

応力塗料膜—境界要素法による2次元応力解析

The two dimensional Stress Analysis by the Brittle
Lacquer—Boundary Element Method

畑 俊 明・紅 林 秀 治*

Toshiaki HATA, Syūji KUREBAYASI

(昭和62年10月12日受理)

abstract

There are two kinds of methods in the field of stress analysis. One of them is the experimental method. The other is the numerical method. These two methods have both merits and demerits in the analysis of structures. Therefore it is very difficult to analyse the stress of structures accurately by means of one method.

In the paper, we propose the new method, that is, the numerical-experimental method, which combines two kinds of methods. The method is the Boundary Element Method together with the Brittle Lacquer Method, which can analyse the stress in the structures accurately and easily.

1 はじめに

構造物にある力が作用した時、その構造物の部材内には、その力に対して構造物の形状を維持しようとする力が生ずる。その部材内に生ずる単位面積当りの力を、材料力学では応力と呼んでいる。その応力の大きさを予め知ることは、構造物や道具類の安全で経済的な設計に重要な意味をなすため、応力解析は、古くから、多くの人々により試みられてきた。

この応力解析の方法は、二つに大別される。一つは、実験的に解析する方法であり、他の一つは、理論的に解析する方法である。

実験的な方法には、光弾性法、モアレ法、応力塗料膜法、ストレインゲージ法等⁽¹⁾がある。また、理論的な解法には、理論解法と数値解析法がある。理論解法と呼ばれる方法は、応力、歪、変位が領域内部で応力の釣合い方程式、応力歪関係式、適合条件式等を満足し境界上で境界条件を満足するように数式で解析を行なう方法であり、数値解析法は、上記の方程式が境界条件を数値的に満足するように解析する方法である。後者には、差分法、有限要素法、境界要素法等がある。

実験的な方法は、万能でなく一長一短がある。例えば、透過光弾性法は、透明な高分子材料のモデルを使用し、これに偏光を通すことにより、かなり正確に応力や歪を測定することができる方法であるが、これは、モデル実験であり、反射式光弾性法を用いたとしても大きな構造物の応力解析を行なうことはできない。また、モアレ法は、モアレ縞模様の理論に基づいての歪の測定法であるが、光弾性実験法以上の結果は得にくい。大きな構造物の応力解析法としては、

* 大学院教育学研究科研究生

応力塗料膜法とストレインゲージ法を併用し、応力集中の高い箇所の応力を直接測定する方法が有効であるが、この方法でも、応力集中部付近の応力分布を正確に定量的に把握するのは困難なように思われる。

理論的な解法は、一言でいえば、Navier の方程式の解を境界条件が満足するように求める方法であるから、境界条件を正確に把握しなければ、正しい解析結果を得ることができない。ところが、実際の構造物では、境界条件を正確に把握することは難しいので、正しい解析結果を得ることは容易ではない。そこで実際の任意形状構造物の設計の際、正確かつ簡便な応力解析法が要求される。

本報では、2次元弾性問題に限定し、自動入力によるパーソナルコンピューターを用いた境界要素法解析と、応力塗料膜法とを組み合わせる応力解析法を提唱する。この方法の利点は、実験的な方法と理論的な解法を組み合わせることにより、実際の任意形状の構造物の応力解析が簡単にかつ正確に行えるものである。なぜなら、境界要素法の境界条件を応力塗料膜法による実験値で与えることができるからである。本報の目的は、両側切欠を有する帯板の一軸引張りを例に、この組合せによる応力解析システムの有効性を明確にしようとするものである。

2 境界要素法のための2次元弾性問題の応力解析

境界要素法による応力解析は、簡単に述べると、次のような過程を経て行なわれる。

まず、解析する領域の境界を有限の大きさを持つ境界要素に分割する。次に領域内の任意点における応力の値を関数値として導き、それを連立一次方程式に構成して解いていく。連立一次方程式に構成して解くという点では、有限要素法と大変類似しているが、有限要素法では解析する領域全体を有限個の要素に分割するため、各要素に与えるデータ数が、境界要素法に比して非常に多くなる。従って、少ないデータで解析できる境界要素法は、パーソナルコンピューターの普及と共に注目を浴びてきた。

