

論 説

景気循環の非線形モデル・アプローチ

—Hoph Bifurcation Theorem の応用—

浅 利 一 郎

<目次>

- 1 景気循環論と非線形性
- 2 2階の非線形・差分方程式系とHoph Bifurcation Theorem
- 3 カレツキー・置塩タイプの景気循環モデル：2階の非線形差分方程式による
 - 3.1 基本モデル
 - 3.2 2階差分方程式系への体系の集約
 - 3.3 稼働率関数の性質
 - 3.4 カレツキー・置塩タイプ非線形・景気循環モデルの運動
 - 3.5 数値例 - リミット・サイクルとカオス
- 4 結 論

1 景気循環論と非線形性

近年、「カオス」や「複雑系」の話題は一般のマスコミにも科学トピックスとしてしばしば登場するようになった。非線形力学系 (nonlinear dynamic systems) がもつ複雑なふるまい自体は以前から知られていたが、カオス (chaos) やフラクタル (fractal) などの現象に代表される非線形力学系の数学的構造に関する研究が盛んにおこなわれるようになったのはここ30年である⁽¹⁾。現在、非線形力学系に関する研究成果は、数学や物理学の範囲をこえて、工学、化学、気

(1) 最近、邦訳されて話題になったものに次のものがある。
M.Woldrop (1992), J.Gleik (1987)

象学、生物学、医学・生理学などの自然科学の諸分野だけでなく、経済学、社会学、政治学などの社会科学の研究においても大きな影響を与えている⁽²⁾。非線形力学系の理論の経済学における応用は、主に、計量経済学における時系列データ分析、理論経済学における「均衡概念」再検討、成長と景気循環の理論、金融理論、外国為替理論などで盛んに試みられている⁽³⁾。しかし、景気循環論研究においては、こうした最近の動向に先行して、経済構造や経済諸関係に内在する非線形性をもつ重要性がはやくから認識されており、景気循環理論への非線形性の導入は第 2 次大戦以前の M.Kalecki (1937) と N.Kaldor (1940) の景気循環理論、戦後の R.M.Goodwin (1948) や J.R.Hicks (1950) の理論などにまでさかのぼることができる。最近の景気循環論研究における非線形モデル・アプローチは、非線形力学系の理論の研究成果を踏まえて従来の議論を再定式化・精緻化することをひとつの課題としている。

こうした方向での研究のひとつに、カルドアの景気循環モデルを非線形微分方程式系として再定式化し循環運動が生じる条件を厳密に導出した Chang/Smyth (1970) がある。彼らの論文以後、カルドア・モデルは非線形景気循環モデルのプロトタイプとして様々な方向に展開されており、主な研究を表 1・1 にあげておく。カルドア型モデルをベースとした非線形景気循環モデルの展開には、カルドアのオリジナル・モデルが簡明で近年の非線形力学系の理論の諸定理やその運動が解明されている非線形方程式を適用する上でモデルを修正 (modification) しやすいというテクニカルな理由がある。しかし、それだけでなく、カルドア理論は、経済の循環的運動の説明の際に外生的な不規則ショックを不可欠の契機とする景気循環の諸理論に対し、経済内の非線形性から自律的な景気循環運動を解明しようという内生的景気循環論として経済的インプリケーションが豊富であることが、カルドア型非線形モデルの展開の背景にある⁽⁴⁾。こうして、カルドア・モデルは、経済学における非線形力学系の理論の典型的な適用例をなしているのである⁽⁵⁾。

本稿はこうした方向の研究の一環として、カルドア・モデルとともに景気循環の非線形アプローチのもう一つの出发点をなしているカレッスキーのモデルをベースに、置塩 (1976) の景気循環モデルと資本行動論を結合したカレッスキー・置塩タイプの非線形景気循環モデルを構築しその運動を調べることを課題としている。

(2) 最近の社会科学における非線形力学系の研究動向については次の文献を参照。
L.D.Liel/E.Elliot(ed.), (1996)

(3) 次の文献参照。

E.E.Peters (1991), A.Medio (1992), H.W.Lorenz (1993), M.Jarsulic (ed.,1993), 有賀祐二 (1994), etc.

(4) 景気循環論研究の系譜については M.H.Dore (1993), 大瀧雅之 (1994) 等参照。

(5) 景気循環の非線形モデル・アプローチのもうひとつの中心は、R.M.Goodwin (1982, 1990, etc) の一連の研究とそれをめぐる議論である。Goodwin/Küger/Vercelli (ed.), (1983) を参照。

表1・1 カルドア型モデルの展開

●連続型 (continuous type) モデルでの展開

| | |
|------------------------------|------------------------------|
| Chang/Smyth (1970) | Poincaré-Bendixson Theorem |
| V.Torre (1977) | Bifurcation Theory |
| M.Boldrin (1984) | The Hopf Bifurcation Theorem |
| G.Gabisch/H.W.Lorenz (1987a) | Lienard Equation |
| M.H.Dore (1993) | Lienard=van del Pol Equation |
| etc. | |

●離散型 (discrete type) モデルへの展開

| | |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| R.A.Dana/P.Malgrange (1983) | non-homogeneous type |
| R.Herrmann (1986) | Snap-back Repeller (Marroto Theorem) |
| H.W.Lorenz (1987b) | multi-sector model |
| etc. | |

●その他

| | |
|-------------------|--------------------|
| H.R.Varian (1979) | Catastrophe Theory |
| etc. | |

2 2階の非線形・差分方程式系⁽⁶⁾とHopf Bifurcation Theorem

景気循環論における非線形モデル・アプローチは、非線形力学系の諸定理やその運動原理が解明されている非線形方程式を応用し、非線形モデルをコンピュータを用いて数値シミュレーションすることを主要な方法にしている。

しかし、連続型 (continuous type) にしろ離散型 (discrete type) にしろ高階の非線形システムでは、経済学に適用できる諸定理や非線形方程式は必ずしも多くはないし、また可能であるとしても適用範囲にかなりの制限がある。例えば、非線形微分方程式体系におけるリミット・サイクルの存在に関して、しばしば用いられる「Poincaré-Bendixson Theorem」⁽⁷⁾は、周知のように2階の微分方程式系に限られている。このような理由で経済学では、一般的にn階非線形システムを想定して議論することは少なく、3階以下の非線形力学系の理論を応用することが多い。そして、2階の非線形力学系に限れば、非線形・微分方程式系で生成しうるアトラクターは

(6) 離散型の非線形力学系の数学の入門書として、つぎのものがある。
R.L.Devancy (1989)。また、離散型の非線形写像の成長と循環の理論への応用については、
R.A.Dana/P.Malgrange (1983)を参照。

(7) 「Poincaré-Bendixson Theorem」については、Hirsch/Smale (1974), H.R.Varian (1981)等を参照。

固定点、閉軌道、リミット・サイクルであり複雑かつ不規則なカオス的な運動は生じ得ない。非線形・微分方程式系でカオスが生じるのは3階以上の系においてであることが知られている。それに対し、非線形・差分方程式系のアトラクターは、固定点、閉軌道、リミット・サイクルにくわえてストレンジ・アトラクター（カオス）があり、2階の微分方程式系に比べてその運動は多様である⁽⁸⁾。

経済学では、次のような2階の非線形・差分方程式系の定理・方法がしばしば利用される⁽⁹⁾。

- (i) 2階の非線形差分方程式系においてカオスを生じる典型的な非線形差分方程式系としての Hénon 写像族⁽¹⁰⁾。
- (ii) 2階の非線形・差分方程式系におけるリミット・サイクルの存在に関する「The Hoph Bifurcation Theorem」⁽¹¹⁾。
- (iii) 一般に n 階の非線形・差分方程式系におけるカオス発生 の十分条件としての「Marotto の定理」、あるいは「Snap-Back Repeller Theorem」⁽¹²⁾。

