静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第33号（2002. 3） 25〜47

アメリカ合衆国における幾何と代数の強調

The Circumstances about Emphasizing Geometry and Algebra in the United States

国宗　進
Susumu KUNIMUNE

（平成13年10月 9 日受理）

1．はじめに

本稿のねらいは、アメリカ合衆国における昨今の幾何と代数の強調の背景をさぐり、実際に子供たちがどのような内容を身につけることが期待されているのかを明らかにして、日本の算数・数学教育への示唆を得ることである。

筆者は、2000年春に、アメリカ合衆国における連邦レベルでの科学教育政策に関する資料収集のため、アメリカを訪問する機会を得た。その中に、連邦教育省の訪問があり、そこで、

「数学評価を調べる出発点としての第 3 回国際数学・理科教育調査：幾何と代数に関する詳細な検討」(TIMSS as a Starting Point to Examine Mathematics Assessments: An In-Depth Look at Geometry and Algebra)

という、130ページ程の冊子を手に入れることができた。これは、州、地区、そして学校における幾何や代数に関する教育内容の改善を目指して、1999年 6 月に連邦教育省が刊行した啓蒙書であり、連邦教育省が幾何と代数・関数を強調することの意味が述べられている。本稿を書くにあたっては、この冊子に多くを負っている。

衆知のように、アメリカ教育省は、アメリカの教育向上のために「全てのアメリカ人が平等に教育を受けられることを保証し、全国的に教育的卓越を促進する」ことを掲げ、そのための主要目標 4 つを示している。その 2 番目の目標は、

「全ての子ども達に、確かな学習の基礎を身につける」

ことであり、さらにその下位目標の中には、次の記述が見られる。

「下位目標2.3　8 年生は、基礎的な代数・幾何を含む、学びがいのある数学を習得する。」

この下位目標2.3は、数学に関する一つの指標を示したものであり、第 4 学年で国際平均値より上であったアメリカの子ども達の数学の成績が、第 8 学年では下になり、第12学年では最下位に近かったという、TIMSSの結果が反映していると見ることができる。そこではまた、アメリカの数学カリキュラムは、他の先進国に比べて広くはあるが浅い内容であったということも明らかになっている。

これら問題点の打開のために、教育省は1999年に、America Countsという数学教育改革を打ち出した。その 6 つの方略的目標は次の通りである。

1）質の高い教員養成プログラムや現職教員教育を通して、学びがいのある数学を教えることができる教師にする。

2）個別学習や家庭教師、学校外で学習する機会を提供する。
3）優れた数学の教授や学習に関する質の高い研究を支援する。
4）今日の子ども達にとって数学がいかに重要であるか、社会の理解を得る。
5）厳密な学問的水準を基に作られた学びがいのあるカリキュラムを、すべての子ども達に奨励する。
6）連邦、州、地域の持つ情報を共有し効率的に有効利用することを支援する。

これらは、教育省による数学教育改革の中心になっていると考えられる。本稿で取り上げる冊子の刊行もまた、この改革の一部分を占めている。

2．幾何と代数・関数の強調の背景

ここでは、現在のアメリカ合衆国の学校教育において、特に幾何と代数・関数に関する学習指導が強調されている背景について、「はじめに」で述べた冊子にできるだけ忠実に述べることにする。

(1) 冊子刊行のねらい

ここで取り上げている冊子の「序」では、冊子刊行のねらいが述べられている。それは、

全米教育進歩評価（NAEP；National Assessment of Educational Progress),
第3回国際数学・理科教育調査（TIMSS；the Third International Mathematics and Science Study）

によって示された、第8学年の数学評価に関する情報を提示することである。つまり、アメリカの国内調査であるNAEPと国際調査であるTIMSSとの両者に基づいて、検討を加えていこうというものである。

なお、冊子は3章からなり、第1章では、NAEPとTIMSSの数学評価の枠組み、及び内容領域について、調査問題の配置に関して幾何と代数に焦点を当てて比較している。第2章、第3章では、それぞれ幾何と代数について、NAEPとTIMSSの調査問題を使って、評価の詳細と、実際の評価結果を示している。

(2) アメリカにおいて重要事項である数学の成績

アメリカにおいて、現在、数学の成績に対する関心が極めて高くなっている。その背景について、以下、冊子から引用する。

「TIMSSは、数学・理科の成績が教育の重要事項であると叫ばれている時に現れた。我々の8つの国家教育目標の1つは、“2000年までに、アメリカは数学・理科の成績において世界で第1位になるであろう”である。加えて、数学・理科の専門家は、数学・理科の教科指導の改善を声高に主張している。例えば、全米算数・数学教師協議会（NCTM）は、次の書物を刊行している。

Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989
Professional Standards for Teaching Mathematics, 1991

相当なエネルギーが、多くの州、地区、学校や教室における数学教育の改善にささげられている。また、1996年のNAEP数学評価によれば、国家レベルのデータは、生徒の成績が1990年より向上していることを示している。(中略)

TIMSSでの数学の成績は、4年生では諸外国に比較してまずまずであるが、8年生では国際平均値より低くなっている。両学年の調査に参加している25カ国の中で、4年生は国際平均値以上である

が、8年生では平均値以下であるのは、アメリカ合衆国ただ1つだけであり、また、12年生でも国際平均値以下であった。

NAEPの結果によれば数学の成績はよくなっているが、TIMSSの結果を併せてみると、アメリカ合衆国が高い数学の成績の目標に到達するのは、遠い先のことである。」

このように、アメリカの数学の成績を改善する必要があることを述べている。そして、「アメリカ教育省は、未来におけるアメリカの生徒の数学の成績を継続的に評価し続けるためにいくつかの主導権を持って」いるとし（この1つにTIMSS-Rがあげられている）、さらに、「州や学校区のかなり多くが、数学評価を行っていたり、近い未来に数学評価を実施することを計画している。例えば、46の州では数学の基準が設けられていて、23の州では、州の数学評価は最近完成された基準に基づいていると、専門家が報告している。残る23の州は、新たな評価に向けて進行中あるいは計画中である。」とし、改善に向けた努力が着実に進展していると述べている。

(3) 原冊子における数学評価基準の目的

ここで取り上げている冊子における数学評価基準が目指していることは、次の通りである。

1）NAEPとTIMSSの数学評価の枠組みの概観を与えること。

2）8年生の幾何と代数の領域において、NAEPとTIMSS両者の枠組みをいかに比較するかを示すこと。

その意図するところは、数学の枠組みにおいて各領域がどのように内容の範囲を含んでいるかを明らかにすることであり、NAEPとTIMSSの評価における内容について徹底した情報を与えることである。

3）NAEPとTIMSSの調査問題が、評価の枠組みに述べられている多くの数学の内容領域（例えば、数感覚、操作、代数、幾何）に、いかに配置されているかを述べること。

4）NAEPとTIMSSに含まれている幾何と代数の調査問題の例を示すことによって、NAEPとTIMSSの評価の枠組みにおいて、多くの内容領域がいかに取り扱われているかを説明すること。

5）州、地区、学校や学級において数学評価を試みるために、これらの評価に基づく教材をいかに利用するかを述べること。

この基準は、評価と実践との隔たりの橋渡しをするに違いない。

(4) 評価基準において幾何と代数が強調される理由

この冊子は、副題が示しているように、幾何と代数に焦点が当てられていて、それに関して詳細な評価の枠組みや内容、調査問題例などが述べられている。その意味するところは、次の点にあるという。

「TIMSSの結果は、8年生のカリキュラムにおいて、より高度な数学の内容に一層注意を払うことの必要性を一貫して示しているので、この基準は、幾何と代数に焦点化している。本冊子での基準に示されるように、幾何と代数の領域は、1996年のNAEPでの数学の評価問題のおよそ半分、またTIMSSでの問題の1／3を占めている。

- TIMSSの国際的なカリキュラムの分析の結果によれば、高い達成度の国々のカリキュラムは幾何と代数に集中している傾向があり、一方、アメリカの第8学年の数学カリキュラムは、進んだ内容がほとんどなく算数が優勢である。
- TIMSSの第8学年の数学教室のビデオによる調査では、アメリカにおける第8学年の数学授業の

40%が、整数、分数、小数のような算数の内容を含んでいた。一方、これらの内容は、ドイツや日本ではほとんど一般的ではない。ドイツと日本の第8学年の数学授業は、代数や幾何を十分に含んでいる。日本の学校は、すべての生徒に対して第9学年の終わりまで、単一のカリキュラムを提示する。数学では、すべての8年生は代数や幾何にかなり集中したカリキュラムを学習する。

・数学の内容領域の分析、それは、第7学年と第8学年の間の成績において大きく伸びることを示しているが、高い成績を修めている国々のいくつかは、これら2つの領域において最大の伸びを示していることが明らかになった。

・中等学校の最終学年におけるTIMSSの評価では、進んだ数学を学んでいるアメリカの生徒の達成が最も悪いのは、幾何においてであった。全米科学財団の長であるNeal Laneは、次のように注目している。

“これは、第4学年、第8学年での実際の結果に一致している。しかし、これら進んだ生徒が、形式的な幾何コースのすべての学習を行っているということは期待できない。この結果は、幾何と代数の両者は、カリキュラム全体を通して鍵となる科目として必要である、ということを示している。”」