2-1 境界要素法基礎式の導出⁽²⁾⁻⁽⁵⁾

ある弾性体内に働く応力を示す式として、応力の釣合方程式がある。ここで、図1に示すように、 x_1, x_2 平面上の弾性体の領域を Ω 、境界を Γ とすると、 Ω 内で作用する力の釣合方程式は、一般に式(1)のように示される。

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

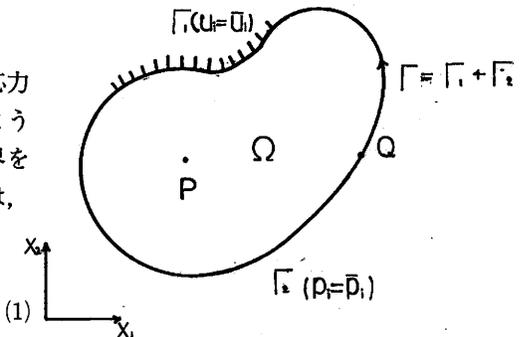


図1 領域と境界

ここで、 σ_{ij} は応力、 b_i は物体力である。また、コンマの次の添字の j は x_j での偏微分を意味する。このときの境界 Γ 上の境界条件として、変位 u と表面力 p が与えられる。ここでは、境界 Γ を2分して Γ_1 と Γ_2 とした時の境界条件を式(2)に示す。ただし、添字の i は、 x_i 方向の成分であることを意味している。

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1, \quad p_i = \bar{p}_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (2)$$

ここで、 u_i, p_i はそれぞれ変位、表面力であり、 \bar{u}_i, \bar{p}_i は、変位置量、表面力量である。境

要素法では、式(1)の σ_{ij} を式(2)の u_i, p_i を用いて求めようとするものである。そこで境界上の変位及び表面力と領域内の応力との関係式を導くために基本解を用いる。基本解とは、無限領域に単位集中力が作用した時の応力、変位及び表面力をいう。

無限領域上の点 p' に単位集中力が作用した時の点 p 上の応力を σ_{ij}^* とすると式(1)の釣合方程式は、式(3)に示される。

$$\sigma_{i,j}^* + \delta(p, p') e_i = 0 \quad (3)$$

ここで $\delta(p, p')$ は、ディラックのデルタ関数であり、 e_i は、 x_i 方向の単位力である。基本解を示す記号には、“*”をつけて区別する。同様に点 p 上の変位及び表面力の基本解も式(4)のように示される。

$$\begin{aligned} u_i^*(p) &= u_{ij}^* e_j \\ p_i^*(p) &= p_{ij}^* e_j \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 u_{ij}^* は、変位の基本テンソル、 p_{ij}^* は、表面力の基本テンソルとする。この基本テンソルは、単位力が作用したときに生ずる変位と表面力である。但し、各基本テンソルの第一添字は、生じた変位及び表面力の方向を示し、第二添字は、作用した単位力の方向を示している。平面応力時の基本テンソルの内容は、具体的には、次式のようになる。

$$\begin{aligned} u_{im}^* &= \frac{1+\nu}{4\pi E} \left\{ (3-\nu) \log \frac{1}{r} \delta_{im} + (1+\nu) \frac{x_i x_m}{r^2} \right\} \\ p_{im}^* &= -\frac{1}{4\pi r} \left[\left\{ (1-\nu) \delta_{im} + 2(1+\nu) \frac{x_i x_m}{r^2} \right\} (x_i n_i + x_m n_m) \right. \\ &\quad \left. - (1-\nu)(x_i n_m - x_m n_i)(1-\delta_{im}) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 δ_{im} はクロネッカのデルタ関数、 n_i, n_m は x_i, x_m 方向の境界外向き法線の方向余弦、 r は単位力の作用点 p' からの点 p までの距離で、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比を意味する。

