科学基礎論研究 Vol.36, No.2 (2009) 1〜8

強制公理と Ω-論理

依　岡　輝　幸*

Forcing Axioms and Ω-logic

Teruyuki YORIOKA*

Abstract

It is well known that the Continuum Hypothesis is independent from the axioms of set theory by the results of Kurt Gödel and Paul Cohen. However, there are some set theorists who do not consider that this independency of the hypothesis is the ultimate answer of the continuum problem and who think the validity of the hypothesis should be determined. Recently, several ideas have been proposed to decide the hypothesis. In this paper, we introduce two ideas to determine the truth of the Continuum Hypothesis, which are related to the concept of forcing absoluteness. One is the concepet of forcing axioms, and the other is Ω-logic.

1. 序論

公理的集合論とは，第一階述語論理に基づくツェルメロ–フレンケルの集合論 ZF，もしくはそれに選択公理を付け加えた ZFC という公理系のもとで，どういう命題が形式的証明により推論されるかを調べる研究をいう。公理的集合論は，カントールが生み出した（素朴）集合論の公理化により誕生した公理系で，解析学，代数学，幾何学など，あらゆる数学の分野が ZFC という公理系の中で展開できることから，ZFC は数学の公理系と考えることができる。つまり，ZFC のモデルは数学のモデル，もしくは数学世界そのものと考えることができる。

ゲーデルの不完全性定理から，ZFC で形式的証明も形式的反証も持たない（つまり，独立である）命題が存在することが分かる。ZFC が無矛盾であると仮定し，命題 φ を ZFC から独立な命題だとすると，ゲーデルの完全性定理より，ZFC $+\ \varphi$ のモデルも，ZFC $+ \neg\varphi$ のモデルも存在する。よって，これから（理論の異なる，つまり真とされる命題の集合が異なる）複数の数学モデルが存在することが分かる。ZFC から独立な命題が数学的には意義の深くない，興味の薄いものに限定されるならば，理論の異なるモデルの存在は大きな問題にはならないが，事実はそうではない。

特に重要な ZFC から独立な命題として，その真偽を決定することがヒルベルトの第一問題に挙げられた，無限集合に関する最も基本的な命題である連続体仮説（the Continuum Hypothesis）$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ がある[1]。ZFC のモデルは，強制法という手法を用いて，全く別のモデルを構成することが出来る[2]。しかも，（論理的な辻褄が合いなおかつ技術的問題がクリアされていればの話だが）割と自由に拡大モデルを構成することができる。例えば，強制法を用いて，どんな ZFC のモデルからでも，連続体仮説を満たす拡大モデル，および満たさない拡大モデルを構成することができる。その他にも数多くの当時の未解決問題が，実は ZFC から証明も反証もされないことが示され続けている。これらの事実は，（ZFC が無矛盾であれば）様々な興味深い数学モデルが存在することを意味する。

ZFC と同様に，ゲーデルの不完全性定理と完全性定

* 静岡大学

[1] 元々の連続体仮説の定義と，ここでの定義は多少違うが，この論説ではこの定義を採用する。

[2] 強制法を適用するための細部は，ここだけでなく，この論説を通してあらゆる箇所で無視して述べている。（例えば，何の仮定も無く，あたかも ZFC のモデルが存在するかのように言っている。）なお，強制法に関しては，[14, Ch.14], [15], [17, Ch.VII], [47, §4.2] などを参照。

理から，自然数の公理系であるペアノ算術にも（理論の異なる）複数のモデルが存在する。しかしペアノ算術が ZFC と違うところは，ペアノ算術には唯一の正しいモデルとしての標準的なモデルが存在することである。ペアノ算術の標準モデルに相当するモデルとして，ゲーデルの構成可能集合を考えることができるのかもしれないが，これを本当の数学の世界と考えるという意味で，このモデルを ZFC の標準モデルと考えることは難しい。そもそも唯一の正しいモデルなど存在しない，と考えるのが公理的集合論での標準的な見方であろう。しかし，唯一の正しいモデルが存在しないとしても，集合論の様々なモデル全てが同等な訳ではない，と考える集合論研究者も少なからずいる。

また，ZFC とはあくまで数学世界を見るための切り口の一つであって，これが唯一の数学の定式化ではないと言うこともできる。例えば，数直線は実在すると考える数学者にとっては，数直線のサイズ（濃度）はある値に確定していると考えるのは自然な発想であり，それならば連続体仮説の真偽は決定されるべきである。もしそうであれば，ZFC は単に数学世界を定式化する方法として弱いというだけのことであろう。（しかしこの場合も，連続体仮説を考えるためには ZFC とは異なる何らかの数学の定式化は必要になるが。）