(5) 関係者への呼びかけ

続いて、まず読者への呼びかけの形で、州や地区におけるカリキュラムと評価を振り返るのに重要なこととして、次の4点を図でまとめている。

・アメリカの生徒にいろいろな数学のコースが用意されているかどうかを考えること。あなたの州や学校では、8年生の何%が幾何や代数を学習していますか？

・あなたの生徒の幾何コースや代数コースの内容は、NAEPやTIMSSの枠組みによって描かれるのと同程度に厳格ですか？

・あなたの州や学校区の8年生は、教室での指導として、NAEPやTIMSSに含まれているような幾何や代数の問題を解決する機会を与えられていますか？

・州や地区の第8学年の数学評価は、NAEPやTIMSSにあるような幾何や代数の評価問題のタイプを含んでいますか？

そしてさらに、読者である教師に向けて、「あなたの数学評価を調べるための過程」として、次のように問いかけている。

「この出版の目的の一つは、教育者が、彼ら自身の評価を国家や国際的な評価の内容・行動的期待に関連づけて、調べることを助けることである。以下は、あなたの数学評価の枠組みを分析する過程を通じて、あなたを導く重要な問いである。」

以下、その小見出しのみを列挙しておく。

1．あなたの数学の枠組みでは、どんな内容領域や行動能力を扱っていますか？
理解することは、単に知ること以上のものです。

2．内容領域や実行能力のそれぞれについて、何を強調していますか？

3．（乗法と電卓の使用のように、問題の形式を混ぜることのような）あなたの評価の他の側面を、NAEPやTIMSSとどのように比較していますか？

4．あなたの枠組みでは、幾何と代数の内容領域には何が含まれていますか？

5．あなたの評価は、幅広い問題や挑戦的な調査問題を含んでいますか？

以上みてきたように、現在のアメリカ合衆国における幾何と代数・関数の強調は、好ましいとはい

えなかったTIMSSの結果とその分析から引き起こされた。幾何や代数・関数を強調した指導が行われるためには、州、地区、学校や学級において実際の数学指導に関わる人々に対して、その意義を説明し、理解してもらい、学習指導が変わることが重要である。本稿で取り上げている冊子の刊行は、そのための１つの方策なのである。

3．NAEPとTIMSSの数学評価の枠組みについての比較

ここでは、NAEPとTIMSSの数学評価の枠組みについて述べる。なお、アメリカ独自の国内調査であるNAEPについては、日本においてTIMSSほどには知られていないので原文に忠実に述べ、TIMSSについては、既に国立教育研究所からの報告書（1996, 1997, 1998）が出版されているので簡単に述べることにする。本項(2)、(3)、及び４の(1)〜(3)、５の(1)〜(3)は、[筆者注] として示した部分を除いて、原冊子の全訳である。

(1) NAEPの評価の枠組みの目的

NAEPの評価の枠組みは、国家評価運営会議（NAGB；National Assessment Governing Board）に任され、そのもとで発展している。NAEPに関する方策形成のために1988年に国会によって作られたNAGBは、特に評価の枠組みと調査の詳細を、国家的に共通理解が得られる仕方で発展させること、それぞれの年齢や学年に対する明確な成績の到達点を確定すること、そして、他のNAEPの方策の信頼度をもたらすことを託されている。

NAEPの1996年の数学評価のための枠組みは、広範囲な関心が取り込まれ、また、数学の教育や評価についての最近の国家的な改善の努力、過去のNAEPの枠組みや評価の見きわめ、また、数学教育や評価分野からの勧告を通じて、大学会議（College Board）によって開発された。協議し振り返るという徹底的な過程は、結果的に得られた枠組みが数学教育における主な主張に対して信頼がおけることを確かなものにし、また、生徒のこの分野における成績を改善するためになすべき課題を可能なかぎり提出する。College Board はまた、問題の形式の混在に特に注意を払った調査問題の詳細、数学についての内容領域にわたる問題の分布、そして、例えば操作の使用、電卓の使用、問題を完了する時間というような、生徒に提示される問題の条件についても開発した。

NAEPの数学の枠組みはまた、国家の評価の関連を示す、NAEPの自発的な州レベルの評価に対する基本にもなっている。数学における州レベルの評価は、第８学年が1990、1992、1996年に示されている。同じように第４学年は1992、1996年に示されている。参加者は広範囲にわたっていて、40あるいはそれ以上の州が、それぞれの評価に参加している。

[筆者注：この後TIMSSの評価の説明が続くが省略する。詳細は国内報告書（1996）参照。]

(2) NAEPの数学の枠組みの概観

1996年のNAEP 数学評価の枠組みは、５つの広い領域からなる数学の内容を構成要素として、カリキュラムを考えている（図１参照）。これらの内容の構成要素は、NCTMのCurriculum and Evaluation Standards for School Mathematics の内容基準を反映している。内容の構成要素は、数学をばらばらな要素に分離することを意図しているのではなく、むしろ、数学の内容の十分な範囲を描く、役に立つ分類の枠組みを提供することを意図している。

内容の表現それだけでは、NCTMのStandardsに述べられていたり効果的な数学教育の研究によって示されている数学的思考について、十分には表現することはできない。現実の生活において、数学

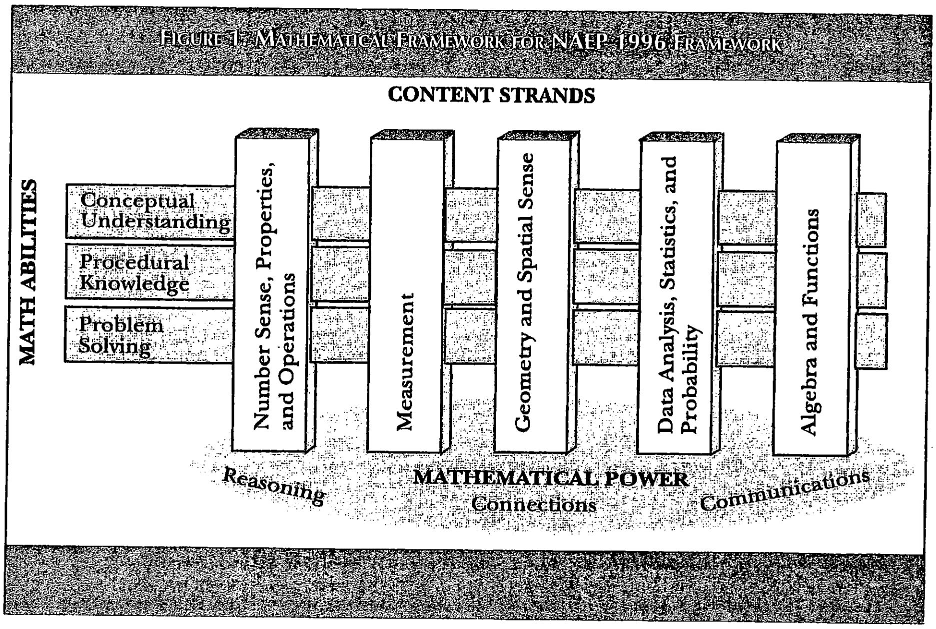


図１　NAEP の数学の枠組み

的状況が、１つ，２つの内容の構成要素に明確に帰着されたり、ただ１つの数学的思考の様相を自然に反映するということはほとんどない。広い視野で調査を構成するには、問題は内容の問題として分類されるだけでなく、数学的能力の広い範囲を把握する方法としても分類されなければならない。問題の分類についてのこの論点を説明するのに、NAEPの枠組みは、基本的には数学の内容の構成要素に焦点を当てているが、「数学的な力」（mathematical power）と言われる評価次元に関連する詳細にも焦点を当てている（図１参照）。

数学的な力は、広い推論の文脈、および数学的内容や思考の広い視野に関連する、数学的能力（概念的理解、手続き的知識、問題解決）からなると考えられる。コミュニケーションは、生徒が課題に対して意味ある反応を用意するための、統合する糸であり方法であるとみられる。NAEPの数学評価においては、推論、つながり、コミュニケーションとしての「数学的な力」の概念は、生徒の成績を測定する際に重要な役割を演じる。答えだけでなく考え方も求める問題を用いることを通して、考えを伝え問題解決のために推論を行い、そして数学的内容の構成要素や他の分野にわたる学習を関連づけることが、生徒に要求される。

(3)　TIMSSの数学の枠組みの概観

TIMSSの目的のために、カリキュラムは、学校の数学と理科についての教科の内容、知的過程（行動的期待）、情緒の結果（将来への展望）からなっている。それらは、生徒の学校での経験の間に、意図され実施され達成されたカリキュラムである。カリキュラムの要素はどれも、内容、行動的期待、将来への展望あるいは文脈という３つの要素の用語で特徴づけられる。これらの３つの要素は、TIMSSの枠組みの面あるいは次元を構成する（図２参照）。枠組みの各面は、区分あるいは下位区分の階層からなっている。

数学において、「内容」の枠組みは、８つの主区分に分かれていて、それぞれは２から28の下位区分からなっている。内容の区分および下位区分は、世界中からの数学教育者、カリキュラムの専門家、教師による徹底的な協議を経て、それに従って同意された。このTIMSSの内容の枠組みは、NAEPの内容区分に対応している。

内容 数／測定／幾何／比例／関数・関係・方程式／資料の表現・確率・統計／初等解析／確証と構造 行動的期待 知ること／決まり切った手順を使うこと／探究することと問題解決／数学的推論／コミュニケーションをすること 将来への展望 態度／仕事／参加／興味を増すこと／心的習慣