更に、式(1)から(4)と相反定理を用いて、図1の Ω 内の任意点における変位を境界 Γ 上における変位と表面力から求める式を導く。相反定理より、領域 Ω 内の物体力と表面力及び変位の基本解との積は、基本解の単位力及び表面力と Ω 上の変位との積に等しい。従って、次式を得る。

$$\int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \delta(p, p') e_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma \quad (6)$$

ここでの解析では、重力や磁力による影響が少ない場合の応力解析に限るものとして物体力を0とみなす。また単位集中力は、点 p' に作用するディラックのデルタ関数であることから式(6)は式(7)のようになる。

$$\int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma = e_i u_i(p') + \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma \quad (7)$$

そして、式(4)を式(7)へ代入して、両辺の e_i を消去すると式(8)を得る。

$$\int_{\Gamma} p_i u_{j,i}^* d\Gamma = u_i(p') + \int_{\Gamma} p_{j,i}^* u_j d\Gamma \quad (8)$$

式(8)を、マトリックスで表示するならば、次式となる。

$$\mathbf{u}(p') = \int_{\Gamma} (\mathbf{U}^{*T} \mathbf{p} - \mathbf{P}^{*T} \mathbf{u}) d\Gamma \quad (9)$$

ここで \mathbf{U}^* , \mathbf{P}^* は、基本テンソルマトリックスである。式(9)より、弾性領域内の点 p' における変位は、基本テンソルと境界上の変位及び表面力により求められる。

さらに、式(9)の領域内の点 p' を境界 Γ 上の点 Q に移動させ、その極限値を求めたならば、境界積分方程式が得られる。この境界積分方程式は、次式(9)となる。

$$\mathbf{u}(Q) = 2 \int_{\Gamma} (\mathbf{U}^{*T} \mathbf{p} - \mathbf{P}^{*T} \mathbf{u}) d\Gamma \quad (10)$$

式(10)の境界積分方程式は、境界上の未知な変位と表面力の値を求めるために用いられる。従って、式(9)及び式(10)を用いることにより、領域内の任意点における変位が求められる。次に変位をもとに、応力変位関係式(11)に代入することにより応力値を求めることができる。

$$\sigma_{lm} = \mu(u_{l,m} + u_{m,l}) + \lambda \delta_{lm} u_{k,k} \quad (l, m, k = 1, 2) \quad (11)$$

ここで μ , λ はラーメの定数である。

以上境界要素法では、式(9)から(10)を用いることにより、境界上の変位と表面力から、領域内部任意点における応力値を計算できることになる。

2-2 数値計算

数値計算に際して、式(8)及び(9)を離散化シガウスの4点積分公式を用いて計算した。計算機としてパーソナルコンピュータ(PC-9801 M2)を用いて行なった。境界条件代入の際、デジタイザ(グラフィック(株)マイタプレットII)⁽⁶⁾を用いることにより、境界条件の一つの図形情報を、簡単に入力できるようにした。また、境界条件としての変位及び表面力の値の代入は、デジタイザで図形入力をした後にディスプレイ上で、位置を確認しながら行なえるようにした。また、プログラムは平面歪問題と平面応力問題を任意に選択できるようにした。そのシステム図を図2に示す。

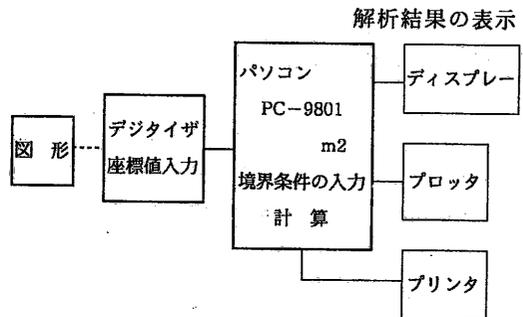


図2 システム図

2-3 境界要素法解析に関する考察

この境界要素法による応力解析システムを用いれば、任意形状の応力値を簡単に求めること

ができる。ところが、実際の構造物の応力解析を行なう際、境界条件を仮定しなければならない。この問題は、境界要素法だけでなく、数値解析法の全てに関して言えるものである。

