

**小学校算数，中学校数学，高校数学の
接続を重視した
幾何教育の改善に関する研究**
(課題番号 16530578)

平成16年度～平成18年度 科学研究費補助金（基盤研究(C)）
研究成果報告書

静岡大学附属図書館



000750920 1

平成19年（2007年）3月

研究代表者 国 宗 進

（静岡大学教育学部教授）

教育学部 国宗進 K

2006

0007509201

36

静岡大学附属図書館

**小学校算数，中学校数学，高校数学の
接続を重視した
幾何教育の改善に関する研究**

(課題番号 16530578)

平成 16 年度～平成 18 年度 科学研究費補助金 (基盤研究(C))
研究成果報告書

平成 19 年 (2007 年) 3 月

研究代表者 国 宗 進

(静岡大学教育学部教授)

はじめに

教育に関する多方面からの発言が喧しいこの頃です。国内外における教育改革の嵐の中、特に中等教育段階の数学教育では、代数・関数の指導とともに図形に関する指導の改善が重視されています。例えば、1989年に国家カリキュラムが導入されたイギリスでは「幾何学における推論」が取り上げられ、日本と共通点が多い図形教育が行われています。1999年の改訂によって、14歳～16歳の基礎レベルにおいても実際の説明と証明との違いを教え、段階を追って演繹を指導しています。

このような動向の中にあっても、日々の授業が教育の中心を支えていることに変わりはありません。算数・数学教育においては、子どもが学習していく際の思考やその発達の様相をとらえた授業実践が一層望まれています。このような状況の中で、私たちは小中高の接続を見通した図形教育の改善を目指して、実際に授業を観合うことを大切にして、共同で研究に取り組みました。

本研究の目的は、小学校算数科、中学校数学科、高校数学科における図形教育について、小中高の接続を見通して児童・生徒の理解の様相と学習内容の系統とを実証的に明らかにするとともに、その両者を踏まえて、図形教育改善のための提言を行うことです。

この目的を達成するために、以下のような柱を設けて研究を進めました。

- (1) 小中高の各学校段階における図形教育の現状と問題点を、児童・生徒の理解の様相と学習内容の系統の両面から考察し、小中の接続、中高の接続に関する現状とその問題点を明確にする。
- (2) イギリスの国家カリキュラムにおける図形に関する指導内容とその扱い方を把握し、そこから、日本の図形教育の改善に関する示唆を得る。
- (3) 上記(1),(2)に関する成果を踏まえて、小中の接続、中高の接続からみた、実践と研究に役立つ図形教育改善のための提言を行う。

限られた時間のもと、実際に会して行う討議や実験授業、そしてメールでのやりとりも加えて研究を深め、図形教育の改善点として17の提言をまとめることができました。それらは、この3年間の研究の結果と、研究メンバーによるこれまでの研究の成果とを踏まえています。

この報告書は、担当者が原稿を執筆し、意見交換に基づいて修正し、最後に研究代表が統一をとるという手順で作成しました。各章の主たる分担者は次の通りです。

1章・国宗、2章・江頭、3章・早川、4章・八田・近藤、5,6章・松元、7章・熊倉、8章・国宗、9章・国宗・熊倉・藤田、10章・国宗、巻末資料・国宗・江頭・八田

本研究は、研究分担者はもとより、多くの研究協力者の方々のご協力を得て進められたものです。この場をお借りして心よりお礼申し上げます。

平成19年3月

研究代表 国宗 進
(静岡大学教育学部・教授)

研究組織 (平成 19 年 3 月現在)

研究代表者	国宗 進	静岡大学教育学部 教授
研究分担者	熊倉 啓之	静岡大学教育学部 助教授
	中村 享史	山梨大学教育人間科学部 教授
	両角 達男	静岡大学教育学部 助教授
	太田 春外	静岡大学教育学部 教授
	山田 耕三	静岡大学教育学部 教授
研究協力者	近藤 裕	群馬県佐波郡玉村町立南中学校 教諭
(五十音順)	榛葉 伸吾	静岡県牧之原市立榛原中学校 教諭
	長谷 和俊	静岡県函南町立桑村小学校 校長
	八田 弘恵	渋谷教育学園幕張中・高等学校 教諭
	早川 健	山梨県甲府市立新田小学校 教諭
	松元 新一郎	金沢大学教育学部 講師
	江頭 希美	静岡大学教育学研究科 院生
	藤田 太郎	プリマス大学教育学部 講師

交付決定額

(単位:千円)

	直接経費	間接経費	合計
平成 16 年度	1,200	0	1,200
平成 17 年度	1,200	0	1,200
平成 18 年度	700	0	700
総計	3,100	0	3,100

研究発表・研究論文等

国宗進(2006)「イギリスにおけるニューメラシーと数学的リテラシー」『研究代表北原和夫・科学技術リテラシー構築のための調査研究, サブテーマ 1 研究代表長崎栄三・科学技術リテラシーに関する基礎文献・先行研究に関する調査・報告書』, pp.215-228.

熊倉啓之(2005)「中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究—ベクトルの指導に焦点を当てて—」『静岡大学教育学部研究報告』第 36 号, pp.101-116.

熊倉啓之(2006a)「中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究—図形と方程式の指導に焦点を当てて—」『静岡大学教育学部研究報告』第 37 号, pp.49-64.

熊倉啓之(2006b)「学ぶ意義を実感させる三角比の指導に関する研究」『第 39 回数学教育論文発表会論文集』, pp.355-360.

八田弘恵・近藤裕・熊倉啓之・国宗進(2004)「空間図形についての理解に関する研究—見取図をかいて問題を解決する授業を通して—」『第 37 回数学教育論文発表会論文集』, pp.313-318.

八田弘恵・近藤裕・熊倉啓之・国宗進(2005)「空間図形についての理解に関する研究—立方体の見取図をかく授業を通して—」『第 38 回数学教育論文発表会論文集』, pp.337-342.

八田弘恵・近藤裕・熊倉啓之・国宗進(2006)「空間図形についての理解に関する研究—立体の投影的な見方に焦点を当てて—」『第 39 回数学教育論文発表会論文集』, pp.385-390.

〈〈研究の概要〉〉

小学校算数、中学校数学、高校数学の接続を重視した幾何教育の改善に関する研究

1. 研究の目的

本研究の目的は、小学校算数科、中学校数学科、高校数学科における図形教育について、小中高の接続を見通して児童・生徒の理解の様相と学習内容の系統とを実証的に明らかにするとともに、その両者を踏まえて、図形教育改善のための提言を行うことである。

2. 研究の全体構想

上記の目的を達成するために、以下のような検討の柱を設けて研究を進めた。

- (1) 小中高の各学校段階における図形教育の現状とそこでの問題点を、児童・生徒の理解の様相と学習内容の系統の面から考察する。そして、小中の接続、中高の接続に関する現状とその問題点を明確にする。
- (2) イギリスの国家カリキュラムにおける図形に関する指導内容とその扱い方を、文献調査及びイギリス訪問調査に基づいて把握する。そしてそこから、日本の図形教育の改善に関する示唆を得る。ここで特にイギリスの図形教育に焦点を当てるのは、イギリスでは1989年に国家カリキュラムが導入され幾何学における推論が取り上げられて、日本と共通する点が多い図形教育が行われ始めていると考えられるからである。
- (3) 上記(1),(2)に関する成果を踏まえて、小中の接続、中高の接続に関する問題点を総括し、実践と研究に役立つ図形教育改善のための提言を行う。

3. 研究の内容

第1章では、小中高の図形指導に関する内容を概観するとともに、子どもの理解の点から図形指導に関して改善が望まれることとして、算数科で単一の平面図形概念を取り上げる学年が細かく指定されすぎている感があること、切断・投影など空間図形を調べる際の手段が少ないこと、指導時間数の減少に伴って算数科での図形に関する操作活動が減少していること等をあげた。本研究は、これらの改善を目指して研究を進めたということができる。

第2章では、三角形の仲間分けを通して直角三角形や二等辺三角形の概念を形成することをねらいとした小3での実験授業について報告した。この授業では、いろいろな三角形の中から直角がある三角形に着目して直角三角形の概念の獲得をねらっている。その際、二等辺三角形や正三角形に着目することもあろうが、その定着は第4学年にゆだねることにする、という指導方針に立っている。扱う図形を学年ごとに細かく指定するのではなく、第3,4学年にまたがっていろいろな三角形の概念を確かなものにすることを目指した指導の可能性が示された。

第3章では、算数科での図形の対称概念に焦点を当て、コンピュータを子どもたちの学習の道具として位置づけ「図形を動かす」操作を取り入れることによって図形の概念形成がより豊かになることを授業によって示した。そこでは、図形を動的に観察しその動きを楽しむ学習活動が多々見られた。

第4章では、小6での立方体の見取図をかくことに関する実験授業を通して、小4から多くの見取図を見てきた子どもでも自らそれを正しくかくことのできる子どもは非常に少ないこと、立体を見取図に表現すると「立体のもつ性質のうち見取図上で保たれるものと保たれないものがあること」の理解をねらった授業を設定することの重要性を示した。また、小6での立体の投影的な見方を養うための実験授業を通して、小学校で「立体の投影的な見方」に関する指導を行う場合、従来のように単純な立体について真正面から見た図、真上から見た図を扱うだけでなく、子どもの追究意欲が喚起され

るような立体を取り上げ具体的操作活動を通して学習を展開することの重要性を示した。

第5章では、中1での図形指導について、毎時間の「問題」の系列を作成し、その解決を通して中1で獲得すべき概念や性質、及び育成が期待される思考力などを明示して、「問題群による単元構成」を行って実践を試みた。すなわち、生徒が具体的活動を行う中で見いだしたり気付いたりしたことを基にして、数学の学習内容を確認していくという流れを繰り返すことによって、中1で学習する内容をすべて網羅していく単元構成を目指す。このような「問題群による単元構成」に関する実践の可能性については、大いに手応えが感じられた。

第6章では、中学校数学教科書における図形の相似に関する記述の内容や順序を分析した。教科書によって記述に大きな差があるものとして、相似の位置の定義、縮図・拡大図を扱う位置、平行線の性質と条件はどこまで厳密な証明を求めるのか等、があることを示した。

第7章では、高等学校における図形指導の現状と課題を分析し、特に中学との接続という観点から、変換の素地指導について早期の段階で扱うこと、中学校では初等幾何による論証、高校では代数的処理を用いた論証という扱いの違いを明確にすること等、改善の方向を示した。

第8章では、イギリスの国家カリキュラムを概観し、そこでの図形の内容を明らかにした。

第9章では、イギリスの中等学校における図形の授業について、訪問調査時の参観記録をもとにその実際を報告した。

第10章では、第1～第9章の考察に基づいて、小中高の接続からみた図形指導の改善点を第Ⅰ期(小1～小4)、第Ⅱ期(小5～中2)、第Ⅲ期(中3～高校)の学習段階に分けて、17の提言にまとめた。

第Ⅰ期(第1～第4学年)

- (1) 取り上げる平面図形の学年指定を緩やかにする
- (2) 展開したり展開図や見取図で表現する活動を重視して、直方体、立方体の概念を理解する

第Ⅱ期(第5～第8学年)