図2　TIMSSの数学の枠組み

TIMSSの「行動的期待」の面の枠組みは、数学的文脈にかかわっている際に期待される生徒の行動について述べている。5つの主区分は、「知ること」、「決まり切った手順を使うこと」、「探究することと問題解決」、「数学的推論」、「コミュニケーションをすること」である。行動的期待の面は、NAEPの数学的能力と数学的な力の概念に極めて近く、また、NCTM Standardsに先例がある。内容の面と同様、行動的期待の面は、特別な要素を特徴づける際に詳細を提供するのに使われる、区分や下位区分の階層的な系統を持っている。

「将来への展望」の枠組みは、数学や理科の指導における生徒の態度、関心や動機づけの発達に焦点を当てたカリキュラムの目標を描くことを意図している。この面は、生徒が数学や理科や工学についての経歴を考えることを促進する、という目標と同様に、学習の成果や、好ましい態度に高めることをねらったカリキュラムの内容を描くことを可能にする。

[筆者注：本稿では、TIMSSに関わる基本的な用語の訳は、国内報告書（1996）での表現に合わせてある。原冊子ではこの後、NAEPとTIMSSの枠組みを比較した小項目があるが省略する。]

4．幾何に関する枠組み

(1)　NAEPとTIMSSの第8学年における幾何と空間感覚（認識）

ここでは、NAEPとTIMSSの数学の枠組みにおける、幾何の内容領域を考察する。各内容領域では、NAEPとTIMSSの枠組みは、評価される内容や下位内容についての詳細を含んでいる。

図3に示したように、NAEPの幾何の枠組みは大変詳しく、第8学年の8つの主内容領域と、導入段階で評価できる9番目の領域とを含んでいる。内容領域の多くは下位内容を含んでいる。NAEPの内容と下位内容は、過程の次元を含んでいる。すなわち、生徒は、幾何図形について、位置や関係や性質を含む知識や理解について記述し、描き、適用することが要求される。

図4に示したように、TIMSSの枠組みもまた、幾何に含まれるべき内容についての詳細を含んでいる。しかしながら、TIMSSの枠組みは、行動的期待（つまり、決まり切った手順を使うこと、探究することと問題解決、数学的推論）がすべての具体的にあげられた内容に当てはまるとしているので、その一覧表は、内容にだけ焦点を当てている。TIMSSは、2つの重要な内容領域を持っている。第1の内容領域は、2次元や3次元の幾何における、位置、視覚化、そして形に関するものである。第2の領域は、対称、合同、そして相似に関するものである。

NAEPとTIMSSの幾何の枠組みは、幾何の内容における本質的な重なりを示している。以下は、

両者の枠組みに含まれている6つの重要な内容領域である。

領域1：幾何図形を記述し、視覚化し、描き、作図する。
領域2：幾何図形を組み合わせ、分割し、変形する。
領域3：図形の間の関係を、対称、運動と変換、合同と相似という言葉で確認する。
領域4：問題解決において幾何学的性質や関係を適用する。
領域5：座標や直線の性質を使って、幾何図形や性質を代数的に表現する。
領域6：幾何学的モデルを使って現実世界の問題を解決し、また、幾何学的概念に関する関係を説明する。

(2) NAEPにおける幾何と空間感覚

NAEPの第4学年と第8学年の幾何の内容領域は、幾何的な形の低水準な確認を十分に越えて広範囲にわたっている。NCTMのStandardsは、空間感覚は幾何の研究や評価の統合的な成分でなければならないことを強調している。そして、NAEPの評価は、この見方に一致している。形と変換との結合についての数学的推論と同様に、描くことと作図に焦点が当てられている。幾何学的な文脈における比例の考えを使うことは重要であり、また、幾何学と代数学との初期の連携を図ることも同様に重要である。

先に述べたように（図1参照)、数学的能力（概念的理解、手続き的理解、問題解決)、数学的内容の関係、そしてコミュニケーション技能は、NAEPのすべての内容領域を統合する筋と見られている。

幾何の内容領域においては、内容や下位内容は、NAEPの1996年の数学の枠組みから引用されていて、図3に示されている。内容の一覧表は、全てを含むというよりはむしろ、実例であることを意図されていた。しかしながら、実例をあげるいくつかの水準は、問題の書き手にとって必要であったし、また、評価される内容領域や能力をちょうど含むことを確実にする。さらに、内容や下位内容にわたる知識を統合することを必要とする調査問題は、望ましいものと考えられた。人は毎日の生活において、1つの特別な数学の内容よりもむしろ自らかかわる問題を解決することを期待されている。

なお、図3において、第4、第8、第12学年のそれぞれに対して、以下の記号は、NAEPの枠組みにおいて使われている。つまり、次のことを示している。

●は、下位内容がその学年において評価されること

◎は、下位内容が操作や絵画的モデルを使うような簡単な水準で紹介されてもよいこと

○は、下位内容がその学年では評価されるべきではないこと

	4年	8年	12年
1．幾何図形を記述し、視覚化し、描き、作図する。			
a．言語表現で与えられた図形を、描きスケッチする。	●	●	●
b．図形が与えられ、その幾何的性質の言語表現を書く。	○	●	●
2．形を組み合わせ、分割し、変形した結果を観察し予想する。（すなわち、紙を折ること、切り取ること、タイル張り、立体片の並び替え）	●	●	●

3．変換による図形とその像との関係（合同、相似）を確認する。			
a．運動の幾何（形式的でない：線対称、裏返し、回転、ずらすこと）を使う。	●	●	●
b．変換（平行移動、回転移動、鏡映、拡大、対称）を使う。			
i．総合的な	○	◎	●
ii．代数的な	○	○	●
4．２つ以上の幾何図形の交わりを記述する。			
a．２次元	○	●	●
b．立体の平面による切断	○	●	●
5．合同や相似によって図形を分類し、それらの関係を、適切なところで比例的推論を使って、形式的でなく適用する。	○	●	●
6．問題解決において幾何学的性質や関係を適用する。			
a．間の、中に、上に、外にという概念を使う。	●	●	○
b．問題を解決するためにピタゴラスの関係を使う。	○	●	●
c．相似の観点で比や比例の性質を適用する。	○	◎	●
d．直角三角形の三角比の適用に関する問題を解決する。	○	●	●
7．幾何学的概念についての関係を確立し説明する。			
a．推測する。	●	●	●
b．結論や一般化を確証し正当化する。	●	●	●
c．形式的でない帰納や演繹を使う。	○	●	●
8．幾何学的モデルに関する問題状況を表現し、意味ある文脈で数学的あるいは現実世界の問題を解決するために図形の性質を応用する。	●	●	●
9．幾何図形や性質を座標やベクトルを使て代数的に表現する。			
a．図形を代数的に記述するために、直線の性質（距離、中点、傾き、平行、垂直を含む）を使う。	○	◎	●
b．円錐曲線やその性質を代数的に記述する。	○	○	●
c．問題状況（和、差、スカラー倍、内積）においてベクトルを使う。	○	○	●

図３　NAEP　1996　数学の枠組み：幾何・空間感覚

(3)　TIMSSにおける幾何

TIMSSの詳細な数学の枠組みに関する幾何の内容の部分は、図４に作ってある。

TIMSSの数学の枠組みにおける３つの面（内容、行動的期待、将来への展望）のうち、「内容」の面は、主題をさまざまな特性の水準に分析することからなっている。TIMSSの枠組みにおいて注意したように、区分や下位区分の適切な数を決定することは、挑戦的な仕事であった。TIMSSの枠組みで使われている区分は、多くの国際的な状況のもとで熱心に議論され、使われている枠組みは意図した目的のために適切であるという一致があった。枠組みを発展させる際に、テストの開発者のために必要な詳細を用意することと、詳細な表現においては細かくなるので内容領域の主要な主題が失われるということとの間の緊張がいつもあった。

TIMSSの枠組みの「行動的期待」の面は、知ること、決まり切った手順を使うこと、探究することと問題解決、数学的推論、コミュニケーションすることを含む内容にかかわる際に、生徒が示すことを期待される行動の種類を記述する。

1．幾何：位置、視覚化、形

a．２次元の幾何

座標幾何（直線と座標でのグラフ、平面上での直線の方程式、円錐曲線とそれらの方程式）

基本（点、直線、線分、半直線、角；平行と垂直）

多角形と円（三角形；四角形：それらの分類と性質；ピタゴラスの定理と応用；他の多角形、円、それらの性質）

b．３次元の幾何（３次元の形と面とそれらの性質；空間における平面と直線；空間的知覚と視覚化；３次元における座標系；空間における直線や平面や曲面の方程式）

c．ベクトル

2．幾何：

a．変換（模様、敷き詰め、帯状模様、型紙など；対称［線対称と回転対称、３次元での対称、代数における対称や数の規則性］；変換：対称と合同、拡大［縮小］、幾何的変換の組み合わせ、変換の群構造、変換の行列表現）

b．合同と相似（合同［合同な三角形とそれらの性質；３辺、２辺とその間の角］、合同な四角形と多角形とそれらの性質、相似［相似な三角形とそれらの性質］）

c．定規とコンパスを使った作図

図４　TIMSSの詳細な数学的枠組み：幾何

5．代数・関数に関する枠組み

(1)　NAEPとTIMSSの第８学年における代数・関数

代数についてのNAEPとTIMSSの枠組みは、幾何についての枠組みと同様、かなり重なっている。NAEPの代数についての枠組みは、図５に示してある。それは、７つの中心的な領域と、導入段階で評価できる７つの領域とを含んでいる。TIMSSの代数についての枠組みは、図６に示してある。TIMSSの枠組みは、関数、関係、そして方程式に焦点化されているが、それはある観点からNAEPの枠組みを他の形に作り上げたものである。