本稿では、2階の非線形差分方程式により、カレツキー・置塩タイプの非線形景気循環モデルを構築し、 R^2 の離散型の非線形力学系における「The Hoph Bifurcation Theorem」を適用する。そこで、 R^2 の離散型非線形写像における「The Hoph Bifurcation の定理」をあらかじめ確認しておく。

(8) カオスやストレンジ・アトラクターの定義については、いくつかの可能な定義がありうるが、本稿では、H.W.Lorenz (1993), Ch.4, にしたがって、比較的広義に次の意味で用いる。すなわち、カオスあるいはカオス的な運動とは、決定論的なルールをもつ系あるいは写像がもたらす本質的にランダムな運動で、初期条件のわずかな相違が予想のできない全く異なる運動をもたらす。後者はカオスの重要な性質であり、特に「初期条件への敏感な依存性」という。ストレンジ・アトラクターとは、カオス的な運動のアトラクターである。

なお、数学的に厳密な定義については、J.M.T.Thompson/H.B.Stewart (1986) や R.L.Devaney (1989) を参照。

(9) H.W.Lorenz (1993), Ch.4., R.A.Dana/P.Malgrange (1983) を参照。

(10) M.Hénon (1976)。一般に、Hénon 写像族は次の形式をもつ。

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t) + y_t \\ y_{t+1} &= b x_t \end{aligned}$$

ここで、 b は定数、関数 f は通常 k 回微分可能な非線形関数である。Hénon自身は、 $f(x_t) = x_t^2 + 1$ を研究している。この写像族の特徴は、体系のヤコビアンが常に一定 ($= -b$) であることである。そして体系が前写像、

$$\begin{aligned} x_t &= y_{t+1}/b \\ y_t &= x_{t+1} - f(y_{t+1}/b) \end{aligned}$$

をもつとき、微分同相写像 (*diffeomorphism*) となる。

(11) 2階の離散型非線形力学系における Hoph Bifurcation Theorem についての詳細な議論は Ruelle/Takens (1971), G.Iooss (1979), P.A.Dana/P.Malgrange (1983), 等を参照。

(12) F.R.Marotto (1978) (1979). Snap-Back Repeller Theorem は、1階の差分方程式による単峰型の写像のカオスに関する Li/Yorke Theorem (1975) の一般化であるが、Li/Yorke Theorem と同様に、離散型非線形力学系におけるカオスの発生 の十分条件を示すものであって、一般に Snap-Back Repeller 型でない多様なストレンジ・アトラクターが存在する。

定 理 (the Hoph Bifurcation Theorem)

離散型の非線形写像 $x_{t+1} = f(x_t, \mu)$, $x_t \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$, f は C^k 級 ($k \geq 6$)、が固定点 $x^*(\mu)$ をもつとする。非線形写像 f が、パラメータ $\mu = \mu_0$ で次の 3 つの条件をみたすとき、固定点 $x^*(\mu_0)$ の周囲に x_t のリミット・サイクルが存在する。

(1) 固定点 $x^*(\mu_0)$ で評価した f のヤコブ行列の固有値 λ が互いに共役な複素数であり、かつその絶対値は 1 に等しい。すなわち、 $\text{mod}(\lambda_{\mu_0}) = 1$ 。

(2) 複素数固有値 λ_{μ_0} は 1 の k 乗根ではない、すなわち $(\lambda_{\mu_0})^k \neq 1$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$)。

(3) $\frac{\partial [\text{mod}(\lambda)]}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda = \lambda_{\mu_0}} > 0$ 。

証明は略。

この定理は \mathbb{R}^2 における離散型・非線形写像 f による x_t の解軌道にかんして、パラメータ μ が μ_0 より小さいときには固定点 $x^*(\mu)$ は安定な吸引点であったものが、 $\mu = \mu_0$ で固定点 $x^*(\mu_0)$ における固有値が絶対値で 1 となる複素根をもち、さらに $\mu > \mu_0$ になるにつれて、固定点 $x^*(\mu)$ は不安定な反発点になりその周囲に x_t のリミット・サイクルを生成する、ことを主張している。

\mathbb{R}^2 の離散型の非線形写像におけるリミット・サイクルの存在に関する「The Hoph Bifurcation Theorem」は非線形・景気循環モデルの研究にとってきわめて有効な定理となりうる。

3 カレッキー・置塩タイプの非線形景気循環モデル

3.1 基本モデル

われわれは、2 階非線形差分方程式系により以下のカレッキー・置塩タイプの資本蓄積モデルを構築する。

<仮定>

A 1 : 生産物は投資財としても、消費財としても用いることができる。1 部門モデル。

A 2 : 労働者は賃金所得をすべて消費し、資本家は利潤所得をすべて投資する。

A 3 : 生産設備は磨耗しない。生産設備の補填は無視する。

A 4 : 生産設備は正常稼働水準以上のある一定レベルまで稼働できるが、それ以上は物理的に不可能である。

<モデル>

生産物市場の需給一致条件

$$Y_t = C_t + I_t \quad \dots \dots \dots (3.1.1)$$

Yは国民所得、Cは消費支出、Iは投資支出。

所得分配

$$Y_t = W_t + \pi_t \quad \dots \dots \dots (3.1.2)$$

Wは賃金分配分、 π は利潤分配分。

生産技術

$$N_t = nY_t \quad \dots \dots \dots (3.1.3)$$

Nは労働投入量、nは労働投入係数(一定)。

$$Y_t = \delta_t \sigma K_t \quad \dots \dots \dots (3.1.4)$$

Kは資本ストック。また、 Y^* を資本ストックKの正常稼働産出量として、

資本の標準生産性： $\sigma = Y^*/K$ (一定)、

稼働率： $\delta = Y/Y^*$ 。

消費支出

$$C_t = W_t \quad \dots \dots \dots (3.1.5)$$

$$W_t = \omega_t N_t \quad \dots \dots \dots (3.1.6)$$

ω は賃金率。

投資支出

$$I_t = g_t \cdot K_t \quad \dots \dots \dots (3.1.7)$$

g は資本ストックの変化率(蓄積率)。

以上の(3.1.1)～(3.1.7)において、今期期首の資本ストック K_t を所与とすると、未知数は $Y_t, C_t, I_t, W_t, \pi_t, N_t, \delta_t, \omega_t, g_t$ の9つである。したがって、9つの未知数のうち、今期の稼働率 δ_t と資本ストックの変化率 g_t が決まれば、今期期首の資本ストック K_t と(3.1.7)より投資 I_t が決まり、今期期首の資本ストック K_t と(3.1.4)から今期の生産量 Y_t が決まる。そして今期の生産量 Y_t と投資 I_t および(3.1.1)から消費 C_t が決まり、今期の生産量 Y_t と(3.1.3)から雇用量 N_t が決定する。さらに、(3.1.5)と(3.1.6)より賃金分配分 W_t と今期の賃金率 ω_t が決まり、最後に今期の利潤分配分 π_t が決定する。