- (3) 図形の合同・相似の理解を図る
- (4) 低学年の段階から線対称について親しむとともに、対称な図形を小6で扱う
- (5) 図形の計量を通して、図形に関する理解を深め、興味・関心を高める
- (6) 見取図を描いたり読んだりする活動を重視する
- (7) 空間図形の学習指導に、投影する、切断する、展開するという操作を積極的に取り上げる
- (8) 平行線と角、多角形の角は中1で扱い、論理的に考察する基礎を培う内容として位置づける
- (9) 実験・実測による方法と証明による方法という、調べ方の違いを理解する
- (10) 作図し証明するという過程を重視する

第Ⅲ期(第9～第12学年)

- (11) 円周角の定理、内接四角形の性質と条件、接弦定理を扱い、発見し証明する過程を重視する
- (12) 三平方の定理の立体への応用では、空間概念育成のための的確な「問題」を用意する
- (13) 変換の素地指導について早期の段階で扱う
- (14) 図形の論証に関する中学校と高校の指導内容の違いを明確にする
- (15) 初等幾何の方法と解析幾何やベクトル幾何の方法の違いを明確にする
- (16) 三角比と三平方の定理との関係について指導する
- (17) 曲線・曲面で囲まれた図形の計量について、中学校と高校の指導内容の違いを明確にする

目 次

はじめに
研究組織
研究の概要

<p>第1章 小・中学校における図形指導の現状と課題 1</p> <p>1. 小中高における図形指導の現状 1</p> <p style="padding-left: 20px;">(1) 小学校算数科における図形に関する内容</p> <p style="padding-left: 20px;">(2) 中学校数学科における図形に関する内容</p> <p style="padding-left: 20px;">(3) 高校数学科における図形に関する内容</p> <p>2. 図形の内容の配列に関する問題点 4</p> <p style="padding-left: 20px;">(1) 平面図形に関する内容</p> <p style="padding-left: 20px;">(2) 空間図形に関する内容</p> <p style="padding-left: 20px;">(3) 計量に関する内容</p> <p style="padding-left: 20px;">(4) 発展的な扱いによる学習歴の差</p> <p style="padding-left: 20px;">(5) 他教科への影響</p> <p>3. 図形の学習指導に関する改善点 7</p> <p style="padding-left: 20px;">(1) 図形概念の形成</p> <p style="padding-left: 20px;">(2) 空間概念の形成</p> <p style="padding-left: 20px;">(3) 具体的操作活動の機会が少ない</p> <p style="padding-left: 20px;">(4) 直観的扱いと論証的扱いの特徴に眼を向ける指導が弱い</p> <p>第2章 三角形概念の形成に関する指導 9</p> <p>1. 実験授業に関する基本的な考え方 9</p> <p style="padding-left: 20px;">(1) 実験授業の意図</p> <p style="padding-left: 20px;">(2) 単元計画</p> <p style="padding-left: 20px;">(3) 本時のねらいと課題</p> <p>2. 実験授業の実際 11</p> <p style="padding-left: 20px;">(1) 授業の実際</p> <p style="padding-left: 20px;">(2) 仲間分けを行った際の子どもの考え方</p> <p>3. 授業での図形概念の形成に関する子どもの思考 14</p> <p style="padding-left: 20px;">(1) 構成要素への着目</p> <p style="padding-left: 20px;">(2) 対称性への着目</p> <p style="padding-left: 20px;">(3) 個人での仲間分けにおいて現れた具体的操作活動</p> <p style="padding-left: 20px;">(4) 話し合いの中から起こり共有された具体的操作活動</p> <p>4. 図形概念の形成に関して 18</p> <p>5. 実験授業からの示唆 19</p> <p>資料: 三角形概念の形成に関する授業 21</p>	<p>第3章 作図ツールソフトを活用した図形の対称概念の指導 26</p> <p>1. 実験授業 26</p> <p style="padding-left: 20px;">(1) 単元の目標と指導計画</p> <p style="padding-left: 20px;">(2) 本時のねらいと工夫</p> <p style="padding-left: 20px;">(3) 作図ツール活用の経緯</p> <p style="padding-left: 20px;">(4) 本時の展開</p> <p style="padding-left: 20px;">(5) 本時での自力解決の様子</p> <p style="padding-left: 20px;">(6) コンピュータを子どもの学習の道具として位置付けたこと</p> <p>2. 考察—子どもたちの追究の過程— 30</p> <p style="padding-left: 20px;">(1) 相互対称の発見</p> <p style="padding-left: 20px;">(2) 動きの発見</p> <p style="padding-left: 20px;">(3) 対称軸を動かす発見</p> <p>3. まとめ 33</p> <p>第4章 小学校での空間図形の指導 34</p> <p>1. 研究の枠組み 34</p> <p style="padding-left: 20px;">(1) 空間図形の理解に関する研究の枠組み</p> <p style="padding-left: 20px;">(2) 2つの実験授業の位置付け</p> <p>2. 立方体の見取図をかく実験授業 37</p> <p style="padding-left: 20px;">(1) 実験授業のねらい</p> <p style="padding-left: 20px;">(2) 授業の実際</p> <p style="padding-left: 20px;">(3) かいた見取図のタイプとその変化</p> <p style="padding-left: 20px;">(4) 考察</p> <p>3. 立体の投影的な見方に関する実験授業 42</p> <p style="padding-left: 20px;">(1) 「立体の投影的な見方」のとらえ方</p> <p style="padding-left: 20px;">(2) 実験授業のねらい</p> <p style="padding-left: 20px;">(3) 実験授業の計画と位置付け</p> <p style="padding-left: 20px;">(4) 授業の実際とその考察</p> <p style="padding-left: 20px;">(5) 本授業での「立体の投影的な見方」に関する子どもの理解の様相</p> <p>4. 立体の学習指導への示唆 46</p> <p style="padding-left: 20px;">(1) 立方体の見取図をかくことに関して</p> <p style="padding-left: 20px;">(2) 立体の投影的な見方に関して</p>
--	---

第5章 中1での空間図形の指導	48	第9章 イギリスの中等学校における幾何の	79
—問題群による構成—		授業	
1. 問題の所在	48	1. 【授業1】—最大の体積を求める—	79
2. 本実践の位置付け	48	2. 【授業2】—三角形の角—	80
3. 取り上げた「問題群」と獲得される「概念や性質」「見方や表現」	48	3. 【授業3】—多角形の角—	82
4. 今後の課題	54	4. 【授業4】—数列—	85
		5. 【授業5】—四角形の分類—	86
第6章 図形の相似の指導	55	6. 【授業6】—四角形の分類—	89
1. 分析のねらい	55	7. 【授業7】—平行線と角—	91
2. 分析の対象と枠組み	55	第10章 小中高の接続からみた図形教育の	94
3. 分析の結果と考察	55	改善	
(1) 量的分析		1. 学習の段階とその特徴	94
(2) 質的分析		2. 各期における図形指導	94
4. まとめと今後の課題	59	3. 図形教育の改善に向けた提言	96
第7章 高等学校における図形指導の現状と課題	60		
1. 図形に関する内容の扱い	60	巻末資料:	103
2. 図形の具体的な指導内容	60	資料1. イギリスの国家カリキュラム	103
(1) 基本概念について		(DfEE, 1999)における「形・空間・測定」に関する内容 全訳	
(2) 論証について		資料2. イギリスの国家カリキュラム	108
(3) 計量について		(DfEE, 1999)における「形・空間・測定」に関する到達目標 全訳	
(4) 作図・軌跡について		資料3. イギリスの国家ニューメラシー・ストラテジー	109
3. 高等学校における図形指導上の問題点	63	(DfEE, 1999)における「形・空間」の内容 Year1-3 全訳	
(1) 図形と計量		資料4. イギリスの国家ニューメラシー・ストラテジー	115
(2) 図形と方程式		(DfEE, 1999)における「形・空間」の内容 Year4-6 全訳	
(3) ベクトル		資料5. イギリスの国家ストラテジー	123
4. 中学との接続から見た図形指導に関する検討	70	Year7-9 (DfEE, 2001)における「形・空間・測定」の空間図形の内容 全訳	
(1) 図形の基本概念に関する扱い			
(2) 図形の論証に関する扱い			
(3) 図形の計量に関する扱い			
(4) 作図・軌跡について			
第8章 イギリスの幾何カリキュラム	73		
1. イギリスの国家カリキュラムの概要	73		
(1) 国家カリキュラムの構造			
(2) 学習計画			
(3) 到達目標と水準表現			
(4) 国家カリキュラム全体を通じた学習			
2. イギリスの国家カリキュラムにおける「形・空間・測定」に関する内容	76		
(1) 学習計画; 「形・空間・測定」			
(2) 到達目標; 「形・空間・測定」			
3. 国家ニューメラシー・ストラテジーにおける「形・空間」に関する内容	78		

第1章 小・中・高等学校における図形指導の現状と課題

この章では、小学校算数科、中学校数学科、高校数学科それぞれにおける図形に関する内容を概観し、小中の接続、及び中高の接続の視点からみた、カリキュラム編成及び学習指導上の問題点について検討する。

1. 小中高における図形指導の現状

(1) 小学校算数科における図形に関する内容

現行の平成10(1998)年版学習指導要領(平成14年4月実施)での小学校算数科における図形の内容は、表1の通りである。表1の右段には、平成元(1989)年版の内容を示してある。

表1 小学校算数科・図形に関する内容一覧

	平成10(1998)年版		平成元(1989)年版	
	考察の対象	構成要素等	考察の対象	構成要素等
小1	身近な立体	前後・左右・上下	身の回りの形	位置(1次元)
小2	いろいろな形の構成・分解 三角形、四角形	直線、辺、頂点	三、四、長、正、直三 箱の形、	直線、直角、辺、頂点 面
小3	長方形、正方形、直角三角 形 箱の形	直角 面	二等辺三、正三 円、球	角 半径、直径、中心
小4	二等辺三角形、正三角形 円、球	角 中心、直径、半径	台形、平四、ひし形 直方体、立方体	対角線、平行・垂直 平面、展開図、見取図 位置(2次元, 3次元)
小5	平行四辺形、台形、ひし形 基本的な図形の性質 円周	対角線 平行・垂直 円周率	合同、図形の決定 正多角形、おうぎ形 円周	円周率
小6	立方体・直方体 簡単な角柱・円柱	平面、底面・側面 展開図、見取図	線対称・点対称 拡大図・縮図 角柱・円柱、角錐・円錐	底面・側面 立面図・平面図
中学 へ・ 削除	合同(旧5年)、 拡大図・縮図、線対称・点対称、(旧6年) 角錐・円錐、立面図・平面図(旧6年)			

なお、平成10年版学習指導要領での算数科の目標は次の通りである。従来のものに比べて「算数的活動」と「活動の楽しさ」が強調されているといえることができる。

「数量や図形についての算数的活動を通して、基礎的な知識と技能を身に付け、日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考える能力を育てるとともに、活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き、進んで生活に生かそうとする態度を育てる。」