NAEPとTIMSSの第８学年における代数・関数に含まれている重要な領域を比較してみると、次の５つの主要な領域がある。

領域１：規則性や関係を認識し広げる。

領域２：状況を代数的に表現するために、記号を使う。

領域３：（指数や平方根を含む）代数式において式の値を求め、操作を実行する。

領域４：１次方程式や不等式を解く（方程式のグラフ表示を含んで）。

領域５：代数的モデルを使って現実世界の問題を解決し、また、代数的な概念に関する関係を説明する。

(2) NAEPにおける代数・関数

NAEPの数学の枠組みでは、代数・関数の内容領域は、第4学年での簡単な規則性に関するものから、第12学年での微積分の前段階や離散数学からの話題に関する高度な解析にまで広がっている。代数は、規則性や関数や関係の研究、言語と表現との相互関連、一般的な計算に基づく構造を作り上げること、そして、状況のモデリングというように、いろいろに考えられている。代数・関数の内容領域においては、内容や下位内容は、NAEPの1996年の数学の枠組みから引用されていて、図5に示されている。学年にわたる範囲を示すために、図5には代数・関数の内容の全てが示されている。しかし、内容の8から14は、元来、高等学校生徒のためのものである（図5で使われている●、◎、○の記号は、図3での使い方と同様である）。

第8学年のこの内容領域には、変数の概念と記号の意味の発展とが含まれている。評価問題には、変数の意味や問題解決の文脈における記号表現の理解が含まれている。生徒は、規則性を表現するのに変数を使うことを問われ、また、同値な代数的表現についての流暢さを示すことが期待されている。生徒は、1次方程式や不等式を解く方法の多様性を利用することができ、モデリングの道具としての1次関数、1次方程式や他の表現に関する基礎的な理解をもつようになるべきである。そしてまた、生徒は、問題を解決しその結論を正当化するために、代数的思考や記号を活用することができるようになるべきである。彼らには、問題状況の表現を数値的に（つまり表を使うこと）、代数的に（つまり方程式や関数を使うこと）、幾何的に（つまりグラフを使うこと）関係づけることが期待されている。

	4年	8年	12年
1．規則性や関数関係の広範な多様性を、表現し広げ補い変換し創造する。			
a．規則性や数列を認める。	●	●	●
b．規則性や関数的な関係を広げる。	●	●	●
c．与えられた言語表現について、規則性を広げ補う（欠けている項を完成する）。	○	●	●
d．規則性を、1つの文脈から他の文脈へ変換する。	◎	●	●
e．規則性や関数的な関係の例を創造する。	●	●	●
f．変数の概念を理解し活用する。	◎	●	●
2．図表やモデルや記号表現の間の変換を行うために、状況に対する多様な表現を使う。	●	●	●
3．数直線や直角座標系を表現の道具として使う。			
a．直線、数直線や直角座標系に点集合を認めたりとったりする。	●	●	●
b．極座標系に点集合を認めたりとったりする。	○	●	●
c．座標を使って活用する。	○	●	●
d．関数のグラフをかく。	○	◎	●
4．数学的あるいは現実世界の問題を解決するために、1次方程式や1次不等式の解を表現し特徴を述べる。			
a．自然数の解集合	●	●	●
b．実数の解集合	◎	●	●

5．数学的あるいは現実世界の問題を解決するために、文脈としての状況を解釈し、実数や代数式について代数的操作を実行する。			
a．適切な道具を使って、意味のある文脈における実数について、基本的な操作を実行する（仲間分けや基本操作、指数、平方根に関する幾つかの操作を含む)。	●	●	●
b．式や公式における置き換えに関する問題を解決する。	○	●	●
c．１変数の公式に関する意味ある問題を解決する。	○	●	●
d．問題を解決するために同値な形式を使う。	○	●	●
6．適切な方法を使って方程式や不等式を解決する。			
a．方程式や不等式をグラフ的に解決する。	○	●	●
b．方程式や不等式を代数的に解決する。	○	○	●
c．方程式や不等式をマトリックスを使って解決する。	○	○	●
7．数学的推論を使う。			
a．推測する。	●	●	●
b．結論や一般化を確証し正当化する。	●	●	●
c．形式的でない帰納や演繹を使う。	◎	●	●
8．離散構造をもつ問題状況を表現する。			
a．有限のグラフやマトリックスを使う。	●	◎	●
b．数列や級数を使う。	○	○	●
c．循環する関係を使う（数やグラフの反復、有限の差を含む)。	○	○	●
9．代数的あるいはグラフ的方法の多様性を使って、また、適切な道具を使って、実数や複素数の解をもつ高次方程式を解く。	○	○	●
10. 方程式の解を近似する（等分、符号の変化、連続近似)。	○	◎	●
11. 関数やその性質を説明するために、適切な記号や専門用語を使う（領域、範囲、関数の合成と逆、を含む)。	○	○	●
12. 種々の関数や関数族に関して、一般の媒介変数や曲線での効果を調べて、数の、記号の、そしてグラフの性質を比較し適用する。	○	◎	●
13. 現実世界の状況をモデル化し扱うために、関数概念を適用する。	○	◎	●
14. 三角法を使う。			
a．問題状況をモデル化するために三角比を使う。	○	○	●
b．現実世界の状況をモデル化するため三角関数や円関数を使う。	○	○	●
c．現実世界の問題を解決するために三角法の概念を適用する。	○	○	●

図５　NAEP　1996　数学の枠組み：代数・関数

(3) TIMSSにおける代数・関数

TIMSSの詳細な数学の枠組みに関する代数・幾何の内容の部分は、図６に作ってある。NAEPが（概念的理解、手続き的知識、問題解決という）内容領域全般にかかわる認知能力に力点を置き、推論コミニュケーション、関係づけを強調することと同様に、TIMSSは、知ること、決まり切った過程を使うこと、調査、問題解決、推論、コミニュケーションすることに関する内容領域全般にかかわる行動的期待を用いている。

TIMSSの内容は、NAEPの内容とは幾分異なったかたちでまとめられていて、そのいくつかの内容は、図６に示されている。第１は、関数、関係、方程式の領域である。また、TIMSSでは、「他の

数、及び数概念」として示されている区分のもとで、数の領域の中にある指数、平方根、累乗根や、比例性の下での線型の補間法や補外法に及んでいる。

1．関数、関係、方程式		a．規則性、関係、関数
		b．方程式、公式
2．数概念	a．指数、平方根、累乗根	
3．比　例	a．線型の補間法、補外法	

図６　TIMSSの詳細な数学的枠組み代数・関数

６．調査問題例

上記３～５．での評価の枠組みについての検討を踏まえて、原冊子では、「次のような問題を、あなたの学級や地区、州では学習していますか」という投げかけで、幾何については33題の、代数・関数については24題の調査問題例とその解説がある。そのうちの問題例は、本稿末に資料としてすべてを列挙してある。幾何、代数・関数それぞれの評価の枠組みのもと、連邦レベルで、実際にどのような問題ができるようになることが期待されているのかを知る上で、大変興味深い問題群である。

なお、幾何と代数・関数に関する問題例の出典別、領域別の問題数は、それぞれ表１、表２の通りである。幾何については領域１、２が初等的な内容であることを考慮すると、第８学年に関係する幾何についても代数・関数についても、TIMSSの調査問題例が多くの部分を占めていることが読み取れる。

表１　幾何の問題例の分布

領域＼	NAEP	TIMSS	新作	計
1	4			4
2	6	2		8
3	1	6		7
4	3	1	1	5
5	1	3	1	5
6	1	3		4
計	16	15	2	33

表２　代数・関数の問題例の分布

領域＼	NAEP	TIMSS	新作	計
1		4		4
2	1	3		4
3	1	3		4
4	1	4	4	9
5	1	1	1	3
計	4	15	5	24

７．日本の算数・数学教育に対する示唆

以上の内容に基づいて、ここでは、日本の算数・数学教育に対する示唆をまとめておく。

①　幾何と代数・関数に関する学習指導の見直し

２．で述べたように、現在アメリカでは、特に第８学年において幾何と代数・関数の指導が強調されている。それは、TIMSSの結果が好ましいものではなかったことから引き起こされたものであり、いつまでも算数にとどまっているべきではない、という提言でもある。

アメリカのこの問題点は、日本においてはそう問題点とはなりえないであろう。なぜならば、中学校第２学年（アメリカの第８学年に相当する）において、全国一律に図形の論証の初期指導が行われ、連立２元１次方程式や１次関数が扱われているからである。アメリカ式にいえば、日本では既に幾何

と代数・関数は強調され続けている。では、日本でのそれに関する学習指導はうまくいっているのであろうか。

アメリカでの幾何と代数・関数の強調を踏まえて、さらに一歩進んで、日本での幾何や代数・関数に関する学習指導の実際はどうなのか、子ども達は理解しているのか、じっくり考える学習が行われているのか等々、実情を的確にとらえて学習指導の改善を図りたい。