そこで、本報では、この境界条件を、実験的な応力解析法で求めることを検討してみた。その結果、実際の構造物の境界応力が比較的簡単に求められる応力塗料膜法が最適であると考えた。なぜなら、応力塗料膜法は、光弾性実験法やモアレ法のように大きな実験装置を必要としないので、実際の構造物の応力解析が行なえるからである。

3 応力塗料膜法のための応力解析

応力塗料膜法とは、脆性の高い塗料を試験物体上に直接塗布し、負荷時に現れるき裂模様から物体表面の応力・歪分布を全体的に解析する方法をいう。⁽¹⁰⁾ここでは、その測定法について述べる。

3-1 き裂と歪の関係

塗料膜は、引張り主歪の方向に垂直にき裂する。そのき裂は、物体表面に生じた歪の大きさに対応し、歪が大きいたち所ではき裂が多く、歪が小さいところではき裂が少ない。この対応関係を利用することにより、定量的な応力解析を行なうことができる。⁽⁷⁾⁽⁸⁾

そこで応力塗料膜法では、塗料を塗った带状試験片に片持ち曲げ荷重を加えることにより、塗膜に生じた単位長さ当りのき裂数(以後き裂密度と言う。)と歪の関係を明らかにする。塗料を塗った带状試験片に、片持ち曲げ荷重Wを加えれば塗膜に縞のようなき裂が生じる。(図3(a)及び(b))

荷重点からき裂を生じ始めた点までの距離を l_0 とすれば、その点の応力 σ 及び歪 ϵ は、次式で示される。

$$\sigma = (6W/bh^2)l_0 \tag{12}$$

$$\epsilon = (3/2)(hl_0/L^3)\delta_0 \tag{13}$$

ここで b, h は、試験片の幅と高さである。また、式(13)の δ_0 は荷重点でのたわみ量である。式(13)より求められる歪値を応力塗料膜法では、歪感度といい、塗膜のき裂生成条件の目安としている。⁽¹⁸⁾

き裂縞模様は、荷重端から遠ざかるにつれて、すなわち歪量が増すにつれてき裂密度(本/mm)は増加する。ところが、それは、やがて飽和状態に達し歪量が増加してもき裂密度は一定となる。(図3(C))この歪とき裂密度が、正比例する範囲を用いれば歪の定量的測定を行なうことができる。⁽⁹⁾従って、実物試験の場合、この片持ち梁試験を同時に行なうことによって、試験物体の塗膜面直下の主歪値を測定することができる。この歪値に縦弾性係数をかけることにより具体的に応力値を求めることが可能になる。

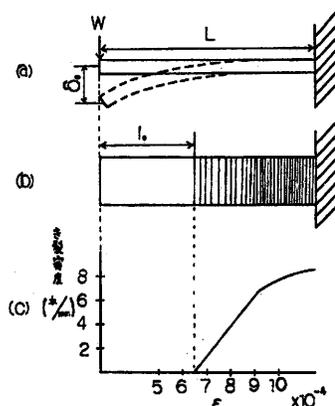


図3 歪とき裂密度

3-2 応力塗料膜法による2次元応力解析⁽⁹⁾⁽¹¹⁾

塗膜に生ずるき裂は、試験片に生ずる最大主歪に垂直に生ずる。⁽¹²⁾この性質を利用して、2次元の応力解析を行なうことができる。この場合、主歪の方向と主引張りの方向は、一致する

ものと考え、塗膜のき裂密度より主歪の大きさを求めることができる。この主歪に縦弾性係数をかけることにより $(\sigma_1 - \nu\sigma_2)$ なる応力値が求められる。なお、 σ_1 、 σ_2 は主応力である。

