中１での文字式による論証の指導

A Study on Teaching about Demonstration by Means of Letter Formulas in Seventh Grade

国宗　進・鈴木　裕*・小高　博**
Susumu KUNIMUNE, Yutaka SUZUKI and Hiroshi ODAKA

（平成６年10月11日受理）

I　研究の目的

本稿は、中学校で行われる文字式を使った証明についての学習指導に関するものである。

中学校数学科での文字式についての指導内容は、次の５つに分けて考えることができる。

(1)　数量または数量の関係を文字式によって表現すること（以下「表現」という）

(2)　文字式を計算すること（以下「計算」という）

(3)　文字式の表す内容を読み取ること（以下「読式」という）

(4)　文字式をいろいろな場面で利用すること

(5)　文字や文字式の意味を理解すること

この中の(4)の内容については、さまざまな場面での利用が考えられるが、それは２つの指導場面、「文字式による論証」と「方程式や関数の場面での利用」に大きく分けられる。ここで前者は、中２や中３での学習指導において、文字式による証明の問題等について式により思考を進めていく場面を指している。

筆者らはグループを組んでこれらについての研究を行っているが、現時点では、子どもの文字や文字式についての理解の様相を、次のＡ，Ｂ２つの方向からとらえている。

Ａ．文字認知

Ｂ．文字式による論証についての理解

Ａに関しては、上記(1)の「表現」，(2)の「計算」，(3)の「読式」についての能力と(5)に関連する「変数」についての理解度との両面から[1)]検討し、また、Ｂに関しては、(4)に関連する「論証能力」と「論証のもつ一般性についての理解」との両面から[2)]検討しているところである。

その研究の一環として、本稿では、(4)の「文字式による論証」についての理解の様相にスポットを当てる。とはいっても、文字式を使って証明する場合、まず対象となっている数量を文字式によって表現し、それを計算し、その結果の意味するところを読み取ることになるから、「文字式による論証」についての内容を検討するには、それと密接に関連する(1)，(2)，(3)について

＊東京都江戸川区東葛西中学校　　＊＊東京都千代田区九段中学校

の内容も十分視野に入れて考察しなければならない。

さて、「文字式による論証」については既に、授業時の観察、ペーパーテストや面接による調査、授業研究等を通して、生徒の理解の様相を分析・検討し、それに関する認知発達の段階を設定して、その実態を明らかにしてきた[3]。特に中２、中３については、望ましい授業のあり方について実験授業を通して実証的に検討してきた[4]。

現在の多くの授業実践においては、中２、中３では、文字式を使って証明すること、およびそうすることの意義が、指導内容の中に位置付けられていると考えられる。このことは、中学校数学科の各教科書に「式の利用」という項が用意されていることからも明らかであろう。ひと通り文字式の計算に関する学習を終えたところで、それを問題解決のための道具として使い、文字や文字式を学習することの意義を実感する内容として、また生徒の主体的な思考活動が行われ、学習意欲を喚起することになるという点からも、その価値が認められている内容として位置付けることができる。それにもかかわらず、中学生の「文字式による論証」についての理解度は、外国においても同様の結果が報告されている[5]のであるが、驚くほど低い[6]。

中２、中３の生徒が「式の利用」についての内容を理解するのに大きな抵抗を示すという現状を考えると、それを打開する方策を検討することは、実践上の大きな課題である。そのための具体的な方策としては、生徒の理解の様相を明らかにすることを通して、中２や中３での学習指導のあり方を吟味することは当然であるが、それに先立つ中１での学習指導の中に、あることがらが成り立つ理由を文字を使って証明するということに関する内容を明確に位置付ける必要があるのではないかと考えられる。

以上のような問題意識のもとに、本稿では次のことを目的とする。

中学校第１学年での「文字式による論証」に関する学習指導のあり方について、授業研究を通して実証的に検討する。

II　研究の方法

本研究では、授業を通して生徒の文字や文字式についての理解度をとらえるという立場に立っている。授業を重視する理由については、既に述べてある[7]。授業でその理解度をとらえるために、次の方法によって資料を得て、それを事後に分析する。

① 対象生徒一人ひとりが文字式による論証能力に関する発達段階のどこにとどまっているのかを、事前調査を通してとらえておく。
② 生徒が問題を解決する際の考え方をワークシート（以下ＷＳと略記する）に書かせる。
③ 事前調査に基づいて観察生徒を決め、それらの生徒について、授業観察者がＷＳの記述の仕方、つぶやきや近くの生徒との意見交換の状況等を克明に記録する。
④ 授業の状況をビデオに収録する。
⑤ 一連の授業終了直後に，それらの授業についての感想を書かせる。
⑥ 観察生徒や授業中に興味ある言動をした生徒を対象に面接を行う。
⑦ 授業実施２週間後と５か月後に事後調査を行う。
　なお、授業実施５か月後の時点で、対象生徒は「１次方程式」は学習済みであるが、「関数」については未習であった。

このような授業での生徒の課題解決時の考え方の分析に基づいて、中１での「文字式による

論証」に関する学習指導のあり方について考察する。

Ⅲ　研究の内容

1．実験授業実施の背景

筆者らは、子どもの文字や文字式についての理解度をとらえるための研究の枠組みを構成することと並行して、特にここ数年実験授業を行ってきたが、その結果について分析・検討を重ねるほど、小学校での□、○や文字式の学習指導について、また、中学校３年間の学習指導を見通した文字式の学習指導について検討する必要性を強く実感する。

特に文字式による論証の場面では、中２、中３の生徒であってもなかなか文字式を使おうとしないし、使おうというアイディアさえも浮かばないことはこれまでにも指摘してきた。その理由としてはいくつかの要因が考えられるが、そのうち、特に、

- 数の場合はわかるが、文字を使うとなると数量を表現できない
- 帰納的な説明で十分であると考え、文字式を使った証明の必要性を理解していない
- 文字や文字式、およびそれを使った証明が一般性を有することを理解していない

という点について、筆者らは、中１の時点からこれらを解消するための意図的な指導が必要であると考える。

ところで、現在使用されている中１の各数学教科書[8)]の記述を調べてみると、そのほとんどが、文字式についての章の本文の記述は式を計算することで終わっている。そして、わずかに章末の問題や「考えてみよう」と称される問題解決の課題として、次のような問題が１，２題取り上げられている程度である。

- カレンダーの数の並び方の中に潜む性質を調べる
- マッチ棒を並べて正三角形あるいは正方形を順につないで作っていくとき、n個の正三角形あるいは正方形を作るのに必要なマッチ棒の数を調べる
- 碁石を正方形状に並べるとき、１辺の碁石がx個のときの碁石の総数を調べる
- 赤道の回りから何ｍかあけて電線をはるときに必要な電線の長さについて調べる

このような問題解決場面では、あることがらが成り立つ理由を文字式を使って証明するという学習活動が行われることが期待されている。だが、そのような活動は、中１でのその後の１次方程式や比例・反比例についての学習では行われないから、文字式の章で取り上げられなければ、それについての学習指導は中２の「式の利用」まで待つことになる。

ここで、「式の利用」に関する指導の変遷を教科書[9)]によって調べてみると、数学教育の現代化以前は、中２で中心的に扱われ、中３では練習問題の１問がこれに関するものであった。続く現代化の時代には、中３でも現在のような記述が見られるようになり、ほぼそのまま現行の教科書へと引き継がれていく。だが、中１については、このような扱いは見られず、現代化の時代の教科書では、逆に文字式の計算ですら１次方程式・不等式の章の中に埋没し、それらの解法の前段階として位置付けられている程度である。

以上のような教科書の記述の推移からすると、中１での「式の利用」に関する指導は、これまでさほど着目されていないと考えられる。その理由は、文字式を利用する場面として、方程式や関数についての学習が想定されているためであろう。言い換えれば、方程式のために文字式の計算を学習するという考え方である。また、あることがらが成り立つ理由を文字式を使っ

て証明するということが、それまでの「計算しなさい」「求めなさい」という問いとは違って、目的に合った式変形が生徒に要求されるから、中１の生徒にとっては難しいという認識があるのかもしれない。

中１でのこの内容に関する実践[10]がないわけではないが、それほど多くは目にしないし、現在のところ、そこでの生徒の理解の様相が明らかになっているとは言いがたい。

そこで今回は、中１の生徒を対象に、文字式を使った説明の特徴を理解させることをねらいとして、２時間連続の実験授業を行うことにした。そして、そこでの生徒の理解の様相をとらえ、あることがらが成り立つ理由を文字式を使って証明することおよびその意義について、中１での学習指導において取り上げることの是非について検討する。