そこで、今期の資本ストックの変化率 g_t を決める蓄積率関数と今期の稼働率 δ_t を決める稼働

率関数を導入するが、ここでは、置塩（1976）にしたがって次の関数を仮定する。

蓄積率関数

$$g_t = g_{t-1} + a(\delta_{t-1} - 1), a > 0 \quad \dots \dots \dots (3.1.8)$$

稼働率関数

$$\delta_t = \delta(r_{t-1}) \quad \dots \dots \dots (3.1.9)$$

利潤率(定義式)

$$r_t = \pi_t / K_t \quad \dots \dots \dots (3.1.10)$$

すなわち、企業は前期の生産設備の稼働率 δ_{t-1} が正常稼働率 1 をこえれば、今期の蓄積率を上昇させ、正常稼働率 1 を下回れば蓄積率をさげる。他方、稼働率については、企業は前期の実現利潤率 r_{t-1} みて今期の設備の稼働率 δ_t を、したがって生産量を決める。

以上、本稿の資本蓄積モデルは、前期の活動状態 (g_{t-1} , r_{t-1} , δ_{t-1}) と今期期首の資本ストック K_t を与件として、(3.1.1) ~ (3.1.10) の10本の方程式により10個の変数 (Y_t , C_t , I_t , W_t , π_t , N_t , ω_t , g_t , δ_t , r_t) が決定される。そして、次期の資本ストックの初期存在量 $K_{t+1} = K_t + I_t$ が与えられる。

本稿の資本蓄積モデルの特徴を整理しておく。

第1に、本モデルは2階級間への所得分配を明示的に導入し、かつ賃金所得はすべて消費に支出され利潤所得はすべて投資に向けられるというカレツキーの仮定⁽¹³⁾を採用している。第2に、後述するように、投資=利潤というカレツキー・ケインズの命題が成立する。第3に、各期において(3.1.1)の短期均衡条件がみたされるという意味で、カレツキーの短期均衡とその変動という枠組みを受けつぐ。そして、第4に、蓄積率関数、稼働率関数は置塩（1976）タイプの関数を想定している。ただし、稼働率関数が前期の実現利潤率に依存するという点で、またその関数形が明示的に非線形であるという点で置塩のそれとは異なる。

第4の特徴をもう少し詳しく説明しておこう。置塩（1976）の景気循環モデルでは次のような蓄積率関数・稼働率関数が想定されている⁽¹⁴⁾。すなわち、

蓄積率関数

$$g_{t+1} = g_t + \beta(\delta_t - 1) ; \beta > 0, \text{一定} \quad \dots \dots \dots (3.1.11)$$

稼働率関数

$$\delta_t = \delta(r_t) ; \delta' > 0, \delta(r^*) = 1 \quad \dots \dots \dots (3.1.12)$$

(13) M.Kalecki (1937), p.78. カレツキーはしばしば2階級モデルを採用しその階級の特徴をこの仮定で表現した。

(14) 置塩信雄 (1976), pp.187~201, および「数学付録4」pp.315~317。

置塩は、後述の (3・2・1) の関係とあわせて、これらの蓄積率関数と稼働率関数のもとで平衡点の不安定性から「上方への不均衡の累積」と「下方への不均衡の累積」を結論している⁽¹⁵⁾。置塩モデルに内在する最大の問題点は (3・1・12) の稼働率関数である。すなわち、この関数は今期の生産を開始する以前に今期の実現利潤率を知らなければならないということの意味する。しかし、すでに浅利 (1980) で指摘した通り、今期の生産開始前に今時の実現利潤率を知ることは不可能であり、せいぜい利潤率は期待利潤率でしかない。しかし、置塩 (1976) では、期待利潤率による生産決定の説明が関数形のなかでは実現利潤率に切り替えられている。本稿の蓄積率関数・稼働率関数は、置塩 (1976) 景気循環モデルのそれらを引き継ぎながらも、稼働率関数 (3・1・9) では稼働率は前期の実現利潤率 r_{t-1} の関数とする。

本稿の資本蓄積モデルは、以上の 4 つの特徴を持つ点で「カレッスキー・置塩タイプの景気循環モデル」である。

3.2 2 階差分方程式系への体系の集約

(3・1・5) を考慮すると (3・1・1) と (3・1・2) より $I_t = \pi_t$ である。つまり、カレッスキーの仮定のもとでは投資は利潤に等しい。この両辺を当該期の資本ストック K_t でわると、

$$g_t = r_t \quad \dots \dots \dots (3\cdot2\cdot1)$$

が各期に成立する。(3・2・1) の関係を稼働率関数 (3・1・9) に代入して次式を得る。

$$\delta_t = \delta (g_{t-1}) \quad \dots \dots \dots (3\cdot2\cdot2)$$

したがって、本稿の資本蓄積モデルの運動は成長率 g と稼働率 δ に関する 2 階の差分方程式体系 (3・1・8) と (3・2・2) に集約できる。

蓄積率関数

$$g_t = g_{t-1} + a (\delta_{t-1} - 1) \quad \dots \dots \dots (3\cdot1\cdot8)$$

稼働率関数

$$\delta_t = \delta (g_{t-1}) \quad \dots \dots \dots (3\cdot2\cdot2)$$

3.3 稼働率関数の性質

以下の議論では、前項で想定した成長率 g と稼働率 δ に関する 2 階の差分方程式体系 (3・1・8), (3・2・2) を、見やすくするために新たに次の記号で書き直しなおしておく。すなわち、資本ストックの成長率を x で、稼働率を y として、資本ストックの成長率を決定する関数すなわち蓄積率

(15) 置塩信雄 (1976), pp.315~317.

関数を f 、稼働率関数を g とする。

$$\text{蓄積率関数} : x_{t+1} = x_t + a(y_t - 1); a \in R_+ \quad \dots \dots (3.3.1)$$

$$\text{稼働率関数} : y_{t+1} = g(x_t, b); b \in R_+ \quad \dots \dots (3.3.2)$$

蓄積率関数 (3.3.1) は置塩の (3.1.11) と同じである。また稼働率関数 (3.3.2) は非線形関数を想定している。(3.3.2) の稼働率関数と置塩の稼働率関数 (3.1.12) との相違は、(3.3.2) では前期の実現利潤率の関数としているのに対し、置塩は当該期の実現利潤率の関数としている点である。

体系 (3.3.1), (3.3.2) のヤコブ行列、ヤコビアン、トレースを求める。

$$J = \begin{bmatrix} 1 & a \\ g_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \det J = -a g_x, \quad \text{tr} J = 1 \quad \dots \dots (3.3.3)$$

ただし、 $g_x = \partial g / \partial x$ である。

非線形力学系 (3.3.1), (3.3.2) の特徴は、トレースが常に 1 に等しいということである。また、この体系が $b = b_0$ で平衡点をもてば、 $y^*(b_0) = 1$ 、 $g(x^*(b_0)) = 1$ であることは簡単に確かめられる。そこで平衡点で評価したヤコブ行列の固有値 $\lambda_{1,2}$ をもとめる。

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{\text{tr} J \pm \sqrt{(\text{tr} J)^2 - 4 \det J}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a g_x^*(b_0)}}{2} \quad \dots \dots (3.3.4) \end{aligned}$$

したがって、 $g_x^*(b_0) < -1/4a$ のとき平衡点で評価したヤコブ行列の固有値は複素数根となる。そして、その絶対値が 1 となるときには (3.3.4) より実数部は常に $\text{Re}(\lambda) = 1/2$ であるから、絶対値 1 の複素数固有値 $\lambda_{1,2}$ は必ず、

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \dots \dots (3.3.5)$$

であり、この固有値 (3.3.5) は明らかに 1 の k 乗根 ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) ではない。つまり、体系 (3.3.1), (3.3.2) は、平衡点で評価したヤコブ行列の固有値が複素数でその絶対値が 1 に等しいとき、それは必ず (3.3.5) になるのである。これが、体系 (3.3.1), (3.3.2) のヤコブ行列のトレースが 1 であることの意味である。したがって、平衡点で評価した $g(x, b)$ の微係数が、