巨大基数公理などを仮定して連続体仮説などの無矛盾命題の正否を決定するというゲーデルのプログラムから分かるように，ゲーデルも，連続体仮説が ZFC から独立であることが連続体仮説の完全解決であるとは考えていなかったようである[3]。では，実際，連続体仮説の真偽はどう決定されるべきであろうか。近年，公理的集合論の発展とともに，連続体仮説などの集合論の命題の真偽を考えるためのいくつかのアイデアが生まれてきた。この論説では，強制法的絶対性[4]（forcing absoluteness）という概念を通して，集合論の命題の真偽を考える二つのアイデア，強制公理（forcing axioms）と Ω-論理（Ω-logic）を紹介する。

2. 強制公理

ある命題が ZFC（もしくは ZFC にある巨大基数公理を付け加えた公理系）から形式的証明を持たないことを示すための手法には，内部モデルと強制法の二通りがある。このうち強制法は，組合せ論的な作業で新しい無矛盾結果を出すことができること，強制法の理論自身が様々な方向に発展したこと，利用しやすくなおかつ理論としての発達が非常に早かったことなどがあり，公理的集合論の研究において必要不可欠な道具となった。

強制法とは，与えられた ZFC のモデル M に対し，その中で定義される半順序 $\mathbb{P}$ を考え，ジェネリック（generic）と呼ばれる $\mathbb{P}$ の極限 G を M の外側から一つとってきて M に付け加え，M の拡大モデル $M[G]$ を構成する手法である。半順序 $\mathbb{P}$ は G の局所的な情報たちに順序がつけられた構造である。例えば，コーエンの強制法は新しい自然数の可算無限列を付け加える強制法であるが，その半順序は有限の自然数の列（G の始切片となり得るもの全て）から成り，順序はそれらの拡張により定まる。

強制法の特徴は次の二つである。一つは M の拡大モデル $M[G]$ の元ひとつひとつを指し示す $\mathbb{P}$-name という考え方であり，もう一つは，対角線論法に相当するジェネリックという考え方である。このうち，$\mathbb{P}$-name を理解するには，数理論理学および公理的集合論の知識と理解をより強く必要とする。強制公理，特にマーティンの公理（Martin's Axiom），が割と多くの集合論研究者以外の数学者に取り扱われていることの理由は，それらが $\mathbb{P}$-name を扱う必要がなく，ジェネッリクと呼ばれる数学者なら誰でも良く知る対角線論法に関する公理であり[5]，しかも，様々な興味深い命題を導き，応用範囲が広いことにあろう。

さて，命題 φ が半順序 $\mathbb{P}$ に関して強制法的絶対とは，ZFC のモデル M と $\mathbb{P}$ による強制拡大モデル $M[G]$ との間で φ の真理値が変化しないときをいう[6]。例えば，ZFC（の一つのモデルの中）では，自然数の集合はただ一つに決定されている（つまり，絶対である）ことから，自然数上の命題は Δ_0-式であり，よって全ての半順序に関して強制法的絶対である。また，Σ^1_2-式は，$\omega \times \omega_1$ 上の木の射影による表現を持つ[7]ので，全ての

[3] [12]。[3, 8, 29, 48] も参照。

[4] ここでは，forcing absoluteness を強制法的絶対性，forcing axioms を強制公理と訳したが，これらは一般的な訳語ではなく，この場での訳語である。

[5] 特に，Proper Forcing Axiom などの他の強制公理と異なり，マーティンの公理は単純な組合せ論のみで完全に記述され，なおかつ数学者なら良く知るベールのカテゴリー定理のある種の一般化として特徴付けられるため，受け入れられやすいのだと思う。

[6] 例えば，[1, 4] を参照。

[7] シェーンフィールドの定理 [14, Theorem 25.18.], [16, 13.14 Theorem]。

半順序に関して強制法的絶対である[8]。

集合 x に対して，$\cup^0 x := x$，$\cup^{n+1} x := \cup(\cup^n x)$，と帰納的に定義し，$\mathrm{trcl}(x) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \cup^n x$ と定義する。基数 κ に対して，$H(\kappa)$ をサイズ κ 未満の集合の族とする。例えば，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は $H(\aleph_0)$ の部分集合である。基数 κ と λ に対して，もし $\kappa < \lambda$ であれば $H(\kappa) \subseteq H(\lambda)$ であり（CN を基数全体のクラスとすると），$\bigcup_{\kappa\in\mathrm{CN}} H(\kappa)$ は ZFC 全体（ユニバース）となる。さらに（ZFC のもとで），正則な不可算基数 κ に対して，$H(\kappa)$ は ZFC − Power set axiom のモデルとなっている[9]。$H(\aleph_0), H(\aleph_1), H(\aleph_2), \dots$ は ZFC のユニバースに一つの階層構造を与える。