平成 10 年版学習指導要領の改訂においては、内容の系統や子どもの理解が考慮されたというよりも、週 5 日制や総合的な学習の時間の導入による授業時間数削減に伴う変更という色彩が強い。義務教育段階での算数・数学の授業時数は 212 時間減であって、その結果、中原(1998)や藤森・羽田・榛葉(1999)らも指摘する通り、特に図形の内容の後退には大きな問題があるといえることができる。表 1 の右段に示した平成元年版学習指導要領は、授業時間数減という要請が強かったわけではないので、ある意味では、戦後の算数教育が築いてきた成果を示していたといえることができる。

(2) 中学校数学科における図形に関する内容

現行の平成 10(1998)年版学習指導要領(平成 14 年 4 月実施)での中学校数学科における図形に関する内容は、表 2 の通りである。表 2 の右段には、平成元(1989)年版の内容を示してある。

表 2 中学校数学科・図形に関する内容一覧

	平成 10 (1998) 年版	平成元 (1989) 年版
中 1	線対称・点対称、基本作図 空間における直線や平面の位置関係 空間図形の平面への表現 扇形の弧の長さや面積、柱体・錐体の表面積と体積	基本作図、条件を満たす点の集合、 図形の移動 空間における直線や平面の位置関係 空間図形の切断・投影・展開
中 2	平行線と角、平行線と多角形の角 証明の意義と方法、三角形の合同条件 円周角と中心角	平行線の性質、三角形の合同条件、 三角形や平行四辺形の性質、数学的な推論 三角形の相似条件 平行線と線分の比の性質、相似の応用
中 3	三角形の相似条件 平行線と線分の比の性質、相似の考えの活用 三平方の定理	円の性質 三平方の定理 扇形の弧の長さや面積、球の表面積と体積 立体の相似、相似比・面積比・体積比の関係

平成 10 年版学習指導要領での中学校数学科の目標は次の通りである。算数科の目標と同様に、従来のものに比べて「数学的活動」と「活動の楽しさ」が強調されている。

「数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察する能力を高めるとともに、数学的な活動の楽しさ、数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる。」

中学校数学科と小学校算数科での学習の進め方の違いとして、文字(特に変数として)の使用と、論証とがあげられる。指導要領の解説書(文部省,1998)でも、中学校数学科の内容の骨格として、次の 5 点があげられている。

「数の概念及び数の拡張の理解／ユークリッド空間の把握／関数の理解／
文字式の使い方の基本の会得／演繹法の理解」

この中の「ユークリッド空間の把握」は図形指導のねらいそのものであり、また、「演繹法の理解」は図形学習が大きくその任を負っているといえることができる。

(3) 高校数学科における図形に関する内容

現行の平成 10 (1998) 年版学習指導要領での高等学校数学科における図形に関する内容は、表 3

の通りである。表3の右段には、平成元（1989）年版の内容を示してある。

小中学校での算数・数学の授業時間数削減にともなって、平成元（1989）年版での図形の内容については、三角形の重心、円周角の定理の逆・内接四角形の性質・接弦定理などの円の性質の一部、球の表面積と体積、相似形の相似比・面積比・体積比の関係等が、高等学校での扱いになった。

表3 高等学校数学科・図形に関する内容一覧

	平成10（1998）年版		平成元（1989）年版	
	平面図形	空間図形	平面図形	空間図形
数学Ⅰ	三角比 相似な図形の面積比	三角比の応用（空間） 相似な図形の体積比 球の表面積・体積	三角比	三角比の応用（空間）
数学A	平面図形 ・三角形の辺と角 ・三角形の五心 ・角の2等分線と比 ・チェバ・メネラウスの定理 ・円周角の定理の逆 ・内接四角形の性質 ・接弦定理 ・方べきの定理 ・2円の位置関係		平面図形 ・三角形の辺と角 ・垂心、傍心 ・角の2等分線と比 ・チェバ・メネラウスの定理 ・方べきの定理	
数学Ⅱ	図形と方程式 ・内分点、外分点 ・直線、円の方程式 ・アポロニウスの円	微分の応用 ・体積の最大・最小	図形と方程式 ・内分点、外分点 ・直線、円の方程式 ・アポロニウスの円	微分の応用 ・体積の最大・最小
数学B	平面ベクトル ・中線定理 ・垂心	空間ベクトル ・2直線のなす角 ・平行6面体	平面ベクトル ・中線定理・垂心 複素数平面	空間ベクトル ・2直線のなす角 ・平行6面体
数学Ⅲ	微分の応用 ・サイクロイド	積分の応用 ・立体の体積	微分の応用 ・サイクロイド	積分の応用 ・立体の体積
数学C	行列の利用 ・対称、回転移動・相似変換 式と曲線 ・二次曲線 ・サイクロイド、正葉曲線、渦巻線など		いろいろな曲線 ・二次曲線 ・サイクロイド、リサージュ、正葉曲線、カージオイド、渦巻線など	
削除	複素数平面（旧数学B）			

平成 10 年度版学習指導要領での高校数学科の目標は次の通りである。算数科・中学校数学科の目標と同様、「数学的活動」が強調されている。また、「創造性の基礎を培う」という文言が目につく。

「数学における基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、事象を数学的に考察し処理する能力を高め、数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる。」

2. 図形の内容の配列に関する問題点

前項 1. で概観した学習指導要領について、図形の内容の配列に関する主な問題点を、特に小学校・中学校・高等学校の接続という視点を重視して列記する。これらの問題点は、今回の改訂における教科の授業時間数削減に伴って余儀なくされた変更の結果である。

(1) 平面図形に関する内容

① 点集合と作図、図形の移動

「図形を点の集合とみること」が削除されたために、作図の意味、円の定義、1 つの直線から等しい距離にある点の集合がもとの直線に平行であることなどが扱いにくくなっている。その結果、角の二等分線・線分の垂直二等分線などの基本作図についての学習が、作図の方法の獲得だけになる恐れがある。

また、図形の移動（平行移動・回転移動・対称移動）が削除されたことが、図形が線対称、あるいは点対称であるかどうか、2 つの図形が合同、あるいは相似であるかどうかの確かめや、それらの概念形成に大きな影響を与えている。

② 図形の合同・相似

図形の合同が、小学校では正面切って扱われることがなくなり、中学校での扱いとなった。

図形の相似が中 2 から中 3 へ移動したため、小学校から中学校に移行した拡大図・縮図も中 3 で扱われることになった。そのために、方眼紙上や 1 点拡大などによって拡大図・縮図をかく活動が中 3 になるまで全く行われなくなっている。日常では拡大・縮小の世界に囲まれているにも関わらず、である。

いずれにせよ、算数科では単一の図形概念の学習にとどまり、合同・相似という図形の関係は中学校で初出という扱いである。

③ 四角形の包摂関係

小 4 で扱っていた「四角形の相互の関係」が指導されなくなったために、正方形、長方形、ひし形、正方形の関係をとらえず、別々の図形と考えている状態で中学校に入学してくる。

また、中 2 では「正方形・ひし形・長方形が平行四辺形の特別な形であることを理解する」ととどめるので、図形の包摂関係だけでなく集合の関係を十分捉えられなくなっている。その影響で、「偶数は整数である」「正三角形は二等辺三角形である」($A \subset B$) といった関係がつかみにくなっている。

④ 円の性質

円の性質に関しては、「円周角の定理の証明」は知ることにとどめ、今まで学習してきた「円周角の定理の逆」「内接する四角形の性質」「接弦定理」などは扱わないために、従来行ってきた論証活動が大幅に後退している。

⑤ 証明方法

間接証明法（対偶法、背理法、転換法、同一法）について、「 $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明」「円周角の逆の証明」で扱われなくなったため、背理法を扱う場面がなくなっている。

(2) 空間図形に関する内容

投影的な見方が、小学校（上から見た図、真正面から見た図）、中学校（立面図、平面図）から消えている。また、立体を平面で切断したときの切断面の考察も行わない。その結果、例えば三平方の定理を利用して直方体の対角線の長さや円錐の高さを求める際に、対角線や高さを含む平面で切断したり投影したりして考えることに影響を与えている。

また、「相似な図形の面積比・体積比」が高校へ移行したため、立体の相似の概念は扱われないままである。

(3) 計量に関する内容

小学校では、おうぎ形の面積については半円や $1/4$ の円程度の扱いであり、「おうぎ形の面積は中心角に比例する」という学習はなされない。そこで、中学校で円錐の表面積を求める際には、表面積が初出、円錐が初出、おうぎ形の面積が初出、さらに、計算の際に分母・分子の値が大きい分数計算も初出となり、学習活動に困難が生じやすくなっている（教科書によっては、おうぎ形を平面図形の単元で扱っている）。

体積に関しては、小学校では体積概念、及び立方体、直方体の体積しか学習していないので、中学校での指導が重要である。容積を学習せずに社会人になってしまう恐れもある。

なお、数値に関連して、単位系の減少と換算の扱いには注意を要する。学習指導要領の「内容の取り扱い」で、「形式的な単位の換算は扱わない」（ $1\text{m}=100\text{cm}$ 、 $1\text{l}=10\text{dl}$ などを利用した換算）という歯止め規定により、生徒の単位に対する理解度は従来と大きく異なってくる。

中学生になったときに知っている単位は、次の通りである；

長さ mm , cm , m , km / かさ ml , dl , l / 重さ g , kg / 広さ cm^2 , m^2 , km^2 / 体積 cm^3 , m^3

これらのうち、 ml , dl ; kg ; m^2 , km^2 ; m^3 は「簡単に扱う」だけであり、換算は上手にできないであろう。 a , ha は削除されたので生徒は知らない。

相似比に関連する比の値は、小学校で扱わなくなり、中学校でも明確に位置づけられていない。各社の教科書をみると、中2の文字式か中3の相似の単元のどちらかで比の値を導入している。比は小6で学習するが、その後しばらくは比の学習がない状態で学習が進んでいく。比の値が義務教育段階で明確に位置づけられていないので、高校での三角比の学習にも影響を及ぼす可能性がある。

(4) 発展的な学習の扱いによる学習歴の差

平成10年12月告示の学習指導要領が15年12月に一部改正されたことにより、発展的な内容が教科書に載ることになった。算数教科書を見ると、今回の改訂で中学校に移行した内容（例えば、三角柱などの体積、合同の概念）が発展ページに掲載されている。この部分は、教師や学校の裁量によって、授業で扱うかどうかが変わってくる。また、その扱い方も、習熟度別等、コース別に分かれて指導する場合、指導するコースとそうではないコースがあることも予想される。中学校は、小学校では何をどのように指導してきたのか連絡をとりながら実践する必要がある。なお、この学習歴の差の問題は、図形領域に限ったことではない。

(5) 他教科への影響

平成10年版学習指導要領で、算数・数学科の指導内容が上の学年に移行したり扱い方が軽くなったりしたことが、他教科の学習に影響を及していると考えられる。図形とその内容に関連する扱いをまとめておく。

① 算数・数学科で扱わないために、他教科に影響を及ぼすと予想されること

比の値

…例えば、理科での定量的な実験（比重など）での扱い、家庭科でのデータのよみの場面など。

投影図

…立体を平面で表す、平面で表したものから立体を想像することが困難になると考えられる。

例えば、社会科での地図の図法（メルカトル図法、正距方位図法、…）、技術科での図面の読みとり、美術科での図法など。

技術家庭（技術分野） A 技術とものづくり

(2) 製作品の設計について、次の事項を指導する。

ア 使用目的や使用条件に即した製作品の機能と構造について考えること。

イ 製作品に用いる材料の特徴と利用方法を知ること。

<内容の取扱い>

イ (2)、(3)及び(4)については、主として木材・金属などを使用した製作品を取り上げること。(2)のウについては、等角図、キャビネット図のいずれかを扱うこと。

