について、次の項目ごとに検討する。

（1）文字の使い方
（2）文字の働き
（3）変域の定義、変数の扱い
（4）子どもの文字のとらえ方
（5）「ことばの式」と「文字の式」
（6）「□や○を使った式」と「文字の式」

各項では、学習内容やその解釈、および子どもの理解の様相に関することを中心に、具体的な意見を引用しながら記述する。なお、（5）（6）については、「ことばの式」や「□や○を使った式」が初めて扱われるのは小学校算数科であるので、そこでの実践に基づいた子どもの理解の様相も合わせて検討する。

（1）文字の使い方

文字の使い方は、未知数、任意定数、変数と分けて考えることが多い。既にみたように、数学の歴史においても、この順に発展してきた。

この未知数、任意定数、変数という文字の使い方は、数学教育の場でどのように位置付けられてきたのであろうか。これについて菊池乙夫は、1903年、1934年、1962年のそれぞれに発行された3種の翻訳書・教科書の内容を検討することを通して、「歴史の経過は文字の概念づ

くりや文字の導入における指導の進化というよりは、場合分けの細分化と切り離しに過ぎなかったのではないかとさえ思われる。（中略）文字使用の分類と切り離しは、子どもたちの認識にとってなんらのプラスにならなかったばかりか、教師の潜在意識に深くコビリついたまま文字指導の研究に停滞をもたらすという結果にもなったのである。」と言い切っている。[20] なお、遠山啓は、この3つの意味に加えて「いつまでもそこにとどまるものではなく、より高い段階に進むと、それは空虚な場所という意味を帯びてくる」といっており、[21] 村山貞雄もその考えによっている。[22]

そもそも未知数、任意定数、変数という使い分けは、それを解釈する者や、文字が使われる文脈によっている。例えば「ここでの文字の使い方は未知数である」というように、固定的な解釈をする必要はない。三輪辰郎も「文字の表す未知の定数、一般の数、変数の区別は、文字がそういう3つの面をもっていることを注意しているのであって、ある場合はそのどれか1つに限るというように、固定的に考えてはならないのである。つまり、文字において、われわれは、必要に応じて、自由にそれをみていってよいことを忘れてはならないのである。」[23] と述べている。

現代化以前においては、方程式における文字は「未知数」と明言されていたが、現代化の時代はそれまでと違って、方程式と不等式を命題関数として統一的にとらえ、方程式・不等式の解を求めることはその真理集合を求めることと位置付けられた。「方程式を解くということは『わからないｘの値を求めること』ではなく、『ｘにいろいろな値をあてはめたとき、方程式を真にする値を求めること』である」[24] と考えられたのである。この見方は、それ以降現在まで、後退したものの、方程式の解に対して未知数という用語を全面に出した取り扱いはあまりみられなくなった。その理由として、解いて求めたｘの値が解であるかどうかの検算や、ｘの変域が｛１，２，３，４，５｝のときの解を求める場合等にみられる、方程式のｘにその数値を代入するという活動の中に、文字ｘはいろいろな値を取り得るという見方が必要になるという点があげられるからであろう。

筆者は、1次方程式にしろ2次方程式にしろ、文字に数値を代入してそれが解であるかどうかを確かめるという学習活動を重視し、方程式の解を広く変数的に取り扱っていくことが好ましいと考えている。小学校での指導において、ｘについての等式を作りそのｘを未知数とみて逆算によってｘの値を求めることが行われている現在、仮に中学校1年生がａやｘを未知数ととらえる傾向がみられたとしても、小学校から中学校へと学校段階が変わることに合わせて、文字を変数的にみていくように仕向けていくことはそう無理なことではないであろう。ここで、変数的というのは、方程式の中の文字ｘはいろいろな値を取り得るという程度の見方をさしている。

中学校第2学年の2元1次方程式の学習においては、第1学年で学習した1元1次方程式の解が1つであったことの影響からか、生徒は、その解が無数に存在することを理解するのにかなりの抵抗を示す。1次方程式の学習の段階から、代入して解かどうかを確かめることやそこでの文字の使われ方に着目することを重視すれば、そのような抵抗も多少軽くなるものと考える。続く不等式の学習によって、このことの理解が一層深まっていく。

また、比例の関係はｙ＝ａｘという式で表されるが、この式でｘ，ｙは変数、ａは任意定数と説明される。この任意定数ａも変数的にとらえれば、そのグラフが原点を通る直線束であるような関数が得られる。

このように、未知数的な使い方や任意定数的な使い方の文字も、変数的に扱うことを考慮に入れることによって、そこでの学習が豊かなものになるであろう。

（2）文字の働き

中学校第2学年の連立方程式の指導において、次のような場面に出会う。

1つの2元1次方程式、例えば $3x+y=10$ の解は、無数にある。x，y の変域をともに自然数の集合に制限したとしても、解は3つある。この学習に対する生徒の抵抗は大きいだけに、例えば、これらを座標平面上にプロットしてそれが一直線上に並ぶことを示し、無数にあることを直観的にとらえさせたりもする。