$g_x^*(b_0) = -1/a (< 1/4a) < 0$ となる非線形関数 $g(x_t, b)$ のもとで、体系 (3・3・1) - (3・3・2) は、Hopf Bifurcation Theorem の条件をみたし $b = b_0$ の近傍で (x_t, y_t) のリミット・サイクルをもつ可能性がある。

このような非線形の稼働率関数 $g(x_t, b)$ がみたすべき条件を整理すると以下である。

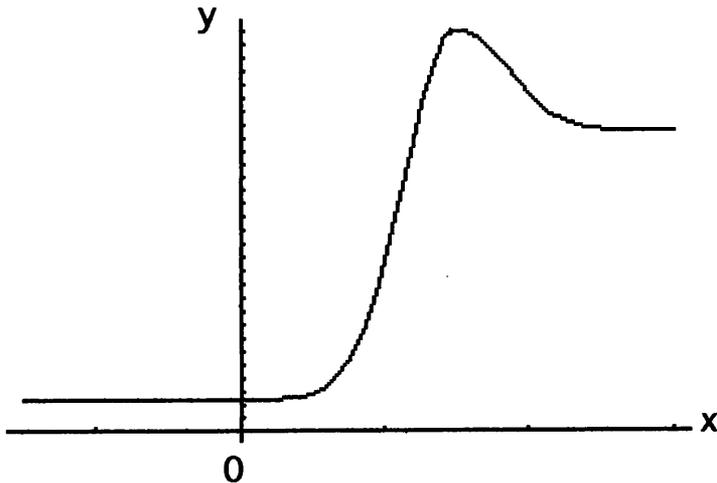
第1に、稼働率関数 $g(x_t, b)$ は非負でなければならない。 $g(x_t, b) > 0$ 、

第2に、仮定A4により、稼働率関数 $g(x_t, b)$ には上限 \bar{y} がある。 $\bar{y} > g(x_t, b) > 0$

第3に、稼働率関数 $g(x_t, b)$ は、 x_t のある区間で $g_x > 0$ であってもよいが、 $g_x < 0$ となる x_t の区間をもつ。

これらの条件をみたす稼働率関数の典型的な例は図3・1の形状である。すなわち、稼働率 $g(x_t, \mu)$ は、 x_t のある区間で増加関数であるが、一時的に稼働率の正常水準を超えることができるにしても $x = c$ でその上限に達し、 x_t がさらに増加しても稼働率には物理的な限界があるだけでなく、正常率以上での稼働にともなうコスト増加等のためにかえって稼働率を低下させざるをえない。そして、それ以上の x_t の増加に対しては正常水準に稼働率を維持する。

図3・1 稼働率関数の形状



3.4 カレツキー・置塩タイプの景気循環モデルの運動

われわれは典型的な稼働率関数の形状を図3・1のように想定しているが、ここでは数学的に処理しやすいように稼働率関数を以下のように特定化して議論をすすめる。

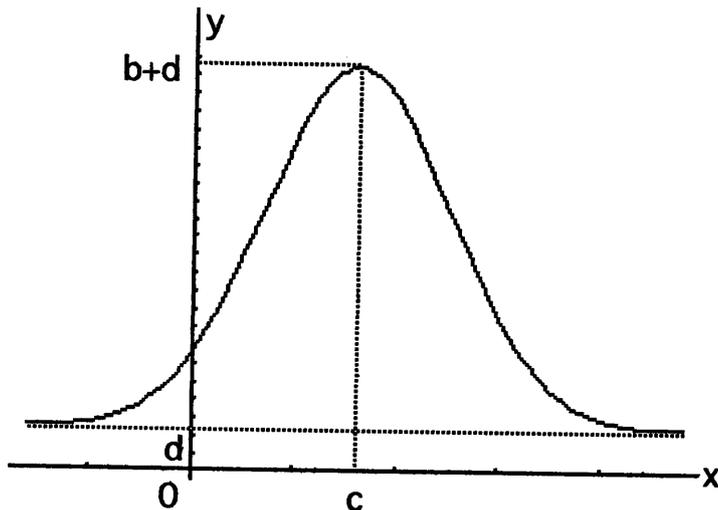
蓄積率関数： $x_{t+1} = x_t + a(y_t - 1)$; $a \in R_+$ (3.4.1)

稼働率関数： $y_{t+1} = b \text{Exp}[-(x_t - c)^2] + d$; $b, d \in R_+, c \in R$ (3.4.2)

ここで、 a, b は正の実数のパラメータであり ($a, b \in R_+$)、 c, d ($0 < d < 1$) は定数である。また、 $0 < 1 - d < b$ と仮定しておく。

蓄積率関数 (3.4.1) は、前期の稼働率が1より大 (小) であれば成長率を前期より上昇 (低下) させるという行動を表す。それに対し、特定化した稼働率関数は、図3・2にあるように今期の稼働率は前期の成長率のある水準 c より小さい範囲で増加関数、大きい範囲では減少関数である。図3・1と図3・2を比べてみればは明らかなように、図3・2では、高い水準の x_t にたいする稼働率が低い水準の x_t にたいする稼働率と等しくなっているが、これはもっぱら数式的処理の便宜上の仮定であって、本来は図3・1の稼働率関数を想定している。

図3・2 稼働率関数



それでは、体系 (3・4・1), (3・4・2) の運動をしらべよう。

(1) ヤコブ行列・ヤコビアン・トレース

$$J = \begin{bmatrix} 1 & a \\ \frac{-2b(x-c)}{\text{Exp}[(x-c)^2]} & 0 \end{bmatrix}, \quad \det J = \frac{2ab(x-c)}{\text{Exp}[(x-c)^2]}, \quad \text{tr } J = 1 \quad \dots \dots (3\cdot4\cdot3)$$

(2) ヤコブ行列の固有値

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{2ab(x-c)}{\text{Exp}[(x-c)^2]}} \quad \dots \dots (3\cdot4\cdot4)$$

(3) 平衡点(固定点)

$$(x_1^* = c - \sqrt{\log\left(\frac{b}{1-d}\right)}, y_1^* = 1), (x_2^* = c + \sqrt{\log\left(\frac{b}{1-d}\right)}, y_2^* = 1)$$

ここで、 $B(b) = \sqrt{\log\left(\frac{b}{1-d}\right)}$ とおくと、 $0 < 1-d < b$ より $B(b) > 0$ である。

$$(x_1^* = c - B(b), y_1^* = 1), (x_2^* = c + B(b), y_2^* = 1) \quad \dots \dots (3\cdot4\cdot5)$$

体系は 1 組の実数の平衡解をもつ。これらを平衡点 1・平衡点 2 ということにしよう。

(4) 平衡点で評価したヤコブ行列の固有値

$$\begin{aligned} \{\lambda_{11} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8a(1-d) \cdot B(b)}, \lambda_{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8a(1-d) \cdot B(b)}\} \\ \{\lambda_{21} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 8a(1-d) \cdot B(b)}, \lambda_{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 8a(1-d) \cdot B(b)}\} \\ \dots \dots (3\cdot4\cdot6) \end{aligned}$$