② 中学校で初めて扱うことになって、指導順序が逆転する可能性のあるもの

縮図・拡大図

…中3で初出。例えば、社会科の地図の読みで、縮図が登場する。比は小学校で学習しているが図形との関係は扱っていないので、比が図の何を表しているのかとらえにくい。

地理的分野 (1) 世界と日本の地域構成

ア 世界の地域構成 地球儀や世界地図を活用し、緯度と経度、大陸と海洋の分布、主な国々の名称と位置などを取り上げ、世界の地域構成を大観させる。(ア)イ)略

イ 日本の地域構成 地球儀や地図を活用し、我が国の国土の位置、領域の特色、地域区分などを取り上げ、日本の地域構成を大観させる。(ア)イ)略

点対称・線対称

…中1で初出。学年末に扱われることが多いので、美術科などで線対称・点対称といっても通じない。理科(第1分野)の光の反射・屈折でも同様なことが起こりうる。

美術科 第1学年 A 表現

(1) 絵や彫刻などに表現する活動を通して、次のことができるよう指導する。

ア 自然や身近なものを観察し、形や色彩の特徴や美しさなどをとらえスケッチをすること。

イ 対象を見つめ感じ取ったよさや美しさ、想像したことなどを基に主題を発想し、全体と部分との関係を考えて創造的な構成を工夫し、心豊かに表現する構想を練ること。 ウ、エ 略

(2) デザインや工芸などに表現する活動を通して、次のことができるよう指導する。

ア 形や色彩、材料、光などがもたらす性質や感情を理解し、機能的な生かし方を考え、美的感覚を働かせて美しく構成したり装飾したりすること。 イ、ウ 略

B 鑑賞

鑑賞の活動を通して、次のことができるよう指導する。

ア 想像力を働かせ、美術作品や児童生徒の表現などに表された作者の心情や意図と表現の工夫を感じ取り、作品の見方を広げ、多様な表現のよさや美しさなどを味わい、鑑賞に親しむこと。

イ 生活の中のデザインや伝統的な工芸を鑑賞し、豊かな発想と工夫、美と機能性の調和、作品に託された願いと造形的なよさなどに気付き、生活におけるデザインや工芸の働きについて理解すること。

理科 第1分野 (1) 身近な物理現象

身近な事物・現象についての観察，実験を通して，光や音の規則性，力の性質について理解させるとともに，これらの事象を日常生活と関連付けて科学的にみる見方や考え方を養う。

ア 光と音

(ア) 光の反射や屈折の実験を行い，光が水やガラスなどの物質の境界面で反射，屈折するときの規則性を見いだすこと。 (イ) (ウ) 略

3. 図形の学習指導に関する改善点

ここでは，1. 2. で行った考察を踏まえて，主として算数・数学の内容に関する子どもの理解の点から，図形指導に関して改善が望まれることについて検討する。

(1) 図形概念の形成

① 扱う図形の学年指定が細かすぎる

小学校算数科での図形指導において，単一の平面図形概念ごとに，取り上げる学年が規定されすぎている感がある。平成10年版学習指導要領についていえば，小2で三角形，四角形，小3で長方形，正方形，直角三角形，小4で二等辺三角形，正三角形，円，小5で平行四辺形，台形，ひし形，というように，指導学年が細かく規定されているのではないか。子どもの図形概念形成の過程を一層明確にする必要がある。

② 四角形の包摂関係の扱いが弱い

四角形の包摂関係の扱いが後退しすぎているのではないか。四角形の包摂関係は，図形間の関係をとらえる上で，また，そこで行われる数学的推論の方法や特殊・一般の関係をとらえる上でも重要である。また，中2での「三角形・四角形」の章における学習が，小学校での学習によって既に知っている性質について行われるのがほとんどであるだけに，そのまとめとして四角形の包摂関係の内容を位置付けることには意義がある。

(2) 空間概念の形成

① 算数科での空間図形の扱いが極端に後退している

算数科での立体に関する内容は，小1で身近な立体，小3で箱の形，そしてようやく小6で立方体・直方体，簡単な角柱・円柱についてであり，その扱いは極端に軽くなっている。立方体・直方体は，平成10年版学習指導要領においては小4での扱いであって，そこでの子どもの理解度が悪かったとは聞いていない。空間図形の指導は，3次元の世界に生活している我々にとって極めて重要な内容であり，立方体・直方体や展開図を小6まで正式に取り上げないままであるのは大きな問題であろう。

② 空間図形を調べる際の手段が少ない

平成10年版学習指導要領では，算数科では真正面からみた図・真上からみた図がなくなり，また，中学校数学科では立体の切断・投影が扱われなくなった。切断・投影や展開は，空間図形がもつ特徴等を調べるのに欠かせない内容である。立体を観察し操作しようとするときに必要とされる考え方を含んでいて，子どもの数学的活動を生み出す上で重要である。

(3) 具体的操作活動の機会が少ない

指導時間数の減少に伴って，小学校において図形に関する操作活動が減少しているといわれる。紙を折る，切る，動かす，敷き詰める，といった具体物を使った操作活動は，図形感覚を豊かにすることや，中学校における合同・相似概念の獲得，線対称・点对称，作図の方法の理解などに大きく影響する。具体的操作活動は中学校での図形学習を進める上でも重要であり，それは，子どもたちの学習

意欲を高める上で大きな役割を果たすことになる。

(4) 直観的扱いと論証的扱いの特徴に眼を向ける指導が弱い

例えば三角形の内角の和や二等辺三角形の角の性質に関する指導のように、小学校において実験・実測による方法によってまとめた性質を、中学校において証明による方法によって学習し直すことが多々ある。指導者の側では、小中それぞれの学校段階における学習指導の実際を的確に把握するとともに、中学校数学科では、直観的扱いと論証的扱いに対する子どものとらえ方を的確にとらえて学習指導を展開することが重要である。

さらに、性質間の関連や「体系」という点から、数学のもつ特徴がもっと明らかにされるとよい。

現代数学の特徴は、公理と呼ばれるいくつかの命題を前提にして他の命題を証明し演繹的体系として構成するという点にある(吉田・赤, 1954)。この特徴を表しているものを学校数学の内容から見つけてみると、中学校数学科での図形指導にその典型を見いだすことができる。例えば、平行線の性質と条件を直観的に認め、 n 角形の内角の和の性質、外角の和の性質に至るまでを演繹的に導くという一連の過程は、「公理」に相当するものが数学的には不十分であるのは当然のことであるものの) 局所的な「演繹的体系」の1つのモデルを与えている。このような立場に立って、中学校での図形の論証がもつ教育的価値を眺め直すことが弱いように思われる。

本研究は、これらの改善を目指して研究を進めたということが出来る。以下、順に述べていくことにする。

<引用・参考文献>

中原忠男(1998)「21世紀型の算数数学教育の方向と研究課題」『日本数学教育学会誌算数教育』第80巻第12号。

文部省(1989)『小学校指導書算数編』, 東洋館出版社。

文部省(1999)『小学校学習指導要領解説 算数編』, 東洋館出版社。

文部省(1989)『中学校指導書数学編』, 大阪書籍。

文部省(1999)『中学校学習指導要領(平成10年12月)解説—数学編—』, 大阪書籍。

文部省(1989)『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』, ぎょうせい。

文部省(1999)『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』, 実教出版。

藤森章弘・羽田明夫・榛葉伸吾(1999)「より豊かな数学学習をめざして」『日本数学教育学会誌数学教育』第81巻第5号, pp.39-42。

吉田洋一・赤堀也(1954, 改訂版 1961)『数学序説』, 培風館。

第2章 三角形概念の形成に関する指導

この章では、第3学年を対象にして行った三角形概念の形成に関する実験授業の分析を行い、そこでの子どもの思考の様相を明らかにすると共に、図形概念の形成に関する指導系統に対する示唆を得ることをねらいとする。この実験授業はまた、図形の対称性の指導に関するあり方を検討するものでもある。

1. 実験授業に関する基本的な考え方

ここでは、三角形の概念形成に関する実験授業での子どもの思考の様相を明らかにし、そこから得られる図形概念獲得のための指導に関する示唆を得ることをねらいとする。

(1) 実験授業の意図

ここで取り上げる実験授業は、第3学年での「三角形と四角形」の単元における直角三角形概念の形成に関する部分である。

この授業では、直角三角形を導入する際に、同時に二等辺三角形を子どもに知らせることを意識した指導を行い、次の第4学年で性質などの学習を通して一層確かな図形概念としてとらえることを目指すという流れをとっている。

すなわち、この授業は、第3学年では直角三角形を扱い、第4学年では二等辺三角形・正三角形を扱う、という従来のように細分化された指導ではなく、第3,4学年にまたがっているいろいろな三角形の概念を確かなものにしようという意図のもとで計画されていて、図形概念の獲得に関するカリキュラム提言のために行われた授業である。第3学年では、いろいろな三角形を取り上げ、その中から直角がある三角形に着目して直角三角形の概念の獲得をねらう。その際、二等辺三角形や正三角形に着目することもあろうが、そのきちんとした定着は第4学年にゆだねることにする、という指導方針に立っている。

なお、小学校算数科での図形指導において、対象とする図形の配当学年は、確立されたものではない。例えば直角三角形と二等辺三角形については、学習指導要領上での指導学年は、表1に示す通りであり、改訂のたびに揺れている。特に二等辺三角形・正三角形の指導学年については、小2から小4まで大きく揺れているといえる。このような点からも、直角三角形と二等辺三角形を同学年で一緒に導入することには特に問題がないと考えられる。

表1 考察の対象とする図形の学習指導要領における配当学年

	昭和22年	昭和33年	昭和43年	昭和52年	平成元年	平成10年
直角三角形	記述なし	3学年	2学年	2学年	2学年	3学年
二等辺三角形、正三角形	記述なし	4学年	3学年	3学年	2学年	4学年

この授業では、いろいろな三角形を仲間分けすることを通して直角三角形や二等辺三角形の概念を形成していくことを目指している。

以下、実践授業の概略を述べる。

(2) 単元計画

本単元は、全5時間の扱いである。各時間の学習内容は、表2の通りである。

表2 単元計画「三角形」

時間	学習内容
第1時	・円周を12等分した点の任意の3点を結んで、いろいろな三角形を作る。 ・作った三角形から、回したり裏返したりして同じ形になるものを探し、12種類の三角形を見つけ出す。
第2時 (本時)	・12種類の三角形から6種類の三角形を提示して、グループ分けをする。 ・直角三角形と2等辺三角形が分かる。
第3時	・残った6つの三角形はどのグループに入るかを考える。
第4時	・同じ半径で円周上を12等分した点を多く作ったものに、それぞれの三角形を作図する。 ・身の回りからいろいろな三角形を探す。
第5時	・12種類の中から自分の選んだ三角形をたくさん作り、敷き詰める。