② 現実世界とのかかわりの重視

特に幾何に関する評価問題例をみると、アメリカではいかに現実世界とのかかわりを重視しているかがうかがえる。このことは、幾何の問題例30や例31〜33のように、「幾何学的モデルを使って現実世界の問題を解決し、幾何学的概念に関する関係を説明する」という領域6にかかわるものや、代数の問題例24のように、「代数的モデルを使って現実世界の問題を解決し、代数的な概念に関する関係を説明する」という領域5にかかわるものは勿論のこと、例えば、幾何の例24や例25にみられるような現実世界と結び付けた問題例からも明らかである。

翻って日本における学習指導を考えてみると、場面設定が極めて数学的であることに気づく。例えば、上にあげた幾何の問題例24は、日本では「右の直角三角形で、xの値を求めなさい」という、ピタゴラスの定理の単なる演習問題として課せられるであろう。筆者は例24程度は日本流にさっぱりと扱う方がよいと考えているが、無理をしない程度に、現実場面と結び付けて学習指導を進めていくことの意義を改めて考える必要がある。そうすることによって、数学と社会との関係に目を向けるようになり、生徒の数学観、数学学習観をよりよい方向へと導いていくことにつながっていくであろう。

③ すべての子ども達が学習しているという現実の再確認

幾何の問題例23も単なるピタゴラスの定理の適用問題であるが、アメリカの第12年生の正答率は8％である。この正答率の低さは、アメリカの多くの子ども達がピタゴラスの定理を学習していないことの結果であろう。アメリカでは、学年が上がっていくにつれて、数学を学習し続けていく生徒の数が急激に減少するという（Schoenfeld, 1992)。原冊子でも、「多くのアメリカの学生は、数学にしっかりと取り組むことなしに高等学校に入りそして去って行ってしまう。大変早い時期に、より高度な教育への扉を閉ざしてしまう。」と述べられている。

日本の子ども達は、中学校第3学年でピタゴラスの定理を学習する。この定理の数学上の重要性、有用性は勿論のこと、多くの実践研究が示しているように、その授業は生徒達の興味・関心を喚起するに十分である。ピタゴラスの定理を十分に活用できる者から単に定理を知っているという者まで、生徒の理解度は様々であろうが、すべての子ども達がピタゴラスの定理を学んでいるという現実のもつ重みをじっくりと味わってみたい。日本の中学校での数学学習において、ピタゴラスの定理は、幾何と代数が上手に結びつく典型にもなっている。

④ 数学学習の評価の枠組みの再検討

NAEPでの数学評価の枠組みは、「数学の内容」「数学的能力」「数学的な力」からなっている。「数学的能力」には、「概念的理解、手続き的知識、問題解決」があげられていて、さらに「広い推論の文脈、および数学的内容や思考の広い視野に関連する数学的能力からなる」ものとして「数学的な力」があげられている（3(2)参照)。また、TIMSSでの数学評価の枠組みは、「内容」「行動的期待」「将来への展望」からなるとしている（3(3)参照)。

日本において、評価の枠組みは、数学の内容次元を中心に語られることが多いであろう。内容とは別の視点がないわけではないが（長崎栄三他、1997)、「数学的能力」や「数学的な力」という点からの分析を一層重視する必要がある。

近年いろいろと議論になっている観点別学習状況の評価や絶対評価についても、上記の枠組みが参考になるであろう。これらに関しては、基本的な考え方をどうとらえるか、運用に耐えうる資料収集はどうするか、等々、実践的な研究が望まれる。

⑤ いろいろな評価問題の開発

例えば、幾何の問題例2、例5や、例6、例31〜33のように、図をかいたり操作を想起させて答えさせたり、実際に切ったり作ったりして答えさせたりするものがかなり目につく。ペーパーテストで評価するにしても、実際に物を用意して作製させて評価するにしても、大いに学びたい問題例である。

8. おわりに

本稿は、清水静海（筑波大学)、高平小百合（玉川学園女子短期大学)、筆者の3名によるアメリカ訪問時に得た資料に基づいて、アメリカにおける幾何と代数に関する数学評価の改善についてまとめ、日本の算数・数学教育への示唆を得ようとしたものである。

その際の訪問先、および情報提供をしていただいた方々は、次の①〜⑦の通りである。これらは、南イリノイ大学 J.Becker教授によって周到に計画されたものであり、連邦レベルでの教育改革や科学教育政策を把握するのに十分なものであった。

① 連邦数学・理科教育研究センター、ウィスコンシン大学内；National Center for Research in Mathematics and Science Education, Wisconsin University
T.Romberg所長、T.P.Carpenter博士

② アイゼンハワー連邦情報センター、オハイオ州立大学内；Eisenhower National Clearinghouse, Ohio State University
L.Simutis所長、G.Gordon副所長、数学教育担当及び科学教育担当スタッフ

③ 連邦教育省；Department of Education
L.P.Rosen（America Counts´事務局長)、及びスタッフ2名

④ 全米算数・数学教師協議会本部；National Council of Teachers of Mathematics
J.A.Thorpe、及び多数のスタッフ

⑤ 全米科学財団；National Science Foundation
D.M.Spresser博士（数学教育担当)、J.Evans博士（科学教育担当)、及びスタッフ2名

⑥ 全米理科教師会；National Science Teachers Association
G.F.Wheeler事務局長

⑦ 世界中の学校；Schools Around the World
C.F.Stoel課長、M.Baker博士、C.J.Marshall氏

この場をかりて、お世話になった多くの方々に謝意を表したい。

最後に、この資料収集期間中、特に印象的であった点について簡潔に述べておく。

私がその折りに痛感したことは、次の3点であった。

- 教育への莫大な資金投入
- 利用者の立場に立った情報化対応
- 教員確保と教員の質の向上

前2者は、アメリカの教育行政のシステムに羨ましさを感ずるに十分であったが、第3点目は、日本にも間もなく押し寄せてこようとしているものであろう。

アメリカにおいて、教員の不足は大きな問題である。アメリカ全土における幼稚園から高校2年生

までの在学生徒数は、1995～1996年に540万人であったものが2005年度には20％増の640万人になると予想されている。これにともなって、2005年までに相当数の教員の補充が必要になる。この教員不足を補うために、正規の教員養成プログラムを受けていない者に対しても緊急の免許状を与えて急場をしのいでいて、特に理数系教員の不足は深刻であるという。

教員採用率が芳しくない日本の現実と比べてみると、卒業生を送りだす側からは羨ましい状況である。だが、質の点からすると、アメリカが抱える事情は深刻である。

今回のアメリカ訪問先3カ所で、日本での採用率の悪さとともに、2000年4月からの教育職員免許法改正が話題になった。例えば中学校教諭1種免許状取得のために、教科に関する科目が従来の40単位から今回20単位でよいことになったことを知った彼らは、異口同音に、教員になりたい者がたくさんいるのになぜ基準を緩くするのかと問い返してきた。教科専門が苦手ではいい授業ができないのは当然であって、予想される反応であった。

日本の教育の質は、教師の質の高さと教育に対する社会からの期待が支えていたと私は考えているが、このことはいつまで持続するのであろうか。

なお、本研究は、長崎栄三国立教育政策研究所総合研究官を研究代表とする「高等学校の科学教育改革に関する総合的研究」(平成11年度科学教育研究費補助金基盤研究（A)）の一環として行われた。また、本稿は、その研究報告書第5集「アメリカの科学教育の現状と課題」に掲載された筆者による報告に大幅に加筆してまとめたものである。

引用・参考文献

U.S.Department of Education Office of Educational Research and Improvement ; TIMSS as a Starting Point to Examine Mathematics Assessments : An In-Depth Look at Geometry and Algebra.June 1999.

国立教育研究所. 小・中学生の算数・数学、理科の成績－第3回国際数学・理科教育調査国内報告書－. 1996. 東洋館出版社.

国立教育研究所. 中学校の数学教育・理科教育の国際比較－第3回国際数学・理科教育調査報告書－. 1997. 東洋館出版社.

国立教育研究所. 小学校の算数教育・理科教育の国際比較－第3回国際数学・理科教育調査最終報告書－. 1998. 東洋館出版社.

清水静海. アメリカ合衆国における教育改革の動向－連邦レベルの教育改革プランを中心として－. 桑原隆研究代表；全米教育スタンダード改革運動と日本の教育改革との比較研究. 2000, pp.81-93.

Schoenfeld,A. Learning to Think Mathematically : Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. 1992. NCTM.

長崎栄三研究代表. 算数・数学科カリキュラムの改善に関する研究. 1997. 国立教育研究所.

長崎栄三研究代表. アメリカの科学教育の現状と課題. 高等学校の科学教育改革に関する総合的研究・研究報告書第5集. 2001.