２．各授業の課題とその特徴

２時間の授業に共通なねらいは、次の通りである。

・文字式を使うと、ある性質が成り立つことを一般的に簡潔に説明できることを理解する。
　また、整数に関する性質が成り立つことを、文字式を使って説明しようとする。
　　その際、数量を文字式で表現したり、表現された式の意味を読み取ったりすることを通して、「表現」や「読式」についての能力を高める。

各時間ごとのねらいは、次の通りである。

第１時　いろいろな説明の仕方の特徴と比較することを通して、文字式を使った説明の一般性や簡潔性などに気付く。

第２時　第１時を受けて、課題の解決に当たって積極的に文字式を使って説明し、そうすることの意味について理解する。

各時間の課題は、次の通りである。

第１時の課題

今月のカレンダーは右の通りである。

縦、横３個ずつの数を線で囲んで、わくの中の４隅の数の和を考える。

わくの中の４隅の数の和と中央の数との間には、どんな関係があるだろうか。

10月

日	月	火	水	木	金	土
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

第２時の課題

１，２，３や６，７，８などのように、連続する３つの整数の和は、何の倍数になりますか。

第１時の課題は、身近であるとともに、すべての場合について調べ尽くすという完全帰納法による説明も可能である。また、第２時の課題は，既に数学的な課題であり、完全帰納法による説明が不可能であるため、文字式を使って説明せざるをえないということができる。

３．対象生徒の段階判定

授業を行うにあたって、対象生徒32名の「文字式による論証能力に関する発達段階」の段階判定を行った。その結果は表１の通りである。

各段階は次の通りである。段階判定問題、解答の分類基準、段階判定基準等は文献参照[11]

＜水準０＞…無回答、あるいは、問題文を繰り返していたり説明になっていない。

＜水準Ｉ＞…文字式を使わずに、具体的な数値をあげたり、ことばで説明しようとする。
＜水準II＞…文字式を使うが、不適切な使い方をする。
＜水準III＞…文字式を使って正しく説明する。

表１に示された事前調査の結果からすると、あることがらが成り立つことを証明する場合、今回の授業の対象生徒のほとんどは、文字式を使おうとしないということができる。

表１　対象生徒の段階判定（ｎ＝30）

水準	0	I	II	III	計
人数	6	24	1	1	32

４．各時間の授業についての検討

授業の実際は次の通りである。

日　時　第１時…93年10月２日(土)　第２校時／第２時…同、第３校時
対　象　東京都公立中学校第１学年５組　男子20名、女子12名、計32名
授業者　鈴木 裕
観察者　小高 博、国宗 進、熊倉啓之、川村雄司、山口智子

(1)　第１時の授業

１）授業記録

T_1　はい，こっち見よう。今月のカレンダー。(O.H.P. で提示) 今月のカレンダーのなかの，例えば，こういうふうに縦に３つ，横に３つの数を枠で囲います。いいここまで？　今，緑の印がついている４隅の数，この和を考えます。この４隅の数の和と，赤で書いてある真ん中の数との間には何か関係がないでしょうか，考えてみよう。(ＷＳ配布。ＷＳにはカレンダーが３つ印刷してある。)
　問題について何か質問はありますか。

P_1　（３分ほどＷＳ１に取り組む）

T_2　はい，じゃあ聞いてみます，ある程度こうなんじゃないかなと想像ついた人どのくらいいますか。(手が挙がらない)

T_3　書けてる人もっといるはずなんだけど。じゃあP_2君，ちょっと読んでみて。

P_2　４隅の数の和が真ん中の数の４倍になっている。

T_4　はい，４隅の数の和が真ん中の数の４倍になっているというようなことに気付いた人どのくらいいますか。かなりいますね。それ以外のことに気付いた人。いないのかな。はい。

P_3　（自分のプリントを指しながら）ここと，ここと，ここと，ここの和（右図のｂ＋ｄ＋ｆ＋ｈのこと）が４隅の数の和に等しい。

a	b	c
d	e	f
g	h	i

T_5　ああ，ここで説明しますね。この４つの数ね，４隅の数の和と，ここと，ここと，ここと，ここ，この４つの和が同じになっていることを見つけてくれました。もし時間があったら後でやってみましょう。とりあえず，今これ（真ん中の数ｅ）との関係を聞いたから，こっちだけでいきます。はい，他に。

P_4　まわりの４隅のたした合計と…，あっ，真ん中の数がまわりの４隅の全部の合計と一緒になっている。

T_6　同じじゃないか，同じだよな…。いい？じゃあ，確認してみようか。この場合，4隅の数の和というのは，4＋6＋18＋20（板書しながら）ですね。P_5さん，いくつ。

P_5　48

T_7　真ん中の数12，4倍，48ですね。確かにこれ等しくなっていますね。今はここでやりましたよね，縦に3つ，横に3つ合計9つを囲みましたけど，枠で囲ったのはここの部分でした。他の部分でも今のことがいえるのかな。枠の囲み方はいっぱいあるでしょう。縦3，横3の所，どこでもいえるのかな。では時間をあげますから，どこでもいえるのかよく考えて，ここ［WSの解答欄］にどこでもいえるかいえないか，そしてその下に理由を書いてください。カレンダーはどれを自由に使ってくれてもいいですよ。

（しばらく間をおく）WS 1

T_8　今質問があって，どこでもというと31はどうするんだ。31は，9つを囲もうとすると囲めますか…。囲めないよね，困ったね。ですから，先生が「どこでも」ときいているのは，囲める所はどこでもこの性質がいえますか，そう考えてください。（しばらく間をおく）

T_9　それじゃあちょっときいてみます。どこでもいえると思う人どのくらいいますか。（大部分が挙手）多いですね。どこでもいえるとは限らないという人。1人。はいどうして。

（この生徒は計算間違いであった。このやりとりにP_6～P_8，T_{10}，T_{11}があった。）

T_{12}　ここでもなりますね。今，ほとんどがいえると言った。P_7君は勘違いしていえないと言ったけれども。じゃあ，どこでもいえるのか，ということになる。その理由は。

P_9　計算してできたから。

T_{13}　計算してできたから。ちょっと言ってみて。

P_{10}　他で囲ってみた所が，3＋5＋17＋19＝44

T_{14}　はい，11×4＝44，等しいですね。どこでもいえると…。1，2，3箇所。いいですね，等しいね…。これでいいのかな。はい，P_{11}君は。

P_{11}　枠で囲ったところが，それ以外でも，合計が他の所…あぁ，間違えました。

T_{15}　間違えました？書いてあると思ったけどな。さあどうでしょうか，今，みんなに，どこでも，どこを囲っても，4つの数の和は，真ん中の数の4倍になりますか，どこでもなりますかという質問をしたんだよね。そのときに，みんなの確認したのは，この3箇所は今，実際にやりましたよね。その3箇所やっただけで，どこでもいえると言っていいの？

P_{12}　先生，その計算だけでですか。

T_{16}　そう，この計算やったよね。3箇所みんなで確認したよ，これでもうどこでもいいんだ。いいと思う人。（18名挙手）これではだめだという人。（なし）どっちだと思う…。それでは，先生がこれから言うことはいつでも成り立ちますか。東葛西中は男子校である。なぜならば，A君も男子だし，B君も男子だし，C君も男子だし，D君も男子だし，E君も男子だから。だから，東葛西中にいる生徒はみんな男子です。男子，男子，男子，男子，男子だから，みんな男子だ。なんでいけないの。

P_{13}　女子はどうなるの。

P_{14}　女子も男子？

T_{17}　もう一度言うよ，東葛西中は男子校であるという人がいます。男子，男子，男子，男子，男子，だからみんな男子だ。

P_{15}　みんな男子というのはおかしい，女子もいるから。並んでいる所が違う。

T_{18}　（列を変えて）だって，彼も彼も彼も彼も彼も男子じゃない。

P_{16}　クラスの中に男子と女子の別れた列があってその塊があるから。

T_{19}　だって，東葛西中の中の何人かをとったら，みんな男子だったというんじゃだめなの。

P_{17}　数による。

T_{20}　じゃあ，どのくらい調べればいいの。

P_{18}　全部じゃないですか。

T_{21}　全部調べなきゃいけないんでしょ。じゃあ聞くよ。枠で囲った所，３箇所確認しました。どこでもあの性質がいえると言っていいんですか…。どうですか。いいと思う人どのくらいいますか。はい。何で。P_{19}さん何で。

P_{19}　真ん中の数が奇数のときは，４隅の数が全部奇数で，真ん中の数が偶数のときは，４隅の数が全部偶数になるから，真ん中の数が奇数か偶数かで分けて２種類確認すればよい。