単元の導入では、円周を12等分した点の任意の3点を結んで三角形を作り、12種類見つける。そして、つくった三角形を個人で具体的操作活動を行い仲間分けし、学級で話し合いながら、直角三角形、二等辺三角形の概念を学習するという流れになっている。

(3) 本時のねらいと課題

第1時で、図1のような円周上の12点を使って、様々な三角形を作っている。そして、その三角形の中でひっくり返すなどの操作を加えて同じ形になる三角形は取り除き、12種類にまとめている。

本時は、その中の6種類をとりあげて、子どもの具体的操作活動を通して直角三角形・二等辺三角形の概念の形成を目指すことがねらいである。すなわち;

前時にみつけた12種類の中の6つ三角形(二等辺三角形2つ、直角三角形2つ、一般の三角形2つ)を弁別することを通して、三角形の構成要素、角の鋭さや広さなどに着目しながら、直角三角形や二等辺三角形の定義や性質を理解し、図形の見方や考え方を広げる。

また、本時の課題は次の通りである。

「次の6つの三角形を2つのグループに分けよう。」

図2の三角形をかいたB4用紙を、各自一枚ずつ配る。これらの三角形は、直角三角形が2つ、二等辺三角形が2つ、不等辺三角形2つである。なお、ここで二等辺三角形として提示した②は、実際の授業では、児童が実際に測定した結果に従って二等辺ではない三角形として扱われている。子どもが描い

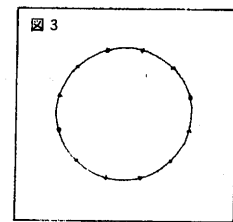


図1 単元導入時の課題

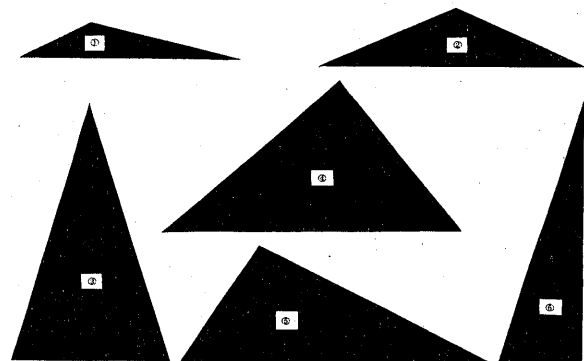


図2 本時の課題

た図、またそれを印刷した結果が、二等辺ではなかったということである。

そして、「2つのグループに仲間分けしよう」と問いかける。この時、あえて何も指示を出さずに、子どもの自然な思考の流れを観察する。その後、クラスでの検討の中から、自分の考えや自分では思いつかなかった考えなどをもとに、直角三角形、二等辺三角形の概念を獲得していくことをねらっている。

2. 実験授業の実際

(1) 授業の実際

日時 2005年12月7日(水) 第4校時

対象 三島市立公立小学校3年生 男子16名、女子14名、計30名

授業者 長谷和俊

観察者 8名

授業の流れ

前時に作った12種類の三角形の中から図2に示した6種類を取り出し、本時はそれらを児童が個別に仲間分けし、一般の三角形と直角三角形や二等辺三角形を比べてそれらの概念を理解していく、という授業展開である。なお、本時では、時間の都合上、直角三角形のみの追究にとどまったが、二等辺三角形も分析の対象とするので、ここでは次時の授業についても一緒に述べることにする。

ここでは、授業の実際の流れだけを示す。(詳細な発話記録は、章末資料を参照)

2時間の授業は、以下の①～⑩の流れで進行した。

- ① 取り上げる三角形の確認し、それらを仲間分けする
- ② 直観による仲間分け
- ③ 三角定規のかどに着目した仲間分け
- ④ 直角に着目した仲間分け
- ⑤ 前時の確認
- ⑥ 裏返しても同じ形に着目した仲間分け
- ⑦ 2辺の長さを測り始める
- ⑧ 折ってぴったり重なるかを調べる
- ⑨ 二等辺三角形という名前を知る
- ⑩ 頂点がまん中にあることの確認

(2) 仲間分けを行った際の子どもの考え方


実際の授業では、子ども達は、図2の三角形を配られると、特別な指示がないことに戸惑いながらも自分なりの方法で仲間分けを行った。その分類の観点は、次の3点にまとめることができる。

- ア) 構成要素(角)に着目した考え方
- イ) 対称性を意識した分け方
- ウ) 直感による分け方

また、これら3つの観点ごとに児童のワークシートの記述内容をまとめると、表3を得る。

表3 仲間分けの際の児童の記述内容



ア) 構成要素(角)に着目した考え方

観点	分類番号	子どもの記述 ()内は出席番号
直角がある	⑤⑥	①②③④ ①②③④は直角がなくて、⑤⑥は直角がある(12)  にぴったりの角があるのとないの(19) ⑤⑥は直角があるけど、①②④は直角がない(22) ⑤⑥は直角があつて、①③④②は直角がない(29)
	⑥	①②③④ ⑤ ⑥の先は微妙に4かけえになっている(16)
三角定規の角の数	②⑤	①③④⑥ 1つ三角定規にあうのと2つ以上三角定規にあうの(28)

イ) 対称性を意識した分け方

観点	分類番号	子どもの記述 ()内は出席番号
操作(線を引く) (裏返す)	②③	①④⑤⑥ ②③の形のまん中に線を引くと2つとも同じ形で、①④⑤⑥は違う(21)
	③	①②④⑤ ⑥ ③は裏にしても形は変わらなくて、①②④⑤⑥は裏にしたら形が変わる(26)
左右のずれ	②③	①④⑤⑥ ①④⑤⑥は右か左によっていて、②③はよっていない。だから、横に折っても重なる(2) 1個や2個ずれているのとずれていないもの(13) ①④⑤⑥は上の角が右や左にちょっとずれてる。②③は上の角がずれていない(20)
バランス	②③	①④⑤⑥ ②③はちゃんとした三角形になっている(16) ピツとなっている(30)

ウ) 直感による分け方

観点	分類番号	子どもの記述 ()内は出席番号
大小	①	②③④⑤ ⑥ ①は小さいけど、②③④⑤⑥は大きい(23)
	①②	③④⑤⑥ 大きいと小さい(3) ①②は小さい、③④⑤⑥は大きい(14) ①②は小さくて角が長いから、③④⑤⑥は大きくて角は普通だから(15) ①②は横に長くちょっと小さい、③④⑤⑥はその反対(20) ①②は小さい、③④⑤⑥は大きい(24)
伸縮(縦横)	③⑥	①②④⑤ 似てるグループに分ける。①②④⑤は  みたいで、③⑥は  長い(1) ①②④⑤は三角が横に伸びていて、③⑥は縦に伸びている(2)

			<p>①②④⑤は形が縮んでいて、③⑥は伸びている (10)</p> <p>③⑥は縦に長くて、①②④⑤は横に長い (12)</p> <p>①②④⑤は横の幅が長い、③⑥は横幅が短い (14)</p> <p>細長いのと平べったい (19)</p> <p>①②④⑤は上にすごく伸びないで、横に伸びている。③⑥は上にすごく伸びてる (20)</p>
(上下)	①②⑤	③④⑥	縦に長くなっているのと横に長く伸びているもの (8)
	①②⑤	③④⑥	上に伸びているのと下に縮んでいるの (9)
	③⑥	①②④⑤	上に伸びているのと下に縮んでいる (25)
	③⑥	①②④⑤	上に伸びているのと平らなもの (8)
	②④	①③⑤⑥	①③⑤⑥は上に伸びて安定している、②④はのびるけど安定しない (9)
	④⑤	①②③⑥	①②③⑥は伸び縮みして、④⑤はそうじゃない。 (5)
高さ	③⑥	①②④⑤	高い三角形と普通になる三角形 (17)
	①②⑤	③④⑥	①②⑤は低くて、③⑥④は高い (27)
	③⑥	①②④⑤	③⑥は長っぼいけど、①②④⑤は長っぼくないから (6)
			③⑥は縦に長くて、①②④⑤は横に長い (12)
			のっぼと平べったいもの (13)
	①③⑥	②④⑤	上の先っぼが長いから、上の先っぼが長くない (22)
			のっぼなのと平べったいもの (28)
	①③⑥	②④⑤	①③⑥は長くて、②④⑤は長くない (27)
太さ	④⑤	①②③⑥	①②③⑥は細い、④⑤は太い
	②④	①③⑤⑥	①③⑤⑥は細長っぼいのかあるけど、②④はほそっぼいじゃないから (6)
	③⑤⑥	①②④	
	③④⑤	①②⑥	太いほうと細いほう
見た目	②④	①③⑤⑥	バランスがよくなっている、バランスがよくなってない (22)
	②	①③④⑤⑥	②は普通で①③④⑤⑥は普通のじゃない
垂直な線	⑥	①②③④⑤	縦が下へまっすぐ線がのびているのとのびていないもの (13)
			⑥だけ縦一直線が入っている (19)
その他	④⑤⑥	①②③	④⑤⑥は④は⑤と少し同じで、⑥はまわすと⑤と同じ (7)
	③⑥	①②④⑤	③⑥は見ると同じだから、③と⑥は一緒 (30)
	①③⑥	②④⑤	③⑥は似ていて、1は縦にすると似ている (29)
	③④⑤	①②⑥	③④⑤は④⑤は縦にすると似ているから (29)
	①②③	④⑤⑥	①②は似ていて、形も似ているから、①②は重ねると似ている。④⑤は重ねると似ていて⑥は、⑤の細いばん (29)

3. 授業での図形概念の形成に関する子どもの思考

前項(2)で示したように、授業において、子ども達は様々な方法で仲間分けを行った。そして、学級での話し合いをもとに、実際に具体的操作活動を行うことで、徐々に直角三角形や二等辺三角形の概念を獲得していった。ここでは、子どもの図形概念の形成の様相について、この授業での子どもの発話記録の分析等に基づいて明らかにする。

(1) 構成要素への着目

平成10年度版の学習指導要領では、第3学年の図形領域における目標は「(3) 図形を構成する要素に着目して、基本的な図形について理解できるようにする」である。また、二等辺三角形が導入される第4学年の目標も「(3) 図形を構成する要素に着目して、基本的な図形についての理解を深めることができるようにする」である。いずれにおいても、図形の構成要素に着目することで、図形の理解をはかっていくことが記されている。

今回の実験授業では、図形の構成要素に着目することをあえて子どもに指示せずに行っている。その結果、三角形を分類する活動において、ほとんどの子どもが直感で答え、直角三角形の直角に着目したとみられる児童は6人で、二等辺三角形の辺に着目した児童はいなかった。この結果から、子どもの自然な発想から構成要素に着目することは難しいと推測される。

しかし、授業を展開する中で、一人の児童の意見を取り上げ、共有することで、子ども達は次第にそのような見方を身につけていっている。それは、以下の発話記録(本章末の資料参照)から読み取ることができる。

① 直角三角形に関して

S36: ⑤と、①と②と④と⑥と③

T43: じゃあTさん理由どうぞ。

S37: ⑤は直角があるけど、①②④⑥は直角がない。

S39: (前に出て⑥の三角形を取り出し、事前に直角を学習した際に作った直角を重ねて) 角があつてるから、⑥も直角の仲間に入る。

T48: ああ、⑥も直角があるから直角に入ると言うって言うてるね。いい?

