静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第27号（1996.3）65〜83

文字式の活用
－変化の割合の扱いに関連して－

A Study on Using Letter Formulas Concerned with the Rate of Change in Lower Secondary School

国宗　進
Susumu KUNIMUNE

（平成7年10月2日受理）

I　研究の目的

文字や文字式を使ってある命題が成り立つことを一般的に証明することについての学習は、中学校数学科での学習指導において、またそれ以降の学習指導において、重要な位置を占めている。それは、中学校第2、第3学年での「文字式の利用」の項で、文字式により思考を進めていく場面で重点的に取り扱われ、また、方程式や関数の場面でも取り扱われる。このような学習指導が総合的に行われることによって、子どもの文字式の活用能力を育成することができるものと考えられる。

筆者はこれまでに、グループを組んで「文字式による論証」の場面での子どもの文字式の活用能力の育成について追究してきた[1)]。その一つの発展として、本稿では、関数学習のうち、特に「変化の割合」についての学習場面における文字式の活用能力について検討する。

今日、中学校第2学年での1次関数 $y=ax+b$ についての学習指導では、その変化の割合が一定であることを示すのに、定数a，bの数値が与えられている2，3の関数について、いくつかの具体的な変域の場合にそれらの値が一致することを調べて、帰納的に説明するのがふつうである。また、第3学年での関数 $y=ax^2$ については、いくつかの具体的な変域の場合に求めた変化の割合の値が一致しないことを確かめて、一定でないことを結論づけている[2)]。

ここで、中学校第2学年での学習指導全体を眺めてみると、「文字式による論証」や「図形の論証」の学習では、ある命題が成り立つことを主張するには、どんな場合でも一般的に成り立つことを証明することの必要性が強調されている。だが、本稿で取り上げる「1次関数の変化の割合は一定である」ことは帰納的に確かめて、それでよしとしている。この確かめ方の違いは、一般的に証明するという数学での議論の進め方を身につけ始めた子どもにとって、どのように映るのであろうか。「一定である」ことを結論づけるには、文字式を使って証明しなくてはいけないのではないか、という疑問は起こらないのであろうか。

また、上で述べたような今日の指導によって、生徒は1次関数や関数 $y=ax^2$ の変化の特徴を、変化の割合という観点からどのようにとらえているのか、そもそも「変化の割合」をどのようにとらえているのであろうか。

以上のような問題意識に基づいて、本稿では、次のことを目的とする。

1）中学校数学科における「変化の割合」の取り扱いの歴史的変遷を明らかにする。

2）「変化の割合」が一定であることを証明するのに、中学生がどのように文字式を使おうとするか、また、「変化の割合」が一定ではないことをどのような方法によって説明しようとするか、その実態を調査によって明らかにする。

3）2）の調査結果に基づいて、中学生の「変化の割合」についての理解の様相を明らかにし、指導上の問題点を検討する。

Ⅱ 研究の内容

1 中学校数学科での「変化の割合」の取り扱いの変遷

ここでは、中学校数学科での関数学習における「変化の割合」の取り扱いの変遷について、文部省学習指導要領や教科書での記述、および実践報告等に基づいて検討する。

（1）学習指導要領の記述

昭和26（1951）年版

このいわゆる生活単元の学習指導要領（試案）[3]での指導内容は、指導内容一覧表の形で示されていて、「生活経験」「理解および能力」「用語」の3点から記述されている。そこでの関数指導に関連する内容は、次の通りである。（丸番号は「生活経験」の欄、・は「理解および能力」の欄の記述である。）

第2学年

⑥ 自然現象や社会現象の中に比例の関係を見いだしたり、また、その関係を用いて、日常の問題を解決したりする。

第3学年

③ 自然や社会における現象を理解したり、問題を解決したりするのに、比例や反比例を用いる。

- 具体的な事がらについて、比例する変化の特徴を理解し、これを用いる。
- 比例関係を式に表わしたり、その式を用いて問題を解いたりする。
- 比例定数と、比例を表わすグラフの直線のこうばいとの関係を知ったり、これを用いたりする。

⑦ 自然や社会におけるいろいろな現象を理解するのに、関係概念を用いる。

- 具体的な現象、あるいは量の変化を、他の一つの量との関係において理解する。
- 具体的な二つの変量に関連して対応の観念を理解する。
- いくつかの変化する具体的な量の間に関係を予想し、これを見いだすために、これらを表に表わしたり、グラフにかいたりする。
- 表やグラフに表わされた二つの変化する量について、変化の特徴や規則性を見いだす。
- 一次式で表わされる関係をグラフに示すと、直線になることを知り、これを用いる。
- 関係ある二つの変数について、一つの変数がわずかに変化した場合に、他の変数は、だいたい前者に比例して変化することを知り、これを用いる。

用語としては、他の項目で「一次式」「一次方程式」が示されているが、一次関数は見られない。

一覧表に続く「第Ⅳ章中学校数学科の指導内容の説明」のⅡ．数量関係の「C．数量関係の指導」では、一次式で表されるような関係については、次のようなことが理解されれればよい

としている。

「(2) 一次の関係では、変化率が変らないこと。

(3) 一次の関係は、グラフに表わすと直線になり、比例定数によって、直線の傾きが決まること。」

以上のように、この試案では、自然や社会における現象を理解するものとして関係概念を位置付けている。その対象は1次の関係までであり、また、指導に関連して「変化率」という語を明示して説明していることが特徴的である。

昭和33 (1958) 年版

このいわゆる系統学習の指導要領では、「C数量関係」の内容として次のように記述されている。

第2学年

(1) 座標や式のグラフの概念を理解させ、簡単な関数関係をグラフに表わし、関数関係を明確にする。

ア　$y=ax$　$y=ax+b$ および $y=a/x$ のグラフ（数係数の場合。）

イ　グラフにおける式の係数の意味。

(2) 比例関係および一次の関係の特徴を式の形や計算を通して明らかにし、これを用いることができるようにする。

第3学年

(1) 簡単な二次関数のグラフについての理解を深め、これを用いることができるようにする。

ア　$y=ax^2$　および　$y=ax^2+b$ のグラフ。（数係数の場合。）

イ　「ア」のグラフの特徴および係数と形との関係。

ウ　「ア」に掲げる二次関数と一次関数との値の変化のしかたの違い。

エ　「ア」のグラフを用いた二次方程式の解法。

また、文部省指導書[4]では、上の第2学年の(1)イについて、次のように述べている。

「aは直線の方向を決めるもので、aの正、負の種々な値に対して直線の向きがどのように変るかを考えさせることも必要である。また、$y=ax$を比例の式とみれば、aはその比例定数であり、したがって$y=ax+b$の場合も含めて、xの増加に対して、yがどれだけ増加するかが、aの値から定まることがわかる。」