構造 $\langle H(\aleph_0), \in, 0, +, \cdot\rangle$ は，自然数全体の構造と見ることができ，この構造上の全ての命題は全ての半順序に関して強制法的絶対である。構造 $\langle H(\aleph_1), \in, \mathbb{N}\rangle$ は定義可能な実数の集合に関する構造で，二階算術とも呼ばれる。どんな射影的命題もこの構造上で表現され[10]，公理的集合論でさかんに行われていた射影集合の決定性の研究はこの構造に関する研究と考えることができる[11]。ある巨大基数公理（ウディン基数[12]が非有界に存在する）のもとで，全ての $\langle H(\aleph_1), \in, \mathbb{N}\rangle$ 上の命題はどんな半順序に関しても強制法的絶対である[13]。NS_{ω_1} を ω_1 上の非定常イデアル（the nonstationary ideal）として，構造 $\langle H(\aleph_2), \in, NS_{\omega_1}\rangle$ を考える。連続体仮説はこの構造で Σ_2-文として表現することができる[14]。その他多くの ω_1 上の組合せ的命題をこの構造で表現することができ，この構造の研究は非常に重要である[15]。

$H(\aleph_2)$ は，上記二つのような，全ての命題に対する強制法的絶対性を持たない。なぜなら，例えば，いかなる ZFC のモデルからも，連続体仮説を満たす，もしくは満たさない拡大モデルをそれぞれ構成できるからである。しかし，ウディンは連続体仮説にまつわる次の二つの異なる強制法的絶対性の定理を導いている。(1)（ある巨大基数公理の仮定のもとで）任意の Σ^2_1-命題 φ に対して，もしある半順序の強制拡大で $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ かつ φ が成り立てば，φ が（既に）成り立っている[16]。(2)（ある巨大基数公理の仮定のもとで）次は無矛盾である：$2^{\aleph_0} = \aleph_2$ かつ任意の $\langle H(\aleph_2), \in, NS_{\omega_1}\rangle$ 上の Π_2-命題 φ に対して，もしある半順序の強制拡大で $\langle H(\aleph_2), \in, NS_{\omega_1}\rangle \models \varphi$ が成り立てば，$\langle H(\aleph_2), \in, NS_{\omega_1}\rangle \models \varphi$ が（既に）成り立っている[17]。

ある命題が ZFC から無矛盾であることを示すために，集合論研究者は様々な強制拡大を取ることにより，命題の真偽を変化させる。様々な種類の強制拡大を取っても真偽を変化させられない命題，つまり強制法的絶対な命題は，公理的集合論の妥当な普遍的な公理になりうると考えられよう。そして，より多くの強制法的絶対な命題を満たす ZFC のモデルは（標準的であるとは言えなくても）より理想的な公理的集合論のモデルであると言えよう。そして，公理的集合論の誕生と発展の起源は，連続体仮説である。連続体仮説の真偽は強制法的絶対に関する文脈の中で決定できないだろうか，また，決定できるのなら，どのように決定されるのか。

半順序のクラス Γ に対して，$\mathsf{FA}_{\omega_1}(\Gamma)$ を，Γ に属する半順序 $\mathbb{P}$ と ω_1 個の $\mathbb{P}$ の稠密部分集合 $\{D_\alpha ; \alpha \in \omega_1\}$ に対して，全ての D_α と交わる $\mathbb{P}$ のフィルターが存在する[18]，という公理とし，$\mathsf{BFA}_{\omega_1}(\Gamma)$ を，Γ に属する半順序 $\mathbb{P}$ と ω_1 個の $\mathbb{P}$ の極大反鎖（maximal antichain）$\{A_\alpha ; \alpha \in \omega_1\}$ に対して，もしどの A_α のサイズも $\aleph_1$ 以下であれば，全ての A_α と交わる $\mathbb{P}$ のフィルターが存在する，という公理とする[19]。この $\mathsf{FA}_{\omega_1}(\Gamma)$ と $\mathsf{BFA}_{\omega_1}(\Gamma)$ たちのことを強制公理と呼ぶ。例えば，Γ が ccc という条件を満たす全ての半順序のクラスのとき，$\mathsf{FA}_{\omega_1}(\Gamma)$ は（ω_1 個の稠密集合に制限した）マーティンの公理 MA_{ω_1}[20]であり，（ccc という性質より）これは $\mathsf{BFA}_{\omega_1}(\Gamma)$ と同値である。Γ が proper という条件を満たす全ての半順序のクラスのとき，$\mathsf{FA}_{\omega_1}(\Gamma)$ を Proper Forcing Axiom[21]と呼び，$\mathsf{BFA}_{\omega_1}(\Gamma)$ を Bounded Proper Forcing Axiom[22]と呼