はい、⑥番、直角があるかどうか?そして、⑤番も直角があるかどうか確認してください。

S40: ある…、わかった。

T49: じゃあね、直角があつたところに赤い丸を付けてみましょう。(作業中)

② 二等辺三角形に関して

S66: ③と、①と②と④と⑤と⑥

S67: ③は裏にしても、同じ…形は変わらなくて、①②④⑤⑥は裏にしたら形は変わる。

S83: (他の児童、数名) 2番もだ。2番もそうだ。

T82: 2番もそう? 裏返しにしても形変わらないかなあ?

(児童は自分の持っている紙を、ひっくり返す)

S85: 少し変わってない?!

S86: えっ、変わってないよ。

T88: どっち?

S88: えっ、5mmも変わってるよ。

S89: 8.5と9だよ。

S90: えっ?!

T89: ちょっと待って、なにが 8.5 と 9?? ちょっと、待って。2 番を問題にしてるよ?

S95(A): 左側がね、9cm でね、右側が 8cm5mm だもん。

T92: どこを測ったの?

S96: ここのかどのところ (プリントをさしながら)

直角三角形については、S37 の発言から他の児童の視点が直角に向かっていき、直角のある三角形があることを全員が個人で確かめて、直角三角形の概念を理解するきっかけにしている。

また、二等辺三角形については、ひっくり返しても形が変わるか変わらないかがすぐには判断しにくい 2 番の三角形の処遇をめぐる、S88 が辺の長さを測りだしたことが、2 辺の長さに着目するきっかけになっている。この交流は、二等辺三角形として示した三角形②が、2 辺の長さが微妙に違っていたために偶然起こったものである。

あいまいな三角形を入れたことが、子どもの思考を活発にしたと考えることができる。

(2) 対称性への着目

子ども達はこの授業までに対称性について学習していないため、言葉も知らない者がほとんどであったと推測される。そのため、例えば上記の「S67: ③は裏にしても、同じ…形は変わらなくて、①②④⑤⑥は裏にしたら形は変わる。」という発言のように、対称性に通じるような考え方で仲間分けを行った子どもは直観によっていたと考えられる。

対称性の考えを、具体的操作活動を行って示している子どもは 2 人 (のちに詳述する) であった。授業では取り上げられなかったために発話記録にはみられないが、「頂点がずれてない」や「ちゃんとしている」(表 2 参照) など、線対称の持つ規則正しさや美しさを見抜いている。このような視点は、二等辺三角形を見つける際にも、図形概念を豊かにする上でも重要である。

(3) 個人での仲間分けにおいて現れた具体的操作活動

表 2 から、子どもが実際に具体的操作活動を行って仲間分けをしたと考えられるものをあげる。

筆者らが予想した具体的操作活動は以下の通りである。a,b は直角三角形に関するものであり、c,d,e は二等辺三角形に関するものである。

- a) 三角定規の直角の部分をつらぬいて三角形を重ねる。
- b) 切り取って、机の角などに合わせてみる。
- c) 用紙をひっくり返してみる。
- d) 二等辺三角形を切って、半分に折って、辺や角を重ねてみる。
- e) 2 辺の長さを測ってみる。

授業前に予想していた以上に、具体的操作活動を行った子どもが少なかった。それらは以下の通りである。

直角三角形について;

- ・三角定規、または、直角の導入時に作った直角のモデルを三角形の図にかさねる (6 人)

二等辺三角形について;

- ・二等辺三角形のまん中に線を引く (1 人)
- ・二等辺三角形を裏返してみる (1 人)

このように、個人で行った仲間分けの段階では、具体的操作活動はほとんど行われていない。

また、切ったり折ったりという基本的な具体的操作活動は全く行われていない。その理由として、2 学年までに図形に触れる経験が少なかったことがあげられるであろう。このような具体的操作活動は、自然発生的には出てくるものではないことを示唆している。

(4) 話し合いの中から起こり共有された具体的操作活動

a) 三角定規のかどを重ね合わせる

S22: ①③④⑥と②⑤

S23: 1つ三角定規に合うのと、2つ以上三角定規に合うもの

T26: 今、言ったの分かった？

T27: じゃあ、三角定規持ってきて前でやってみて。

S25: これはここだけで、一つしか合わないのと（三角定規を重ねる）、こっちのほうが一つで、二つで
もう一個が合わないから二つで、こっちの三角形は一つで、二つで3つ合う。

T28: わかった？今の？はい、じゃあ全員三角定規出して、やってみてください。

(作業…)

S26: (つぶやき) あっ、ほんとだ!! あっ、ぴったし合わない。 2つは合わないよ。

以上の発話記録に見られるように、S23の三角定規のかどという発言から、そのような視点を知り実際に重ねて確かめて、意欲的に取り組んでいる。この重ねて確かめるという発言があったため、次のb)にすんなりと思いが移っていった。

b) 直角を重ね合わせる

S37: ⑤は直角があるけど、①②④⑥は直角がない

T45: えー?…こっちは直角がない。

T47: 線… (直角をさして) こういうところの形だよね。かどの形でした。

直角がない。えーって言った人は、何? はい、TAさん。

S39: (前に出て⑥の三角形を取り出し、事前に直角を学習した際に作った直角を重ねて) 角があつてるから、⑥も直角の仲間に入る。

T48: ああ、⑥も直角があるから直角に入ると思うって言ってるね。いい?

はい、⑥番、直角があるかどうか?そして、⑤番も直角があるかどうか確認してください。

S40: ある…、わかった。

T49: じゃあね、直角があつたところに赤い丸を付けてみましょう。

(作業中)

T50: じゃあ、確認します。はい、赤で直角のところを丸付けてください。はい、誰かやってくれる人? じゃあ、来て。ここここだよって。

S42: (違うところに丸をして…)

S43: えっ、違うよ!!

S44: (他の児童が前に出て、記入)

S45: いいです。

S46: まだ、ある。

T51: じゃあ、KU君。

S47: えっ、違います!

T52: どうですか? 違う? ちょっと待って。じゃあ、KO君、説明してください。KU君よくみてよ。

S48: (三角定規の直角以外の角と重ねて) こっちのほうは、直角じゃないほうと合わせたから、KU君のは違う。

T53: はい、三角定規で直角ってどこだったかなってことだね。はい、見てください(三角定規の拡大を出す)「三角定規の直角ってどこなの?」

S49: シールの貼ってあるとこ。

S37 の発言から、a) で行った三角定規のかどを合わせる方法の中の「直角」に視点に移る。また、S37 の児童は⑤のみを直角のある形としたが、S39 が⑥も直角三角形であることを示すために、以前に直角を学習した際に作った直角の模型を用いて重ねた。この一連の展開を通して、直角があることを調べるためには、重ねてみれば分かることを理解し、具体的操作活動を共有したと考えられる。

そして、三角定規の角がすべて直角だと思っている子どもの発言から、S48 のような発言なども相まって、直角の概念を深めることができた。

c) 三角形をひっくり返す

S67:③は裏にしても、同じ…形は変わらなくて、①②④⑤⑥は裏にしたら形は変わる。

T77:③は裏にしても形は変わらないけども、こっち側のは裏にすると形が変わっちゃうんだって。

そう？ ③はこういうふうに裏返しにしても（実演）、これは形は？

S70（多数）：変わらない

S72:2番もそうじゃないの？

S83:（他の児童、数名）：2番もだ。 2番もそうだ

T82:2番もそう？ 裏返しにしても形変わらないかなあ？

（児童は自分の持っている紙を、ひっくり返す）

S84:（多数）：変わんないよ。 あっ、変わらない。

S85:少し変わってない？！

T88:どっち？

S67 の発言を聞いて、子ども達はすぐに自分の紙をひっくり返している。そこから、②の三角形（二等辺三角形として提示したが、測定して確かめた結果から二等辺三角形と認められなかったもの）もそうではないかという発言が出る。しかし、ひっくり返す操作をしてもあいまいである。そこで、次の d) の操作が子どもから出てきた。

d) 長さを測る

S88: えっ、5mm も変わってるよ。

S89: 8.5 と 9 だよ。

S90: えっ？！

T89: ちょっと待って、なにが 8.5 と 9?? ちょっと、待って。2番を問題にしてるよ？

S95(A): 左側がね、9cm でね、右側が 8cm5mm だもん。

T92: どこを測ったの？

S88 の発言を聞いて、子ども達が長さを測りだす。長さを測ることは個別の活動では見られなかったため、教師も戸惑っている様子がみられた。しかし、ここから、他の子ども達も長さを測り、②は 1mm の誤差を考慮しても長さが違うことになり、二等辺三角形とは認められなかった。そしてまた、この長さを測る具体的操作活動から、e) の操作が提案された。

e) 折ってぴったり重なる

T102: または 8cm6mm、8cm4mm の人もいいね。誤差がありますから。

そうすると長さが違うから、ぴったし重ならないって言う。何で？何で裏返したらぴったり重ならないの？説明してよ。（実物で裏返ししながら実演）IK さん。

S103: 3番は折ったらぴったり重なるけど、2番は折ったらずれる。

T107: なんで折るとずれるって分かるの？

S106: こことこの長さが違うからずれる (右の辺と左の辺を指しながら)

T108: ああ、あそことあそこの長さが違うから折るとずれちゃうんだ。

今言ったように、こことこの (黒板の三角形の右の辺と左の辺を指して) 長さが違うってことは、折るとずれちゃう。では、ずれなかったなら、ずれない。ぴったり重なると本当はどうなるの? こことこの長さは?

S107: 同じ…

T135: 5人…。はい、ちょっと待って。折れば、ぴったり重なるかどうか分かるよって言ったよね?

じゃあ、折ってもらおうか?

S123: 切って?

T136: 切らないでも折れるかな?