第3学年の (1) ウについては、次のように解説されている。

「一次関数と二次関数との値の変化のしかたの違いについて理解させる。この場合、おもに、xがいろいろな値をとったときの、yがとる値の範囲についての違いや、xが増加するとき、yの増減のしかたの違いなどが考えられる。」

以上のように、一次関数とともに二次関数も考察の対象となり、値の変化については、xの値が増加するときのyの増加量を調べることが明言されている。だが、平均変化率に関する記述は見あたらない。

昭和44 (1969) 年版

いわゆる現代化の指導要領では、「B関数」の内容として次のように記述されている。

第2学年

(2) 一次関数の特徴について理解させ、それを用いる能力を伸ばす。

ア 一次関数を表わす式の形とグラフの特徴。

イ 対応する変数のとる値の変化の割合が一定であること。

ウ 事象の中には、一次関数を用いて近似的にとらえられるものがあること。

第3学年

(1) 簡単な二次関数などの特徴について理解させる。

ア 次の式で表わされる関数のグラフの特徴。

$y=ax^2$, $y=ax^3$（数係数の場合。）

イ 上記アに示す関数について、対応する変数のとる値の変化の割合が一定にならないこと。

また、文部省指導書[5]では、第2学年の(2)イについて、次のように述べている。

「変数xのとる値の変化に伴って、yのとる値がどのように変化するかのとらえ方として、増加するか減少するかのほかに、対応する変数のとる値の変化の割合について考察させる。…、このとき、変化の割合 $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ は、常に一定でaになっていることがわかる。」

「このことから、xの係数aは、変数xのとる値が1だけ増加したとき、yがどれだけ増加するかを示したものであり、さらに、xの増加に対して、yがどれだけ増加するかが、aの値をもとにして求められることを理解させる。」

以上のように、現代化指導要領のもとで、「対応する変数のとる値の変化の割合」という表現、および単に「変化の割合」という表現が、指導要領に初めて登場している。x, yの増加量とともに、変化の割合に着目して値の変化をとらえることが明確に位置付けられたということができる。

昭和52（1977）年版、平成元（1989）年版

これらの学習指導要領[6]での変化の割合に関する記述は、現代化の指導要領でのそれとほとんど変わらない。現代化の時の「変化の割合」の位置付けが、その後現在まで続いている。

（2）教科書の記述と実践事例

前項で、「変化の割合」は現代化の学習指導要領以降、それを取り上げることが明確に記述され、現在に至っていることが明らかになった。そこで、ここでは、その前後のある教科書[7]の記述、および過渡期であった現代化当時の実践記録によって、主に「変化の割合」の取り扱いについて検討する。

現代化以前の教科書の記述

昭和37（1962）年度版の教科書は、第2学年で、$y=2x+3$について、「xの値が1増すと、yの値は、いつも2だけ増す」ことを確認した後、次のように記述している。

「もし、xが0からkまで増すと、yは、xが0のときの値3から、xがkのときの値2k+3まで増すから、yの増し高／xの増し高＝（2k+3）−3／k＝2となる。よって、xの値が1増すとき、yの値の増し高は、$y=2x+3$のxの係数2に等しい。」

xの値が1ずつ増加する場合、およびxの値が0からkまで増加する場合の変化の割合を調べて、xの値が1ずつ増加するとyの値は2ずつ増加するとまとめていることが特徴的である。文字kを使って、少しでも一般的に記述しようとする意図がうかがえる。

第3学年での「二次関数と変化の割合」では、$y=x^2$について、「yの変化とxの変化との

比の値」を調べた後、

「ｙの値が増加するところでは、ｙの値の変化の割合は正であり、ｙの値が減少するところでは、ｙの値の変化の割合は負である。」

とまとめている。さらに、「$y=3x^2+12$, $y=3x^2$, $y=3x^2-12$においては、ｘの同じ範囲の値に対するｙの変化の割合は、いつも等しい」ことを調べ、まとめている。

昭和30年代の著作でありながら、文字ｋを使って一般的な説明をしている点、また、値の変化を「変化の割合」の語を使って記述している点が、大きな特徴である。

昭和41（1966）年度版の教科書では、第２学年での「一次関数の値の変化とグラフ」で、

「一次関数$y=ax+b$　では、ｘの値が１増すごとに、ｙの値はｘの係数ａだけ増し、そのグラフは直線になる。」

とまとめている。第３学年でも、選択の内容ではあるが、次のようにまとめている。

「一次関数では、ｘの値が１増すときのｙの値の増し高は、いつも一定であるが、二次関数では一定でない。」

このように、ｘの１ずつの増加量に対するｙの増加量が一定であることを調べるにとどまっていて、変化の割合に関する考察は全くなされていない。現代化の学習指導要領はまだ告示されていないものの、教育現場での現代化の精神に基づいた実験的な実践が盛んに行われていた時期の著作であるだけに、前述の昭和37年度版教科書より後退した記述になっているのは解釈に苦しむ点である。平均変化率に関する扱いをどこまで記述するかが模索されていたが、その結果なのであろうか。

現代化当時の実践事例

ここでは、昭和30年代後半頃の「変化の割合」の扱いに関連する実践事例をいくつか取り上げ、変化の割合の取り扱いの程度や位置付けについて考える。

現代化に先立って、山梨大学附属中学校では、変化の割合を文字式を使って調べるという授業を行っている[8]。変化の割合についての帰納的な扱いを越えて、一般的に説明してみようという授業者の意図が現れている。だが、その実践に対するコメントには、「$y=ax$ および$y=ax+b$ において、ａを ax_2-ax_1/x_2-x_1 や $(ax_2+b)-(ax_1+b)/x_2-x_1$ のような一般的な形で理解することは、普通の中学生には困難なことであろう。このような場合には、具体的な数値を用いて理解させることが必要であろう。」とあり、子どもの理解度という理由から、やや消極的なまとめになっている。

山崎昇は、一次関数に関する学習内容と指導上の留意点の１つとして、「一次関数$y=ax+b$ の性質として、変化率一定、ａがその値であることを理解する。」ことをあげている。そして、それについて、「グラフと表からｘの増分、ｙの増分の意味を理解させ、それらを求める練習問題を行って、変化率＝ｙの増分／ｘの増分＝一定　を理解させる。」としている[9]。