ところが、続く授業では、連立2元1次方程式、例えば、

$$\begin{cases} 3x+y=10 & \cdots① \\ x+2y=5 & \cdots② \end{cases}$$

が取り上げられ、これは加減法で、①× 2 −②を計算して、$5x=15$, $x=3$ とする解法が扱われる。

前の時間には2元1次方程式①の解は無数にあることを学習したのであるから、x，y の値は動くのではないか、そのx，y について①× 2 −②を計算することなどできるのかと考える生徒もいる。いうまでもなく、代入法なり加減法による解法は、連立方程式の解が1組存在する場合の方法であるから、解を $(x, y)=(x_0, y_0)$ としたとき、x_0，y_0 について関係式①，②が成り立ち、その固定した x_0，y_0 について代入法や加減法が適用できる。つまり、$3x+y=10$ のx，y は、変数としての意味が強調されたり、ある解を表すものとして固定して処理されたりする。

上に取り上げたことは、加藤国雄が「数の代わりに文字を用いるときは、文字の値の不確定性（可変性）が前提となっているし、文字を用いて式を作る場合には文字の値の同一性（不変性）が前提となっていて、しかも、この2つの側面は独立に現れるのでなく、同時に起こってくる。」[25] と述べていることに対応する。また、菊池乙夫や森川幾太郎、長谷川弥が、文字の役割として「数の空席記号としての文字の性格」と「数の代表記号としての性格」をあげていることに対応するし、牧野金太郎、石井友行が「何でも入れることのできる空部屋、空き缶」と「ひとまとめにする働き（結集作用）、缶詰」をあげ、井上哲良が「空箱」と「袋」あげていることに対応する。[26]

加藤はまた、その指導に言及し、「今行われている文字の指導は、可変性だけを重視し、不変性を殆ど無視し」ているともいう。[27]

中学校数学科での指導においては、いろいろな値をとることができるという文字のもつ特性は、代入計算や文字を変数として扱うことによって理解され、対象をひとまとめにして表すことができるという文字の特性は、計算での式変形の中に埋没してしまいがちである。指導者の側では、変数としてみたり固定したりという文字の扱いの違いを意識して指導に当たる必要がある。

（3）変域の定義、変数の扱い

変数の変域の定義については、現代化の時代は集合が全面に出ていたが、近年の中学校教科書では「文字xのとりうる（とることのできる）値の範囲」という表現にまとまりつつあるこ

とは、既に述べた通りである。

中学校数学科での学習指導における変域の定義について、筆者は、以下に述べるような理由によって、「文字xのとりうる（とることのできる）値の集合」という、集合を前面に出した表現が的確ではないかと考えている。

中学校第3学年での、あるいは第1学年での関数の学習において、具体的な関数の例として、郵便物の重さと料金の関係のような階段関数や、場合によっては、均一バスに乗車したときの距離と料金の関係のような定数値関数が取り扱われる。そこでのyの変域は、連続した区間として現れるのではなく、離散的になる。ふつう、「範囲」という言葉の中には、区間という響きがあるように思われる。例えば、整数の集合から整数の集合への対応の場合、子どもはそれを「範囲」という言葉でとらえることができるのであろうか。

現代化の時期には「集合」の扱いに対する風当たりが強かったために、「集合の任意の要素を表す記号を変数といい、その集合をその変数の変域という」との明確な定義は、たいした議論もなく後退してしまったのではないかと思われる。

変域の定義については、堂々と、上に述べたように集合の用語を使って定義することが、概念を明確にする上でも適切なことと考える。なお、長妻克亘は文字の導入に関連して、「集合ということをわざわざ持ち出すより、いろいろな大きさの量のはいりうる場所として素直に文字を導入した方が、立式にも簡単に結びつくし、いろいろなものがはいりうるという文字本来の役割を知らせることにもむすびつく」[28]との理由から、変数や変域を扱うのに何も集合を持ち出すことはないと述べている。

次に、変数の扱いについてであるが、その定義は、近年教科書でまとまりつつある「いろいろな値をとりうる（とることのできる）文字」という表現でよいと考える。数の代わりに限定される感じが強すぎるようでもあるが、この定義で、現在の中学校・高等学校での学習は足りるであろうと考える。

この変数の定義に関連して、亀谷俊司は、記号xを、次の(i)あるいは(ii)のように用いるとき、これを変数と名づけるとしている。[29]

(i) 必要に応じ、任意に元を表わさせ、その必要が去れば、もとの記号に戻すという使い方

(ii) 必要に応じ、元を表わす記号に置きかえ、必要が去れば、また、もとの記号に戻し替えるという使い方

そして、「変数に対して、一定の元を表わす記号を定数ということがある。」と続け、さらに、変数および定数と同じような記号の使い方として、名詞および代名詞の例をあげ、次のようにこれらを特徴づけている。「固有名詞は、特定の元を表わす記号（広義の）すなわち定数として、普通名詞は、しばしば或る範囲の任意の元を値にとりうる変数として用いられる。また代名詞は、変数の働らきをしていることになる。」