[8] [14, Theorem 25.20.], [16, 13.15 Theorem] などを参照。
[9] 例えば，[17, Ch.VII §6] を参照。
[10] 例えば，[14, Lemma 25.25.] を参照。
[11] 例えば，[16, 23, 24, 27, 34, 48] を参照。
[12] [19, §1.5], [31], [48, 定義 4.4] などを参照。
[13] 例えば，[19, §3.1] を参照。
[14] 例えば，$\exists f \forall r\,((f : \omega_1 \to \mathbb{R}) \wedge (r \in \mathbb{R} \to \exists \alpha \in \omega_1\,(r = f(\alpha))))$。ちなみに，$\omega_1$ と $\mathbb{R}$ はこの構造の中で Δ_0-式で表現可能である。
[15] [18, 21, 28, 35, 45] などには，それらの例がある。
[16] [11], [19, §3.2] を参照。
[17] [20, 35] を参照。
[18] これは，$\mathbb{P}$ から構成されるある位相空間において，ω_1 個の稠密開部分集合の共通部分が空でない，ということに相当する。[17, Ch.VII §7] 参照。
[19] 例えば，[1, Ch.2], [46] を参照。
[20] マーティン–ソロベイ [22] による。
[21] バウムガルトナー [6] による。
[22] ゴールドスタン–シェラ [13] による。

ぶ。マーティンの公理は ZFC と無矛盾であり，その他の強制公理は，ある巨大基数公理が無矛盾であれば，無矛盾であることが知られている[23]。

強制公理は様々な強制法的絶対性を導くことが知られている。例えば，MA_{ω_1} が成り立てば，「任意の Σ_2-命題 φ に対して，$H(\aleph_1) \models \varphi$ は ccc を満たす半順序に関して強制法的絶対」であり，Bounded Proper Forcing Axiom は，「任意の Σ_1-命題 φ に対して，$H(\aleph_2) \models \varphi$ は proper という性質を持つ半順序に関して強制法的絶対である」ことと同値である[24]。この観点から，バガリアは [3] の中で，ZFC に追加する自然な公理の候補の一つとして強制公理を挙げている。

強制公理が成り立てば，数直線のサイズ $2^{\aleph_0}$ は $\aleph_1$ より真に大きい[25]。また，MA_{ω_1} は $2^{\aleph_0}$ の値を決定しないこともよく知られていた[26]。しかし，他の強制公理，例えば Proper Forcing Axiom や Bounded Proper Forcing Axiom が $2^{\aleph_0}$ の値を決定するかどうかは，重要な未解決であった。これを打破したのはトドロシェビッチである。トドロシェビッチは，Proper Forcing Axiom から $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ が導かれることを証明した[27]。その後，様々な研究者が他の強制公理（+可測基数の存在）から $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ が導かれることを示した[28]。

3. Ω-論理

Ω-論理は，ウディンが提唱した公理的集合論上の新しい論理である。大雑把に言えば Ω-論理の基本的な考え方は，連続体仮説が決定不能なのは ZFC の公理が少ないからではなく，背景にある論理（つまり，古典論理である $\vdash$ や $\models$ など）が弱いからであり，論理を強くすることによって連続体仮説の真偽は決定される，というものである[29]。著者の知る Ω-論理に関連する論文は [5, 9, 35, 37–40, 42, 44]，ウディンによる講演のスライドは [36, 41, 43] である。Ω-論理が提唱された当時の記法と定義はここで紹介するものと若干異なる。ここで紹介する記法は [5] に基づいている。

まず，Ω-論理の semantics $\models_\Omega$ から定義する。ZFC の言語の文の集まり T と命題 φ に対して，$T \models_\Omega \varphi$ を，任意の半順序 $\mathbb{P}$ と順序数 α に対して，もし ${V_\alpha}^{\mathbb{P}} \models T$ ならば，${V_\alpha}^{\mathbb{P}} \models \varphi$ となるときをいう[30]。定義より直ちに分かることだが，T が ZFC を含みなおかつ $T \models \varphi$ ならば，$T \models_\Omega \varphi$ となることから，$\models_\Omega$ は通常の $\models$ より強い。しかも，$\mathsf{ZFC} \models_\Omega \varphi$ かつ $\mathsf{ZFC} \not\models \varphi$ となる命題 φ が存在する[31]ことから，$\models_\Omega$ は通常の $\models$ より真に強いことが分かる。さらに，$\models_\Omega$ は強制法的絶対である。

$\models_\Omega$ は，“どんな強制拡大の中でも成り立つ” ときにその命題が成立する，ということだと考えられる。つまり，強制法的絶対な命題に関して §2 で掲げた理想を体現している論理である。（通常の semantics である）$T \models \varphi$ とは，T を満たす全てのモデルが φ を満たす，ということである。“T を満たすモデル” の種類を減らせば対応する論理は強くなる（T で真とされる命題が増える）。そういう観点からも，$\models_\Omega$ は $\models$ を自然に強くした論理であると考えることができる。

次に Ω-論理の syntax $\vdash_\Omega$ を定義する。こちらの定義は（飛躍的に発展している理論としての）記述集合論と巨大基数公理の理論を駆使して定義されるため厄介である。まず $\vdash_\Omega$ を定義するのに必要な概念のうち，重要であると思われる二つの概念，普遍的ベール集合[32]（universally Baire sets of reals）と普遍的ベール集合 A に対する A-closed モデル，を解説する。