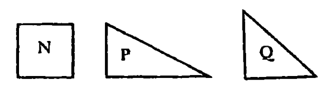
資料1．調査問題例：幾何と空間感覚

問題例の後の［　］内は、出典と調査学年の正答率である。

領域1：幾何図形を記述し，視覚化し，描き，作図する。

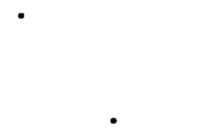
例1：三角形と正方形を記述する。［NAEP 1996，第4学年64%］

ルーラは，3つの形N，P，Qのうちから，他の2つとは異なっている1つを選ぶように言われました。ルーラは，形Nを選びました。形Nはどのように形PやQと異なっているかを説明しなさい。



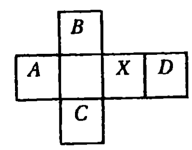
例2：正方形をかく。［NAEP 1992，第4学年40%，第8学年67%］

右の余白に，与えられた点を2つのかどとする正方形を，定規を使ってかきなさい。



例3：3次元の立方体を視覚化する。［NAEP 1992，第4学年22%，第8学年55%］

右の図の正方形は，立方体をある辺にそって切り広げた面を表しています。もとの立方体を面Xを下にして置くとき，どの面が上にきますか。



例4：視覚化し，直線上に点をとる。［NAEP 1996，第8学年23%］

ジェイムは，点A，B，Cについて次のことを知っています。

- 点A，B，Cは同じ直線上にある。しかし，この順ではないかもしれない。
- 点Cは，Aから，Bからの距離の2倍だけ離れている。

ジェイムは，点Cは点Aと点Bの間にあると結論づけました。

ジェイムの結論は正しいですか。

□はい　　　□いいえ

回答欄に，図を使ってあなたの答えを説明しなさい。

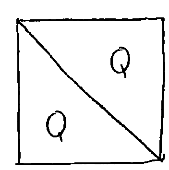
領域2：幾何図形を組み合わせ，分割し，変形する。

例5：三角形をつなげて正方形をかく。［NAEP 1996，第4学年73%］

Qのラベルがはってある2つの紙片が必要です。2つの紙片を探してください。

Qのラベルがはってある2つの紙片を使って，正方形をつくりなさい。

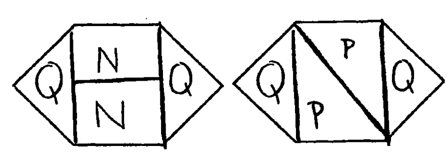
正方形を写しとり，2つの紙片が出会うところがわかるように線をかきなさい。



例6：三角形の形を分ける。［NAEP 1996，第4学年64%］

この問題には，あなたはN，P，Qのラベルがはってある何枚かの紙片が必要です。

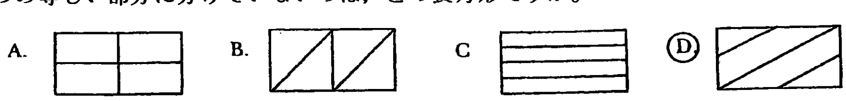
N，P，Qとラベルがはってある6枚の紙片のうちの4枚を使って，右に示した形を作りなさい。紙片が出会うところがわかるように線をかき，紙片にラベルをはりなさい。



例7：等しい部分に分けていない長方形を認める。

［TIMSS 1995，第4学年合衆国83%，シンガポール85%，韓国90%，国際平均値73%］

4つの等しい部分に分けていないのは，どの長方形ですか。

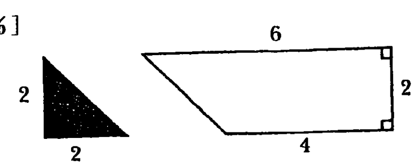


例8：台形の中の三角形

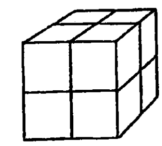
［TIMSS 1995，第8学年合衆国44%，日本84%，国際平均値53%］

右の台形は，影をつけた形と大きさの三角形いくつに分けられますか。

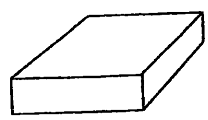
A．3　　B．4　　C．5　　D．6

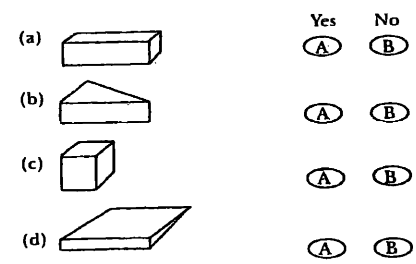


例９：大きな立方体の中の小さな立方体の数。［NAEP 1996，第４学年33％］
　この図で，大きな立方体を作るには，小さな立方体は全部でいくつ必要ですか。
　A．7　　B．8　　C．12　　D．24

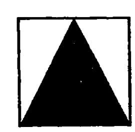


例10：直方体を１回切ってできる形
［NAEP 1992，第12学年，完全正答42％，ａ－90％，ｂ－68％，ｃ－74％，ｄ－56％］
　下に示したキャンディーのかけらは，直方体の形をしています。もしこのファッジをナイフで１回だけ真っすぐに切ると，次のどれが切り取られますか。それぞれの形について，卵形の一方をぬりつぶして「はい」か「いいえ」を示しなさい。

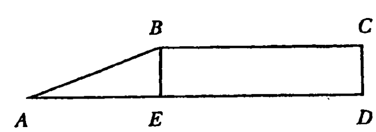




例11：三角形の面積から長方形の面積を見いだす。［NAEP 1992，第８学年49％］
　右に示した影をつけた三角形の面積が４平方インチならば，正方形全部の面積はどのくらいですか。
　A．４平方インチ　　B．８平方インチ
　C．12平方インチ　　D．16平方インチ
　E．情報が十分に与えられていない

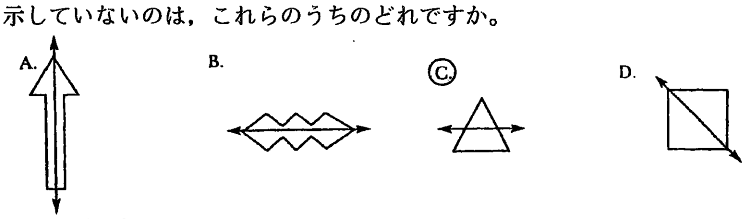


例12：台形の面積。［NAEP 1992，第８学年10％］
　右に示した長方形ＢＣＤＥの面積は，60平方インチです。もしＡＥの長さが10インチで，ＥＤの長さが15インチならば，台形ＡＢＣＤの面積は何平方インチですか。

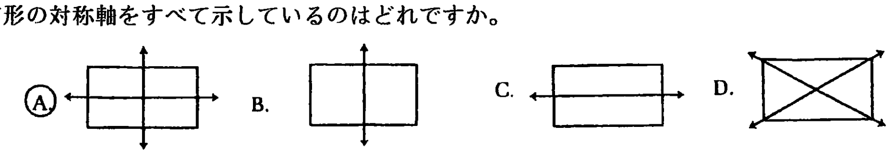


領域３：図形の間の関係を，対称，運動と変換，合同と相似という言葉で確認する。

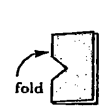
例13：対称軸を示していないのはどれ。
［TIMSS 1995，第４学年合衆国74％，シンガポール93％，国際平均値64％］
　対称軸を示していないのは，これらのうちのどれですか。

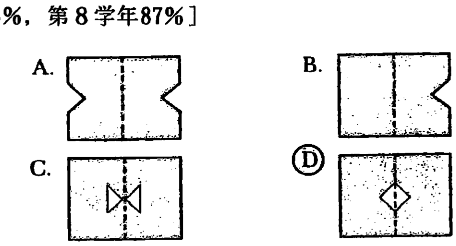


例14：長方形のすべての対称軸。
［TIMSS 1995，第８学年合衆国70％，スコットランド86％，国際平均値66％］
　長方形の対称軸をすべて示しているのはどれですか。



例15：広げた紙を視覚化すること。［NAEP 1992，第４学年65％，第８学年87％］
　１枚の紙を折って，左下のように一部を切り取ります。紙を広げるとどのような形が現れますか。

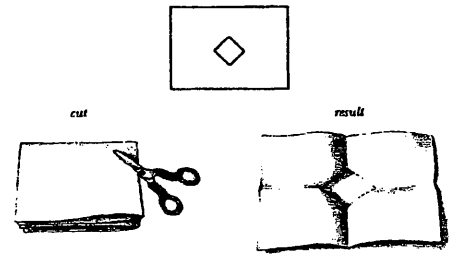




例16：折った紙を視覚化すること。

［TIMSS 1995，第４学年合衆国29%，スロベニア51%，国際平均値33%；第８学年合衆国71%，ルーマニア88%，スロベニア83%，国際平均値72%］

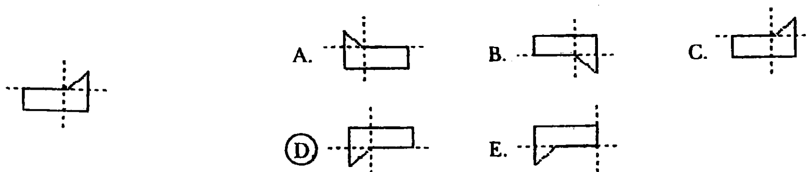
下の形を見なさい。必要な回数だけ紙を折って，紙を広げたら下の形と同じ形になるように，１回だけまっすぐに切りなさい。あなたの紙や切ってできた部分の大きさは，ここに示したものと同じである必要はありません。もしあなたがうまくできなかったら，他の紙でもう１度試してもよいです。あなたはこの作業を全部で３回試みてもかまいません。



例17：半回転を視覚化すること。

［TIMSS 1995，第８学年合衆国42%，香港73%，オランダ70%，国際平均値53%］

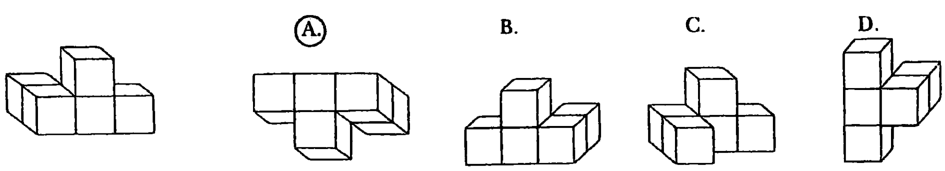
平面上で点Ｔの回りの半回転を影をつけた図形に行います。半回転の結果を示しているのは，どれですか。