S124: 切りたーい。

T137: 正確に切らないとだめだからね。やるのは、3番と2番だけ。はい、折ってみる。

(作業)

これは T102 の「長さが違うと、裏返したら違ってしまうのはなぜか」という問いに対して、何とか答えようとして出てきた具体的操作活動である。教師の発言に促され、S106 の発言にみられるように、長さが同じだと折るとぴったり重なることに気づき、他の子どもも納得している。また、折り始める時に、S123 は切ってよいかと質問している。

このように、具体的操作活動が活発になっていく様子が多々観察された。

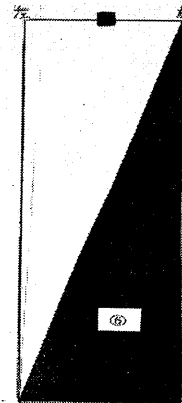


図3

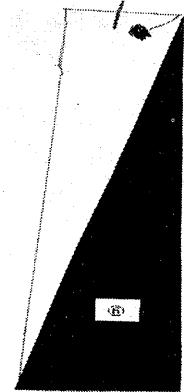


図4

4. 図形概念の形成に関して

この授業では、直角三角形と二等辺三角形の概念を初めて、しかも同時に導入した。個人での仲間分けの場面では、あまり活発な具体的操作活動は行われなかったが、授業が進む中で、3.で述べたように、様々な具体的操作活動をすべての子どもが取り入れて行っている。また、授業計画にはなかったが、「二等辺三角形の頂点がまん中にある」ということから、二等辺三角形とそうでない三角形の違いを明確にするなどについて具体的操作活動を通して行っている。

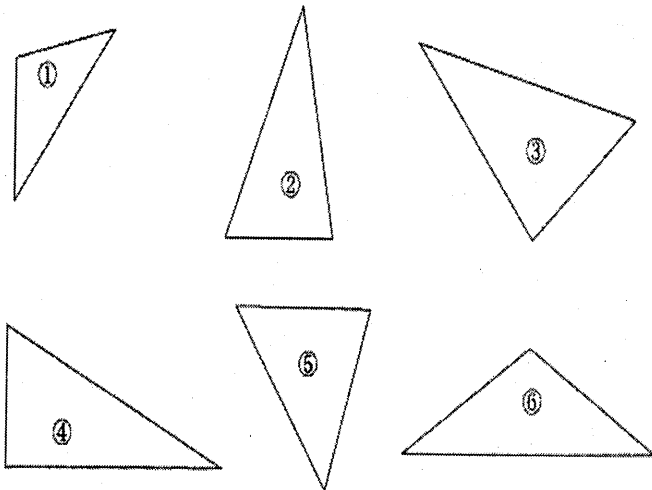
その他の三角形は頂点が真ん中に来ていないか、実際に図3 (実際の子どもの記述) のように作図している。図4は矢印を描いている点から、頂点が真ん中になれば二等辺三角形になると考えている子どもの思考がうかがえる。

他にも三角形をしきつめたり、ドット用紙に直角三角形や二等辺三角形を作図するなどの具体的操作活動を行うことで、多くの子どもが直角三角形、二等辺三角形の図形概念を獲得していった。

以下に、授業後に行った調査について、問題とその結果を示す。

調査問題

下の三角形から、直角三角形と二等辺三角形をすべてえらび、答えの□の中にきごうでかきましょう。



調査結果

直角三角形	完全回答 (④⑥)	20名
	1つ多いまたは少ない	2名
	不正解	5名
二等辺三角形	⑥を選ぶ	24名
	①⑤⑥すべて選ぶ	6名
	①⑥	9名
	②を選んでしまう	5名

この結果にみられるように、直角三角形はほとんどの子どもが正しく選択することができている。二等辺三角形についても底辺が水平なものを選んだ子どもが24名いることから、その概念は理解していると考えられる。斜めに置かれている①や⑤については、判断が難しかったようである。これは二等辺三角形を直観的にとらえているため、2辺の長さが等しいという定義に基づいてとらえているわけではないことが分かる。

しかし、この第3学年ではこの程度の理解で十分であり、次の学年でもう一度、性質を見つける際に具体的操作活動などを通して、その概念をより正確に理解すればよいと考える。

また、この調査問題を解く際に、頂点に印をつけて、まん中にきているか調べたり、長さを記入したりしている子どもがみられた。具体的操作活動が子どもの図形概念の獲得のために有効であることが分かる。

5. 実験授業からの示唆

ここで取り上げた実験授業の分析から、小学校第3学年での学習における図形概念の形成に関する子どもの様相について、以下のことが明らかになった。

1) 何も指示が与えられずに子どもが具体的操作活動を自発的に行うことは多くない。また、仲間分けの多くの観点は、伸び縮みしているなどの直感によるもので、構成要素に着目することはあまりない。そのため、教師の指示、道具などに関する配慮が必要である。

なお、この点については、1, 2年生の時にどれだけの具体的操作活動が行われたか、どのような視点をもたせて具体的操作活動を行っていたかによって変わってくるであろう。

2) 子どもは二等辺三角形が線対称であることを直観的に見抜いている。しかし、それを確かめるのに実際に折ったりして行うような動的な具体的操作活動には至らない。

3) 三角定規の直角、または直角の模型を重ねて、直角があるかどうか調べるという具体的操作活動を一人の子どもが提案したことから、他の子どもも実際に行うことによって直角三角形と他の三角形との違いを明確にすることができ、概念を獲得していった。

4) 二等辺三角形については、ひっくり返すという操作から、辺に着目し始めて長さを測ったり折ったりという具体的操作活動が生まれてきた。これは教師の鋭い問いかけに何とか説明しようという葛藤から生まれたものと考えられる。

5) 二等辺三角形を折るということは、その図形の対称性を利用した操作である。この対称性の視点を取り入れて具体的操作活動をすることは、2辺の長さが等しいことや角の大きさに着目するなど、概念を豊かにするための大切な操作である。今回の実験授業では最初の個人での仲間分けの段階では出てこなかったが、切って折るといったような動的な具体的操作活動の基礎となるものは、低学年の図形領域において経験的に取り上げ、十分に具体的操作活動を行わせる必要がある。

〈引用・参考文献〉

赤井利行(2002)『子どもの活動が創り出す図形学習』, 明治図書.

国宗進(1993)「上学年における指導のポイント」; 日本数学教育学会編『新算数指導のポイント』, 東洋館出版社, pp.15-23.

国宗進(1997)「操作活動の質を高めよう」『教育科学 算数教育』No.496, 明治図書, pp.6-9.

杉岡司馬(2002)『「学び方・考え方」をめざす算数指導』, 東洋館出版社.

全国算数授業研究会(2000)『これからの図形指導』, 東洋館出版社.

文部省(1989)『小学校指導書算数編』, 東洋館出版社.

文部省(1999)『小学校学習指導要領解説 算数編』, 東洋館出版社.

① 取り上げる三角形の確認し、それらを仲間分けする

T1: この三角形作った人?(実物の模型を見せて確認)

S1: (手を上げる)

T2: 全部でいくつ違う形ができたんだっけ?

S2: 12種類。

T3: 今日は12種類の中から6つ(模型を黒板に貼る)、6つあるこの形から、2つのグループに仲間分けします。

作業時間(ここでの子ども実際は(5)で詳しく述べる) (16:48経過)

② 直観による仲間分け

S3: ①と②と③と⑥、と④と⑤

T5: Iさんは①と②と③と⑥、と④と⑤

自分のノート見て、①②③⑥、と④と⑤っていう分け方してる人?(2人挙手)

T6: Nくんあるんだね。ということで、Iさんの理由を聞こうね。

S7: ③と⑥と①②は伸び縮みをしていて…

T8: ああ、伸び縮み。

S8: ④と⑤は伸び縮みにならない。

T9: これがこういうふうに伸びているよ、だからこうやってわけたよってことだね。

N君(同じ分け方)は?

S10: ③と⑥は細くて、④と⑤は…

T11: ③と⑥のほうは細い? そして、④と⑤は?

S11: ④と⑤は太い。

T13: じゃあ、N君どこが、太いとか細いとか言ってる? ちょっと前に出て説明してみて。

S12: ③と⑥は縦で細くて(手で伸びている様子を示す)、①と②は横に細い。

T14: ④と⑤はなんとなく太い?

S13: (うなずく)

T15: じゃあ、O君は? ありがとう、N君

S14: 伸び縮みしているんだったら、どちらかが伸びててどちらかが縮んでいるんだから、それを解いて、こっちが伸びてて(①②③⑥をさす)、こっちが縮んでいるんだから(④⑤を指す)、こっちが細くて、こっちが太い。

T16: 伸び縮みのことを考えると、こっちが細くて、こっちが太いってことか。じゃあ、この分け

方はなんとなくいい? だいたい、太くて細いってのはいいかな。他の分け方した人? はい、Mさん。

S15: ①と②と⑤ と ③と④と⑥

T17: Mさんと同じ分け方した人?

(3人ほど挙手)

T19: じゃあ、Mさんから聞こうか?

S17: 上に伸びているのと、縮んでいるのがある。

T20: あっ、伸びているのと縮んでいる。じゃあ、Nさん。

S18: ①②⑤は低くて、③④⑥は低くない。

T21: 低くないって変わりになんて言う?

S19: 高い。

T22: I君は?

S20: まったく同じ。

T24: じゃあ、縮んでるとか伸びてる。高いとか低いってのはいいかな? じゃあ、まだ他にある人? K君。 (24:58経過)

③ 三角定規のかどに着目した仲間分け

S22: ①③④⑥と②⑤

T25: この分け方、同じ分け方した人?

(挙手なし)

S23: 1つ三角定規に合うのと、2つ以上三角定規に合うもの

T26: 今、言ったの分かった?

S24: わかんない…

T27: じゃあ、三角定規持ってきて前でやってみて。

S25: これはここだけで、一つしか合わないのと(三角定規を重ねる)、こっちのほうが一つで、二つでもう一個が合わないから二つで、こっちの三角形は一つで、二つで3つ合う。

T28: わかった? 今の? はい、じゃあ全員三角定規出して、やってみてください。

(作業…)

S26: (つぶやき) あっ、ほんとだ!!

あっ、ぴったし合わない。2つは合わないよ。

T29: どうですか? 2番と5番にあった?

S27: あった!!

T31: 両方とも合ってる? エッて言ってる人もいるよ。どっち?

S29: 5番は完璧にあっている。

T32: じゃ、確認します。5番はちゃんとあつてた

よってという人？

(挙手多数)

T33: あったた？ じゃあ、これはいいんだね。2番は三角定規のかどとぴったし合ってた？ あったた人？

S31: じゃあ先生がやってみればいいよ。

T37: じゃあ、先生が挑戦してみるよ。

(子ども達が前に出て、確認しに行く。)

T40: はい、ちょっとプリントが悪かったけど、K君のは合ってます。2番と5番は合ってるんですね。

T41: じゃあ、いいですか？ 他の人？ Tさん。

(34:49経過)

④ 直角に着目した仲間分け

S36: ⑤と、①と②と④と⑥と③

T42: ⑤だけと…(黒板に分ける) こんな分け方できるんだ。こういう分け方した人？⑤だけ別にして。

(挙手なし)

T43: じゃあTさん理由どうぞ。

S37: ⑤は直角があるけど、①②④⑥は直角がない。

T44: ⑤は直角があるけども…

S38: えー！！

T45: えー？…こっちは直角がない。

T46: 直角ってなんだか覚える？

S38: 線…

T47: 線…(直角をさして) こういうところの形だよ。かどの形でした。直角がない。えーって言った人は、何？ はい、TAさん。

S39: (前に出て⑥の三角形を取り出し、事前に直角を学習した際に作った直角を重ねて) 角があってるから、⑥も直角の仲間に入る。

T48: ああ、⑥も直角があるから直角に入ると言うって言うてるね。いい？

はい、⑥番、直角があるかどうか？そして、⑤番も直角があるかどうか確認してください。

S40: ある…、わかった。

T49: じゃあね、直角があったところに赤い丸を付けてみましょう。

(作業中)

T50: じゃあ、確認します。はい、赤で直角のところを丸付けてください。はい、誰かやってくれる人？ じゃあ、来て。ここここだよって。

S42: (違うところに丸をして…)

S43: えっ、違うよ！！

S44: (他の児童が前に出て、記入)