同じように、文字の変数としての働きを明らかにするために、Wagnerは、文字記号と数字との異同、文字記号とことばとの異同について対比して検討している。[30] そして、文脈が違えば違ったものを意味するという点で文字はことばと似ているが、1つの文脈を通して同じものを示さねばならないという点ではことばと異なっていることを認識させることが重要であると主張している。また、Hartらの研究でも報告されている実態と同様、数字で示されている文脈において文字を使い始めるときには、アルファベット順と数の順序との間には何の関係もないことにふれておくべきであると注意を促している。このようなアルファベット順と数の順序

との混同は、日本の子どもにはあまりみられないと思われるが、1つの文脈の中で使われた文字m, nを「連続する2数」ととらえている子どもも、わずかではあるがいるようである。

亀谷やWagnerのように、文字の機能を他のものと比較することによって明らかにするという扱いは、学習指導上参考になるであろう。

ところで、この変数と定数との比較に関連して、定数を変数的にみていくことは、学習指導を豊かにするものとして着目されてよい。

教材の変数的な扱いについて、松崎奈岐は、小学校での数量関係の指導に関連して、新しいことを教えるのに、「少し変数を変えてみるとか、全体の数は一定にしておいて、割合を考えるほうの数を変えてみたらどうなるのか」というように扱ったらどうかと述べている。[31]

また、平林一栄・片山一法は、図的表記において変数・定数の区別について検討し、図的表記を数式的表記と比較して、次の相違点があることを指摘している。[32]

「第一に、図的表記では変数・定数は表記的に区別されないということ。

第二に、図的表記の変数の変域は、数的変数とちがって、きわめて多様であるということ。」

そして、実際の指導で、このような「変数・定数の区別や変数の変域の考察だけでなく、変数と定数の読みかえを行うことは十分教育価値のあること」であるという。近年よく報告される「問題の発展的な扱い」についての実践研究も、このような学習指導の1つの例であろう。

文字式の指導の際に限らず、機会をとらえて考察の対象を変数的に扱い、学習指導を豊かにしたいものである。このような活動は、数学的活動そのものである。

(4) 子どもの文字のとらえ方

子どもが文字をどのようにとらえているかについてのまとまった研究は、それほど多くはない。これについては、イギリスでのHartらの研究[33]や、それに基づいた杜威の研究[34]がよく知られている。

Hartらは、子どもの文字の解釈の仕方として、次の6つの種類をあげている。

1. 数値化された文字
2. 使われない文字
3. ものとしての文字
4. 特定の未知の数量としての文字
5. 一般化された数としての文字
6. 変数として使われる文字

また、杜威は、調査に基づいて、日本の子どもは、文字式にある文字を次のように読み取っているという。

1. プレースホルダーとして使われる文字
2. 物として使われる文字
3. 定数として使われる文字
4. 未知数として使われる文字
5. 変数として使われる文字

上にあげられている「ものとしての文字」の使われ方に関連して、Rosnickは、大学生ですら方程式中の文字を具体的な実在を示すラベルとみなす傾向を指摘している。教授1人につき学生6人という関係を、P＝6Sと表してしまうのは、Pは「教授の数」ではなく教授そのも

の、Sは「学生の数」ではなく学生そのものとしてとらえていることによる。[35] これに関する日本の学生の実態については、久米成夫らが報告している。[36]

また、岡本正彦は、身近な生活の中で、どんな文字がどんなところに使われているかを生徒に調べさせたところ、次のようなものが得られたと報告している。[37]

「ことばの代わりとしての文字」　TV, CM, NHK；P（ページ），ℓ（行），H.R
「数の代わりとしての文字」　A・J・Q・K（トランプ），S・M・L（サイズ）等

ラベルとしての文字が身近な生活の中にあることを示している。また、このように身近なものにどのような文字が使われているかを調べさせることは、文字の学習にあたっての動機づけになっていることをも示している。

筆者らは、子どもの文字のとらえ方には次のようなものがあると考えている。[38]

a．数をおく場所、入れる入れ物
b．意味のない記号、物
c．わからない数の代わり
d．ある意味をもつ言葉の代わり
e．特定の１つの数の代わり
f．任意の１つの数の代わり
g．いろいろな数の代わり

これに関する子どもの理解の様相については、いずれ報告したい。

(5)「ことばの式」と「文字の式」

中学校第１学年の文字式の指導の冒頭では、ふつう次のように文字式が導かれる。

「１本50円の鉛筆を何本か買うときの代金は、次の式で求めることができる。

50×（鉛筆の本数）　（円）

上の式で、（鉛筆の本数）の代わりに文字aを使うと、代金を求める式は、次のようになる。

50×a　（円）

本数（本）	代金（円）
1	50×1
2	50×2
3	50×3
4	50×4
⋮	⋮

上の式で、文字aは、鉛筆の本数を表す数１，２，３，４，…のすべてを表している。」

ここでは、代金を求める文字式50×aは、「ことばの式」50×（鉛筆の本数）を置き換えたものとして示される。また、上の引用文の右側に書かれた具体的な数値による本数と代金との関係をひとまとめにして、50×aと表すことも示しているものと読み取れる。