他方、2次元の応力解析においては、主応力和 $(\sigma_1 + \sigma_2)$ は、その平面内においてラプラス方程式を満足する。但し、試験片の境界周辺では、 $\sigma_2 = 0$ なる故に σ_1 のみの応力となる。

従って、境界周辺での応力値は、簡単に求められる。

応力塗料膜法では、これらの性質を利用して、主応力 σ_1 、 σ_2 を求めることができる。つまり、平面内において主応力和は、ラプラス方程式を満たしている。

$$\nabla^2 S = 0 \quad (14)$$

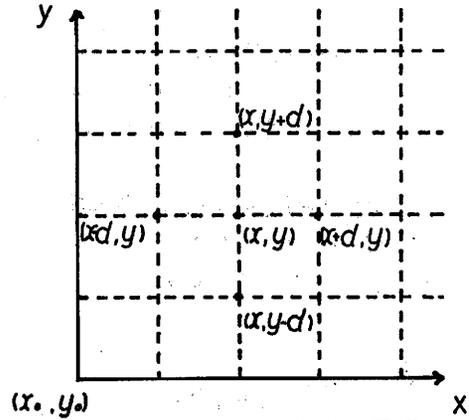


図4 等間隔差分格子配置図

ここで $S = \sigma_1 + \sigma_2$ である。図4のように試験片内の平面 (xy 平面) を、 x_0 、 y_0 を原点として、 x 軸及び y 軸に平行な多数の平行線により分割する。その場合一つの網目の間隔を d とすれば、ラプラス方程式は、近似的に次式となる。

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{S(x+d, y) - 2S(x, y) + S(x-d, y)}{d^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{S(x, y+d) - 2S(x, y) + S(x, y-d)}{d^2}$$

従って、次式を得る。

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{1}{d^2} \{ S(x+d, y) + S(x-d, y) + S(x, y+d) + S(x, y-d) - 4S(x, y) \} \quad (15)$$

ここで、式(14)及び式(15)より、 $S(x, y)$ は、次式により求まる。

$$S(x, y) = \frac{1}{4} \{ S(x+d, y) + S(x-d, y) + S(x, y+d) + S(x, y-d) \} \quad (16)$$

式(16)より、点 (x, y) における主応力和 S の値は、4つの周辺隣接位置の S の値から得られる平均をとることにより求められる。ところが、隣接点の中で数点が d より小さくなる場合には、次の砂谷、根来の式(17)⁽⁹⁾を用いる。この式の S_k 、 r は、主応力和 $S(x, y)$ にあたる。式(17)を用いれば形状が複雑な場合にも主応力和 S の値を p 、 q を適当に与えることにより求めることができる。

$$S_k, r = \frac{\left\{ \frac{SK+1, r}{1+p} + \frac{SK-1, r}{q(1+q)} \right\}}{\frac{1}{p}} + \frac{\left\{ \frac{SKr+1}{1+q} + \frac{SKr-1}{q(1+q)} \right\}}{\frac{1}{q}} \quad (0 < p < 1, \quad 0 < q < 1) \quad (17)$$

従って、塗膜のき裂密度より主応力和 S の周辺値を求めることにより、式(16)、(17)を用いて順次内部各位置における主応力和 S の値を求めることができる。このようにして求められる $S = \sigma_1 + \sigma_2$ と、塗膜のき裂密度より得られる $\sigma_1 - \nu\sigma_2$ を連立して、任意点における σ_1 と σ_2 の値を求めることができる。