例18：３次元での回転を視覚化すること。

［TIMSS 1995，第８学年合衆国62%，チェコ87%，国際平均値68%］

この図形を別の位置に回転させます。回転した後のその図形はどれですか。

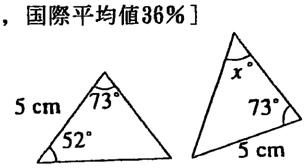


例19：合同変換した三角形における未知の角

［TIMSS 1995，第８学年合衆国17%，シンガポール69%，日本69%，国際平均値36%］

これらの三角形は合同です。三角形の辺や角の大きさは示した通りです。ｘの値は何ですか。

Ａ．52　　Ｂ．55　　Ｃ．65　　Ｄ．73　　Ｅ．75

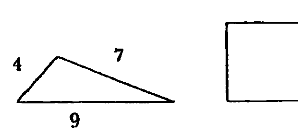


領域４：問題解決において幾何学的性質や関係を適用する。

例20：正方形の辺に関係する三角形の周の長さ。［NAEP 1996，第４学年26%］

もし右の正方形と三角形が同じ周の長さをもつならば、正方形の各辺の長さはどれだけですか。

Ａ．４　　Ｂ．５　　Ｃ．６　　Ｄ．７

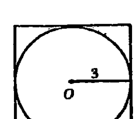


例21：正方形と円の面積。［NAEP 1992，第８学年29%］

右の図で、中心がＯで半径が３の円が、正方形の中にあります。影をつけた部分の面積はどれだけですか。

Ａ．3.86　　Ｂ．7.73　　Ｃ．28.27

Ｄ．32.86　　Ｅ．36.00

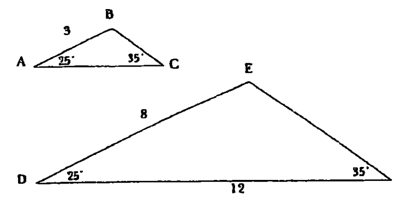


例22：相似な三角形の辺の長さ。

　［TIMSS 1995，第８学年合衆国28%，日本71%，国際平均値38%］

　三角形ＡＢＣと三角形ＤＥＦは、相似な三角形です。

　辺ＡＣの長さはどれだけですか。



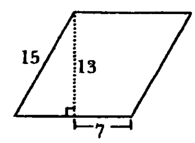
Ａ．２　　Ｂ．４　　Ｃ．4.5　　Ｄ．5.5　　Ｅ．32

例23：平行四辺形の面積を求めるのにピタゴラスの定理を使う。

　［NAEP 1992，第12学年８％］

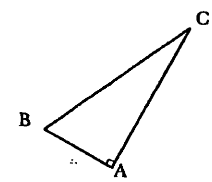
　右の平行四辺形の面積はどれだけですか。

最も近い整数値で答えなさい。



例24：問題解決の文脈でのピタゴラスの定理。［新問題例］

　トレーニングのために、アンナは右に示したような直角三角形の形をした道に沿って自転車で走ります。もしＡからＢまでの距離が５キロメートルで、ＢからＣまでが13キロメートルならば、アンナはトレーニング中に全部で何キロメートルの距離を走りますか。



Ａ．18　　Ｂ．20　　Ｃ．25　　Ｄ．26　　Ｅ．30

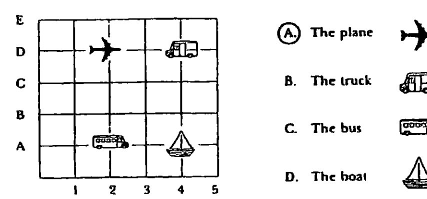
領域５：座標や直線の性質を使って，幾何図形や性質を代数的に表現する。

例25：ゲーム板の上の格子

　［TIMSS 1995，第４学年合衆国97%，オランダ97%，

　国際平均値88%］

　これはゲーム板です。（２，Ｄ）には何が置かれていますか。

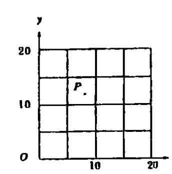


例26：点Ｐの座標

　［TIMSS 1995，第８学年合衆国58%，シンガポール91%，

　オランダ73%，国際平均値55%］

　点Ｐの座標に最も近いのは、次のどれですか。



Ａ．(8,12)　　Ｂ．(8,8)　　Ｃ．(12,8)　　Ｄ．(12,12)

例27：直線上の他の点を確定する。

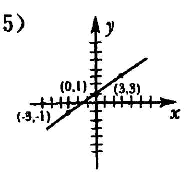
　［TIMSS 1995，第８学年合衆国41%，オランダ66%，シンガポール59%，国際平均値41%］

　点（3,2）と（4,4）を通る直線があります。次の点のうち、この直線上にあるのはどれですか。

Ａ．(1,1)　　Ｂ．(2,4)　　Ｃ．(5,6)　　Ｄ．(6,3)　　Ｅ．(6,5)

例28：直線の傾きを見いだす。［NAEP 1992，第12学年41%］

　右の図に示された直線の傾きは何ですか。



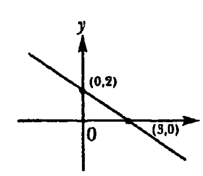
Ａ．1/3　　Ｂ．2/3　　Ｃ．１　　Ｄ．3/3　　Ｅ．３

例29：座標平面上のグラフから直線の方程式を確定する。［新問題例］

　右のｘｙ平面に示された直線ｍの方程式は、次のどれですか。

Ａ．　Ｂ．　Ｃ．　Ｄ．　Ｅ．

（筆者注：選択肢脱落）



領域６：幾何学的モデルを使って現実世界の問題を解決し，また，幾何学的概念に関する関係を説明する。

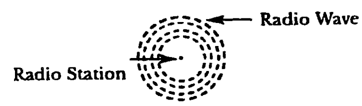
例30：ラジオ放送局。［NAEP 1992，第８学年、無回答15%，誤答45%、半分22%、部分的13%、満足４％、発展させている１％］

　この問題は、あなたの行ったことを示しまたその理由を説明することを要求しています。あなたは、説明するのに図や言葉や数を使ってかまいません。あなたの回答は、他の人がそれを読むことができ、あなたの考えを理解することができるほどに十分に明快であるべきです。あなたにとって、あなたが行ったことすべてを示すことが重要です。

　Math City にあるラジオ放送局ＫＭＡＴは、Geometry City にあるＫＧＥＯから200マイルの所にあります。高速７号線が、２つの市を直線で結んでいます。

　ＫＭＡＴの放送は、放送局からあらゆる方向に150マイルまで、受信することができ、ＫＧＥＯの放送は、あらゆる方向に125マイルまで、受信することができます。ラジオの電波は、右に示したように、各

放送局から空気中を伝わります。



次のページに、次のことを示す図をかきなさい。

- 高速７号線
- ２つの放送局の位置
- ２つの放送を受信することができる高速７号線の部分

高速道路に沿った距離や、両方の放送が受信できる高速道路の部分が何マイルか、はっきりと示しなさい。

例31, 32, 33：パッキング。［TIMSS 1995，第８学年

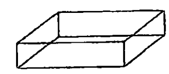
例31：合衆国30%，シンガポール82%，国際平均値43%，

例32：合衆国17%，スイス44%，国際平均値22%，

例33：合衆国４%，ルーマニア51%，国際平均値30%］

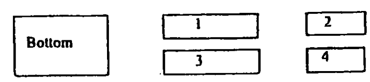
ここではあなたは次のものをもっていなければなりません。；正方形の形をした箱に入った４つのプラスチックのボール、ボールを測るためのうすい紙片２枚、ボールがころがるのを防ぐ青いタック、はさみ、ボールを包むための何枚かの薄い紙片、セロテープ、コンパス、クリップ、30cmの線引き

あなたの課題： ４つのプラスチックのボールがちょうど入る異なった箱を作ること



問題に答える前にこれを読みなさい。

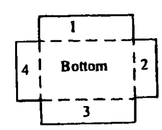
以下は、箱の展開図が何を意味するかを示しています。



この箱には、１つの底面と４つの側面があります。

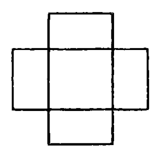
各面は別々に切り取ることができます。

あるいは、右のように、各面は１つに切り取られ、点線に沿って折ることができます。

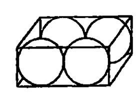


これが箱の展開図です。

これは４つのボールを包む１つの箱の展開図の形です。これは大きさに合わせてかかれてはいませんが、もしそうかかれていれば、あなたは大きさどおりに折り、箱を作ることができるでしょう。



あなたは、ここに示したように、ちょうど４つのボールが入る箱が得られます。



４つのボールがちょうど入るような、異なった形の他の箱を作ることができます。

例31：３つの箱をかく。

ボールを使って、４つのボールがちょうど入るような、３つの他の箱を見つけなさい。４つのボールも入れてそれぞれの箱をかきなさい。

例32：展開図をかく。

それぞれの箱の展開図をかきなさい。

例33：一定の縮尺で展開図を作る。

あなたがかいた箱のうちの１つを選びなさい。平らなカードを取り出し、そのカードに、あなたが選んだ展開図の設計図をかきなさい。もしあなたが箱を作ると４つのボールがちょうど入るように、正しい大きさに展開図をかきなさい。その展開図は、このページにクリップでとめておきなさい。