第３学年で、２次関数の平均変化率をどこまでどのように取り扱うかについての実験的な研究も、当時の文献に見受けられる。

小野良高は、２次関数のグラフが曲線になることを説明するのに平均変化率が重要であるとし、「また微分につながるために変化率を考えるときにも、極限に持っていく補助手段としても、重要な性質をもつものである」としている。だが、その指導の実際は、ｘの値が具体的な数値の場合の平均変化率をいくつか計算し、それを調べていくというものである。また、平均変化率と同時に「増分の割合」といういい方もしている[10]。

菱澄雄は、中学校での関数指導の問題点を5つをあげ、その内の1つとして、「関数の変化の量的な把握は変化率を通して、つまり、変化率を関数指導の柱にして中学校から微分の指導ができれば、最大最小の指導も容易になって来る。」と述べている。そして、実際の指導では、「x，yの変化量として記号Δx，Δyを導入し、変化の割合が平均して Δy／Δxで表わされることを理解させ、これから Δy／Δx＝平均変化率の定義付づけを行ない、…、平均変化率の変化の状態から、関数の変化のようすが数量的に把握できることを指導する。」としている。また、平均変化率が曲線上の2点を結ぶ直線の傾きを表していること、第2階差が一定であるも指導している[11]。取り扱いの姿勢が明確でその程度も高いが、ある性質が成り立つことを文字式を使って一般的に説明していくという扱いは見受けられない。

酒井昭夫は、$y=x^2$について、xの値が1，2，3，…からそれぞれpだけ増加したときの平均の変化の割合を計算させた後、「xがある値からpだけ増えるとき、平均の変化の割合は 2x＋p」であることを学級全体で確認するという授業を報告している。授業後の研究討議では「pを固定してたとえば1にして、xの値がふえるにしたがって変化の割合もふえる」という程度の扱いがよいであろうとまとめている[12]。

以上のように、当時は「変化の割合」をどのように取り扱うかという議論の中で、文字式を使って一般的に説明するという実践や、「平均変化率」という用語を使って調べるという実践等がいろいろ行われたことは明らかである。だが、文字式を使って説明することについては、子どもの理解が困難であろうという理由で後退し、また、平均変化率の用語は、議論が形式に流れることを危惧した結果、「変化の割合」の語がより広範に使われるようになったものと考えられる。なお、その表現の仕方については、植松茂暢が「xがx_1からx_2まで変化するときのyの変化の割合」、「xのある区間でのyの変化の割合を平均変化率という。」[13]というように、明確に述べている。

一方、変化の割合の扱い方について、平岡忠は、「なまの形で提示するのではなく、その必然性こそが問題なのである。」と指摘する。そして、「要は、最初から Δy／Δxというわり算で定式化しないことである。」と主張する[14]。具体を背後にもたない形式的な指導に対する警鐘であり、それは今日の実践にもあてはまる指摘である。

現代化以後の教科書の記述

現代化の学習指導要領に基づいて作られた昭和50（1975）年度版の教科書は、第2学年で、「一次関数の値の変化とグラフ」のまとめとして、次のように記述している。

「1．xの値が1増すごとに、yの値はaずつ増す。
2．xの値の増し高に対するyの値の増し高の比は一定で、aである。
3．グラフは直線になる。」

第3学年では、「xの値が同じ2だけ増す場合でも、xがどの値から増すかによって、関数$y=x^2$の値の変化の割合は異なる。」ことを調べた後、次のようにまとめている。

「一次関数$y=ax$では、yの値の変化の割合がいつも一定であるが、二次関数$y=ax^2$，三次関数$y=ax^3$では、yの値の変化の割合は一定でなく、xの値と、その値からのxの値の増し高とによって、いろいろに変わる。」

当時の学習指導要領に規定されているから当然のことではあるが、「yの値の変化の割合」という表現によって、値の変化を明確に記述している点が特徴的である。

基礎・基本の指導要領といわれる昭和52（1977）年版での「変化の割合」の扱いの程度は、

現代化の指導要領と変わっていない。そのもとで作られた昭和62（1987）年度版の教科書では、第2学年で、次のようにまとめている。

「1次関数 $y=ax+b$ においては、xがどの値からどれだけ増加しても、その変化の割合は一定であり、aに等しい。

変化の割合＝yの増加量／xの増加量＝a」

また、第3学年では次のようにまとめている。

「関数 $y=ax^2$ においては、その変化の割合は、1次関数の場合とちがって一定ではない。」

この教科書では、それ以前までは「xの値の変化に対するyの値の変化の割合」という表現を使っていたが、ここで初めて単に「変化の割合」という表現が使われ、それ以降現行版までこの使い方は変わらない。xの変域をことさら記述することなく、「変化の割合」が多用されている。

現行版教科書の記述

現行の平成5（1993）年度版教科書については、すべての中学校数学教科書6種[15]の展開の仕方を見ることにする。

6種中の4つが、$y=2x+3$ のような関数について、xの増加量に対するyの増加量の比の値をいくつか調べ、その後「変化の割合」を定義する。次に、$y=-3x+2$ のようにxの係数aが正の値の場合について変化の割合を調べて、「1次関数の変化の割合は一定である」ことをまとめる、という展開である。

他の1つのA教科書では、上記の展開に近いものではあるが、xの係数aが負の場合を調べることなしに1次関数の特徴をまとめている。

残る1つのB教科書では、最もていねいな記述になっている。まず、$y=2x+3$ について変化を調べ、問いで $y=3x-5$, $y=x+6$, $y=-2x+4$ をとりあげ、その後、xの値が1ずつ増加するときのyの増加量がaであることをまとめる。続いて、変化の割合を定義し、さらに $y=4x+3$, $y=-3x+1$ について調べて、「1次関数の変化の割合は一定である」ことをまとめている。

A教科書では、xの係数aが正である1次関数を2つだけ調べてまとめてしまっている。これに対して、B教科書では、6つの1次関数について調べているが、帰納的に得た結果を安易に一般化することに対して配慮した結果であると考えられる。

以上（1）で検討してきた内容は、次のようにまとめることができる。

「変化の割合」の取り扱いに関しては、主に1970年代にいろいろと議論されたが、現代化の学習指導要領以後、平均変化率ではなく「変化の割合」という語を使い、1次関数や2次関数について変化の割合を帰納的に調べてその結果をまとめ、それを性質として使ってそれ以降の問題解決に利用していくというように定式化されてきたものと考えられる。

このように、「変化の割合」はここ20数年間ほど、関数の値の変化をとらえる上で中心的な役割を果たしてきているが、では、それを生徒はどのように理解しているのであろうか。次の項では、それについての理解を、性質を得るのに文字を使って一般的に説明しようとしているかという点を中心に、調査を通して検討する。