実数の集合 A が普遍的なベールの性質を持つ，つまり A が普遍的ベール集合であるとは，任意のコンパクトハウスドルフ空間 X と連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対して，$f^{-1}[A]$ がベールの性質を持つときをいう。これは，普遍的可測集合（universally measurable sets of reals）のベールの性質版であり，フェン–マギドア–ウディンにより [10] で定義され，研究されている。例えば，ボレル集合および解析集合（analytic sets of reals）は普遍的ベール集合であり，巨大基数公理を仮定すると，より多くの実数の集合が普遍的ベール集合となる。フェン–マギドア–ウディンは，普遍的ベール集合に，あるクラス木の射影と強制法的絶対性に関する特徴付

[23] [13], [14, Theorem 31.21.], [17, Ch.VIII §6] などを参照。
[24] [1, 2] などを参照。
[25] 例えば，[17, Ch.II §2.2] を参照。
[26] [30] による。[14, Ch.16], [17, Ch.VIII §6] なども参照。
[27] [7, 3.16 Theorem], [14, Theorem 31.23] などを参照。
[28] 例えば，[25, 26, 33] などが挙げられる。
[29] ただし，強い論理を考えることで連続体仮説かその否定が直接証明できるようになる訳ではない。詳しくは，[38] の前半部分を参照。
[30] ここで，${V_\alpha}^{\mathbb{P}}$ はブール値モデルのことである。ブール値モデルは強制拡大とほぼ同等であるが，理論的に，$\mathbb{P}$ のジェネリックを取ることが一般にできないため，ブール値モデルを考えている。[17, Ch.VII §7] などを参照。
[31] これは，[5, Theorem 1.12] を使って示される。
[32] これも一般的な訳語ではなく，この場での訳語である。

けを与えている。よって，ボレル集合に対するボレルコードのように，普遍的ベール集合 A にもクラス木によるコーディングがあり，ある半順序のジェネリック G に関する強制拡大モデルの中で A を考えるときは，A をコードするクラス木によるそのモデル内での射影と解釈し，それを A_G と書く。

普遍的ベール集合 A に対して，ZFC の推移的モデル M が A-closed であるとは，任意の M に属する半順序とその $\mathbf{V}$-ジェネリック（$\mathbf{V}$ はユニバース）G に対して，$\mathbf{V}[G] \models$ “$M[G] \cap A_G \in M[G]$” が成り立つ[33]ときをいう。A-closed なモデルとは，M に属する半順序に関する M の強制拡大モデル[34]の中で，A をコードするクラス木による A の正しい解釈を扱うことができるモデルであり，つまり “本当の” A を扱えるモデルと考えられる。

ZFC の言語の文の集まり T と命題 φ に対して，$T \vdash_\Omega \varphi$ を，ある普遍的ベール集合 A が存在して，A はある巨大基数公理を満たし[35]，なおかつ全ての可算推移 A-closed ZFC-モデル M に対して $M \models$ “$T \models_\Omega \varphi$” となるときをいう[36]。$\models_\Omega$ 同様，T が ZFC を含みなおかつ $T \vdash \varphi$ ならば，$T \vdash_\Omega \varphi$ となることから，$\vdash_\Omega$ は通常の $\vdash$ より強い。しかも，ZFC $\vdash_\Omega \varphi$ かつ ZFC $\nvdash \varphi$ となる命題 φ が存在する[37]ことから，$\vdash_\Omega$ は通常の $\vdash$ より真に強いことが分かる。さらに，$\vdash_\Omega$ は強制法的絶対である。

$T \vdash_\Omega \varphi$ の定義にある普遍的ベール集合は，通常の論理での形式的証明に対応する。事実，この普遍的ベール集合のことを φ の Ω_T-証明（Ω_T-proof）と呼ぶ。例えば，ZFC $\vdash \varphi$ であれば，φ の Ω_{ZFC}-証明として実数全体の集合 $\mathbb{R}$ が挙げられる。Ω_T-証明は，通常の syntax で対象となる証明というよりむしろ，T が φ を推論する “証拠（evidence）” という印象を受ける。通常の syntax と同様で，$T \vdash_\Omega \varphi$ かつ $T \vdash_\Omega \psi$ ならば $T \vdash_\Omega \varphi \wedge \psi$ となり，$T \vdash_\Omega \varphi$ かつ $T \vdash_\Omega \varphi \to \psi$ ならば $T \vdash_\Omega \psi$ となる，などの通常の推論規則が成り立っている。また，Ω_T-証明にはワッジ次数（Wadge degrees）という，通常の証明の長さに対応する概念が与えられている。

（通常の syntax である）$T \vdash \varphi$ とは，T から φ への形式的証明が存在する，ということである。“形式的証明” の種類を増やせば対応する論理は強くなる（T から証明できる命題が増える）。そういう観点からも，$\vdash_\Omega$ は $\vdash$ を “自然に” 強くした論理であると考えることができる。