T_{22}　P_{19}さんが今言おうとしていることは，真ん中の数が奇数のときは，４隅の数も全部奇数になる，どこで囲っても。偶数のときは，４隅の数が全部偶数になるということ。だから，奇数の場合と偶数の場合に分けて，両方ともいえればよいということか？　P_{19}さんは，ここから先どのように説明しようとしているの…？　まだそこまでは考えていないか。じゃあ，P_{20}さんは？

P_{20}　横は全部１ずつ増えて，縦は全部７ずつ増えるから，囲む所が違っても４倍になる。

T_{23}　わかった人。５人。今いろんな人がいろんな説明してくれて，焦点がぼけてきていますから，もう１回聞きますよ。みんなは，どういう囲み方しても，どういう所で囲んでも，４隅の数の和は，真ん中の数の４倍だということがいえそうだと判断したんですよね。いい，そこまで？　その理由はと聞かれたときに，とりあえずみんなで３箇所確認しましたよね。３箇所だけの確認で，どこでもいえると言っていいんですか，という質問にはどうですか。いっていいんですか。いいという人。いけないという人。わからない。なるほどね。じゃあ，さっきの東中の例はどうなっちゃったの。

P_{21}　男子とかの場合は，形というか，人数とかは決まっていなくて，カレンダーの方は，縦は７ずつで，横は１ずつで決まっているから，それは男子校の場合とは別だからいえていると思います。

T_{24}　なるほど。ということは，規則性があるからということ。横の増え方，縦の増え方で規則性があるから，いくつか調べればもうそれでいいんだ。なるほどね，どうでしょうか。その規則性のところをうまく説明した人いませんか。さっきP_{20}さんがちょっと言ってくれたね，横は１ずつ，縦は７ずつ，だからいつも４倍になるんだ。みんなわかる。もうちょっと付け加える人いないかな…。じゃあ逆に聞くよ。何で，横に１ずつ，縦に７ずつ増えると，４の数の和が真ん中の数の４倍になるの。P_{20}さん何で。

P_{22}(P_{20})　９個の数が全部７だとしたら，４隅の数をたすと28になるから，だから，7×4で４倍になっている。

T_{25}　全部たせば４倍になりますよね。今そうじゃなくて，１ずつ横増えて，７ずつ縦増えているわけでしょ。

P_{23}　真ん中の数は，右上の数から６だけ大きくて，左上は８だけ大きい，左下は６だけ小さい，右下は８だけ小さい。だから，正負の数の考え方…。

T_{26}　ちょっと待って(P_{23}の考え方を図式化して板書しながら)，正負の数の考え方でいくわけ

ね，左上の数をもとにすると，真ん中の数は8だけ大きい，これ（右上の数）よりは6だけ大きい，これ（左下の数）よりは6だけ小さい，これ（右下の数）よりは8だけ小さい。そうすると…，どうぞ。

$P_{24}(P_{23})$　全部たすと0になる。だから4倍になる。

T_{27}　わかった。わかった人どれだけいる。（7名）増えてきましたね。

（この後，P_{23}の考え方を教師が再度説明し，この授業の流れを整理して終了する。）

2）WS 1の記述の分析

WS 1には、「4隅の数の和が真ん中の数の4倍になる」ということがどこでもいえるかどうかを判断させ、その理由を書かせている。

生徒の判断は、「いえる」が30名（内1名は「いえるんじゃないか」)、「いえない」が1名、白紙が1名であった。

「いえる」とした生徒が書いた理由は、次のように分類できた。

aタイプ…文字を使って正しく説明しているもの　《1名》

bタイプ…カレンダーの数の規則性に注目して説明しようとしたもの　《4名》

b_1…枠ごとずらして考えた説明　（1名）

［例］（筆者注；真ん中が11の場合の確認あり。）

1つとなりにずれた場合として、

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{+1} & \multicolumn{2}{c}{+1} \\ \multicolumn{2}{c}{3\to4} & \multicolumn{2}{c}{5\to6} \\ & \multicolumn{2}{c}{+1} & \\ 10 & \multicolumn{2}{c}{11\to12} & 13 \\ \multicolumn{2}{c}{+1} & \multicolumn{2}{c}{+1} \\ \multicolumn{2}{c}{17\to18} & \multicolumn{2}{c}{19\to20} \end{array}$$

（枠ごとずれる。下図筆者）

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 4 & 5 & & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 & \to & 11 & 12 & 13 \\ 17 & 18 & 19 & & 18 & 19 & 20 \end{array}$$

というわけで、4隅の数がすべて1ずつ大きくなっているから、4隅の数の和は、前より4大きくなっている。

4隅の数の和÷4＝真ん中の数（真ん中が11の場合のことをいっている。）

だから大きくなった分の4つを4で割ると1になる。それを真ん中の数に合わせると考えれば、その関係は保たれる…？　縦にずれた場合は＋7！？

b_2…真ん中の数を基にして、4隅の数に注目している説明　（1名）

［例］どこでやっても、4隅の数は中央の数と同じに変えられるから

b_3…4隅の数を基にして、真ん中の数に注目している説明　（1名）

［例］どの数も縦に7ずつ増えている。真ん中の数は、右上の数からは6だけ大きくて、左上の数からは8だけ大きくて、右下の数からは8だけ小さくて、左下からは6だけ小さい。真ん中と4隅の数は（ここで途切れている。）

b_4…縦横の数の増え方の規則性に着目している説明　（1名）

［例］横は1ずつ増えて、縦は7ずつ増えているから、どこでやっても同じになる。

cタイプ…帰納的に説明しているもの　《11名》

c_1…ことばによる説明　（3名）

［例］・やり方が同じだから、どこでやってみても、4倍になる。

・だいたいの４隅を確かめてみたから（と書いて二重線で消す）

c_2…ことばと具体例による説明　（５名）

［例］計算してできたから（数箇所の例を示す）

c_3…真ん中の数が偶数か奇数かによって、場合分けしようとしているもの　（３名）

［例］４隅の偶数の和は真ん中の偶数の４倍である。奇数も同じ。

ｄタイプ…その他・白紙・意味不明のもの　《14名》

d_1…真ん中の数をａとすると､対角線上の３数の和が3ａになることに気付いているもの　（１名）

d_2…規則性に注目した説明をしようとしているが、不完全なもの　（１名）

［例］順番に並んでいるから

d_3…真ん中の数が偶数か奇数にこだわっているが、説明には至らないもの　（２名）

d_4…何らかの計算をした後は残されているが、理由の欄は白紙であるもの　（７名）

d_5…白紙、意味不明　（３名）

このａ～ｄのタイプ別の人数は、表２の通りである。

表２　「いえる」と判断した生徒のタイプ別人数（ｎ＝30）

タイプ	a	b				c			d					合計
		b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	
人　数		1	1	1	1	3	5	3	1	1	2	7	3	
	1	4				11			14					30

以上から、次のことが指摘できる。

ア、文字式を使って説明した生徒（ａタイプの解答）は１名だけであった。課題の中の数の規則性がつかみにくかったことと、文字式を使った説明を知らない生徒にとって、文字を使うというアイディアが浮かびにくいことがその原因であろう。

このような実態からすると、中１では、最初に教師が文字式を使った説明の仕方を示してその意義を述べることによって、授業を展開することも考えられてよいであろう。

イ、枠ごとずらした説明をした生徒（b_1タイプの解答）は１名だけであるが、面白い着想である。個人指導などを通して大切に指導したい。

ウ、b_2～b_4タイプの説明をした３名は、カレンダーの中の数の規則性に着目しており、文字式を使った説明の仕方やその意義を理解できれば、文字を使って説明できるようになる可能性が高いと考えられる。

エ、帰納的な説明をした生徒（ｃタイプの解答）は11名で、学級全体の1/3に相当する。対象が中１であることを考えると、この説明は自然であろう。これまでの学習経験では、あることがらが成り立つことの理由として、帰納的に認めることはあっても否定することはなかったからである。

このなかで、c_3タイプの説明をした３名は、d_3タイプの説明を試みた２名とともに、事前調査の偶数･奇数についての問題と混同した可能性があると考えられる。（このことは第２時にもあてはまる。）

オ、その他・白紙・意味不明の解答のなかで、d_4タイプの説明をした生徒８名は、帰納的に確

認はしたものの、それで説明になっているかどうかがわからなかったり、どう表現してよいかがわからなかったものと考えられる。

次に、「いえない」とした生徒について検討する。

この生徒が書いた理由は、「(数が) 大きくなると4倍じゃなくって、5倍とかになりそうだから」であった。普段の反応から考えると、直観的に判断したのであろう。この生徒は、授業中に、計算間違えをして4倍にならないところがあったと発言している(P_6, P_7, P_8)。反例が1つ見つかったと思い込み、この直観的な判断が正しいと思いこんだのかもしれない。