2 文字式の活用能力に関する調査

(1) 目的

「変化の割合」に関する中学生の文字式の活用能力についての現状を明らかにする。

(2) 方法

- 調査対象　静岡大学附属中学校1校、第2学年生徒115名、第3学年生徒98名
- 調査時期　1995年3月
- 調査方法　両学年とも同一問題で実施、時間制限はしなかったがだいたい25分間で終えている。
- 調査問題

［問題］　変化の割合について、次の［1］，［2］に答えなさい。

ただし、変化の割合とは次の値のことです。

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

［1］「1次関数 $y=2x+3$ では、その変化の割合は一定である。」
このことがらが成り立つことを証明しなさい。

［2］「関数 $y=3x^2$ では、その変化の割合は［一定である・一定でない］」
(1) 上の文で、［　］の中のどちらか正しいと思うほうに○をつけなさい。
［一定である・一定でない］
(2) (1) のように判断した理由を説明しなさい。

- 調査問題作成の意図

［問題1］；1次関数の変化の割合が一定であることを、どのような方法によって示すか、特に、文字式を使って一般的に説明しようとするかをとらえる。なお、問題文では意図的に「証明」という表現を使っている。

［問題2］；関数 $y=ax^2$ では変化の割合が一定ではないことを、どのような方法によって示すか、特に、反例をあげることによって説明しようとするかをとらえる。

［問題1］と［問題2］の関連；一般的に説明するには文字が使われ、成り立たないことを説明するには反例を1つあげればよいという、数学学習における推論の進め方の原理を理解しているかをとらえる。また、「変化の割合」の意味を的確にとらえているかをとらえる。

(3) 結果と考察

1) 問題1について

［問題1］に対する生徒の解答を、次のように分類した。

aタイプ　文字式を使って正しく証明しているもの。

さらにこれらは次の3つのタイプに分類できた。

a_1；問題に与えられた $y=2x+3$ を一般化して $y=ax+b$ とし、それについて文字式を使って正しく証明しているもの。

a_2；x の値が p から q まで変化するとし、求める変化の割合が2であることを一般的に導いているもの。

(解答例1) $x=a$ のとき $y=2a+3$，$x=b$ のとき $y=2b+3$，

これから変化の割合を求めると、

$$\frac{2a+3-2b-3}{a-b}=\frac{2a-2b}{a-b}=\frac{2(a-b)}{a-b}=2$$

よって、変化の割合は一定（2）であることがいえる。

a_3； xの値がpからp＋qまで変化するとし、求める変化の割合が2であることを一般的に導いているもの。

bタイプ　文字式を使って証明しているが、文字式の使い方がやや一般性に欠けるもの。

（解答例2）xの値がpからp＋1まで（あるいはpから2pまで）変化する場合の変化の割合を計算し、それが2であることを示して結論がいえたとするもの。

（解答例3）xの値がaからa＋2まで、a＋2からa＋6まで変化する場合の変化の割合をそれぞれ求め、それらが等しいことを示して結論がいえたとするもの。

cタイプ　いくつかの変域について変化の割合を計算し、それらが一定であることを帰納的に説明しているもの。

（解答例4）x＝1のときy＝5…①,　x＝2のときy＝7…②

…　,　x＝10のときy＝23…③

①から②のとき、①から③のとき、②から③のときと変化の割合を調べると、

①から②　2／1＝2, ①から③　18／9＝2, ②から③　16／8＝2

上のようにどれも変化の割合が2となるので、「1次関数y＝2x＋3 では、その変化の割合は一定である。」ことがいえる。

dタイプ　xの値が1ずつ増加すると、yの値は一定の数ずつ増加することによって説明しようとしているもの。

（解答例5）（対応表をつくってxの値が1ずつ増加するとyの値が2ずつ増加することを指摘した後）xもyも一定の割合で増えているから成り立つとしているもの。

（解答例6）（対応表をつくった後）xの値が1ずつ増加するとyの値が2ずつ増加することを述べているだけのもの。

eタイプ　何らかの説明をしようとしているが、不的確なもの。

fタイプ　無解答のもの。

各タイプ別の解答率は、表1の通りである。

表1　問題1のタイプ別解答率　　数値は％

学年＼タイプ	a_1	a_2	a_3	b	c	d	e	f	計
中2	0	4	1	3	43	18	23	8	100
中3	1	20	8	9	41	12	9	0	100

［問題1］に対する生徒の解答から、1次関数の変化の割合が一定であることを説明する方法について、次のことが指摘できる。

ア）aタイプの解答は、xの変域を文字を使って表し、そのもとで変化の割合Δy／Δx の値を計算して、それが定数になることを示すものであり、文字式のもつ一般性を使った的確な証明である。

このaタイプの解答は中2ではほとんどなく5％で、中3では29％がこの方法によっている。今回の調査対象生徒はいずれも授業時において、この解答のような文字式を使った証明をとり

あげているが、中2では、この方法をとることの意義が理解されなかったのであろうか、ほとんど定着していない。これに対して中3では、生徒の約1／4がこのaタイプの解答をしている。文字式による論証や図形の論証の学習によって、証明のもつ一般性に着目している生徒が増えている結果であると考えられる。

なお、a_1タイプの解答はわずか1名であったが、初めから考察対象の1次関数を一般的な $y=ax+b$ として証明し、その特別な場合として $y=2x+3$ についてもいえるとしている。与えられた命題について証明するにとどまらず、より一般的な場で証明していこうという態度が身についていることの現れである。

イ）bタイプの解答には、文字式を使って説明しようという構えがみられる。上に示した解答例2のように、xの値がpから増加するとしたのは的確であるが、それがp＋1，p＋2や2pまで変化するとした点で、やや一般性に欠けたものになっている。また、解答例3のように、文字を使ってはいるが、cタイプの帰納的な説明との折衷案のようなものもある。

このタイプの解答は、このような不十分さはあるものの、1次関数の場合はどこからどれだけ変化してもその変化の割合は一定であることの意味をより的確にとらえれば、すぐにでもaタイプの解答へと高まっていくものと考えられる。

ウ）cタイプの解答は、いくつかの具体的な変域の場合に変化の割合を計算し、それらが一致することを調べて帰納的に結論づけるものであり、中2の43%，中3の41%がこの解答である。中2の教科書での1次関数の変化の割合の記述はこのようになっているし、中学校での関数指導のねらいからすれば、このcタイプの解答で十分であると考えることもできる。だが、その一方で、「文字式による論証」や「図形の論証」の学習場面では一般的に証明することが強調されている。同一の学習者にとっては整合性の欠けたものと映るのではなかろうか。帰納的な方法によるこの解答を大切にしながらも、aタイプのような文字を使った解答にも目を向けさせる必要がある。