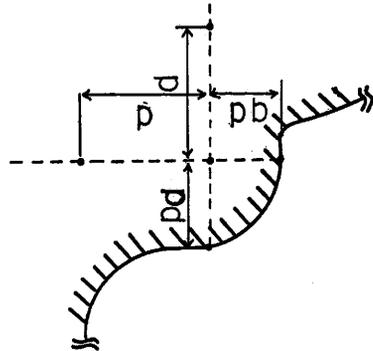


図5 不等間隔差分格子配置図

以上応力塗料膜法における応力解析の手順は、次のようにまとめることができる。

- 1) 塗料を塗った片持ち梁試験片に荷重をかけ、き裂密度と歪の関係を明らかにする。
- 2) 試験片に生じた塗膜のき裂密度から歪値を割り出し、その歪値に試験片の縦弾性係数をかけて応力値 σ を得る。2次元問題では応力 σ と主応力 σ_1 と σ_2 の関係は、次式より得られる。

$$\sigma = \sigma_1 - \nu\sigma_2 \tag{18}$$

3) 2次元問題では、主応力 σ_1 と σ_2 の和は、ラプラス方程式を満足する。従って、 $S = \sigma_1 + \sigma_2$ とおくと、 $\nabla^2 S = 0$ となる。試験片周辺においては、 $\sigma_2 = 0$ より周辺部の S の値は、式(18)より得られる。そして、その値をもとに、式(16)、(17)を用いて順次階段的に主応力和 S の値を求めていく。

4) 試験片上の同一点における S の値と σ の値より式(18)と式(13)を連立させ、 σ_1 と σ_2 の値を式(19)より求める。

$$\sigma_1 = \frac{\nu S + \sigma}{1 + \nu}, \quad \sigma_2 = \frac{S - \sigma}{1 + \nu} \tag{19}$$

以上が応力塗料膜法における応力解析の方法である。

応力塗料膜法では、上述の4段階の過程を経てようやく応力解析ができる。この実験方法は、実際の構造物から直接応力解析を行なうには非常に有効であると考えられるが、応力の全体解析を行なう上で、式(16)及び式(17)を駆使して内部における主応力和を求めなければならない。そして、この作業は非常に時間がかかるものである。

本報では、これらの欠点を補うために、応力塗料膜実験により応力を全体的に解析せず一部の解析結果のみを境界要素法の境界条件として用いて解析を行なえば、実際の構造物の応力解析を簡単に行なえる点に着目して、応力塗料膜法と境界要素法を組合わせた応力解析法を提唱する。

4 応力塗料膜—境界要素法による応力解析

境界要素法では、任意形状の応力解析が容易に行なえるものの、その境界条件は、仮定しなければならないという欠点があった。また、応力塗料膜法では、応力解析に式(16)及び式(17)を用いて主応力和を求めるために非常に解析に時間がかかる。そこで本報では、応力塗料膜法で境界条件を求めて、それをもとに境界要素法応力解析を行なう。

ここでは、一軸引張りを受ける両側に双曲線の切欠きを有する帯板を例にこの組合せによる応力解析の有効性を明確にする。

4-1 試験片

試験片は、図6の形状のアルミニウム板(厚さ2ミリ縦弾性係数7200kg/mm²、ポアソン比0.34)を用いた。また、歪感度を調べる帯状試験片は、同じアルミニウム板から長さ200ミリ、幅30ミリの帯板を作成しこれを用いた。