このような指導は以前から重視されている。野村武衛は「我々はまず、『言葉を文字におきかえる』ことになれさせねばならない。（中略）一方、『□のところを文字におきかえる』ことにもなれさせる必要がある。」といい、言葉や□を文字に置き換えるのは、「文字には必ず具体的な意味をもたせるということにほかならない」と述べている。[39]

このことに関して森川幾太郎は、「文字を使う一番の目的は一般的に現象が表現できることにあります。しかし、現在のようにことばの式でことばを文字におきかえるという指導でこのことが生徒に伝えられるのでしょうか。」と疑問を投げかける。[40]

このような相反する意見が存在することからも、子どもは「ことばの式」をどのようにとら

えているのかが問題になる。子どもは「ことばの式」を変数的にとらえているのであろうか、あるいは単一の数値についての式としてとらえているのであろうか。

小学校での「ことばの式」の指導は、一応、変数的な扱いであるといわれている。平林一栄は、「公式が1つの数学的表記として一般性を表わしうるのは、変数を利用しているからである。たとえば、いわゆる『ことばの式』では『ことば』が変数であり、低学年では○や□、高学年さらに中学以上では、アルファベットが変数である。」と述べている。[41]

ただし、このことは数学的な解釈であって、子どもの理解の様相は異なるものかもしれない。授業時の観察や子どもの答案なりに基づいて、実証的に検討する必要があろう。

なお、佐久間真司は、学年が進んでいくにつれて、「(持っていたお金)－(つかったお金)＝(のこり)のような具体的なことばの式から、(全体)－(部分)＝(部分)のように抽象されたことばの式に変っていく」とし、「ことばの式」にも抽象度の違いがあることを指摘している。[42]

「ことばの式」についての中学生の実態として、筆者らは、ことばを文字に置き換えることに関連する次のことを指摘している。[43]「奇数と奇数との和は偶数である」ことの証明で、「奇数をｎとすると、ｎ＋ｎ＝２ｎだから」という解答がある。このように解答した生徒は、「奇数」という漢字の代わりに「ｎ」という文字を使ったに過ぎないようである。「奇数と奇数の和」を「ｎ＋ｎ」としたのは、２つの同じ奇数の和を表したものか、あるいは、２つの異なる奇数を表すものという意味でいろいろな値を取り得るｎとｎで表したものであろう。さらに、式「ｎ＋ｎ＝２ｎ」で、右辺の２ｎは、左辺のｎ＋ｎを計算した結果として２ｎになったものか、奇数をｎ、偶数を２ｎとして命題の文章そのものを文字を使って表現しただけのものなのかは、不明である。

また、何回かの授業研究での観察の結果、ある命題が成り立つことを説明する際に、生徒は「ことばの式」による説明をよく行うが、「ことばの式」による説明と文字式による説明とを同等にとらえている生徒がいること、「ことばの式」による説明の方が文字式より具体的でわかりやすいとする生徒がいることを報告している。

このような実態からすると、子どもが文字式を学習しそれを使っていくことのよさを理解することは、学習を進めていく上で大きな意味をもっている。小学校での指導においては、文字式がもつよさは簡潔性・明確性に求めることが多いようであるが、文字式が計算という操作の対象となる中学校の指導においては、文字式の操作性というよさを強調することが重要であると考える。例えば$2\pi r$という文字式は、半径rの円の周の長さを求めた結果を表すとともに、$2\times\pi\times r$という操作そのものを表しており、また、$2\pi(r+1)=2\pi r+2\pi$のように、$2\pi r$が操作の対象になっている。さらにまた、(代金)＝(単価)×(個数)、(道のり)＝(速さ)×(時間)、(水の量)＝(１分間にたまる水の量)×(時間)などのような日常的な関係を、使う文字の自由性によって$c=ab$と表すならば、個々の関係を離れて考察を進めていくことができるというよさにも着目させることができる。

子どもは「ことばの式」をどのようにとらえているのかを、文字式との関連から実証的に明らかにする必要がある。

(6)「□や○を使った式」と「文字の式」

□や○を使った式を文字使用の前段階に位置付け、いわゆる place holder としての文字の

働きを理解させることは、小学校で扱われる。実際、小学校第３学年では□、第４学年では２種の□や○が、第５学年で文字ａやｘが導入される。

そのねらいについて、中島健三は、□、△のような記号の使用について、「はじめからａやｘを用いるよりは、きめられた範囲の数を入れる場所、すなわち、place holderとしての見方を伸ばすのに役立つと考えられる」と述べ、□などを使用する場合には、「３＋５＝□というような、きまった１つの答えを書くところとしての用い方だけに限定されないよう」注意を促している。[44]

この扱いについて、加藤国雄は「一見矛盾するこれら２つの側面（筆者注：先に引用した可変性と不変性のこと）をどのように両立させるかということが指導法の工夫を要するところになる。従来示されているような、記号□の代わりに文字ｘを用いるというような安易な考え方では解決できない問題である。」と指摘している。いろいろな値をとるという文字の特性だけが取り上げられて、文字がplace holderとしての□の代わりに使われることに対する批判である。[45]

一方、小松真一郎は、高等学校１年生に文字使用のセンスを育成するには、まず「未知数□の代わりに文字ｘを使っても大丈夫だ（同じだ）という安心感をじっくり醸成する」ことが必要であるという。[46] 高校生にとっても、文字ｘより記号□の方が慣れ親しんだものということであろうか。