判断について「白紙」であった生徒は、何箇所か数値で確認した跡は見られるが、理由の欄には何も書いていない。成り立ちそうだとは思っても、どう表現すればよいかがわからなかったのであろう。

3) 帰納的な説明に対する生徒の反応

この授業では、帰納的な説明を生徒がどのようにとらえるかが大きな意味をもっていた。このことについて、詳しく分析してみる。

WS 1の記述の後、どこでもいえることを確認し、その理由を問うと、それに対する生徒の反応はP_9「計算してできたから」であった。発問T_{13}に促され、発言P_{10}によってさらにもう1例を確認した。

それを受けて、発問T_{16}によって、実際に確認した3例だけで「どこでもいえる」ことの理由としてよいかどうか挙手を求めたところ、「よいと思う」が18人、「よくないと思う」はいなかった。中1であることを考えると、教師はこの反応をある程度予想していた。

そこで、とりあえず帰納的な説明では不十分であることを理解させようとして、T_{16}の後半の説明 (男子校の説明) をした。この後の生徒達とのやりとりからすると、発言P_{18}までは教師の意図した通りの展開のように思われた。

続く発問T_{21}で生徒たちに挙手を求めたときには、教師は、ほとんどの生徒が否定的な反応を示すであろう、あるいは生徒に葛藤が生じることによって、少なくとも肯定的な反応は示さないであろうと考えていた。ところが、教師の予想に反して、生徒達は、自分達の思考の拠り所となっている帰納的な説明を簡単にはあきらめなかった。カレンダーの数の規則性に着目し、それを基にした帰納的な説明ならばよしとする発言P_{20}～P_{24}が相次いだのである。

これは、帰納的な説明が生徒にとって如何に大きな役割を果たしていたかを示している。このような生徒の説明に対するとらえ方を考えると、あることがらが成り立つことを説明するときに演繹的な説明をする必要があるということの指導にあたっては、きめの細かい配慮が必要である。

その際、帰納的な説明と演繹的な説明とが1生徒の中に共存するという、過渡期にあたる時期が存在するものと考えられる。これについては、NO. 13の生徒を例に、後で詳しく述べる。

さて、予想外の反応に接した教師は、ここで帰納的な説明を否定することをあきらめ、文字式を使った演繹的な説明につなぐために、まず、発言P_{23}, P_{24}を基に、カレンダーの数の規則性に着目させようとした。その関係をとらえ、NO. 13の生徒の解答 (aタイプ) を紹介して、文字式を使った説明の仕方やそのよさを感得させようとしたが、実際には、残りの時間が少なく、カレンダーの数の規則性についての理解も不十分なままに、1時間の授業を終えた。(第2時は予定通り、次の課題に進むことにした。)

(2) 第２時の授業

１）授業記録

（１＋２＋３＝６と書き，６＋７＋８＝，15＋16＋17＝，82＋83＋84＝　の各式を板書するごとに生徒を指名してその和を答えさせる。この間に、T_1～T_3，P_1～P_3の応答があった。）

T_4　…何か気がつかない。

P_4　答えが真ん中の数の３倍になる。

T_5　本当？　本当だ。じゃあ最初に書いた式のこの３つの数どういう数？　何か条件ある

P_5　１つずつ増えている。

T_6　１，２，３とか，６，７，８とか書きました。このように続いている３つの数を連続３整数といいますが，こういう３つの続いた整数をたすと，どうも真ん中の数の３倍になりそうですね。ここまでの感じで。はいじゃあ問題，枠の中に，３つの続いた整数をたしたものは，真ん中の数の３倍にいつでもなるかどうかを書いて，その理由を書きなさい。<u>ＷＳ２</u>

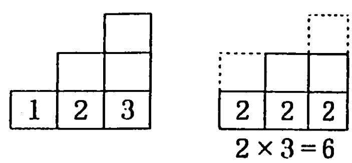
P_6　（各自ＷＳ２に記入）

T_7　（机間指導中に４名を指名し，板書させる）それではそこで手を休めてください。P_7さんから説明してください。

P_7　一応計算して，３倍になるか調べるために，まず一番簡単に１から10までを書いてそれで，連続する３つの整数を下に書いて，たしてみて全部やったら，答えが真ん中の数の３倍になっていた。

T_8　なるほど。10個確かめたんだね。はい。それでは，P_8君。

P_8　こうやって１，２，３ときたら，３の１個を１の方に加えて，平均を出して，その平均の数に３をかけて，これらの個数になる。



T_9　わかった。平均の考え方ね。はい，じゃあ，P_9君。

P_9　８から１とって６に加えると，８は７になって，６も７になって，３×７になる。

T_{10}　で，真ん中の数の３倍。P_8君のと似てるね，同じだよね。それでは，最後P_{10}君。

P_{10}　真ん中の数をａだとすると，一番小さいのがａ－１で，真ん中がａで，一番大きいのがａ＋１で，－１＋１が消えてａ×３になる。

T_{11}　じゃあ，今，P_8君のとP_9さんのは同じような説明ですけど，図になっているか，ことばで説明しているかというだけですが，４人の説明でよくわからないのがあったら手を挙げてください。

P_{11}　P_8君のがわからない。

T_{12}　P_8君のは，１，２，３というのを図で表してくれたの，長さで。それを，ここの３の所の１個をこっちに持ってくると全部平らにならされる，平均されるでしょう。２個ずつ３個あるから２×３ということになる。わかる，だから真ん中の数の３倍ということになる。

P_{12}　わかりました。

T_{13}　いいP_8君，先生の今の説明で。

P_{13}　（P_8）（うなずく）

P_{14}　P_{10}君の意味がわからない。

T_{14}　真ん中の数をａとするんだって，大丈夫そこまで。小さい数は真ん中の数より１小さい

ね，だからａ－１。それと真ん中の数。大きい数は真ん中の数より１大きい，ａ＋１。その３つをたしたの，この式の意味わかる。はい，聞いてみます。みんなはどの説明で答えたか。これ以外の説明した人いますか。

P_{15}　３つの数の，例えば，１＋２＋３で，１と３をたして，３つの数もたして，それから両端の数をひくと真ん中の数になる。

T_{15}　そりゃ，３つたしたのと，両端たしたのでひけば，真ん中が残るよね。先生ちょっとわかんないんだけれど…。（しばらく考える）

T_{16}　頭の中に真ん中の数，何だかわからないというのがある。いつでもということだから，真ん中の数は何だかわからない。だから両端の数の和をひいて，そうすれば真ん中の数が出てくるよという意味か。いい今の先生の解釈で。とすると，真ん中の数がわからないとき両端の数わかる？

P_{16}　小さい方が－１。

T_{17}　－１と＋１にすればいいんだね。ということは，同じようなことどこかにやってない。

P_{17}　P_{10}君。

T_{18}　これが君の頭にはあるんだ。－１と＋１というのが。先生はわかりましたが，みんなはいい，今のP_{15}君の…。それでは聞いてみます。手を挙げてね。P_7さんのやり方でやった人，いろんな場合をいくつか確かめてみて，やっぱり真ん中の数の３倍になっているなという人どのくらいいますか。（５名）次，平均の考え方を図でもって表した人。（１名）式とことばで書いていった人，これは多いですね。（13名）文字を使って書いた人。（１名）

P_{18}　文字の所が８とかじゃいけないんですか。

T_{19}　どうですか。どういうふうにやったわけかな。言ってみて。

P_{19}　（８－１）＋７＋（６＋１）で，７＋７＋７＝７×３

T_{20}　そうすると，頭の中にこっちの考え方とこっちの考えが両方あるんだ。でも真ん中の数を基準にして考えていることには間違えないね。P_{18}のはこっちの方に入れておこうか。

じゃあ，次。みんなの頭で考えたとき，いくつか確かめてみるやり方，平均の考え方をもとにしてことばで，あるいは，図で考えていくやり方，それから，文字を使って説明するやり方。どれが一番素晴らしいやり方だと思いますか。まずこれ[帰納的な説明]（なし)。次，図をかく（なし)。ことばで説明していくやり方（４名)。このやり方［文字式による説明］（多数)。これ１人しかいなかったんだよ，いいのこんなに手を挙げて。なんで。

P_{20}　ａには好きな数が入れられるから。決められていないからどんなときでも対応できる。

T_{21}　じゃあ，さっきのP_{18}のこれとは違うね。例えばだよ，P_{18}のとはちょっと違うけど，こう書いたとき［(７－１)＋７＋(７＋１）と板書］は，どんなときにも対応できるわけじゃないの。これはどんなときなの。連続した３つの整数がどんなとき。具体的にいくつのとき。