なお、cタイプの解答をした生徒が、いくつの変化の割合を調べて帰納的に結論づけているかを調べてみると、表2のようになる。表2の＊の欄は、xの値が1ずつ増加するときの変化の割合、つまり、$\Delta y/\Delta x$ の Δxが1の場合の変化の割合だけをいくつか計算したものを表している。

表2　cタイプの解答の分類　　数値は%

学年＼個数	6	5	4	3	2	1	＊	学年合計
中2	2		7	8	10	3	13	43
中3		1	3	8	15	3	11	41

2つの場合について変化の割合を計算し、それらの値が等しいことから、「$y=2x+3$ では、その変化の割合は一定である。」と結論づけているものが中2で10%，中3で15%あり、cタイプの解答の中では多い。「1次関数では、xの値がどこからどれだけ増加しても、その変化の割合は一定である。」という命題を真と判断するのに、わずか2つの場合に等しかったからと認めてしまうことは、小学校での算数学習ならばともかく、数学学習上大きな問題があると考える。

その一方で、3つ以上の場合について変化の割合を計算して結論づけた解答が、中2で17%，中3で12%あった。このような解答をした生徒は、2つの場合だけから一定であると結論づけ

ることが不安だったのであろうか。

子どもは「命題が成り立つことを一般的に説明すること」をどのようにとらえているのかを、解明する必要がある。

エ）dタイプの解答は、xの値が一定量ずつ増加するときのyの増加量が一定であることは指摘しているが、変化の割合についての記述が見られないものであり、「変化の割合」が何を意味しているかを十分にとらえていないものと考えられる。

なお、このタイプには、xの値が1ずつ増加するときの変化の割合を考えていても、表現が不十分なためにここに分類された解答もあるであろう。

オ）eタイプの解答は、中2で23%，中3で9%あった。不的確ではあるが説明しようとしている意欲は十分に評価する必要がある。

このタイプの解答の中には、次のようなものが複数みられた。

「$y=2x+3$ を $y=2x$ として考える。$y=2x \rightarrow y/x=2$，分母xがどれだけ増えても分子yもそれとともなって増えていくので変化の割合は一定となる。」

このような解答は、調査対象生徒の授業者の話からすると、1次関数のグラフは比例のグラフを平行移動しただけのものであるとか、1次関数の式 $y=2x+3$ は $y-3=2x$ と変形すれば「$y-3$ は $2x$に比例している」とみることができる等のように、1次関数と比例関係との共通性を強調した指導の結果であるように考えられる。変化の割合を $\Delta y/\Delta x$ではなく、y/xととらえているものもいる。

一方、次のように結果だけを丸暗記しているのではないかと考えられる解答もあった。

「変化の割合は $y=ax+b$ のaにあてはまっている数と決まっている。この場合は2で、その変化の割合は一定になる。」

「$y=2x+3$ の 2が変化の割合だから一定。」

「グラフに表すと直線になる。xの係数2に等しい。」

「グラフは直線。1本の直線は変化の割合が一定ということにつながる。」

このような解答をした生徒には問題の意味が伝わらなかったであろう。「変化の割合」概念の学習の難しさが現れている。

ここで、以上のような解答の結果を、筆者らが設定した「文字式による論証能力の発達段階」に対応させて考えてみる。

「文字式による論証能力の発達段階」は次の通りである。

＜水準0＞　無解答、あるいは、問題文を繰り返していたり、説明になっていない。

＜水準Ⅰ＞　文字式を使わずに、具体的な数値をあげたり、ことばで説明しようとする。

＜水準Ⅱ＞　文字式を使うが、不適切な使い方をする。

＜水準Ⅲ＞　文字式を使って正しく説明する。

これは「文字式による論証」に対する能力の段階として設定したものであるが、関数の内容に関する上の［問題1］の解答に対して、その段階判定の基準（詳細については文献[16]参照）を援用して考えてみると、以下のようにみなすことができる。

aタイプは水準Ⅲ，

bタイプは水準Ⅱ，

c，d，eタイプは水準Ⅰ，

これに基づいて、［問題１］の解答の学年別、段階別分布を調べてみると、表３を得る。また、その推移を図で表すと、図１を得る。

表３　「論証能力」の学年別分布　数値は％

学年＼水準	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
中２	92	3	5
中３	62	9	29

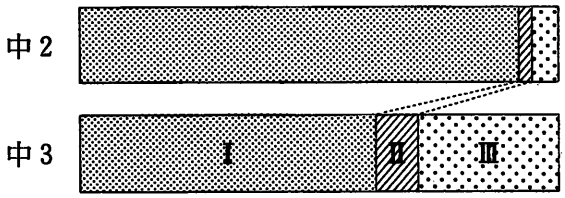

図１　発達段階別の推移

表３から明らかなように、中２と中３との分布の差には歴然としたものがある。

「文字式による論証能力」に関する既に実施した調査結果[17]によれば、中３の半数以上が水準Ⅱ以上であった。その段階判定のための調査問題は、整数に関する問題とカレンダーの中の数に関する問題から成っていて、中２，中３で学習する「式の利用」で扱われるものである。今回の［問題１］は関数についてのものであり、それだけで難易度が増していると考えられるから、その調査結果より正答率が低くなるのは当然の結果である。それにもかかわらず、水準Ⅱ以上の中３生徒が40％近くもいるのであるから、変化の割合に関して帰納的な考察だけで終えている現在の中２での学習指導のあり方を再考する意義はあるものと考える。

２）問題２について

［問題２］に対する生徒の解答を、次のように分類した。その内のＡ～Ｅタイプは［一定でない］と判断したものである。

Ａタイプ　いくつかの反例をあげて説明しているもの。

Ｂタイプ　変域の取り方によることを、文字式を使って説明しているもの。

（解答例１）ｘの値がｐからｑまで変化するとして、変化の割合を計算すると、

$$\frac{3q^2-3p^2}{q-p}=\frac{3(q^2-p^2)}{q-p}=\frac{3(q+p)(q-p)}{q-p}=3(p+q)$$

よって、変化の割合はｐやｑの値によって変わるから一定でない。

Ｃタイプ　グラフ上で説明しているもの。

Ｄタイプ　ｘの値が１ずつ増加するときのｙの増加量が一定でないことを示して説明しようとしているもの。

Ｅタイプ　意味不明のもの、または、一定でないことの理由が述べられていないもの。

Ｆタイプ　［一定である］と判断したもの。

Ｇタイプ　無解答。

各タイプ別の解答率は、表４の通りである。

表４　問題２のタイプ別解答率　　数値は％

学年＼タイプ	A	B	C	D	E	F	G	計
中２	23	2	1	31	17	19	7	100
中３	49	32	6	7	2	3	1	100

［問題２］に対する生徒の解答から、関数 $y=3x^2$ では変化の割合が一定でないことを説明する方法について、次のことが指摘できる。

ア）Aタイプの解答は、反例をあげて命題が成り立たないことを示すものであり、［問題2］の解答として最も的確な方法として位置付けることができる。このタイプの解答は中2で23%，中3で49%あったが、その記述には大きな違いがみられる。