以上のような様々な立場の意見があるものの、子どもが□や○をどのように理解していくのかについてのまとまった研究はあまりみられないようである。

文字の前段階として□や○の記号が導入される小学校算数科での指導については、当然のことながら、その指導上の問題点に関して、以下に示すように様々な議論がなされている。[47]

田口孝雄は、第５学年での文字式についての指導における児童の困難点として、次の４点を挙げているが、それは小学校での子どもの□や○についての理解に関連している。[48]

- ５×□というようなphrase型の式表示を一つの数量の大きさを表す式として認識することが難しい。
- □や○あるいは文字を使って式に表す必要感に乏しく、それを使うよさが理解されない。
- □や○を数をあてはめる場所（place-holder）として考えているが、それを未知数としてみたり、変数としてみたりする見方が十分でない。
- より具体的な数値を求める傾向にあり、□や○、文字を使うことへの抵抗がある。特に、文字を具体的な数値の代表としてみることへのとまどいが強い。

そこで、田口は「文字ｘは、そこに何かをあてはめればよいという考えより、ｘは任意の数を代表しているものであるという見方をまず扱い、文字のはたらき（数量をひとまとめにして表せる）を理解」させる指導を提案している。その授業実施後の研究討議で、中島健三は「□にしましても、低学年での使い方の出発点は、変数的な見方ではないですよね。ですから、最初に未知数として扱ってきた□を、次に、ある範囲の数を表す□として見る見方を育ててきたわけです。それが基盤となってｘへのきりかえがあるわけですね。」と発言している。□から文字ｘへの切り替えの前段階として、□がある範囲の数を表すこと、つまり、ある数の範囲という変域の意識とともに、□を変数的にみることの指導の大切さの指摘である。なお、ここでいう変数的な見方というのは、□にはいろいろな値をあてはめることができるという程度のことをさしているのであろう。

小林克重は、□の導入にあたって、「すぐに答えを出せるのに面倒なことをする。□を使う必要がないのに何故使わなければならないのか。□を使うとすごくわかりにくい。」という子どもの声を紹介している。それに関する討論の中で、茂呂美恵子は「中学年の段階である程度○や□に関して変数的な見方にも馴れてきて、使いこなせてきた子どもにとっては、文字への移行はスムーズに行くと思います」と述べている。[49] 大変興味ある発言であり、この点に関する実証的研究が望まれよう。

前島定勝は、□についての子どもの理解の様相について、「児童は□についての中になにかあてはまるものと考えている。端的に言うと答を書きこむ空欄と考えている。即ち数としての役割、量をあらわすものとして、この□を意識の上にのせていない」という。[50]

また、□にあてはまる数を求めることに関連して、Herscovics らは、子どもが 2・□＝18 のような問題を解くことができるのは、代数的にではなく算数的に答えを言い当てているためだという。[51] 2×□＝18 と 2×x＝18 とを解くことにおける子どもの意識は異なるものだという指摘である。

また、丸山保は、□や○、文字 a や x についての子どもの理解の様相について、「文字導入の前段階として、□、△、○を扱うことがプラスになるのは変数的な見方や関数的な見方が強化されること」にあるとし、「これらの見方がどの学年で、どの程度育っているかをみること」によって、それがプラスになっているかどうかを調べている。その中で、同じ記号や同じ文字は同じ文字を表すということの理解が□や a によって違いがみられるかを小 3 から中 3 までの 7 学年を対象に調査し、□＋□＝12 では 7 学年ともほぼ 50 %強の子どもが□に同じ数があてはまると考えており、a＋a＝16 については小 6 から中 3 ではそれより 10〜20 %程多い 60〜70 %の子どもが a に同じ数があてはまると考えていることを明らかにしている。そして、「小学校で□、△、○をまず扱い、それを文字に切り換えていくことは妥当と考えられる」と結んでいる。「何かしら前段階的なものが必要であろう」ということから、「日本の文字であるア、イ、ウ等を□、△、○などの代わりに用いることも考えられよう」とも述べている。[52]

丸山保がここで取り上げた□＋□＝12 についての子どもの混乱について、高松初恵は「3 年までの子どもにとって、□は答えを書く場所、数字を書く場所と考える傾向が強い。そういう子どもにとって、$\boxed{9}$＋$\boxed{3}$＝12 と考えても間違いだとはいえないのではないか。」と主張している。[53]

このことに関連した子どもの理解の様相について、藤井斉亮は小学校第 6 学年、中学校第 2 学年の各 14 名を対象とするインタビュー調査によって、1 つの文脈での「文字には任意の数が当てはまる」と考えるレベルから「同じ文字は同じ数を表す」と考えるレベルへの移行は比較的容易であるが、さらに「同じ文字は同じ数を表す」かつ「違う文字であっても同じ数を表すことがある」と考えるレベルへの移行は困難であることを見いだしている。[54]

1 つの文脈の中で使われる同じ文字は同じ数を表していることの理解に関連して、筆者らは文字式による論証の場面での次のような中学生の実態を指摘している。[55]