P_{21}　６と７と８。

T_{22}　うん，６，７，８のときだけだよね。だけど，これが文字だと好きな数が入りますよね。いろんな数が入りますよね。だからみんなこっちがいいと。他には？

P_{22}　簡単にできるというか，数を決めてないから，そのまま文字ですぐ式を立てられる

T_{23}　なるほど。P_{23}さんどう。

P_{23}　見やすい。

P_{24}　（P_{18}）ことばを使って説明するより，文字を使って説明できる。

（この後T_{24}で，文字式を使うと，その文字にはどんな整数でもあてはまるから，すべての連続３整数の和が真ん中の数の３倍になることが説明できること，あることがらが成り立つことを一般的に簡潔に説明するのに文字式が使われることをまとめる。）

２）ＷＳ２の記述の分析

ＷＳ２には、「連続３整数の和は、真ん中の数の３倍になる」ということがいつでもいえるかどうかを判断させ、その理由を書かせている。

生徒の判断は、「いえる」が30名、「？」が１名、白紙が１名であった。

「いえる」とした生徒が書いた理由は、次のように分類できた。

ａタイプ…文字を使って正しく説明しているもの　《１名》

ｂタイプ…連続３整数の関係に注目して説明しようとしたもの　《15名》

b_1…関数的な見方による説明　（１名）

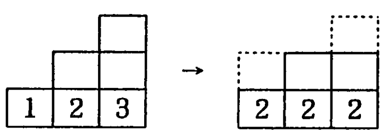
［例］
$$
\begin{array}{l}
1 + 2 + 3 = 6 \\
\downarrow +1 \downarrow +1 \downarrow +1 \qquad +3 \\
2 + 3 + 4 = 9 \\
\downarrow +1 \downarrow +1 \downarrow +1 \qquad +3 \\
3 + 4 + 5 = 12 \\
\downarrow +1 \downarrow +1 \downarrow +1 \qquad +3 \\
4 + 5 + 6 = 15
\end{array}
$$

b_2…平均の考え方を使った、式やことばによる説明　（13名）

［例］左が－１，真ん中が０，右が＋１，右の＋１を左にやったら全部同じ数になる。同じ数が三つになるから、３倍になる。

b_2’…平均の考え方を使った、図による説明　（１名）

［例］



２が３つとなり，
２×３＝６

ｃタイプ…帰納的に説明しているもの　《４名》

c_1…ことばによる説明　（２名）

［例］・例題を見てみると、本当に３倍になっている。だからどれもみんな真ん中の３倍になっていると思います。

・さっきので何の数でもよかったからいいと思います。（と書いて二重線で消す）

c_2…ことばと具体例による説明　（２名）

［例］・計算したら３倍になっていたから。（10箇所の例を示す）

・同じように、ほかの数でやってみたら３倍になった。（数箇所確認の跡がある）

ｄタイプ…その他・白紙・意味不明のもの　《10名》

d_2…規則性に注目した説明をしようとしているが、不完全なもの。　（２名）

［例］順番に並んでいるから。

d_3…３整数のなかの偶数や奇数にこだわるが、説明には至らないもの。　（２名）

［例］・23＋24＋25＝72，72÷24＝3　（と1例で確認をした後）
3つの数の中に必ず奇数が入っているから。
・奇＋偶＋奇 か 偶＋奇＋偶 なら、3つの整数の和は真ん中の3倍になる。
d_5…白紙、意味不明　（6名）
このa～dのタイプ別の人数は、表3の通りである。

表3 「いえる」と判断した生徒のタイプ別人数（n＝30）

タイプ	a	b			c		d			合 計
		b_1	b_2	b_2	c_1	c_2	d_2	d_3	d_5	
		1	13	1	2	2	2	2	6	
人 数	1	15			4		10			30

以上から、次のことが指摘できる。

ア、文字式を使って説明した生徒（aタイプの解答）は1名だけであった。連続3整数の関係はつかみやすいが、それが、文字を使って説明するというアイディアには結びつきにくいことを示している。

イ、関数的な見方をした説明をした生徒（b_1タイプの解答）は1名だけであるが、その考え方は、数学的帰納法にも発展しそうな考え方であり、大切に指導したい。

ウ、平均の考え方を使って説明した生徒（b_1，b_2タイプの解答）が14名いた。学級全体の約半数に相当する。前の数、後ろの数が、それぞれ(真ん中の数)－1，(真ん中の数)＋1という関係になっていることがとらえやすかったことを示している。なお、それを図をかいて説明したのは、わずか1名であった。

エ、帰納的な説明をした生徒（cタイプの解答）は4名と少なかった。ウ、で述べた平均の考え方による説明が増えたことの結果であろうが、帰納的な方法について考えた第1時での学習が生かされたとも考えられる。

オ、その他・白紙・意味不明の解答が10名いた。このうちのd_2，d_3タイプの解答をした計4名は、連続3整数の関係には着目たものの、結論に至るまでの過程を表現できなかったとも考えられる。

次に、「？」とした生徒について検討する。

この生徒は、観察者のメモによると、しばらく考えた上で「いつでもなると思う」と書き、それを全部二重線で消している。そして、理由の欄には「3つの数が1つずつふえていく数であれば、3つの整数の和は真ん中の数の3倍になると思う？」と書いた後、これも全部二重線で消し、その後、「8－1＋7＋6＋1＝7＋7＋7　7×3＝21」と書いている。これは、授業終盤のこの生徒自身の発言P_{18}，P_{19}，P_{24}からも明らかなように、真ん中の数を基準にして平均の考えを使って具体例で示したものと考えられる。

だが、ここまで考えていたとすると、判断の欄を「？」とした理由は何だったのか。1つの具体例だけでは一般性が保証できないと考えていたのであろうか。それが，授業中の「文字の所が8とかじゃいけないんですか」という発言P_{18}につながったとも考えられる。このように考えると、教師の説明や他の生徒の意見を聞いた後の発言P_{24}で、文字を使うよさに自ら気付いていることも納得できる。

ところが，この生徒の事後調査での解答は、文字を使わずに帰納的な説明をしようとしている。２週間で、文字を使うというアイディアを忘れてしまったのであろうか？　文字を使いこなせるようになることがいかに難しいか、改めて思い知らされる。

３）いろいろな説明の特徴の比較

この授業では、帰納的な説明や平均の考え方による説明などの特徴を、生徒がどのようにとらえるかが大きな意味をもっていた。このことについて、詳しく分析してみる。

生徒がＷＳ２に記入している間、教師は机間指導をしながら、特徴ある解答をしていた４名の生徒を指名しその解答を板書させた。その後、その４人の生徒にそれぞれの考え方を説明させた（P_7～P_{10}）。それぞれ、帰納的な方法、平均の考え方を図で表したもの、平均の考え方をことばと式で表したもの、文字式による説明である。

表３に示したように、学級全体では、文字式を使って説明したのは黒板で説明した１名の生徒だけであり、帰納的な方法による説明の生徒が４名、平均の考えを使って説明した生徒が14名である。

これらの考え方の説明やそれに対する質問を経て、教師の「どれが一番すばらしいやり方だと思いますか」という発問T_{20}に対して，ほとんどの生徒が文字式を使った説明を選択し、その理由として、文字や文字式のもつ一般性（P_{20}）、簡便性や明確さ等（P_{22}，P_{21}，P_{22}）、的を得た解答があがった。

しかもここで注目すべきは、第１時で生徒たちが思考の拠り所としていた帰納的な説明を支持する生徒が一人もいなかったことである。その理由として、次のことが考えられる。

- 文字や文字式を使った説明を知らなかったために、自ら説明はできなかったが、説明を受けてそのよさに気付いた。
- 第１時や本時で、苦労して自分なりの説明をしたことや他のいろいろな方法の説明を聞いて、文字式による説明の特徴が浮き彫りになった。

この授業直後、ある生徒が第１時の課題も文字式を使えば説明できることに気付いたと伝えに来た。また、次の授業で第１時の課題を改めて考えさせたところ、文字式による説明をした生徒が増えたこと、また、事前調査では２名であった＜水準Ⅱ＞以上の生徒が事後調査では12名に増えていることからも，この２つの理由はある程度納得できるものであろう。

５．生徒の長期的な変容

今回の授業では、２時間とも、性質を発見しそれを帰納的に確認した後、その性質がいつでもいえるかどうかを判断し、その理由をＷＳに記述している。また、授業の２週間後と約５か月後には、事前調査と同一の問題で事後調査１，２を行っている。