Ω-論理は健全性を持つ。つまり，$T \vdash_\Omega \varphi$ ならば $T \models_\Omega \varphi$ が成り立つ。しかし，Ω-論理の完全性が成り立つかどうかは定かではない。ある巨大基数公理（ウディン基数が非有界に存在する）の仮定のもとで，任意の命題 φ に対して，$\emptyset \models_\Omega \varphi$ ならば $\emptyset \vdash_\Omega \varphi$ が成り立つことを，Ω-予想（Ω-conjecute）という[38]。Ω-予想は強制法的絶対であるため，この予想の無矛盾性を示すためには強い巨大基数公理（ウディン基数が非有界に存在する）を満たす内部モデルを構成する必要がある[39]。つまり，強制法により ZFC から独立であるという意味で連続体仮説が可解でないことと全く別の意味で，Ω-予想は可解でない[40]。ウディンは，Ω-予想が成り立ちなおかつ $\langle H(\aleph_2), \in\rangle$ の理論が $\models_\Omega$ の意味で有限公理化可能であれば，連続体仮説が否定されること

[33] 正確には，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ “$M[\dot{G}] \cap A_{\dot{G}} \in M[\dot{G}]$” のこと。

[34] 定義を正確に考えると，M の強制拡大モデルを取るのに，M のジェネリックでなく，ユニバースのジェネリックというより強いジェネリックの強制拡大モデルを取る，ということである。ちなみに，A-closed モデルの定義の $\mathbf{V}$-ジェネリックを M-ジェネリックに変更したものを strongly A-closed モデルという。

[35] 正確には，$L(A, \mathbb{R})$ が AD^+ を満たし，なおかつ $L(A, \mathbb{R})$ に属する全ての実数の集合は普遍的ベール集合である，ということ。もしウディン基数が非有界に存在すれば，任意の普遍的ベール集合 A はこの性質を持つことから，この仮定は無視できる。

[36] もし可算推移 A-closed ZFC-モデルが存在しなければこの定義は無意味であるが，ある巨大基数公理（AD^+）を仮定すると，そのようなモデルが存在する。

[37] これも，[5, Corollary 3.5] を使って示される。

[38] $\emptyset \models_\Omega \varphi$ は，定義を正確に見ると，φ に比べ α が小さい時を考えることにより意味をなさなくなってしまうため，この定義は奇妙に思える。（“十分大きい α に対して” という定義にしてしまえば，問題ないように思われるが。）実際，Ω-予想が提唱された当時は，ZFC $\models_\Omega \varphi$ ならば ZFC $\vdash_\Omega \varphi$ が成り立つこととして，Ω-予想が定義されている。（ちなみに，[9, 36, 38, 40, 41, 44] では，ZFC の方を採用しており，[5, 42, 43] の方では $\emptyset$ を採用している。）[5, Lemma 3.6.] を見ると，$\emptyset$ の方の定義と ZFC の方の定義は同値になるようだが，ここでの証明は $\emptyset$ の方の定義が成り立つならば ZFC の方の定義が成り立つことしか述べられておらず，肝心の上記の問題については触れられていない。また，[35] では，これは予想ではなく，定理 [35, Theorem 10.159] として紹介されている。

[39] 強い巨大基数公理を満たす内部モデルの構成は理論的に非常に困難なようである。[5] の最後の文章でアナウンスされているように，ウディンはこの内部モデルを構成したようであるが，まだ正式な出版には至っていない。

[40] 例えば，[42, §6] を参照。

を主張している[41]。

古典論理のもとでの ZFC では様々な数学的命題の真偽を決定できない。特に，最も知りたかった連続体仮説の真偽すら決まらない。では，論理を強くすることによって連続体仮説の真偽を決定できないか。しかし，単に恣意的に古典論理を強くして，その論理の中で連続体仮説を決定しても，それはやはり知りたいこととは違うだろう。古典論理を“自然に”強くした論理を“発見”して，その中で連続体仮説の真偽を見ることはできないだろうか。（もちろんこれは，もしそんなものがあるのだとしたら，の話ではあるが。）ウディンの Ω-logic は古典論理を“自然に”強くした ZFC での論理ではないだろうか？

4. 結論

連続体仮説が ZFC から独立であることが示された後も，公理的集合論では連続体仮説に関する研究が強力に推し進められてきた。ウディンは [38, Concluding Remarks] の中で Ω-論理に関する結果について，次のように述べている：

> *Perhaps I am not completely confident the "solution" I have sketched is the solution, but it is for me convincing evidence that there is a solution. Thus, I now believe the Continuum Hypothesis is solvable, which is a fundamental change in my view of set theory.*（私は，ここでスケッチした（連続体仮説の）解決が本当の解決であることの完全な自信があるわけではない。しかし，それは私にとっては（連続体仮説の）解決があると確信させる根拠である。よって，私は連続体仮説は解決でき，それは私の集合論の見識を根本的に変えると信じている。）