「奇数と奇数との和は偶数である」ことの証明で、次のような解答がある。

整数を n とすると、奇数は 2 n＋1 と表せる。

だから、(2 n＋1)＋(2 n＋1)＝2(2 n＋1)

このように解答した生徒は、文字式を運用して証明しようとする態度がみられるのであるが、ここでの式「(2 n＋1)＋(2 n＋1)」の解釈には、2 通り考えられる。1 つは、この式は、

同じ2奇数の和を表していると考えるもの。もう1つは、この式で、

前半の2n＋1にn＝1を代入すると、2n＋1＝3

後半の2n＋1にn＝3を代入すると、2n＋1＝7

となり、前半の2n＋1と後半の2n＋1の式の値は同じとは限らないから、この式は異なる2奇数の和も表していると考えるものである。後者の解釈による誤答は、「1つの式の中で使われる同じ文字は同じ数を表している」ことがとらえられていないことの表れである。

このような実態および丸山や高松の指摘とを考え合わせると、「□や○を使った式」の指導の段階から、上に述べた文字運用上の規約に通ずるような□や○の使い方を明確にしておく必要があろう。また、小学校低学年からの□や○の使い方にも対する配慮も必要であろう。低学年からの指導に関連して、内藤寛之は、第1学年での数の合成・分解、第2学年での不等号の意味、および13＋□＝30のような加法・減法、第3学年での4×□＝12のような除法という具体的な指導場面をあげ、そこでの数に代わる記号としての□や○に関する指導を検討している。[56]

ところで、中学校での何回かの実験授業を観察した結果によれば、式を利用して問題を解決することをねらいとする場面で、生徒は帰納的な方法によったり「ことばの式」や文字式を運用して問題を解決しようとはするが、「□や△を使った式」を作って思考を進めていこうとする生徒はほとんどみられない。[57] この事実は、「□や△を使った式」は、文字式の学習に先だって、文字はいろいろな値をとることができるという点での理解を助けることにはなっているが、思考を進める段階では有効な手段とはなりえないことを物語っているといえるであろう。「□や△を使った式」は、計算するというような操作性の点からすると、文字式よりはるかに劣っていることは明らかである。このような特徴を生徒は直感的に把握しているのであろうか。これに関連して、清水辰次郎は「□や△に数を代入して計算するという考えは自然であるが、一つの数として扱うという上の主張のときには□や△よりむしろ文字x，y，又はイ、ロ、ハ等の方がすぐれているように思われる。」と述べている。[58]

子どもの「□や○を使った式」の理解のしかたを実証的に明らかにする必要がある。

Ⅲ 今後の課題

本稿では、子どもの文字や文字式についての理解に関する研究の一環として、主に中学校数学科での変数の扱いについて、学習指導要領や教科書、および実践研究に関する文献に基づいて検討した。参考にした文献が多くの実践報告の1部であることは十分承知しているが、一応の問題点のまとめをすることができたと考えている。今後さらに広く実践報告にあたり、考察を深めていく必要がある。

また、変数についての理解をも含んだ、子どもの文字や文字式についての理解に関する今後の課題として、次のことがあげられる。

筆者らは、子どもの「文字や文字式についての理解」を「文字認知」と「文字式による論証についての理解」の両者からなるものと規定し、それぞれについての子どもの理解の様相を追究しているが、その両者に変数についての理解が関連している。

子どもの「文字認知」、および「文字式による論証についての理解」の様相について、一層明確にする必要がある。また、中学校数学科での学習指導において、「変数がわかった」とはどのような観点から規定されるのかを明らかにする。

さらに、「ことばの式」や「□や○を使った式」についての小学生の認知発達の様相を、授業研究等を通して明らかにする必要がある。

なお、本稿をまとめるに当たり、次の諸氏には的確な助言等をいただいた。ここに深く謝意を表したい。

小関熙純（群馬大学教育学部）、小高博（東京都千代田区立九段中学校）
熊倉啓之（筑波大学附属駒場中・高等学校）、鈴木裕（東京都江戸川区立東葛西中学校）
川村雄司（静岡大学教育学研究科院生）、成田由美（静岡県賀茂郡南伊豆町立三浜中学校）