いくつの変化の割合を計算して反例としているかを調べてみると、表5のようになる。

表5　Aタイプの解答の分類　　数値は%

学年＼個数	7	6	5	4	3	2	学年合計
中2	2		2	4	4	11	23
中3				2	13	34	49

最低限の反例を挙げているもの、つまり、2つの変域についてだけ変化の割合を計算し、それらの値が一致しないことから「関数 $y=3x^2$ では、その変化の割合は一定でない。」と結論づけているものが、中2で11%，中3で34%と最も多い。

また、3つ以上の場合について計算しているものも、中2で12%，中3で15%ある。中2では、わずかであるが7つの変域について変化の割合を調べた者もいた。このような解答をした生徒の中には、2つの場合に一致しないことを示せば「一定でない」ことが説明できたとわかっていても、何となく不安で、あるいは念には念を入れて、さらにもう1，2の場合について調べた者もいたと考えられる。

「ある命題が成り立たないことを示すには反例を1つ挙げればよい」という数学での議論の進め方を、もっと前面に出した指導を明確に位置付ける必要がある。

イ）Bタイプの解答は、上の（解答例1）で示したように、xの値がpからqまで（あるいはpからp＋qまで）変わるときの変化の割合が $3(p+q)$（あるいは $6p+3q$）であることを示し、それがpやqの値によって変わることを主張するものであり、中2では2%，中3では32%がこの解答である。［問題1］に対する解答と同様にまず文字式を使って変化の割合を計算して、一定であるかどうかを判断したものと考えられるが、成り立たないことを示すにはAタイプの解答のような反例を挙げればよいという点について、的確には理解していない者もいると考えられる。

このBタイプの解答をさらに詳しく調べてみると、これら中3生徒のうちの38%（全体の12%）は、文字式を使って説明する一方で、具体的な数値で反例を挙げる説明も併記している。これらの生徒のうち、計算した変化の割合の個数が2個，3個，4個であったものは、それぞれ8%，2%，2%である。

なお、Bタイプの解答をした中2生徒が2%いたが、授業に先行してどこかで学習していたものと考えられる。

ウ）Cタイプの解答は、グラフ上で直観的に説明しようとしているものである。この解答の中には、グラフ上で変化の割合の意味を説明しているもの、つまり直角三角形をかいてxの増加量とyの増加量を示しているものと、単に「グラフが曲線（放物線）だから」と述べているだけのものがあった。その割合は、中3でそれぞれ4%，2%である。このような解答は、中2ではみられなかったが、まだ学習していなかったからであろう。

なお、他のタイプに分類された解答ではあるが、グラフも使って説明していた者が中2で14%，中3で30%いた。中3では、学習が進み多面的な考察が可能になっていることを示しているものと考えられる。

エ）Dタイプの解答は、xの値が1ずつ増加するときのyの増加量が一定でないことを述べているにとどまっている。「変化の割合」が何を意味しているかを十分にとらえていないからであろう。あるいは、xの値が1ずつ増加するときのyの増加量が一定でないならば、当然の結果として$\Delta y/\Delta x$ も一定ではないと考えていたが、それが答案には表れなかったのかもしれない。

オ）Eタイプの解答には、何組かのx，yの値によって y/x が違うとして理由を述べていた者がいた。（yの増加量）/（xの増加量）と y/x との違いを明確にする必要がある。

カ）Fタイプの解答、つまり「関数$y=3x^2$ では、その変化の割合は一定である。」と結論づけた解答は、中2で19%，中3ではわずか3%と学年差によって大きな違いがみられた。この違いは、中2では関数$y=3x^2$ について変化の割合を調べる学習がまだ行われていず、1次関数の学習を通して得た「変化の割合」概念に基づいて解答した結果とみることができる。

これらの中2生徒が「一定である」と判断した理由を調べてみると、次の解答例のように、それなりにうなずけるものもある。

（解答例2）

	yの増加量	増加量の増える割合
$x=1$ を代入すると $y=3$		
	9	
$x=2$ を代入すると $y=12$		6
	15	
$x=3$ を代入すると $y=27$		6
	21	
$x=4$ を代入すると $y=48$		6
	27	

（解答例3）$y=3x^2$を変形すると、$y/x^2=3$　よって、y/x^2 は一定である。

（解答例2）は第2階差6が一定であること、（解答例3）は y/x^2 が一定であることが根拠となって、「変化の割合は一定である」と判断している。このように何らかの一定量を見いだして「変化の割合は一定である」としたのは中2で12%，中3で1%である。

だが、このような解答も、「変化の割合」をとらえているかどうかという点からすると、不十分であることはいうまでもない。

3）問題1と問題2に対する解答の関連

［問題1］［問題2］に対する解答の関連をとらえるために、横軸には［問題1］の解答のタイプを、縦軸には［問題2］の解答のタイプをとって、表で表すと、表6，7を得る。

表6　中2，解答の関連　数値は%

問題2＼問題1	a	b	c	d	e	f	計
A	1	2	13	3	3	1	23
B	2						2
C					1		1
D			14	8	8	1	31
E	2		6	4	5		17
F			8	3	5	3	19
G		1	2		1	3	7
計	5	3	43	18	23	8	100

表7　中3，解答の関連　数値は%

問題2＼問題1	a	b	c	d	e	f	計
A	8	2	28	5	6		49
B	21	7	2	1	1		32
C			5	1			6
D			3	3	1		7
E			1		1		2
F			1	2			3
G			1				1
計	29	9	41	12	9		100

表6，7から、次のことが指摘できる。

ア）［問題1］で文字式を使って説明したaタイプまたはbタイプの中3生徒（全体の38%）は、［問題2］では全員がAまたはBタイプのいずれかであった。［問題1］で文字式を使って証明しようという構えがあれば、［問題2］に対して的確に判断しその理由を説明することができることになる。

イ）［問題1］で帰納的に説明したcタイプの生徒たち（中2で全体の43%，中3で41%）は、［問題2］でA～Gタイプの多岐にわたる解答をしている。この傾向は、特に中2で顕著である。その内ではAタイプが多く、中2で全体の13%，中3では28%を占めている。これらの生徒は、「証明するのも具体例、反例をあげるのも具体例」と考えているのであろうか。