ここでサブスクリプト ij は平衡点 i の j 番目の固有値を意味する ($i, j = 1, 2$)。

(5) パラメータ (a, b) の配置と平衡点における固有値 λ_{ij} の大きさ

平衡点で評価した固有値 (3・4・6) とパラメータの関係調べる。

(3・4・6) より、平衡点1で評価した固有値 λ_{1j} ($j = 1, 2$) は、パラメータに与えた仮定から ($a > 0, b > 1 - d > 0$)、実数で $\lambda_{11} > 1 > \lambda_{12}$ となる。特に、 λ_{12} が -1 より小さくなるのは、簡単な計算により、

$$a < \frac{1}{(1-d) \cdot B(b)}$$

の時であることがわかる。なお、上式の分母はパラメータに与えた仮定からゼロではない。

次に、平衡点2で評価した固有値 λ_{2j} ($j = 1, 2$) は、(3・4・6) より、

$$a \leq \frac{1}{8(1-d) \cdot B(b)}$$

の時、実数で $1 > \lambda_{21} > 0 > \lambda_{22} > -1$ ある。したがってまた、

$$a > \frac{1}{8(1-d) \cdot B(b)}$$

で、 λ_{2j} ($j = 1, 2$) は互いに共役な複素数となる。そして、互いに共役な複素数の絶対値の2乗はそれらの積に等しいことを利用して、複素数固有値の絶対値が1になるときのパラメータの関係を見ると、

$$[\text{mod}(\lambda_2)]^2 = \lambda_{21} \times \lambda_{22} = 2a(1-d) \cdot B(b) = 1$$

より、

$$a = \frac{1}{2(1-d) \cdot B(b)}$$

の時に平衡点2で評価した固有値は、その絶対値が1の複素数となる。同様に、

$$\frac{1}{2(1-d) \cdot B(b)} > a > \frac{1}{8(1-d) \cdot B(b)}$$

の時に、 λ_{2j} ($j = 1, 2$) は絶対値が1より小さい複素数で、

$$a > \frac{1}{2(1-d) \cdot B(b)}$$

の時に、 λ_{2j} ($j = 1, 2$) は絶対値が1より大きい複素数となる。

以上の関係をまとめたのが表3・1と図3・2である。パラメータ a, b の実数平面 $\{(a, b) | a > 0, b > 1 - d > 0\}$ は3つの曲線A, B, Cによって4つの領域に分けられ、下から領域1、領域2、領域3、領域4と呼ぶとすると、平衡点で評価した固有値は、領域ごとに表3・1のようになる。ここで3つの曲線の方程式は以下である。

$$\begin{aligned}
 A : a &= \frac{1}{(1-d) \cdot B(b)} \\
 B : a &= \frac{1}{2(1-d) \cdot B(b)} \quad \text{Hopf 分岐点} \quad \dots \dots \dots (3 \cdot 4 \cdot 7) \\
 C : a &= \frac{1}{8(1-d) \cdot B(b)}
 \end{aligned}$$

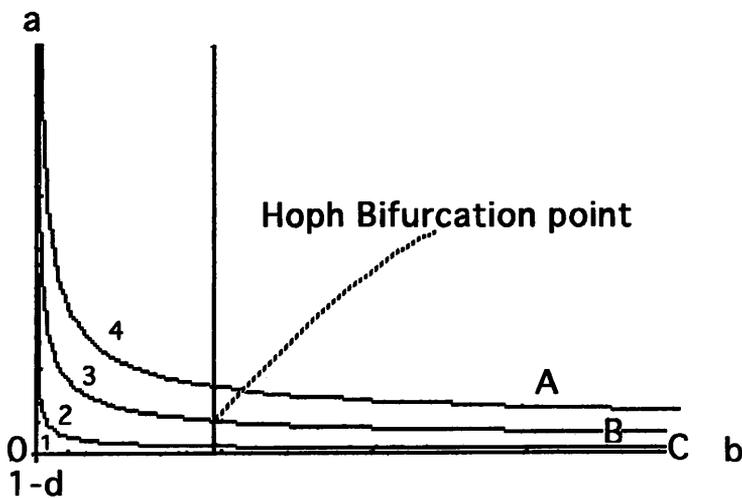
表 3・1

| | 平衡点 1 の固有値 | 平衡点 2 の固有値 | 体系の運動 |
|------|---|---|------------------------------|
| 領域 4 | $\lambda_{11} > 1, \lambda_{12} < -1$ | $\lambda_{21,2} \in C, \text{mod}(\lambda_2) > 1$ | 周期軌道→カオス→発散 |
| 領域 3 | $\lambda_{11} > 1, 0 > \lambda_{12} > -1$ | $\lambda_{21,2} \in C, \text{mod}(\lambda_2) > 1$ | 平衡点 2 の周囲でリミット・サイクル →周期軌道 |
| 領域 2 | $\lambda_{11} > 1, 0 > \lambda_{12} > -1$ | $\lambda_{21,2} \in C, \text{mod}(\lambda_2) < 1$ | 平衡点 2 へ振動収束 |
| 領域 1 | $\lambda_{11} > 1, 0 > \lambda_{12} > -1$ | $1 > \lambda_{21} > 0 > \lambda_{22} > -1$ | 平衡点 2 へ単調収束 |

(注) $\lambda_{ij} \in C$ は λ_{ij} が複素数であることを意味する。他の λ_{ij} は実数である ($\lambda_{ij} \in R$)。
 なお、境界の等号関係は捨象してある。

平衡点 1 は領域 1 から領域 3 で局所的に鞍点、領域 4 で局所不安定である。それに対し、平衡点 2 は領域 1 と 2 で局所安定、領域 3 と 4 で局所不安定である。

図 3・3 パラメータ配置と固有値



(6) 体系の運動と Hoph 分岐

体系 (3.4.1), (3.4.2) の運動に関して次の定理を証明する。

定 理

体系 (3.4.1), (3.4.2) は、曲線 $a = \frac{1}{2(1-d) \cdot B(b)}$ 上のパラメータ配置で、Hoph 分岐を生じ、平衡点 2 は吸引点から反発点に転じることによりその周囲にリミットサイクルをもつ。

証 明

曲線 B 上のパラメータ配置で、平衡点 2 におけるヤコブ行列の固有値を調べるために、 $a = \frac{1}{2(1-d) \cdot B(b)}$ を (3.4.6) の λ_{2j} に代入すると、(3.3.5) で予想していたとおり、

$$\lambda_{21,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \dots \dots \dots (3.4.8)$$

であることが確かめられる。したがって、その絶対値は $\text{mod}(\lambda_2) = 1$ であり、またこの λ_{2j} ($j = 1, 2$) は 1 の k 乗根 ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) でないことも自明である。これで、Hoph Bifurcation Theorem の最初の 2 つの条件をみたすことが証明された。

次に、Hoph Bifurcation Theorem の 3 番目の条件を調べるが、ヤコブ行列の固有値が複素数の場合、互いに共役な複素数の積は、その固有値の絶対値の 2 乗に等しいことを利用して、固有値の絶対値の 2 乗をもとめると、

$$\begin{aligned} [\text{mod}(\lambda)]^2 &= 2a(1-d) \cdot B(b) \\ \therefore \text{mod}(\lambda) &= \sqrt{2a(1-d) \cdot B(b)} \quad \dots \dots \dots (3.4.9) \\ &= \sqrt{2a(1-d)} \sqrt{\log\left(\frac{b}{1-d}\right)} \end{aligned}$$

(3.4.9) の関数形からもまた、簡単な計算からも次の関係が成立することが確かめられる。すなわち、

$$\frac{\partial (\text{mod}(\lambda_2))}{\partial a} > 0, \quad \frac{\partial (\text{mod}(\lambda_2))}{\partial b} > 0$$