＝引用・参考文献＝

1）ア、国宗進・熊倉啓之他「文字式による論証の理解に関する研究」『第25回数学教育論文発表会論文集』1992
イ、熊倉啓之・国宗進他「文字式による論証－論証と変数－」『日本数学教育学会誌第75巻7号』pp. 10-18, 1993
2）D. ブルア著、佐々木力・古川安共訳『数学の社会学』培風館 pp. 152-156, 1985
3）ア、ボイヤー著、加賀美鐵雄・浦野由有訳『数学の歴史』第2巻，第3巻 朝倉書店，1984
イ、中村幸四郎『数学史－形成の立場から－』共立出版，1981
ウ、小倉金之助補訳『カジョリ初等数学史 上下』共立出版，1970
4）平岡忠「関数概念の指導」赤攝也編著『算数・数学教育の理論と構造』学習研究社 pp. 262-263, 1980
5）佐藤良一郎「関数教材の扱いについて-1-」『算数数学の研究』大日本図書 pp. 1-3, 1971
6）佐藤良一郎「関数教材の扱いについて-2-」『算数数学の研究』大日本図書 pp. 1-3, 1971
7）文部省『中学校高等学校学習指導要領数学科編（試案）』大日本図書 1951
8）井上義夫「戦後における算数・数学教育変遷の跡をたどって、関数教材の扱いについて-11-」『算数数学の研究』大日本図書 pp. 1-4, 1972, 8・9月号
9）文部省『中学校指導書数学』明治図書 pp. 40-44, 1959
10）大野清四郎「算数・数学教材の歴史的展望、関数教材の推移－昭和33年～42年まで－-16-」『算数数学の研究』大日本図書 pp. 1-3, 1973, 2月号
11）植竹恒男「変数とは何か－現代化の底にあるもの－」『数学教育ゼミ』近代新書 pp. 76-81, 1970
12）文部省『中学校指導書数学編』大阪書籍 pp. 66-79, 1970
13）文部省『中学校指導書数学編』大日本図書 pp. 60-76, 1978
14）文部省『中学校指導書数学編』大阪書籍 pp. 97-116, 1989
15）平林一栄監修『中学校数学教育の理論と実際』聖文社 pp. 9-10, 1984
16）吉田稔「中学校数学教育再考－旧制中学校と高等小学校の教科書比較を通して－」『筑波大学学校教育部紀要 第14巻』pp. 209-211, 1992
17）文部省『高等小学算術書　教師用』第一学年、第二学年、第三学年，1937, 1938, 1939
18）中学校数学科教科書、大日本図書版
ア、末綱恕一・秋月康夫他 『新編数学』昭和33年度版
イ、秋月康夫・佐藤良一郎他『新版中学校新数学』昭和41年度版

ウ、秋月康夫・佐藤良一郎他『改訂中学校新数学』昭和50年度版
エ、赤摂也・井上義夫他　『改訂中学校数学』昭和59年度版
オ、赤摂也・井上義夫他　『新版中学校数学』昭和62年度版
19）中学校数学科教科書、平成5年度版
岩合一男他『中学数学』大阪書籍
川口廷・一松信・青柳雅計他『中学校数学』学校図書
茂木勇・片桐重男・澤田利夫他『新版中学数学』教育出版
福森信夫・菊池兵一・三輪辰郎他『数学』啓林館
赤摂也・井上義夫他『中学校数学』大日本図書
藤田宏・前原昭二他『新しい数学』東京書籍
20）菊池乙夫「文字と文字式の指導では何を変えなければならないか」『さんすう・すうがく授業の創造No. 9』 教育研究社 pp. 15-25, 1971
21）遠山啓「文字記号とは何か」『教育科学数学教育No. 64』明治図書 pp. 5-14, 1966
22）村山貞雄「文字式指導の現代化」『教育科学数学教育No. 69』明治図書 pp. 43-52, 1966
23）三輪辰郎『新・中学校数学指導実例講座 2 数・式』金子書房 pp. 43-49, 1990
24）内海庄三・玉木和之・岩木敬二郎『中学校数学教育の構造と展開』明治図書 pp. 70-72, 1969
25）加藤国雄「数学の問題解決における思考（その11）－代数的思考について－」『山梨大学学芸学部研究報告第16号』pp. 119-204, 1965
26）ア、菊池乙夫「文字と文字式の指導では何を変えなければならないか」pp. 15-25／森川幾太郎「文字と文字式指導の史的変遷」p. 26／長谷川弥「文字の導入を中心にした文字と文字式の指導」p. 41,『さんすう・すうがく授業の創造No. 9』教育研究社, 1971
イ、牧野金太郎「文字の意味づけを留意した実践」『教育科学数学教育No. 178』明治図書 pp. 5-12, 1975
ウ、石井友行「意味づけを考えた文字の導入」『教育科学数学教育No. 189』明治図書 pp. 47-53, 1976
エ、井上哲良「文字の働きと文字式」『教育科学数学教育No. 189』明治図書 pp. 68-74, 1976
27）加藤国雄「概念と記号について」『数学教育学会研究紀要Vol .17 No. 3・4』pp. 1-2, 1976
28）長妻克亘「量・文字・集合－代数における文字使用の意義－」『教育科学数学教育No. 64』明治図書 pp. 15-23, 1966
29）亀谷俊司『初等解析学』 岩波全書 pp. 1-3, 1953
30）Wagner, Sigrid. “What Are These Things Called Variables? ” Mathematics Teacher (October 1983) pp. 474-479
31）中島健三・松崎奈岐他「数理的にとらえる立場から『数量関係』の意義を見直す」『新しい算数研究 No. 236』東洋館 pp. 2-16, 1990, 11月号
32）平林一栄・片山一法「図的表記の言語性」『数学教育学論究Vol. 17』pp. 1-13, 1969
33）Küchemann, Dietmar. “Algebra” in Hart, K. M. (ed.) “Children’s Understanding of Mathematics 11-16” pp. 102-119, 1981
34）杜威『文字式の学習に関する研究』東洋館出版社 pp. 80-86, 1991