ここでは、それらの記述の分析を通して、今回の２時間の授業において、一人ひとりの生徒が問題を解決するのに文字や文字式を使おうとしたかどうかの変容について検討する。

(1)　学級全体としての変容

学級32名の生徒の文字使用に関して、各ＷＳでの解答のタイプ、および事後調査での解答の水準を分類すると、表４を得る。なお、表４では、事後調査での文字使用の有無についてまず分類してある。また、これ以降の記述では、各生徒に通し番号をつけて生徒NO.１，NO.２，…，

と表すことにする。

なお、WSの解答のタイプ分けは前述の通りであるが、各時間とも、次のように共通な使い方をしている。

a タイプ…文字を使って正しく説明しているもの

b タイプ…課題の中の数の規則性に着目して説明しようとしたもの

c タイプ…帰納的に説明しているもの

d タイプ…その他・白紙・意味不明のもの

表4から、次のことが指摘できる。

ア、事前調査、2回のWS、2回の事後調査のいずれにおいても一貫して文字式を使って説明したのは、NO. 13の生徒1名だけである。中2、中3になってもなかなか文字を活用できない生徒の多いことがわかっているが、今回は特に対象が中1であり、それまでに文字を使って説明するという学習がなかったせいであろうか、ほとんどの生徒は授業で文字式を使って説明しようというアイディアは浮かばなかった。

表4 解答の推移 (n=32)

《事後調査で文字を使用》

NO	事前	第1時	第2時	事後1	事後2
13	Ⅲ	a	a	Ⅲ	Ⅲ
20	Ⅰ	b_2	b_2	Ⅲ	Ⅲ
18	Ⅰ	d_1	b_2	Ⅲ	Ⅲ
10	Ⅰ	d_4	d_3	Ⅲ	Ⅲ
7	Ⅰ	d_4	b_2	Ⅲ	Ⅱ
15	Ⅰ	c_3	d_2	Ⅲ	Ⅱ
12	Ⅰ	d_4	d_5	Ⅲ	欠
31	Ⅱ	b_1	b_2	Ⅱ	Ⅱ
32	Ⅰ	b_4	b_2	Ⅱ	Ⅱ
29	Ⅰ	c_3	b_2	Ⅱ	Ⅱ
23	0	c_1	b_2	Ⅱ	Ⅱ
1	Ⅰ	d_3	b_1	Ⅱ	Ⅱ

《事後調査で文字を使用せず》

NO	事前	第1時	第2時	事後1	事後2
4	Ⅰ	d_5	b_2	Ⅰ	Ⅰ
6	Ⅰ	b_3	b_2	Ⅰ	Ⅰ
9	Ⅰ	c_2	b_2	Ⅰ	Ⅰ
14	Ⅰ	c_2	b_2	Ⅰ	Ⅰ
30	Ⅰ	c_2	b_2	Ⅰ	Ⅰ
28	Ⅰ	c_3	b_2	Ⅰ	Ⅰ
27	Ⅰ	d_4	b_2	Ⅰ	Ⅰ
21	Ⅰ	c_2	d_5	Ⅰ	Ⅰ
11	Ⅰ	d_2	d_2	Ⅰ	Ⅰ
17	Ⅰ	d_3	d_3	Ⅰ	Ⅰ
26	Ⅰ	d_5	d_5	Ⅰ	Ⅰ
19	0	×	c_1	Ⅰ	Ⅰ
8	Ⅰ	c_2	?	Ⅰ	欠
25	Ⅰ	d_4	c_2	Ⅰ	欠
5	Ⅰ	d_4	d_5	欠	Ⅰ
3	Ⅰ	c_1	d_5	0	欠
16	0	c_1	c_1	0	0
24	0	d_4	c_2	0	0
2	0	d_5	白	0	0
22	0	白	d_5	0	0

しかし、事前調査と比べると、事後調査で「論証能力」の水準が上がった生徒は 11 名おり、そのうちの 10 名が<水準II>以上である。なお、事後調査で文字を使った生徒は 12 名である。これは、第 2 時の終盤で、生徒 NO. 13 による文字式を使った説明 P_{10} を聞いてそのよさに気付いた生徒が、その後、積極的に文字式を使って説明しようとしたためであろう。中１であっても、指導によっては<水準 0><水準 I>から<水準II>以上へと水準が上昇することが期待できる。

イ、事後調査 1 と 2 の結果を比較すると、約 5 か月の隔たりがあるにもかかわらず、その結果はほとんど変わらない。一たび文字を使うことの意義を理解した生徒は、文字を使おうという姿勢を崩さなかったということができる。ア、で述べたこととともに、中１でも、ある命題を文字式を使って説明することを指導することの意義が認められよう。

一方では、文字式を使うことの意義を理解できなかった生徒や文字を使いきれなかった生徒が 20 名いて、その後の指導でも水準は上がっていないという実態もある。このような指導を中１で行う場合には、きめ細かな配慮をする必要があることを示している。

ウ、事後調査で文字式を使った生徒（<水準II>以上の生徒）12 名のＷＳの記述を調べてみると、ａ，ｂタイプ、および d_1，d_2 タイプが 10 名いる。このことは、問題解決に当たって、問題の中の数の関係に注目し、その関係をとらえていることが先決であることを示していると考えられる。その後、文字式を使って説明してみようという姿勢のある生徒は、他の説明ではなく、文字式による説明へと進むことができると考えられる。

特に，第 1 時よりも第 2 時の方にこのタイプの解答が多い。その理由は、第 2 時の課題の方が、問題の中の数の関係が把握しやすかったことによるのであろう。したがって、第 1 時で文字式による説明を紹介していれば、第 2 時のＷＳにはａタイプの記述がもっと増えていたと予想できる。

エ、第 2 時のＷＳの記述には、ｃタイプの解答が 4 名しかなかった。これは、ウ、で述べたように、連続 3 整数の関係が把握しやすかったために、文字式を使わなくてもいろいろな説明がしやすかったこととともに、第 1 時で帰納的な説明の不十分さについて議論されたことの結果でもあろう。

(2) 個々の生徒の変容

ここでは，観察生徒や興味深い反応を示した生徒の様相について，個別に述べる。

・生徒 NO. 13

この生徒は、事前調査、2 回のＷＳ、2 回の事後調査のいずれにおいても一貫して文字式を使って説明した生徒である。

ＷＳ１では、性質を帰納的に確認した後文字式を使って説明し，その後、4 隅の数の和を表す式と、その計算結果である中央の数の 4 倍を表す式に中央の数を代入して確認している。ＷＳ２では、帰納的に確認した後、文字式を使って説明し、その後さらに文章で説明し直している。指名されて板書しようとしたときにも、「どのやり方を書けばよいですか？」と逆に問い直していた。

また、この生徒は、第 1 時の帰納的な説明の不十分さを議論しているときの

T_{15}「３箇所やっただけで、どこでも言えるといっていいの？」

P_{12}「先生、その計算だけでですか」

T_{16}「そう、この計算やったよね。3箇所みんなで確認したよ、これでもうどこでもいいんだ。いいと思う人。(18名挙手) …」

という場面で挙手した一人でもある。ここでの考えについて、授業2日後の面接で確認しようとしたが、この生徒自身が忘れてしまっていて確認できなかった。それほど意識がなかったということであろうか。

以上のことを考え合わせてみると、この生徒は、一見安定して文字式を使っているように思われるが、まだ完全には文字式を使って説明することの意義やその方法について理解が深まってはいないものと考えられる。文字式を使って説明することと、帰納的な方法やことばによる説明などをほぼ同一のレベルで認めているようである。この生徒は、今後機会あるごとに文字式による説明の意義やよさを学習していくことによって、その理解をいっそう深めていくものと思われる。

・生徒 NO. 32

この生徒は、文字式による説明の仕方を知るとすぐにその特徴を的確にとらえ、以後文字式を使おうという姿勢が見られるようになった。

授業でのWSにはbタイプの解答を残しており、第1時での発言P_{20}でも、数の関係に着目した説明をしようとしている。このことが前提となって、第2時の終盤で文字式による説明の仕方を知ると、授業後すぐに第1時の課題も文字式によって説明すればよいことに気付き、授業者に確認にきている。

この連続授業がきっかけとなって、大きく変容した生徒の一人である。

・生徒 NO. 18

この生徒は、この連続授業によって文字式による説明を完全にマスターしたと考えられる。WS 1ではd_1タイプの解答している。ただし、対角線上に並ぶ3つの数の和が真ん中の数の3倍になることを使って解決しようとしたために、正答には至らず説明不足の状態であった。