以上で、体系 (3.4.1), (3.4.2) は、Hoph Bifurcation Theorem の 3 つの条件をみたし、曲線

B上でHoph分岐が発生することが証明された。

証明終わり。

以上の定理により、体系(3・4・1)、(3・4・2)はパラメータa,bの配置が領域2から領域3にはいるところでHoph分岐が生じ、リミット・サイクルを生成する。

3.5 数値例 - リミット・サイクルとカオス

以上の考察を踏まえて体系(3・4・1)、(3・4・2)の数値シミュレーションをおこなう。

$$\text{蓄積率関数: } x_{t+1} = x_t + a(y_t - 1); a \in R_+ \quad \dots \dots \dots (3\cdot4\cdot1)$$

$$\text{稼働率関数: } y_{t+1} = b \text{Exp}[-(x_t - c)^2] + d; b > 1 - d > 0, c \in R \quad \dots (3\cdot4\cdot2)$$

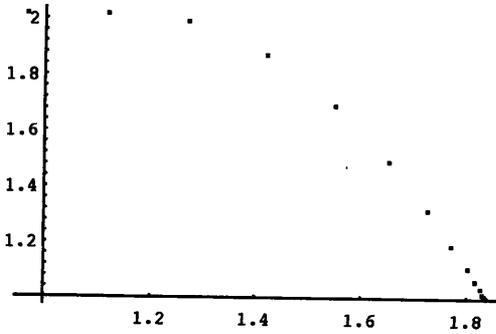
図3・4は、初期条件($x_1 = 1, y_1 = 0.8$)、パラメータを $b = 2, c = 1, d = 0.01$ のもとで、aを領域1から領域4まで上昇させたときの体系(3・4・1)、(3・4・2)の代表的運動を図示したものである。まず、このパラメータ配置のHoph Bifurcation Pointをもとめると、(3・4・7)より、

$$a_{HP} = \frac{1}{2(1-d)\sqrt{\log\left(\frac{b}{1-d}\right)}} \approx 0.602277。$$

図3・3の領域1と領域2($a < a_{HP}$)においては、領域1で平衡点2に単調収束(図3・4(1))、領域2では平衡点2へ振動収束(図3・4(2))する。領域2と領域3の境界($a = a_{HP}$)でHoph分岐がおこり(図3・4(3))、この点を過ぎて領域3($a > a_{HP}$)にはいると、平衡点2は反発点になるとともにその周囲にリミット・サイクル(図3・4(4))を、さらに周期軌道(図3・4(5))を生成する。さらに領域4にはいると体系の運動はn周期軌道(図3・4(6))からストレンジ・アトラクター(図3・4(7))をへて発散する(図3・4(8))。

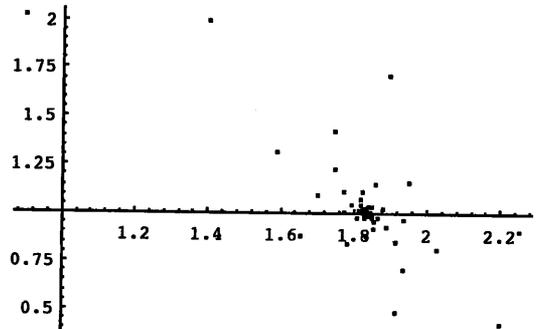
図3・4 数値シミュレーション結果

(1) $a=0.15$: 領域 1



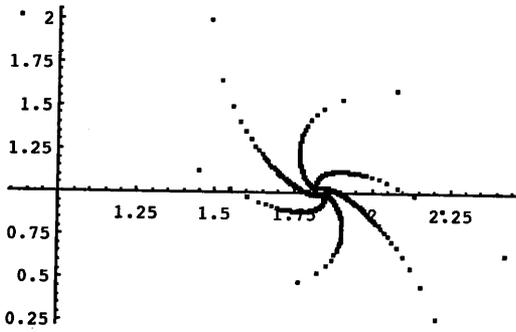
単調収束

(2) $a=0.5$: 領域 2



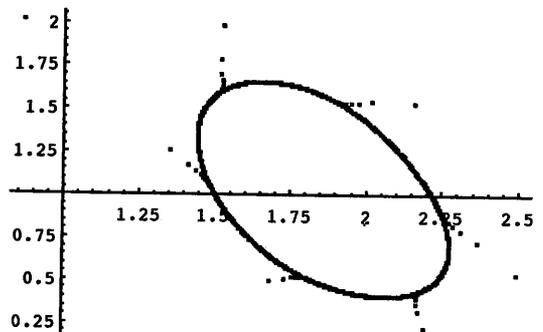
振動収束

(3) $a=0.602277$: 領域 2 と 3 の境界



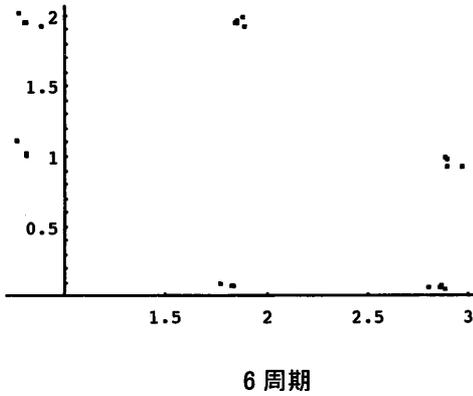
Hopf Bifurcation point

(4) $a=0.65$: 領域 3

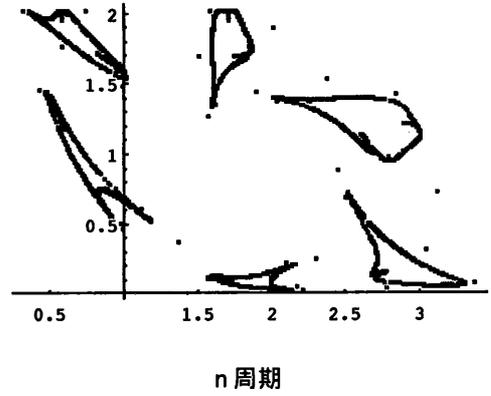


リミット・サイクル

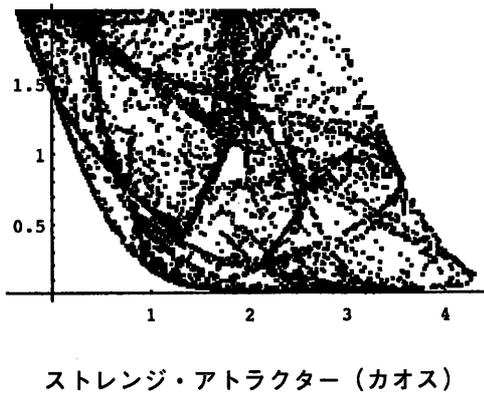
(5) $a=1.1$: 領域3



(6) $a=1.25$: 領域4

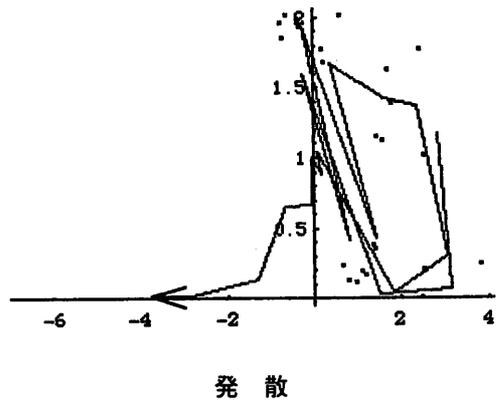


(7) $a=1.6$: 領域4



ストレンジ・アトラクター (カオス)