35) Rosnick, Peter. "Some Misconceptions concerning the Concept of Variable" Mathematics Teacher 74 (September 1981) pp. 418-421
36) 久米成夫・松尾吉陽・村上豊・高橋のぞみ「文字の理解に関する一考察－実態調査の結果を中心として－」『学芸大数学教育研究第2号』pp. 27-35, 1990
37) 岡本正彦「文字の導入と概念づくり」『教育科学数学教育No. 207』明治図書 pp. 69-76, 1977
38) 熊倉啓之・国宗進他「文字式の理解に関する研究」『第26回数学教育論文発表会論文集』1993
39) 野村武衛『教師のための数学科』河出書房 pp. 89-97, 1956
40) 森川幾太郎「文字を考える－数列をもっと早期に－」『数学教育学会研究紀要Vol. 21 No. 3・4』pp. 54-58, 1980
41) 平林一栄「式表示についての問題点と指導の要点」川口・中島・中野・原編『算数教育現代化全書 7 式表示』金子書房 pp. 107-115, 1969
42) 佐久間真司「式・公式の指導について」『日本数学教育学会誌算数教育第42巻第4号』pp. 9-11, 1960
43) 小関熙純・国宗進他「中学生の文字認知について」『群馬大学教育実践研究第6号』pp. 45-64, 1989
44) 中島健三「式表示の指導のねらいとその系統的考察」川口・中島・中野・原編『算数教育現代化全書 7 式表示』金子書房 pp .71-83, 1969
45) 加藤国雄「数学の問題解決における思考（その11）－代数的思考について－」『山梨大学学芸学部研究報告第16号』pp. 119-204, 1965
46) 小松真一郎「文字使用のセンスを育成し数学への意欲をそそる工夫－未開発の生徒のために－」『日本数学教育学会誌数学教育第62巻第3号』pp. 16-24, 1980
47) ア、愛甲豊・吹毛井保男・川村四郎・伊東哲郎・入子祐三「低学年における□・xを用いた式の指導」『日本数学教育学会算数教育第44巻12号』pp. 11-15, 1962
イ、福田薫・桑原哲郎・樋口善男・川本一郎・時沢巌「式が表わす数量の関係を、□○△でとらえさせる指導」『同学会誌第49巻8号』pp. 22-24, 1967
ウ、三輪辰郎・久保田長生・小岸重夫・小宮尚英・長尾徳人・山田純功・山田滋夫・吉竹勝「式表示指導上の一考察－□, △を用いた式の指導－」『同学会誌第53巻12号』pp. 11-14, 1971
エ、鏡石昌「□, △を変数を表わす記号と見させる指導についての考察－3年－」『同学会誌第54巻12号』pp. 7-10, 1972
オ、西崎道喜「学習意欲を育てるための算数教育－□や△を用いた式の指導－」『同学会誌第56巻8号』pp. 11-13, 1974
カ、松崎百合子「式表示を中心に筋道を立てて考える力を伸ばす指導法－第3学年□と○を使った式を通して－」『同学会誌第61巻12号』pp. 17-19, 1979
48) 田口孝雄「今月の指導5年 文字と式」『新しい算数研究No. 222』東洋館 pp. 53-58, 1989
49) 小林克重・杉岡司馬他「○, □や文字を用いた式は何のために指導するか」『新しい算数研究No. 259』東洋館 pp. 53-58, 1992
50) 前島定勝「式の指導系統について」『日本数学教育学会誌算数教育第42巻第8号』pp. 14-

16, 1960
51) Herscovics, Nicolas, and Kieran, Carolyn. "Constructing Meaning for the Concept of Equation" Mathematics Teacher (November 1980) pp. 572-580
52) 丸山保「□、△などの記号を扱うことの是非について－実態調査を中心として－」『日本数学教育学会誌算数教育第60巻第6号』pp. 6-9, 1978
53) 高松初恵「変数の理解にみられる子どもの行動について－誤答の分析を中心にして－」『数字教育研究』第 2 号、上越教育大学数字教室 pp. 85-96, 1987
54) 藤井斉亮「児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査」『日本数学教育学会誌数学教育学論究Vol. 58』pp. 3-27, 1992
55) 小関熙純・国宗進他「中学生の文字認知について」『群馬大学教育実践研究第 6 号』pp. 45-64, 1989
56) 内藤寛之「数に代わる記号・文字を用いた式の指導」『日本数学教育学会誌算数教育第71巻第10号』pp. 21-26, 1989
57) ア、中西知真紀・鈴木裕・小高博他「文字式による論証（第 3 次報告）－授業を通しての検討－」『日本数学教育学会誌数学教育第74巻第11号』pp. 2-12, 1992
イ、国宗進・鈴木裕他「文字式による論証の指導について」『静岡大学教育学部研究報告（教科教育篇）第24号』pp. 81-110, 1992
ウ、小高博「帰納的な説明から演繹的な証明へ」『教育科学数学教育No. 432』明治図書 pp. 47-54, 1993
58) 清水辰次郎「小学校における応用問題の指導（その二）」『日本数学教育学会誌算数教育第42巻第 8 号』pp. 12-22, 1960