4-2 実験方法及び実験結果

本実験では、応力塗料として応力塗料CRUXのSC-20(特殊塗料株式会社)を用いた。塗料乾燥後の試験片をアムスラー型引張

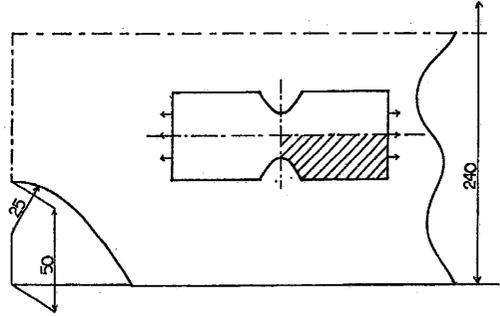


図6 試験片形状

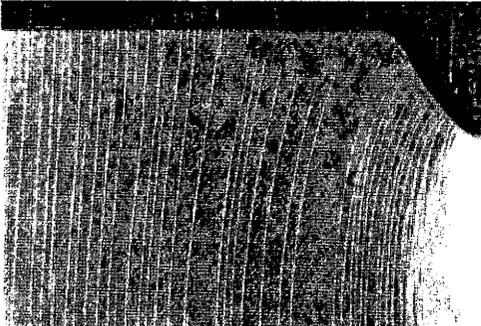


図7 き裂写真

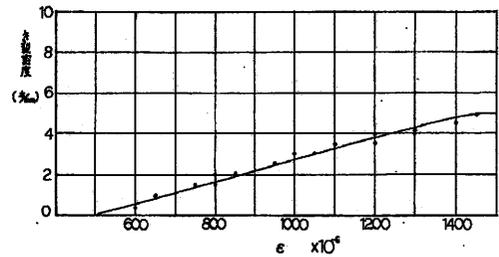
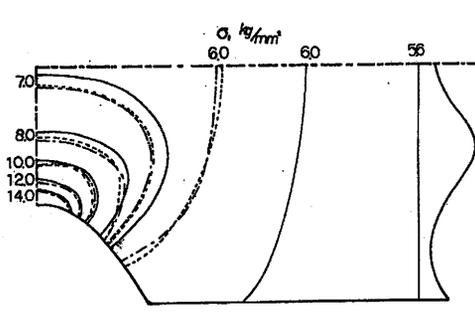


図8 歪 - き裂密度曲線

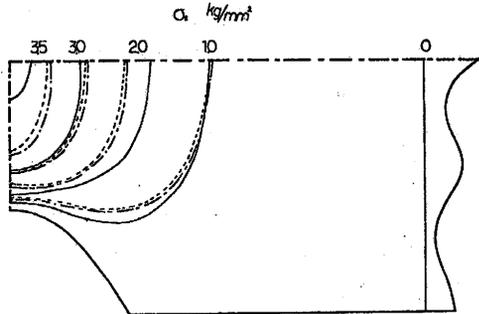
り試験機(最大荷重10t)を用いて引張り試験を行なった。実験後の試験片のき裂検出は、写真撮影により行なった。その結果、試験片については、図7の写真に示すき裂模様と、図8に示す歪とき裂密度の関係が得られた。

試験片上に得られたき裂密度より、各位置における $(\sigma_1 - \nu\sigma_2)$ を求める。次に試験片の周辺におけるき裂密度から、主応力 σ_1 と $(\sigma_1 + \sigma_2)$ の周辺値を知ることができる。それにより、順次階差的に各位置における値を求めると、主応力 σ_1 の値と σ_2 は、図9、図10の実線で示すような分布を示した。これが応力塗料膜法のみから得られた結果である。なお、一点鎖線は、Neuberの計算結果による厳密解を示す。⁽¹⁴⁾



—— 応力塗料膜法
 - - - 厳密解
 境界要素法解析

図9 等応力線図 (σ_1)



—— 応力塗料膜法
 - - - 厳密解
 境界要素法解析

図10 等応力線図 (σ_2)

次に、応力塗料膜—境界要素法解析法を示す。図9と図10より明らかなように、試験片の端面付近では、垂直断面応力は、 $\sigma_1 = 5.6$ 、 $\sigma_2 = 0$ となる。また境界周辺のき裂密度は、 σ_1 のみの値を示すことより、それらを境界条件として境界要素を60に分割し、平面応力解析を行なった。境界分割図は、図11に示す。その結果主応力 σ_1 と σ_2 に関して、図9と図10の点線で示す結果を得た。