(8) $a > 1.7$: 領域4



発散

図3・4(8)は、 $a = 1.8$ のケースである。最初の40ポイントぐらいは一定の範囲におさまっているが、それ以降は矢印方向に発散する。

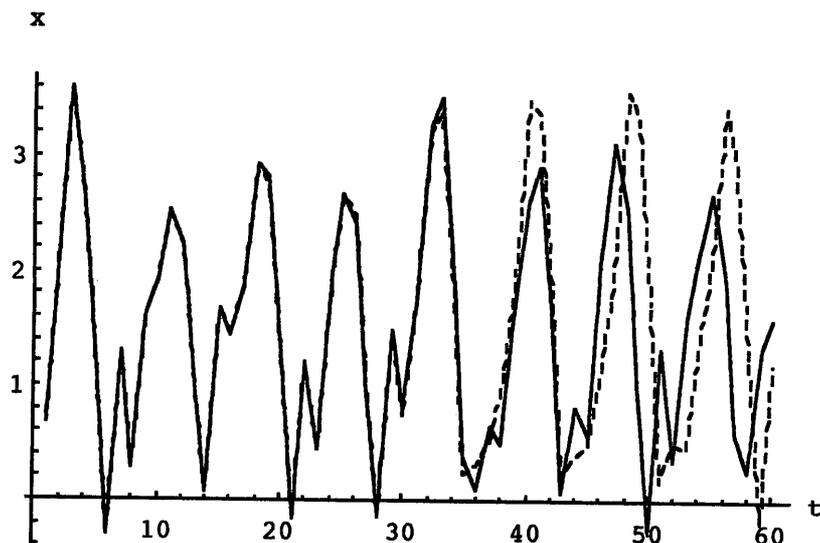
図3・5は、図3・4(7)のストレンジ・アトラクター (カオス) のケースにおいて初期条件のわずかな相違 (10^{-3}) が全く異なる x_t の解軌道をもたらしていることを示している。こうした「初期条件への敏感な依存性」は決定論的カオスの特性のひとつである。

図 3・5 初期条件への敏感な依存性

パラメータ : $a = 1.6, b = 2, c = 1, d = 0.01$

初期条件の相違 : 実線 = $\{x_1 = 1, y_1 = 0.8\}$ 、破線 = $\{x_1 = 1, y_1 = 0.801\}$

x_t の運動 ($t = 1, \dots, 60$)



4 結 論

- (1) われわれは、カレツキーのモデルをベースに置塩タイプの蓄積率関数・稼働率関数を導入した景気循環モデル (3・1・1) ~ (3・1・10) を構築した。このモデルは、2階の差分方程式系 (3・1・8), (3・2・2)、あるいは (3・3・1), (3・3・2) に集約される。集約された2階の差分方程式系は、ヤコブ行列のトレースが常に1に等しいという特性をもつ。このことは、2階の差分方程式系 (3・3・1), (3・3・2) が平衡点をもつとき、平衡点で評価したヤコブ行列の固有値が複素数でその絶対値が1であるときには、常にその実数部が1/2になるために次の形をとることを意味する。すなわち、

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \cdot \sin \frac{\pi}{3}$$

そしてまた、稼働率関数 (3・3・2) がある条件をみたすとき、「The Hopf Bifurcation Theorem」を適用できる可能性があることを意味する。経済的に有意味でかつこの条件をみたす稼働率関数は、 $\bar{y} > g(x_t, b) > 0$ (\bar{y} は上限) で、 x_t のある区間で $g_x > 0$ であっても、

かならず $g_x < 0$ となる x_t の区間をもつというものである。こうした稼働率関数の典型的な例を図3・1に示した。

(2) 次に、稼働率関数を特定化して、カレッスキー・置塩タイプの景気循環モデルの運動をしらべた。われわれの体系は以下である。

$$\text{蓄積率関数: } x_{t+1} = x_t + a(y_t - 1); a \in R_+ \quad \dots \dots \dots (3.4.1)$$

$$\text{稼働率関数: } y_{t+1} = b \text{Exp}[-(x_t - c)^2] + d; b, d \in R_+, c \in R \quad \dots \dots (3.4.2)$$

体系 (3.4.1), (3.4.2) は、パラメータ配置 $a = \frac{1}{2(1-d)\sqrt{\log(\frac{b}{1-d})}}$ で、Hopf 分岐

を生じ、平衡点2の周囲に (x_t, y_t) のリミット・サイクルが生じることを証明した。

(3) 体系 (3.4.1), (3.4.2) の数値シミュレーションは、先のパラメータ配置で Hopf 分岐を生じ、平衡点2が局所安定の吸引点から局所不安定な反発点になり、その周囲にリミット・サイクルが生起することを例証している。

(4) さらに、パラメータ a, b の実数平面の領域3から領域4まで数値シミュレーションすることにより、リミット・サイクルから n 周期軌道やストレンジ・アトラクターが存在することを描き出した。

資本蓄積と景気循環の集約モデルとして体系 (3.4.1), (3.4.2) をみると、置塩モデル (3.1.11), (3.1.12) の運動とくらべて、パラメータ配置によりその運動が多様であることが注目される。置塩モデル (3.1.11), (3.1.12) では「乖離は上方へ、あるいは下方へ累積していく」⁽¹⁶⁾ 運動を描くだけであるのに対し、体系 (3.4.1), (3.4.2) は発散のケースも含めて、カオスの運動、周期軌道、リミット・サイクル、振動収束、単調収束の多様な運動の可能性をもつ。こうした違いは、同じ形の蓄積率関数をもちながらも稼働率関数における2つの相違点による。すなわち、第1に、置塩の稼働率関数 (3.1.12) は今期の実現利潤率の増加関数であるのに対し、本稿の稼働率関数 (3.4.2) は前期の実現利潤率の関数であること、第2に本稿の稼働率関数 (3.4.2) は先の条件をみたます明示的な非線形関数であることである。

(16) 置塩 (1976), p.315.

- (5) 最後に、景気循環論の観点から本稿の景気循環モデルとそれが描き出す運動の意味をまとめておく。

第1に、M.Kalecki (1937)、N.Kaldor (1940) 以来の、非線形モデルにより内生的な経済の循環運動を描き出すという意味では、本稿の景気循環モデルは経済学的に有意な蓄積率関数 (3・4・1) と稼働率関数 (3・4・2) のもとで、経済の循環運動をリミット・サイクルとして描くための厳密な条件を導出している。

第2に、本稿の景気循環モデルは、数値シミュレーションによってではあるが、リミット・サイクルだけでなく、その延長上に多周期運動からカオスへの展開を描いている。体系 (3・4・1)、(3・4・2) のカオスへいたる道筋とカオスの性質については別稿を用意する予定である。カオス的な運動と景気循環の運動との関係は議論が残されている⁽¹⁷⁾。