また、［問題2］でC，D，E，Fタイプのいずれかを解答した生徒が、中2で30%，中3で11%いるが、［問題1］と同様に変化の割合を求めて、それによって理由づけしようとは考えていない。変化の割合の意味がとらえられていないのであろう。

ウ）［問題2］では文字式を使って説明しようとしたBタイプでありながら、［問題1］ではc，d，eタイプの解答であった生徒が、わずかではあるが中3で合わせて4%いる。これらの生徒はなぜ［問題1］で文字式を使って説明しようとしなかったのであろうか。ある命題が成り立つことを説明する態度に、一貫性が欠けているように考えられる。

3　学習指導への示唆

ここでは、調査を通して明らかになった問題点を中心に、文字式の活用能力、および関数指導について検討する。

①　文字式の活用能力の現状

今回の調査の最大のねらいは、生徒の文字式の活用能力についての現状を、関数学習における「変化の割合」の理解に関して明らかにすることにあった。そこでは、関数そのものに変数x，yが現れるだけに、整数の性質や日常的なことがらに関する性質が成り立つことを文字式を使って証明するという「式の利用」の学習に比べると、一層困難性が高いと考えられる。

今回の調査問題1では、「1次関数$y=2x+3$ では、その変化の割合は一定である。」という命題が成り立つことを証明させ、そこでの中2，中3生徒の文字使用の現状をとらえることを意図した。

これに対して、中3生徒の38%が、xの値がpからqまで変わるときの変化の割合を計算し、それが一定の値2になることを示して証明しようとした。この結果は、調査の対象生徒が、第2学年での1次関数の学習[18]において、このような説明を授業者との問答によって知り、第3学年での関数$y=ax^2$ の学習[19]においては、xの変域を文字を使って表して一般的に考察したことが大きく影響しているものと考える。また、「文字式による論証」や「図形の論証」の学習を通して、命題が成り立つことを演繹的に証明することと帰納的に説明することとの違いを次第に理解し、考察の方法に対する意味付けが生徒のなかに確立し始めているということができる。

今回のこのような調査結果からすると、調査問題のような関数に関連する学習場面で文字式を使って証明すること、およびそうすることの意義について、積極的に対処することが必要であり、またそれは可能であると考える。

一方、このような説明をした中2生徒は、わずか5%しかいなかった。彼らもp，qを使っ

た同様の方法を授業者との問答によって取り扱った経験があったにもかかわらず、それを命題が成り立つことの説明には使わなかったということになる。

以上のような考察から、第2学年での「1次関数 $y=2x+3$ では、その変化の割合は一定である。」ことの学習指導において、帰納的な説明によってこの命題を一般化しそれ以後の学習で定理のごとく使っていくという従来の展開を越えて、xの値がpからqまで増加するとして、その変化の割合を調べるというより積極的な指導を行うことの可能性が示唆されたものと考える。ただし、その効果は第2学年で期待するというより、第3学年での関数 $y=ax^2$ についての学習とあいまって定着するものであることが、今回の調査結果から明らかになった。

「文字式による論証」では一般性を強調し、1次関数の学習では帰納的に結論を得てしまい、「図形の論証」ではまた一般性が強調されるという、現在の中学校第2学年での学習指導における“ご都合主義”が、上に述べたような授業展開によって解消されるものと考える。

② 反例をあげること

今回の調査問題2では、「関数 $y=ax^2$ では、その変化の割合は［一定である・一定でない］」の判定をし、その理由を説明することを要求した。

xの変域を［p，q］とし、変化の割合をp，qによって表した結果から、一定でないとする文字式を使った解答が中3では32%もあったが、これは問題1での文字式使用の影響であると考えられる。

「一定でない」ことを示すには反例をあげれば十分であるが、そのような解答は中2で23%，中3で49%あった。文字p，qを使って説明した生徒の中にも同時に反例をあげていたものが中3で12%いたから、変化の割合を計算しそれを反例としてあげた中3生徒は、合わせて61%にのぼっている。

だが、既に述べたように、必要以上に多くの場合について変化の割合を計算した生徒も中2で12%，中3で15%いた。このような生徒が反例の役割を的確にとらえているかという点については疑問が残る。

また一方で、「一定でない」ことを説明するのに、文字を使って説明し、反例をあげ、グラフ上でその意味を述べるというように、いろいろな方法で説明した生徒も見られた。命題が成り立つことを証明するのに、ふつう授業では多様な考え方をすることが奨励されるが、このようにいろいろな説明をした生徒は、そのことと、簡潔明瞭に説明する、つまりこの場合は反例をあげるということのもつ的確さとを混同しているのではないかと考えられる。

以上述べたような現状からすると、「ある命題が成り立たないことを示すには反例を1つあげればよい」ということを授業計画に明確に位置付ける必要がある。

この点については、現代化の学習指導要領では、第2学年の「E集合・論理」の領域に「命題の真偽とその証明」が明確に位置付けられていた。特に反例の意味については、文部省指導書[20]で、「証明の意味を明らかにするには、調べていって真となるような命題のみを扱うのでなく、反例をあげることで偽であると判断できるような命題もともに材料として取り上げていくような配慮も必要である。特に、偽であることを証明するには、ただ一つの反例を示すことでよいことを明らかにすることは命題の意味を理解させる一つの要点といえよう。」と明快に述べている。現行の中学校数学科における学習指導全体を、このような視点から総合的に検討する必要があると考える。

③ 帰納的な説明

調査問題1で取り上げた命題は真の命題であるから、帰納的な方法に基づく予想が、命題の真偽に反することはない。一方の調査問題2では、いくつかの変化の割合を計算してみることが「一定であるかどうか」を判断する的確な方法になる。それだけに、その考察の方法の意味が生徒には伝わりにくく、生徒によっては「証明する場合も、真偽を調べる場合も、帰納的な方法に依ればいい。」ととらえていると考えられる。このことは、問題1の命題に対して帰納的な説明をした生徒が、中2で43%，中3で41%もいたことから明らかである。

算数・数学学習において、帰納的な考えが重要であることは論を待たない。古藤怜も「『関数の考え』の中核をなす本質的なアイデアは『帰納的な考え』であるといえる」[21]と強調する。それと同時に、「帰納的な方法は、性質を発見したり命題の真偽を判断するには有効であるが、それによって得られた命題は偽であることもありうる」ことを理解するということも重要である。帰納的な方法の意義についての指導のあり方を、演繹的な、あるいは類比的な方法とともに、中学校での学習指導全体を見通して検討する必要がある。