資料２．調査問題例：代数・関数

問題例の後の［　］内は、出典と調査学年の正答率である。

領域１：規則性や関係を認識し広げる。

例１：規則性を広げる。［TIMSS 1995，第４学年合衆国59%，韓国87%，国際平均値63%］

ここにタイルを規則正しく並べました。

同じように並べると、６番目の図ではタイルはいくつありますか。

A．12　　B．15　　C．18　　D．21

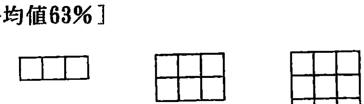


Figure 1　Figure 2　Figure 3

例２：規則性の一般化。

［TIMSS 1995，第４学年合衆国61％，オランダ79％，国際平均値57％］

下の数は、規則正しく並んだ数の一部です。

50，46，42，38，34，…

その次の数を求めるためには、あなたは何をしなければなりませんか。

例３：数列の間の関係。［TIMSS 1995，第８学年合衆国42％，韓国67％，国際平均値45％］

2，7，12，17，22，…では、数は５ずつ増えています。3，10，17，24，31，…では、数は７ずつ増えています。数17は両方の列に現れています。もし２つの列が続いていくと、両方の列に現れる次の数は何ですか。

例４：変数的な表現で与えられた規則性を広げる。

［TIMSS 1995，第８学年合衆国27％，シンガポール42％，国際平均値34％］

あるゴムボールは、それを落とした高さの半分だけ跳ね上がります。もし、そのゴムボールを地上18mの屋根の上から落としたら、３回目に地面に落ちるまでに全部でどのくらいの長さを移動しますか。

A．31.5m　B．40.5m　C．45m　D．63m

領域２：状況を代数的に表現するために、記号を使う。

例５：記号的表現。［TIMSS 1995，第４学年合衆国71％，日本88％，国際平均値62％］

ターニャは130ページの本の初めの78ページを読みました。ターニャがその本を読み終えるまでのページ数を知るには、どの式を使いますか。

A．130＋78＝□　B．□－78＝130　C．130÷78＝□　D．130－78＝□

例６：表現と記号。［TIMSS 1995，第８学年合衆国46％，シンガポール82％，国際平均値58％］

もしmが正の数を表しているならば、どれが$m+m+m+m$と等しいですか。

A．$m+4$　B．$4m$　C．m^4　D．$4(m+1)$

例７：言語的陳述の表現。［TIMSS 1995，第８学年合衆国49％，シンガポール86％，国際平均値47％］

ジーンは、マリアより５つだけ少ない帽子を持っています。クラリッサは、ジーンの３倍だけ帽子を持っています。もしマリアがn個の帽子を持っているとすると、クラリッサが持っている帽子の数を表しているのはどれですか。

A．$5-3n$　B．$3n$　C．$n-5$　D．$3n-5$　E．$3(n-5)$

例８：言語的陳述の表現。［NAEP 1996，第８学年合衆国58％］

配管工は、労働１時間当たり48ドルと交通費として９ドルを加えたものをお客に請求する。もしhが労働時間を表すとすると、配管工に対する全体の費用が何ドルかを計算するのに、次のどの式が使われますか。

A．$49+9+h$　B．$48\times9\times h$　C．$48+(9\times h)$　D．$(49\times9)+h$　E．$(48\times h)+9$

領域３：代数式において式の値を求め、操作を実行する。

例９：式の値を求める。［TIMSS 1995，第８学年合衆国57％，シンガポール80％，国際平均値53％］

$x=2$のときの式 $(7x+4)/(5x-4)$ の値はいくつですか。

例10：式の値を求める。［TIMSS 1995，第８学年合衆国42％，香港82％，国際平均値51％］

引き算 $2x/9-x/3$ をしなさい。

A．$1/9$　B．2　C．x　D．$x/9$　E．$x/81$

例11：変数に関する操作の順序。［TIMSS 1995，第８学年合衆国37％，香港65％，国際平均値40％］

a，b，cが異なる実数であるとき、次のどれが誤りですか。

A．$(a+b)+c=a+(b+c)$　B．$ab=ba$　C．$a+b=b+a$　D．$(ab)c=a(bc)$　E．$a-b=b-a$

例12：科学的な記号。［NAEP 1992，第12学年合衆国48％］

$6\times10^3/3\times10^5=$

A．0.5×10^2　B．2×10^2　C．$2\times10^{0.6}$　D．0.5×10^{-2}　E．2×10^{-2}

領域４：１次方程式や不等式を解く（方程式のグラフ表示を含んで）。

例13：簡単な１次方程式。［TIMSS 1995，第８学年合衆国73％，シンガポール96％，国際平均値73％］

もし $3(x+5)=30$ ならば、xの値は。

A．2　B．5　C．10　D．95

例14：２段階の１次方程式。［TIMSS 1995，第８学年合衆国31％，日本86％，国際平均値46％］

$10x-15=5x+20$ のとき、xを求めなさい。

例15：方程式の意味。［TIMSS 1995，第8学年合衆国32%，日本62%，国際平均値37%］

ブラッドは、たすと81になる連続する3つの自然数を見つけたいと思っていました。彼は、$(n-1)+n+(n+1)=81$ という方程式を書きました。nは何を表していますか。

A．3つの自然数のうちの最小の数　B．真ん中の自然数

C．3つの自然数のうちの最大の数　D．3つの自然数のうちの最大の数と最小の数との差

例16：簡単な不等式。［TIMSS 1995，第8学年合衆国52%，日本69%，シンガポール69%，国際平均値44%］

$x/2<7$と同じものはどれですか。

A．$x<7/2$　B．$x<5$　C．$x<14$　D．$x>5$　E．$x>14$

例17：複雑な不等式。［新問題例］

$x/2<7$と同値なものはどれですか。

A．$y<2/3\cdot x-2$　B．$y<3/2\cdot x+2$　C．$y>3/2\cdot x-2$　D．$y>2/3\cdot x+2$　E．$y>3/2\cdot x+2$

例18：1次方程式、順序対の解。［NAEP 1996，第8学年合衆国42%］

次の順序対（x，y）の中で、方程式 $2x-3y=6$ の解はどれですか。

A．(6,3)　B．(3,0)　C．(3,2)　D．(2,3)　E．(0,3)

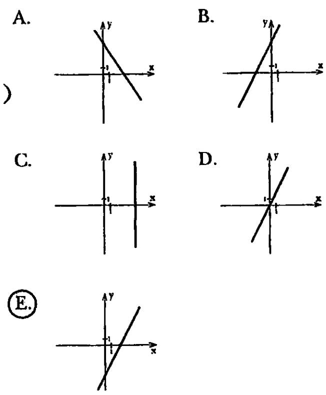
例19：整数解をもたない連立方程式。［新問題例］

もし$2x+y=5$で、かつ$x-2y=7$ならば、xに等しいのはどれですか。

A．$-17/5$　B．-1　C．1　D．17/5　E．17/3

例20：方程式のグラフの確認。［新問題例］

$y=2x-5$ のグラフの一部であるのは、右のどれですか。



例21：方程式のグラフ。［新問題例］

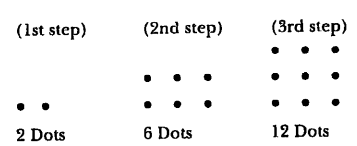
右のxy平面に、$4x-3y=12$ のグラフをかきなさい。（座標平面、略）

領域5：代数的モデルを使って現実世界の問題を解決し、また、代数的な概念に関する関係を説明する。

例22：マーシーのドットの規則性。［NAEP 1992，第8学年合衆国、無回答16%，誤答63%，わずかだけ10%，部分的6%，満足1%，発展させている5%］

この問いは、あなたが行ったことを示し、あなたの推論を説明することを要求しています。あなたは、説明の中で、図や言葉や数を使ってかまいません。あなたの解答は、他の人が読むことができあなたの考えを理解することができるよう、十分に明確でなければなりません。あなたが行ったすべてを示すことが重要です。

ドットの並べ方は、右に示してあります。それぞれの段では、より多くのドットが付け加えられます。各段で付け加えられるドットの数は、前の段に付け加えられる数よりも多くなっています。この並べ方を無限に続けます。



マーシーは20段目にいくつのドットがあるかを求めなければなりません。しかし、彼女は20個の絵を描いてそのドットを数えるということはしたくありません。マーシーがドットの数を求めるには、どうすればよいかを説明しなさい。

（生徒は電卓を使用することができた。）

例23：箱の中のりんご。［TIMSS 1995，第8学年合衆国25%，シンガポール71%，国際平均値32%］

2つの箱の中に、54kgのりんごがあります。第2のりんごの箱の重さは、第1の箱のものよりも12kgだけ重いです。それぞれの箱には、どのくらいの重さのりんごがありますか。あなたの考えたことを示しなさい。

例24：コンパクトディスク。［新問題例］

右のグラフは、ブルーCDクラブ、シルバーCDクラブ、レッドCDクラブからCDを買うときの代金を示している。以下の問いは、これらのグラフに基づいている。

a）入会金が最も高いのは、どのCDクラブですか。あなたの解答の理由も述べなさい。

b）1枚あたりの追加のCDの値段が最も高いのは、どのCDクラブですか。あなたの解答の理由も述べなさい。

c）どんな範囲のCDの枚数に対して、各CDクラブの総代金が安いですか。