この生徒は、普段の授業の反応からしても、既に文字のもつ一般性には気付いていたと考えれるが、それだけに第2時で文字式による説明の仕方を知ると、それ以後は一貫して積極的に文字式を使って説明できるようになったと考えられる。

・生徒 NO. 1

この生徒は，第2時の終盤で、文字式による説明の一般性についての発言P_{20}をした生徒である。この生徒は、事前調査、2時間のWSのいずれにおいても、文字式を使った形跡は見当たらない。

授業後の面接で、なぜこのような発言をしたのか尋ねてみたところ、この章の導入で碁石を正三角形状に並べる課題を取り扱ったときに、1辺に並ぶ碁石の個数を一般的に文字式を使って表したことを思い出したからという答えが返ってきた。

この生徒は、第2時の終盤に文字式による説明を知るまでは、文字式を使おうというアイディアは全く浮かばなかったが、文字式による説明を聞いたとたんに導入時の記憶につながり、一挙に文字式による説明の一般性に気付いたものと考えられる。2回の事後調査でも文字式による説明をしていることからも、この生徒にとって、第2時の終盤で文字式による説明を知ったことが、大きく変容するきっかけになったことは間違いない。

6. 中1での文字式の学習指導についての示唆

ここでは、以上検討してきたことに基づいて、中学校第１学年での文字や文字式の学習指導、特に「文字式による論証」に関する問題点を考える。

① 中１での指導の可能性

これまでの調査結果によれば、課題解決場面に直面したときに文字式を使おうとした生徒は、中１で６％，中２で35％，中３で60％と学年が上がるにつれて増えていくものの、中１では極端に少ない。このことは、中１で「式の利用」が明確には位置付けられていないという教育の現状からすると当然の結果であろう。だが、文字がいろいろな値をとることや、数量を文字式に表現したり、表現された数量を読みとることについて指導されていても、それが、課題に直面したときに文字式を使うというアイディアにつながらないというのでは、学習の効果も弱いものになる。

今回の実験授業では、事前調査や授業中のＷＳの記述で、文字式を使って説明した生徒は１名であった。それにもかかわらず、第２時の授業の終盤に文字式を使った説明を知った後には、32名のうちの12名（37.5%）が，２回の事後調査で文字式を使おうとした。

これは、カレンダーの中の数や連続３整数に関する具体的な課題解決場面を通して、文字式を使った説明を知ったことが大きく影響した結果であろう。中１に対しても、具体的な場面を通してこのような指導を行っていくことの可能性を示していると考えられる。

また、文字式を使って説明しようとする構えがひとたびできると、それは容易には消えないということができる。

ところが一方、残る20名（67.5%）の生徒は、文字式を使って説明するということがＷＳや調査問題の解答に表れていない。この割合は中２の場合と変わらないのであるが、もし中１で指導するとすると、どのように行うかを十分に検討する必要がある。

② 文字式を使った説明の取り上げ方

中１の生徒にとって、あることがらが成り立つことを説明するのに文字や文字式を使うという学習は、ここが初めてである。それだけに、どのような課題を用意し、どのような方法で指導するかが大きな問題となる。

これまでの中２や中３を対象とした実験授業の結果によれば、文字式による説明に対して、帰納的な説明でよしとする生徒が数多くいること、また、学年が進むにつれて文字式による説明と帰納的な説明以外はあまり見られなくなることが明らかになっている。

では、中１が対象の場合はどうか。

今回の授業では、小学校との関連も踏まえて、いろいろな説明の仕方と対比し討論することを通して、文字式による説明の意義に気付かせていくという方法を取った。実際には、第１時では課題がやや難しかったこともあり、どう説明してよいかわからずに混乱していた生徒が多かった。しかし、第２時では第１時の経験が生かされたのであろうか、帰納的な方法、平均の考え方を図で表したもの、平均の考え方をことばと式で表したもの、文字式を使って説明したものという、４通りの説明がみられた。続いて、それらの方法を比較検討することを通して、文字式を使って説明する方法に収束することができた。

このような生徒の課題解決の際の考え方からすると、中１を対象に文字式による説明の意義を指導する場合には、それと対比し検討する説明の方法として、帰納的な説明だけを取り上げるのは不十分であると考えられる。小学校との関連も踏まえて、いろいろな説明の仕方と対比し検討することを通して、文字式を使って説明すること、およびその意義を知らせていく必要

があろう。

このような指導方法に対して、最初に教師が文字式を使った証明の進め方を示してその意義を述べ、徐々に段階を踏んで、生徒自らが文字式を使って説明するように高めていく授業展開も考えられる。文字式を使って説明するということについての学習の初期だから、まずその方法を示そうという考え方である。今回の2時間の授業で、自ら文字式を使って説明した生徒が1名であったことを考えると、中1では、このような方法も考えられてよいであろう。

どちらがどのように好ましいのか、実証的に検討する必要がある。

③ 帰納的な説明の扱い

今回の授業の第1時でも再確認されたことであるが、生徒は帰納的に考えることに強い信頼を置いている。これは小学校以来の学習において、帰納的に考えることが、あることがらが成り立つかどうかを調べるのに有効であったわけであるから当然のことであり、また、そのような方法を駆使して調べることができるのは大変価値のあることである。

だが、帰納的な方法と文字式を使って説明する方法とが同一のレベルのまま、一人の生徒の中に共存してしまうこともある。つまり、あることがらが成り立つかどうかを調べる方法として、帰納的な方法と文字式による方法の2通りがあって、どちらで説明してもよい、あるいは両方で確かめなければいけないと考えている生徒もいる。

それぞれの方法の特徴を十分に理解させる必要がある。

なお、これとは逆に、あまりに帰納的な方法の限界を強調しすぎると、性質の予想の場面でも帰納的な方法をとってはいけない、文字式を使って考えなければいけないととらえてしまう生徒も、時には出てしまう。注意したい。

④ 指導のねらい

中2、中3での「式の利用」についての学習や、中2から始まる図形の論証についての学習を併せ考えると、中1での指導のねらいに関しては、生徒自らが文字式を使ってきちんとした証明ができることをねらいとするよりもむしろ、文字や文字式を使って説明する方法があることを知り、また、その説明によれば一般性が保証される等、文字式を使うことの有用性を知ることを主なねらいとすれば十分であろう。すなわち、数量を一般的に表現したりあることがらが成り立つことを説明する一方法として、文字や文字式が使われることを徐々に理解していけばよいと考える。

今回の連続授業のねらいは、第1時では文字式を使った説明のもつ一般性や簡潔性などの特徴に気付かせ、第2時では前時を受けて、積極的に文字式を使って説明することであった。しかし、実際には第1時では、課題の中の数の関係の難しさもあって、文字式を使って説明した生徒がいたもののそれを紹介できずに終わっている。第1時で、事前のねらい通り文字式を使った説明のもつ一般性や簡潔性などの特徴に気付かせることができていたならば、第2時では積極的に文字式を使った説明を試みる生徒がもっと増えていたとも考えられる。この点に関する実際については今後の課題にしたい。

⑤ 取り上げる課題

ここで考えているような課題の解決に当たっては、課題に現れる数の関係をとらえることがまず要求される。

第1時のカレンダーの課題は、生徒にとっては身近なものである。したがって、横に1ずつ増えていくことや、縦に7ずつ増えていくことについては、比較的容易に気付いている。しか

し、中央の数を基準とすると、４隅の数のうちの左上の数は－８、右上の数は－６、左下の数は＋６、右下の数は＋８になっているという、４つの数の関係にはなかなか気付かないようである。それは、ＷＳ１にこのことを書いている生徒が２名しかいないことや、その４隅の数の関係を説明した発言P_{23}，P_{24}を聞いて、「わかった」と挙手した生徒が７名だけであったことからもわかる。

これに対して、第２時の連続３整数についての課題は初めから数学の舞台に載っているものであるが、それらの数の関係自体は気付き易いものである。授業でも最初の方で生徒P_5がそれを指摘している。

これらの課題を解決するには、現れる数の関係を見抜き、それらを文字式によって表現する必要がある。この点からすると、第１時では連続３整数についての課題を、第２時ではカレンダーについての課題を取り上げることも考えられる。実証的に検討したい。

ここで、事後調査で文字式を使って説明しようとした12名の授業時の解答を調べてみると、このうちの10名は、文字式を使ってはいないものの、課題の中の数の関係はとらえている。文字式を使って説明するためには、まず課題の中の数の関係をとらえることが要求されるから、取り上げる課題のこの点での適否が、このような授業が成り立つかどうかに大きな影響を与えることになる。