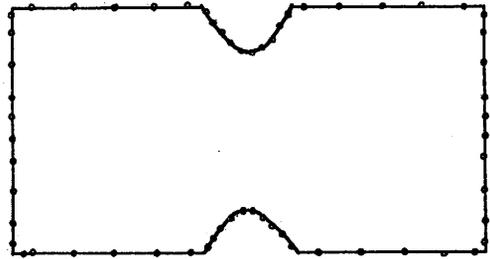


図11 境界分割図

4-3 考察

図9より、切欠きの断面では、境界要素法解析の結果は、境界付近を除き、ほとんどNueberの計算結果と一致している。ところが、応力塗料膜法では、境界要素法の解析結果ほど正確な結果は、得られていない。その理由とし応力塗料膜法は、比較的高い精度⁽¹³⁾で測定を行えるが、応力集中部では単軸応力状態とは異なり、応力分布が複雑であり、また、主応力和($\sigma_1 + \sigma_2$)を求めるにあたり周辺応力値から階差的に求めて行くため誤差が多くなるという2点が考えられる。ところが、境界要素法との解析を併用すると、応力分布や境界周辺での値を境界条件とするために、応力塗料膜法よりも正確で簡単に解析し得ると考えられる。

5 まとめ

本報は、応力塗料膜—境界要素法による応力解析システムの有効性を実証することを目的としている。この応力解析システムの特徴は、実際の構造物の境界条件を応力塗料膜法により解析し、その値を境界要素法による2次元応力解析で解析することである。また、その解析には、パーソナルコンピュータとデジタイザを組合わせたシステムを用いることにより比較的簡単

に解析が行なうことができる。そして、具体的に双曲線の切欠きを有する帯板に関して引張り実験を行ない、その結果をNeuberの解析結果と比較し精度についての検討を行った。その結果、本応力解析システムの有効性が実証された。

境界要素法では、境界が、自由端であるならば、表面力0、固定端であるならば、変位0として境界条件を与えることができるが、荷重が負荷している部分の表面力や変位を正確に、把握できない。ところが、この組み合わせによる応力解析システムを用いれば、境界条件となり得る表面力をき裂密度から得ることができる。そして応力塗料膜法による全体解析を必要としない非常に能率的な応力解析法が確立できた。

また、この方法は、実際の構造物の応力を簡単に示すことができるため、構造物設計や金属加工学習に力学的根拠を与える教材として中学校や高等学校の授業に利用することもできよう。

最後に本研究に際し、数々の御助言を頂きました静岡大学教育学部須見尚文教授に謝意を表します。

参考文献

- (1) 菅野昭, 高橋賞, 吉野利男: 応力ひずみ解析, 朝倉書店(1986)
- (2) 神谷紀生: 境界要素法の基礎, 培風館(1982)
- (3) プレビア, C.A. (神谷紀生, 田中正隆, 田中喜久昭 共訳): 境界要素法入門, 培風館(1980)
- (4) プレビア, C.A., ウォーカー, S. (神谷紀生, 田中正隆, 田中喜久昭 共訳): 境界要素法の基礎と応用, 培風館(1981)
- (5) 下関正義, 戸川隼人: パソコンによる境界要素法入門, サイエンス社(1984)
- (6) デジタイザK D4030マニュアル, グラフテック株式会社(1984)
- (7) A. V. De Forest, Greer Ellis, F. B. Stern Jr.: Journal of Applied Mechaics, vol. 9, No. 4 (1943) P. 184-188
- (8) Greer Eliss: Proceeding of the Society for Experimental Stress Analysis, vol. 1, No. 1(1943) P. 46-60
- (9) 西原利夫, 平修二, 前田春興: 日本機械学会誌, 53巻380号, (1950) P. 340-346
- (10) 菅野昭, 高橋賞, 吉野利男: 応力ひずみ解析, 朝倉書店(1986) P. 59-75
- (11) 西原利夫, 前田春興, 藤井太一: 日本機械学会論文集, 18巻, 56号, (1952) P. 5-9
- (12) 西原利夫, 平修二, 前田春興: 材料試験, 2巻, 7号, 1953) P. 284-290
- (13) 西原利夫, 平修二, 前田春興: 材料試験, 2巻, 9号, 1953) P. 429-493
- (14) H. Neuber: Kerbspannungslehre, Springer-Verlag (1958)