全ての集合論研究者がこの見方に賛成する訳ではないかも知れないし，必ずしもここで述べられた意味での連続体仮説の解決を目指して公理的集合論の研究が進められてきた訳でもない。古典論理や ZFC という公理系は十分に強く十分に自然なものであるし，そして，たとえ連続体（数直線）の絶対的なサイズを決定できないとしても，公理的集合論の研究は大変に興味深く，価値のあるものであろう。しかしこの論説で見たように，最近の連続体仮説に関する研究は，連続体の絶対的なサイズを問うことは無意味ではなく，我々の論理に関する考え方や集合観の中にはまだ議論すべき重要な話題が残されており，それが連続体の絶対的なサイズを決定できないことの理由であるという，より野心的な考え方があり得ること示している。[42]

5. 謝辞

この論説は，2008 年 11 月に行われた科学基礎論学会秋の研究例会のワークショップ「数理論理学と無限論」での著者の講演「公理的集合論における論理」が基になっている。そもそもこのワークショップと著者の講演の発端は 2005 年にこのワークショップのオーガナイザーである菊池誠氏に著者が研究していたウディンの $\mathbb{P}_{max}$ という強制法を話したことにある。それ以降，論理を強くすることや Ω-論理について菊池氏と議論を繰り返し行ってきた。この論説では菊池氏との議論により生まれたアイデアが随所で反映されており，特に記して感謝の意を表する。また，「数理論理学と無限論」の他の講演者である山田竹志氏と江口直日氏にもお礼を申し上げる。

参考文献

[1] J. Bagaria. *Generic absoluteness and forcing axioms.* Models, algebras, and proofs (Bogotá, 1995), 1–12, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 203, Dekker, New York, 1999.

[2] J. Bagaria. *Bounded forcing axioms as principles of generic absoluteness.* Arch. Math. Logic 39 (2000), no.6, 393–401.

[3] J. Bagaria. *Natural axioms on set theory and the continuum problem.* CRM Preprints 2004, no.591, Centre de Recerca, MateMàtica, 2004.

[4] J. Bagaria. *Axioms of generic absoluteness.* Logic Colloquium '02, 28–47, Lect. Notes Log., 27, Assoc. Symbol. Logic, La Jolla, CA, 2006.

[5] J. Bagaria, N. Castells and P.B. Larson. *An Ω-logic primer.* Set theory, 1–28, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2006.

[6] J. Baumgartner. *Applications of the proper forcing*

[41] 例えば，[9, §7], [38, The Ω conjecture] を参照。

[42] 最後に，ここでの文脈とは違う，連続体のサイズに関して論じているトドロシェビッチの [32] を紹介したい。

axiom. Handbook of set-theoretic topology, 913–959, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[7] M. Bekkali. *Topics in set theory. Lebesgue measurability, large cardinals, forcing axioms, rho-functions.* Notes on lectures by Stevo Todorčević. Lecture Notes in Mathematics, 1476. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[8] J. Brendle, P.B. Larson and S. Todorčević. *Rectangular axioms, perfect set properties and decompositions.* Bulletin de l'Academie Serbe des Sciences et des Arts, Classe des Sciences Mathematiques et Naturelles, Sciences mathematiques, 33 (2008), 91–130.

[9] P. Dehornoy. *Progrès récents sur l'hypothèse du continu (d'après Woodin). [Recent progress on the continuum hypothesis (after Woodin)].* Séminaire Bourbaki 55ème année, 2002–2003, #915.

[10] Q. Feng, M. Magidor and W.H. Woodin. *Universally Baire sets of reals.* Set theory of the continuum (Berkeley, CA, 1989), 203–242, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 26, Springer, New York, 1992.

[11] I. Farah. *A proof of the Σ^2_1-absoluteness theorem.* Advances in logic, 9–22, Contemp. Math., 425, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[12] K. Gödel. *What is Cantor's continuum problem?* Amer. Math. Monthly 54, (1947). 515–525.

[13] M. Goldstern and S. Shelah. *The bounded proper forcing axiom.* J. Symbolic Logic 60 (1995), no.1, 58–73.

[14] T. Jech. *Set theory. The third millennium edition, revised and expanded.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[15] T. Jech. *What is ... forcing?* Notices Amer. Math. Soc. 55 (2008), no.6, 692–693.

[16] A. Kanamori. *The higher infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings. Second edition.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. 邦訳：『巨大基数の集合論』, 渕野昌訳, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1998).

[17] K. Kunen. *Set theory. An introduction to independence proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980. 邦訳：『集合論—独立性証明への案内』, 藤田博司訳, 日本評論社 (2008).

[18] P. Larson. *An $\mathbb{S}_{max}$ variation for one Souslin tree,* J. Symbolic Logic 64 (1999), no.1, 81–98.