④ 変化の割合

今回の調査を通して、中学校での関数指導についていくつかの示唆を得ることができた。

初めに「変化の割合」について。

今回の調査問題2では、中3生徒の80数%が文字式あるいは数値によって何らかの形で「変化の割合」を計算し、考察を進めている。だが中2では、そのような解答は約50%にとどまっている。中2生徒は、関数 $y=3x^2$ について未習であるからやむをえない面もあるが、1次関数についての学習だけでは、「変化の割合は（yの増加量)／(xの増加量）で定義される値である」ということがそれほど定着していなかったことになる。

現在「変化の割合」は、1次関数の変化や対応の様子を特徴づけるものの1つとして、第2学年で取り扱われる。そこでは $y=2x+5$ や $y=-3x+2$ について、いくつかの変域における $\Delta y/\Delta x$ を計算し、その値がxの係数に一致することから、「1次関数 $y=ax+b$ では、その変化の割合は一定で、それはxの係数aに等しい。」とまとめている。この性質は1次関数の値の変化を特徴づける重要な性質であり、そのグラフが直線になることの根拠として使われたりする。だが、変化の割合そのものについての理解が不十分であるのに「変化の割合はaのこと」と覚えて学習を進めていったとしても、第2学年での学習ではそれほどの混乱は起こらない。

このような状況は、1次関数だけを考察の対象にしていることに原因があり、そのような理解の仕方の不十分さは、第3学年での関数 $y=ax^2$ の学習の際に露見することになる。このことは、上に述べた今回の調査結果からも支持されるであろう。そうであるからこそ、現在の第2学年での1次関数の学習指導において、「変化の割合」そのものの定義やその値に着眼することの意味についての理解を重視する必要がある。

⑤ 比例と1次関数との関係

今回の調査に対する解答の中には、$y=2x+3$ について $\Delta y/\Delta x$ を計算するべきであるのに、$y=2x$ について y/x が一定であることを示している解答がみられた。1次関数について問われているのに、それを比例の場合に簡約化して解答している。これは、式の形については、1次関数 $y=ax+b$ のbが0になった場合が比例、グラフについては、比例のグラフを平行移動したものが1次関数のグラフというように、比例と1次関数との共通性を強調した指導

の結果であると考えられる。

このような共通性を大切にしながらも、比例と1次関数それぞれについての特徴を十分に理解することは極めて重要である。特に比例は1次関数の特別な場合であることだけが強調されがちであるが、倍関係のような比例固有の変化の特徴についても、1次関数との違いを明確にしてとらえる必要がある。

Ⅲ 終わりに

本稿では、これまでの「文字式による論証」についての研究の発展として、「変化の割合」に関する中学生の文字式の活用能力について追究した。

今後は、関数学習に関する他の場面での、また方程式の学習での、生徒の文字式の活用に関する様相について明らかにする必要がある。このような追究を通して、中学生の文字式に関する総合的な理解の様相をとらえたい。

本稿をまとめるにあたり、調査の実施等、多くの先生方にご協力いただいた。ここに感謝の意を表したい。

＝引用・参考文献＝

1）ア、中西知真紀・鈴木裕・小高博他「文字式による論証（第3次報告）－授業を通しての検討－」『日本数学教育学会誌数学教育第74巻第11号』pp.2-12,1992

イ、国宗進・熊倉啓之他「文字式による論証の理解に関する研究」『第25回数学教育論文発表会論文集』pp.7-12,1992

ウ、国宗進・鈴木裕他「文字式による論証の指導について」『静岡大学教育学部研究報告（教科教育篇）第24号』pp.81-110,1992

エ、熊倉啓之・国宗進他「文字式による論証－論証と変数－」『日本数学教育学会誌第75巻7号』pp.10-18,1993

オ、小高博・国宗進他「文字式による論証についての理解に関する研究」『第27回数学教育論文発表会論文集』pp.161-166,1994

カ、国宗進・鈴木裕・小高博「中1での文字式による論証の指導」『静岡大学教育学部研究報告（教科教育篇）第26号』pp.77-100,1994

2）中学校数学科教科書、平成5（1993）年度版

岩合一男他『中学数学』大阪書籍

川口廷・一松信・青柳雅計他『中学校数学』学校図書

茂木勇・片桐重男・澤田利夫他『新版中学数学』教育出版

福森信夫・菊池兵一・三輪辰郎他『数学』啓林館

赤摂也・井上義夫他『中学校数学』大日本図書

藤田宏・前原昭二他『新しい数学』東京書籍

3）文部省『中学校高等学校学習指導要領数学科編（試案）』 大日本図書 1951

4）文部省『中学校指導書数学』 明治図書 1959

5）文部省『中学校指導書数学編』 大阪書籍 1970

6）文部省『中学校指導書数学編』 大日本図書 1978

文部省『中学校指導書数学編』 大阪書籍 1989

7）中学校数学科教科書、大日本図書版
ア、末綱恕一・秋月康夫他　『新編数学』昭和33年度版
イ、秋月康夫・佐藤良一郎他『新版中学校新数学』昭和41年度版
ウ、秋月康夫・佐藤良一郎他『改訂中学校新数学』昭和50年度版
エ、赤摂也・井上義夫他　『改訂中学校数学』昭和59年度版
オ、赤摂也・井上義夫他　『新版中学校数学』昭和62年度版
8）文部省「一次と二次の関数関係を理解させ、関数的な見方や考え方を伸ばす指導」『中学校数学指導事例集　関数関係の指導』pp.177-204,教育図書 1966
9）山崎昇「一次関数」『教育科学数学教育No.51』pp.31-37,明治図書 1964
10）小野良高「“二乗・三乗に比例する”の指導」『教育科学数学教育No.51』pp.38-44,明治図書 1964
11）菱澄雄「中学校における二次関数の実際指導」『教育科学数学教育No.51』pp.59-67,明治図書 1964
12）吉住伝吉、酒井昭夫「二次関数の特徴について理解させる指導」『中学校数学教育現代化全書5　関数』pp.256-272,金子書房 1971
13）植松茂暢「数式で示される関数の指導の要点」『中学校数学教育現代化全書5　関数』pp.118-130,金子書房 1971
14）平岡忠「重点内容の解説と指導の要点」『新中学校数学指導講座4　関数』pp.33-90,金子書房 1978
15）2）に同じ。
16）1）エに同じ。
17）1）エに同じ。
18）国宗進・大坂誠・望月敏行「1次関数の指導について」『静岡大学教育学部附属教育実践研究指導センター紀要第2号』pp.39-68,1993
19）国宗進・大坂誠・鈴木洋一ほか4名「関数 $y=ax^2$ の指導について」『静岡大学教育学部附属教育実践研究指導センター紀要第3号』pp.47-62,1994
20）5）に同じ。
21）古藤怜「関数指導内容の概観と問題点の考察」『新・中学校数学指導実例講座4　数量関係』pp.3-37,金子書房 1991