第3に、本稿の非線形モデルでは「The Hopf Bifurction Theorem」を適用したことからも明らかなように、体系 (3・4・1)、(3・4・2) の運動はパラメータ配置に依存している。パラメータの配置次第で活動水準をあらわす状態変数 (x_t, y_t) の多様な運動がありうる。景気循環論研究の問題意識からは、体系 (3・4・1)、(3・4・2) がリミット・サイクルを描くことができるということよりも、パラメータ配置自体の変化が活動水準の変動とどのように関係しているのかが問われなければならない。換言すれば、経済の活動水準をあらわすのは直接的には状態変数 (x_t, y_t) であるとしても、経済行動や経済構造に内在的なパラメータ自体も活動水準とともに変化するならば、パラメータも間接的には経済の活動状況を反映していると考えることができる。こうしたケースは経済には多く存在する。例えば、市場の取引量が拡大するにつれて市場の供給関数も需要関数のそのパラメータを変化させていくことは十分にありうることである。本稿の景気循環モデルに引きつけて言えば、経済の活動水準が低い間は経済の運動は安定的であるが、活動水準が高まるにつれて経済行動のパラメータも変化していき、経済は周期運動からカオスへそして発散へと展開していくことも想定できるのである。経済構造や経済行動は経済の活動水準と不可分の関係にある。構造や行動を表すパラメータが、活動を表す状態変数とともに変化する時には、モデルははじめから非線形性を要求される。例えば、次の簡単な差分方程式モデルを考える。

$$x_{t+1} = a x_t + b y_t$$

$$y_{t+1} = c x_t + d y_t$$

ここで、パラメータ (a, b, c, d) が状態変数 (x_t, y_t) と独立であれば2階の線形の差分方程

(17) 田中辰雄 (1993) 参照。

式であり、その運動は経済数学のテキストにある通りである。しかし、例えばパラメータ a, c が状態変数 (x_t, y_t) に依存しているとするならば、体系は直ちに非線形モデルに転化する。すなわち、

$$x_{t+1} = a(x_t, y_t) x_t + b y_t$$

$$y_{t+1} = c(x_t, y_t) x_t + d y_t$$

本稿の景気循環モデルは非線形モデルとはいえ、当初から状態変数 (x_t, y_t) の運動とパラメータ a, b の間の関係を議論するように設計したわけではないので、この問題を議論する枠組みをもっていない。パラメータと状態変数の関係を最初から考慮にいれた非線形・景気循環モデルの構築は今後の課題としたい。

<参考文献>

- [1] M.Kalecki (1937), "A Theory of Business Cycle", *Review of Economic Studies*, IV.
- [2] N.Kaldor (1940), "A Model of the Trade Cycle", *Economic Journal*, L (197), Mar.
- [3] J.R.Hicks (1950), *A Contribution to the Theory of Trade Cycle*, Oxford Univ. Press.
- [4] R.M.Goodwin (1951), "Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycle", *Econometrica*, 19(1) Jan.
- [5] R.M.Goodwin (1970), *Elementary Economics from higher Standpoint*, Cambridge Univ. Press.
- [6] W.W.Chang/D.J.Smyth (1971), "The Existence and Persistence of Cycle in a Nonlinear Model: Kaldor's 1940 model Re-examined", *Review of Economic Studies*, 38.
- [7] D.Ruelle/F.Takens (1971), "On the Nature of Turbulence", *Communications in Mathematical Physics*, 20.
- [8] M.W.Hirsch/S.Smale (1974), *Differential Equations, Dynamical System and Linear Algebra*, Academic Press.
- [9] T.Y.Li/J.A.Yorke (1975), "Period Three Implies Chaos", *American Mathematical Monthly*, 82.
- [10] 置塩信雄 (1976), 『蓄積論(第2版)』筑摩書房.
- [11] M.Hénon (1976), "A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor", *Communications in Mathematical Physics*, 50.

- [12] V.Torre (1977), "Existence of Limit Cycle and Control in Complete Keynesian Systems by Theory of Bifurcation", *Econometrica*, 44.
- [13] F.R.Marotto (1978), "Snap-Back Repellers Imply Chaos in R^n ", *Journal of mathematical Analysis and Applications*, 63.
- [14] F.R.Marotto (1979), "Perturbations of Stable and Chaotic Difference Equation", *Journal of mathematical Analysis and Applications*, 72.
- [15] H.R.Varian (1979), "Catastrophe Theory and the Business Cycle", *Economic Inquiry*, 17.
- [16] G.Iooss (1979), *Bifurcation of Maps and Application*, North Holland.
- [17] 浅利一郎 (1980) 「資本の投資行動と利潤率・実質賃金率・相対価格」『法経研究』(静岡大学) 34-2.
- [18] H.R.Varian (1981), "Dynamical Systems with Application to Economics", K.J.Arrow (ed.), *Handbook of Mathematical Economics*, North Holland.
- [19] R.M.Goodwin (1982), *Essays in Economic Dynamics*, Macmillan Publisher.
同『非線形経済動学』日本経済評論社 (1992).
- [20] R.A.Dana/P.Malgrange (1983), The Dynamics of Discrete Version of a Growth Cycle Model, in J.P.Ancot(ed), *Analyzing the Structure of Economic Model*, Martinus Nijhoff.
- [21] R.M.Goodwin/M.Krüger/A.Vercelli(ed) (1984), *Nonlinear Models of fluctuating Growth*, Springer-Verlag.
- [22] F.Cugno/L.Montrucchio (1984), "Some New Techniques for Modeling Nonlinear Economic Fluctuation", in R.M.Goodwin/M.Krüger/A.Vercelli(ed) (1984)
- [23] M.Boldlin (1984), *Applying Bifurcation Theory: Some Simple Results on Keynesian Business Cycle*, DP8403, University of Venice.
- [24] W.A.Barnet/J.Geweke/K.Shell(ed.) (1985), *Economic Complexity: Chaos, Sunspot, Bubble and Nonlinearity*, Cambridge Univ. Press.
- [25] R.Herrmann (1985), *Stability and Chaos in a Kaldor-Type Model*, DP22, University of Göttingen.
- [26] J.M.T.Thompson/H.B.Stewart (1986), *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley and Sons.

- [27] H.W.Lorenz (1987), "Strange Attractor in a Multisector Business Cycle Model", *Journal of Economic Behavior*, 7(3).
- [28] G.Gabisch/H.W.Lorenz (1987), *Business Cycle Theory*, Springer-Verlag.
- [29] J.Gleick (1987), *Chaos-Making a New Science*, Tuttle-Mori Agency Inc.
同『カオスー新しい科学をつくる』新潮社, (1991).
- [30] R.M.Goodwin (1989), *Essays in Nonlinear Economic Dynamics*, Peter Lang Verlag.
- [31] R.L.Devancy (1989), *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (2nd edition), Addison-Wesley publishing Company, Inc.
同『カオス力学系入門』共立出版 (1990).
- [32] R.M.Goodwin (1990), *Chaotic Economic Dynamics*, Oxford Univ. Press.
同『カオス経済動学』多賀出版 (1992).
- [33] E.E.Peters (1993), *Chaos and Order in the Capital Markets*, John Wiley & Sons Inc.
同『カオスと資本市場』白桃書房 (1994).
- [34] A.Medio (1992), *Chaotic Dynamics: Theory and Application to Economics*, Cambridge Univ. Press.
- [35] M.Woldrop (1992), *Complexity: The Emergence at the Edge of Order and Chaos*, Sterling Lord Lieristic Inc. 同『複雑系』新潮社 (1996).
- [36] 田中辰雄 (1993) 「景気循環はカオスと解釈できるか」, WP# GLOCOM-24, International University of Japan.
- [37] H.W.Lorenz (1993), *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer-Verlag.
- [38] M.H.Dore (1995), *The Macro-Dynamics of Business Cycle*, Basil Blackwell Limited.
同『景気循環のマクロダイナミックス』文化書房博文社 (1994).
- [39] M.Jarsulic(ed.) (1993), *Non-Linear Dynamics in Economics*, Edwar Elgar Publishing LTD.
- [40] 有賀祐二 (1994), 「経済とカオス」, 合原一幸編著『応用カオス』サイエンス社, 所収.
- [41] 大瀧雅之 (1994), 『景気循環の理論』東京大学出版会.
- [42] L.D.Kiel/E.Elliot (1996), *Chaos: Theory in the Social Sciences*, Univ. of Michigan Press.