[19] P.B. Larson. *The stationary tower. Notes on a course by W. Hugh Woodin.* University Lecture Series, 32. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[20] P.B. Larson. *Forcing over models of determinacy.* in Handbook of Set Theory, M. Foreman, A. Kanamori, and M. Magidor, eds., to appear.

[21] P. Larson and S. Todorčević. *Chain conditions in maximal models*, Fund. Math. 168 (2001), no.1, 77–104.

[22] D.A. Martin and R.M. Solovay. *Internal Cohen extensions.* Ann. Math. Logic 2 1970 no.2, 143–178.

[23] D.A. Martin and J.R. Steel. *Projective determinacy.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 85 (1988), no.18, 6582–6586.

[24] D.A. Martin and J.R. Steel. *A proof of projective determinacy.* J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), no.1, 71–125.

[25] T. Miyamoto. *BSPFA Combined with One Measurable Cardinal.* Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No.1304 (2003), 114–121.

[26] J.T. Moore. *Set mapping reflection.* J. Math. Log. 5 (2005), no.1, 87–97.

[27] Y.N. Moschovakis. *Descriptive set theory.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 100. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

[28] S. Shelah and J. Zapletal. *Canonical models for $\aleph_1$-combinatorics*, Ann. Pure Appl. Logic 98 (1999), no.1-3, 217–259.

[29] R.M. Solovay. *Introductory note to Gödel *1970a, *1970b, and *1970c.* Collected works. Vol.III. Unpublished essays and lectures. With a preface by Solomon Feferman. Edited by Feferman, John W. Dawson, Jr., Warren Goldfarb, Charles Parsons and Robert M. Solovay, 405–420, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[30] R.M. Solovay and S. Tennenbaum. *Iterated Cohen extensions and Souslin's problem.* Ann. of Math. (2) 94 (1971), 201–245.

[31] J.R. Steel. *What is ... a Woodin cardinal?* Notices Amer. Math. Soc. 54 (2007), no.9, 1146–1147.

[32] S. Todorčević. *Comparing the continuum with the first two uncountable cardinals.* Logic and scientific methods (Florence, 1995), 145–155, Synthese Lib., 259, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[33] S. Todorčević. *Generic absoluteness and the continuum.* Math. Res. Lett. 9 (2002), no.4, 465–471.

[34] W.H. Woodin. *Supercompact cardinals, sets of re-*

als, and weakly homogeneous trees. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 85 (1988), no.18, 6587–6591.

[35] W.H. Woodin. *The axiom of determinacy, forcing axioms, and the nonstationary ideal*. de Gruyter Series in Logic and its Applications, 1. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1999.

[36] W.H. Woodin. *The Continuum Hypotheis*. Logic Colloquium 2000, the Sorbonne, Paris (July 2000).

[37] W.H. Woodin. *The continuum hypothesis. I*. Notices Amer. Math. Soc. 48 (2001), no.6, 567–576.

[38] W.H. Woodin. *The continuum hypothesis. II*. Notices Amer. Math. Soc. 48 (2001), no.7, 681–690.

[39] W.H. Woodin. *The Ω conjecture*. Aspects of complexity (Kaikoura, 2000), 155–169, de Gruyter Ser. Log. Appl., 4, de Gruyter, Berlin, 2001.

[40] W.H. Woodin. *Beyond $\underset{\sim}{\Sigma}^2_1$ absoluteness*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol.I (Beijing, 2002), 515–524, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[41] W.H. Woodin. *The Continuum Hypothesis and the Ω-Conjecture*. Coxeter Lectures, Fields Institute, Toronto (November 2002).

[42] W.H. Woodin. *Set theory after Russell: the journey back to Eden*. One hundred years of Russell's paradox, 29–47, de Gruyter Ser. Log. Appl., 6, de Gruyter, Berlin, 2004.

[43] W.H. Woodin. *The Omega conjecture*. Cardinal Arithemetic at Work, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem (March 2004).

[44] W.H. Woodin. *The continuum hypothesis*. Logic Colloquium 2000, 143–197, Lect. Notes Log., 19, Assoc. Symbol. Logic, Urbana, IL, 2005.

[45] T. Yorioka. *$\mathbb{P}_{max}$ variations related to slaloms*, MLQ Math. Log. Q. 52 (2006), no.2, 203–216.

[46] 渕野 昌「Forcing Axioms と連続体問題—公理的集合論の最近の話題から」,『数学』, 56 (2004), no.3, 248–259.

[47] 渕野 昌「構成的集合と公理的集合論入門」,『ゲーデルと 20 世紀の論理学 第 4 巻』, 東京大学出版会 (2007).

[48] 松原 洋「集合論の発展—ゲーデルのプログラムの視点から」,『ゲーデルと 20 世紀の論理学 第 4 巻』, 東京大学出版会 (2007).