よりねらいにあった課題を用意することについても十分に検討する必要がある。

⑥　目的に合った式変形

今回の授業では文字式を使って説明しようとした生徒が少なかったために、あまり前面に出てこなかったこととして、文字式による表現、目的に合った式変形、式の意味を読み取ることに関する内容がある。

第１時でのカレンダーの課題については、どの数量を文字ａを使って表すかによって、次のような２通りの思考活動が考えられる。

ア）真ん中の数をａとすると、

４隅の数は、$a-8$，$a-6$，$a+6$，$a+8$　と表される。

この和を計算すると$4a$になるから、４隅の数の和は真ん中の数の４倍である。

イ）４隅の数のうちの左上の数をａとすると、

４隅の数は、a，$a+2$，$a+14$，$a+16$　と表される。

この和を計算すると、$4a+32=4(a+8)$

$a+8$は真ん中の数を表しているから、４隅の数の和は真ん中の数の４倍である。

また、第２時の連続３整数の課題については、次の２通りが考えられる。

ア）真ん中の数をａとすると、

連続３整数は、$a-1$，a，$a+1$と表される。

この和を計算すると$3a$になるから、連続３整数の和は真ん中の数の３倍である。

イ）初めの数をａとすると、

連続３整数は、a，$a+1$，$a+2$と表される。

この和を計算すると、$3a+3=3(a+1)$

$a+1$は真ん中の数を表しているから、連続３整数の和は真ん中の数の３倍である。

いずれの課題においても、アのような解答の場合には、数量を文字式で表して、求めるものを計算すると、その式が結論の式になっている。ところがイのような解答の場合には、計算し

た結果の式4a＋32を4（a＋8）のように、また3a＋3を3（a＋1）のように変形し、その式の意味を読み取ることによって、ようやく結論が示されたことになる。

イのような解答をしようとするときには、このように、計算の結果を目的に合ったように式変形することが生徒に要求される。この「目的に合った式変形」という活動は、生徒にとって大変抵抗がある。文字式を決まった方法で簡単にしたり計算したりすることはよく行われるが、ある意図をもって式を変形するという学習経験は、それまでにほとんどなかったからである。また、文字式の学習に続く方程式や関数の学習においても、このような活動はほとんどないために、目的に合った式変形をする能力はいっこうに強化されない。この点から考えると、中2や中3での「式の利用」についての生徒の学習上の抵抗はもっともなことかもしれない。

あることがらが成り立つことを文字式を使って説明するというような場面で、生徒が行うであろう「目的に合った式変形」について、より詳細に検討する必要がある。

なお、例えばカレンダーの課題で、真ん中の数をaとすると、4隅の数はa－8，a－6，a＋6，a＋8と表される、というような「表現」についての能力の育成も重要であることは、言うまでもない。

Ⅳ　今後の課題

本稿では、子どもの文字や文字式についての理解に関する研究の一環として、主に中学校第1学年での「文字式による論証」の学習指導のあり方について、授業研究を通して検討した。そこでの子どもの理解の様相や提示する課題の特質等が明らかになったが、今後さらに実証的に考察を深めていく必要がある。また、「文字式による論証」がもつ中学校数学科での学習指導における意義、およびその位置付けを考察する必要がある。

この中1での「文字式による論証」の学習指導のあり方に関する考察は、それだけにとどまるものではない。中2、中3での「文字式による論証」の学習指導との関連を明確にするとともに、中学校数学科での指導内容全体を見通して、ある命題が成り立つことを証明するということについての学習指導の意義、およびその方法について検討する必要がある。そこでは、図形の論証に関する学習指導を視野に入れることは当然である。

数学嫌い、数学離れが喧伝される今日、中学校数学科での学習指導において、一般的に証明するということをないがしろにした実践報告が見られないわけではない。一例えば、中3であるにもかかわらず、「$\sqrt{4}\sqrt{9}=2\times 3=6=\sqrt{36}=\sqrt{4}\times 9$だから、一般に$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$が成り立つ」というような確認の仕方。定理の証明はいい加減にしてその適用練習に多くの時間を費やす、しかも長さや角の大きさを求めることが中心一このような指導が行われる背景には、生徒の理解度の問題が影を落としていることは十分に予想できる。それでは、中学校数学科での学習指導の目標はなにか。一般的に証明する、系統性を重視するという点を捨ててしまって、何のための数学指導なのであろうかという思いにもなる。このようなことからも、ある命題が成り立つことを証明するということについての学習指導の意義、およびその方法について検討し、それを明確にする必要がある。

また、「文字式による論証」についての理解をも含んだ、子どもの文字や文字式についての理解に関する今後の課題として、次のことがあげられる。

筆者らは、Ⅰでも述べたように、子どもの「文字や文字式についての理解」を「文字認知」

と「文字式による論証についての理解」の両者からなるものと規定し、それぞれについての子どもの理解の様相を追究している。このうちの子どもの「文字認知」の様相については、ある程度明らかになっっているが、「文字式による論証についての理解」の様相については、一層明確にする必要がある。「文字式による論証についての理解」については、現在「論証能力」と「論証のもつ一般的についての理解」との両面から検討しているが、特に後者についての様相を明らかにする。

さらに、中学校数学科での学習指導の前段階として位置付けられる、算数科での「ことばの式」や「□や○を使った式」についての小学生の認知発達の様相を、授業研究を通して明らかにする必要がある。

なお、本稿をまとめるに当たり、次の諸氏には的確な助言等をいただいた。ここに深く謝意を表したい。

小関熙純（群馬大学教育学部）、熊倉啓之（筑波大学附属駒場中・高等学校）

中西知真紀（東京都狛江市立第一中学校）、川村雄司（静岡県浜北市立北部中学校）

＝引用・参考文献＝

1）ア、熊倉啓之・国宗進他「文字式による論証―論証と変数―」『日本数学教育学会誌第 75 巻 7 号』pp. 10-18，1993

イ、熊倉啓之・鈴木裕・国宗進他「文字式による論証―文字認知に関する実態―」『日本数学教育学会誌第 76 巻 7 号』pp. 11-19，1994

2）小高博・国宗進他「文字式による論証についての理解に関する研究」『第 27 回数学教育論文発表会論文集』pp. 161-166，1994

3）ア、小関熙純・国宗進他「中学生の文字認知について」『群馬大学教育実践研究第 6 号』pp. 45-64，1989

イ、国宗進「文字式による論証」『静岡大学教育学部研究報告（教科教育篇）第 22 号』pp. 55-70，1990

4）ア、中西知真紀・鈴木裕他「文字式による論証―授業を通しての検討―」『日本数学教育学会誌第 74 巻 11 号』pp. 2-12，1992

イ、国宗進「文字式の指導について」『静岡大学教育学部研究報告（教科教育篇）第 23 号』pp. 31-50，1991

ウ、国宗進・鈴木裕他「文字式による論証の指導について」『静岡大学教育学部研究報告（教科教育篇）第 24 号』pp. 81-110，1992

エ、小高博「帰納的な説明から演繹的な証明へ」『教育科学数学教育 No. 432』明治図書 pp. 47-54，1993

5）Kieran, Carolyn. “The Learning and Teaching of School Algebra” in Douglas A. Grouws (ed.) “Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning” A Project of the National Council of Teachers of Mathematics, Macmillan Publishing Company, 1992

6）3）に同じ

7）4）イ、p. 42

8）中学校数学科教科書、平成 5 年度版

ア、岩合一男他『中学数学』大阪書籍
イ、川口廷・一松信・青柳雅計他『中学校数学』学校図書
ウ、茂木勇・片桐重男・澤田利夫他『新版中学数学』教育出版
エ、福森信夫・菊池兵一・三輪辰郎他『数学』啓林館
オ、赤摂也・井上義夫他『中学校数学』大日本図書
カ、藤田宏・前原昭二他『新しい数学』東京書籍
9）中学校数学科教科書、大日本図書版
ア、末綱恕一・秋月康夫他　『新編数学』昭和 33 年度版
イ、秋月康夫・佐藤良一郎他『新版中学校新数学』昭和 41 年度版
ウ、秋月康夫・佐藤良一郎他『改訂中学校新数学』昭和 50 年度版
エ、赤摂也・井上義夫他　『改訂中学校数学』昭和 59 年度版
オ、赤摂也・井上義夫他　『新版中学校数学』昭和 62 年度版
カ、赤摂也・井上義夫他　『中学校数学』平成 5 年度版
10）ア、藤森章弘「文字と式―全体学習 II」『静岡大学教育学部附属浜松中学校　自己実現をめざす生徒の育成』1994
イ、芳村義弘「文字の意味の理解と興味をひく課題から」『教育科学数学教育 No. 223』pp. 60-62 明治図書 1978
11）1）アに同じ