S45: いいです。

S46: まだ、ある。

T51: じゃあ、KU君。

S47: えっ、違います！

T52: どうですか？ 違う？ ちょっと待って。じゃあ、KO君、説明してください。KU君よくみてよ。

S48: (三角定規の直角以外の角を重ねて) こっちのほうは、直角じゃないほうと合わせたから、KU君のは違う。

T53: はい、三角定規で直角ってどこだったかなってことだね。はい、見てください(三角定規の拡大を出す)「三角定規の直角ってどこなの？」

S49: シールの貼ってあるとこ。

T54: シールの貼ってあるとこだよ。 (三角定規の直角でない角を三角形に合わせて)これ、たしかにぴったり入ってくるんですけど、シール貼ってないところだから、直角じゃないね。ここのところのかどが直角ですね。

5番と6番の三角形には直角がいくつありますか？

S50: 一個

T55: 一つだよ。直角が一つありますので、⑤と⑥は直角が一つ。これをなんと読んでるかって言うと、直角三角形と呼んでいます。

(47:49経過)

研究授業の続き

⑤ 前時の確認

T56: はい、この間お勉強した時の復習だけ、先にしたいと思います。

1つ目は、三角形が伸びたり縮んだりしているものの分け方をしている人ですね。

2つ目は、高いとか、低いって言うのが出てきたよね、覚える？

3つ目は、…三角形…あっ、三角定規か…三角定規出してごらんさい。

三角定規をこうやってあてると、かどのところ…このかどや、このかどまたは、こっ側の三角定規を使って、このかどやこのかどやこのかどを2つ以上使うかどがあるよって

ことでした。

(板書)

一番最後に出てきたのは何だか覚えてる人？

Tさん。

S52: 直角があるものとないもの。

T58: そうだね。直角があるものとないもの、ノート見て確認とってください。

T59: そこになんて書きましたか？みんなかいてあるはずだね。直角のあるものとないものだよ。

(板書)

S53: これだよ、直角…

T60: こうやってつまんでください。ここが直角だよってところ。ここここ…両方。

S54 (多数): 知ってるよ。知ってるよ、直角。

T61: はい、直角ってどこだった？

S55 (多数): ここだよ！！ えっ？！

T62: つまんで、上にあげてごらん！！

S56: (全員、手を伸ばし上にあげる)

T71: そうだね。はい、よし、直角があるなしでやったんですね。で、みんなに丸を付けてもらいました。

T72: 今日はさあ、まだ他にも別の分け方した人いるよってあって、NIさんの考え方があるよってお話がありましたから、はい、NIさんから発表してもらいましょう。NIさんどういう分け方した？

(11:09 経過)

⑥ 裏返しても同じ形に着目した仲間分け

S66: ③と、①と②と④と⑤と⑥

T73: ③と①②④⑤⑥。こういうこと？ NIさんと同じ分け方した人？

(挙手なし)

T74: いない。じゃあ、NIさんなんで？ちょっと聞いてみましょう？

S67: ③は裏にしても、同じ…形は変わらなくて、①②④⑤⑥は裏にしたら形は変わる。

S68: えっ？！

T75: 言ってる意味分かった？

S69 (多数): 分かったけど…。 えっ？！

T76: 今言った意味分かった人？

(数名挙手)

T77: ③は裏にしても形は変わらないけども、こっち側のは裏にすると形が変わっちゃうんだっ

て。そう？ ③はこういうふうに裏返しにしても (実演)、これは形は？

S70: (多数) 変わらない。

T78: 変わらない。

T80: ちょっと待って、TN君なに？

S72: 2番もそうじゃないの？

T81: 2番もそうじゃないの？ って TN君が。

S83: (他の児童、数名) 2番もだ。2番もそうだ。

T82: 2番もそう？ 裏返しにしても形変わらないかなあ？

(児童は自分の持っている紙を、ひっくり返す)

S84: (多数): 変わんないよ。あつ、変わらない。

T86: どうですか？

S85: 少し変わってない？！

T87: 少し変わってる？

S86: えっ、変わってないよ。

T88: どっち？

S87: 変わってない！！

(14:18 経過)

⑦ 2辺の長さを測り始める

S88: えっ、5mmも変わってるよ。

S89: 8.5と9だよ。

S90: えっ？！

T89: ちょっと待って、なにが8.5と9？？ちょっと、待って。2番を問題にしてるよ？

S95(A): 左側がね、9cmでね、右側が8cm5mmだもん。

T92: どこを測ったの？

S96: ここのかどのところ (プリントをさしながら)

T93: そこのかどのところ…測ったら…そう？

S97: そう。

T94: ちょっと確認しようかな？ ちょっと待って、何でそこを測ったの？

2番のどこを測ったの、H君、前に出て説明してください。

S98: (黒板の図を使って) こっち側が (向かって左側) 9cmで、こっち側が8cm5mmでした。

T95: 8cm5mm… 確認します。今、H君が測ったのは… (黒板に図示しながら) ここの長さとかこの長さを測ったって。何でここの長さ測るの？ それで、ここの長さが違うって言ったんだよね。今…違うって言ってました。

○君

S99: (前に出て) みんなはこれを(2番を指して)斜めになっていないように見えるから、こっち(3番を指して)の仲間って言ってるけど、実際はこっちのほう(2番)のが短いからこっちの仲間だといえる(二等辺三角形ではないほうの仲間を指して)

T96: あ、そっか。じゃあ、ちょっと確認しよう、その前にね。はい、じゃあ、まず、左側の長さ測ってください。右側の長さ測ってください。そして、プリントの中に書き込んでください。

(作業 子どもは個々に測り始める)

T98: はい、じゃあちょっと聞くよ。いい?

T99: はい、こちら側の長さ何cmだったか言える人? はい、KO君。

S100: 8cm9mmです。いいですか?

T100: 8cm9mm。そうすると、だいたい、8cm8mmで測った人もいいね。9cmも、1mmずつ増やしたり減らしただけだからいいでしょう。

T101: はい、こっち側は? はい、IS君

S101: 8cm5mm、

T102: または8cm6mm、8cm4mmの人もいいね。誤差がありますから。そうすると長さが違うから、ぴったり重ならないって言う。何で?何で裏返したらぴったり重ならないの?説明してよ。(実物で裏返ししながら実演) IKさん。

(21:32経過)

⑧ 折ってぴったり重なるかを調べる

S103: 3番は折ったらぴったり重なるけど、2番は折ったらずれる。(22:00経過)

T104: あっ、折るとずれちゃうんだ。また、ちがった言い方が出たね。折るとずれる(板書)

T105: ほんとに折るとずれちゃう?ねえ?

S104(多数): うん。

S105(多数): 間違いない。

T107: なんで折るとずれるって分かるの?

S106: こことこの長さが違うからずれる(右の辺と左の辺を指しながら)

T108: ああ、あそこあそこの長さが違うから折るとずれちゃうんだ。

今言ったように、こことこの(黒板の三

角形の右の辺と左の辺を指して)長さが違うってことは、折るとずれちゃう。では、ずれなかったなら、ずれない。ぴったり重なると本当はどうなるの? こことこの長さは?

S107: 同じ…

T109: 同じになる。

T110: そっか、こことこの長さが違うと、折ればぴったり重なるんだから、ぴったり重なったならば、こことこの長さは同じになる。そうだよな?もうひとつ、裏返しにするとこの赤い線は、ここだよ、(赤い線を指して)この赤い線は裏返すとどここの線と重なるの?

S109(多数): はい!!

T112: こにもともとあった赤い線は、裏返すと赤いほうにくるの?緑のほうに来るの?どっちにくるの? Mさん。

S110: はい、緑のほう。

T113: 緑のほう、緑のほうだと思う人?

(多数挙手)

T114: はい、じゃあやってみましょう。

これをこうして裏返すと、この赤いのは、緑のほうにくるんだよね(黒板で実演)

だから、こことここは本当はぴったり重ならないんだよって。長さが…ここの赤いところの長さ、緑の長さ違うからぴったり重ならないんだよって。みんな、言ってるんだね。

T115: じゃあ、3番は? 3番は大丈夫? NIさんが言った3番。ちょっと確かめてください。

(個別作業)

T118: はい、じゃあ、大丈夫ですか? はい、赤いほうの長さ何cmだったか言える人? U君。

S113: 18cm

T119: 18cm、赤いほうは18cm。そうすると、18cm1mmと17cm9mmの人もいいね。17cm9mmだった人?

T120: 18cmだった人?

T130: 18cm1mmだった人?

T131: はい、じゃあ次、緑のほう何cmだったか言える人? 右側のほうね。はい、H君。

S117: 18cm2mm

S118: えっ、違うよ!!

T132: えっ、ちょっと18cm2mmだった人?

S119: (数名挙手)
 T133: 18cm 3mmだった人?(挙手なし) 18cm 1mmだった人?(挙手なし) 18cmだった人?
 S120: (数名挙手)
 S121: 2ミリも差があるよ…
 T134: じゃ、右側の赤と緑が同じになった人? 同じ長さになった人?
 S122: (6名ほど挙手)
 T135: 5人…。はい、ちょっと待って。折れば、ぴったり重なるかどうか分かるよって言ったよね?
 じゃあ、折ってもらおうか?
 S123: 切って?
 T136: 切らないでも折れるかな?
 S124: 切りたーい。
 T137: 正確に切らないとだめだからね。やるのは、3番と2番だけ。はい、折ってみる。
 (作業)
 S125: (切っている子どもと、切っていない子どもがそれぞれいる)
 S127: なんか、折ったらおんなじなんだけど…
 (作業終わり)
 T139: はい、じゃちょっとやめてください。まず、2番目の切ったり切らなくてもいいから、こうやってまん中でこうやって、折ってみたら、ぴったり重なりました? 重なりませんか? どっちですか?
 S128: 重なっちゃった…。
 T141: 重ならなかった人?
 S130: (数名挙手)
 T142: じゃあ、こっこのほうどうでした? 3番目のほう? 重なった人?
 S131: (数名挙手)
 T143: 3番、重なった人? 重なりましたね。じゃ、全員こっちむいて。今やったところ、3番目のこれやっ たときに、折った線はここから出たよね (黒板で指す)。

(42:07 経過)

⑨ 二等辺三角形という名前を知る

T144: この線からこうやってあるよね、折り目ができたよね。折り目が、こういうふうにできました。
 では、大切なことを今日教えますから、プ

リントに書いてもらいます。
 はい、3番目のところ、③の形は左側も…こちら側の線もこちら側の線も長さが同じで、ぴったり重なります。折ると。ねっ? ですから、③は呼び名があります。なんて呼んでるかって言うと…?!

S132: 三角…

S133: 高い三角。

T145: 高い三角とは言いません、こっこの長さとかっこの長さが…等しいですから、長さが等しいですから、こう呼んでいます。二等辺…③は二等辺三角形と呼びます。
 (板書)

(44:05 経過)

⑩ 頂点がまん中にあることの確認

T146: で、T君はねえ、2番目のところ気づいたことがあるんだよね? もう一人いたと思うけど。
 T君はこっち側のは、上の点が右とか左によってるって言ってるの。(二等辺三角形ではないほうを指して) これは、どっちによってる?

S135: 左。

T147: だけど、2番とか3番はなんか、まん中の辺りにあるみたいだって…。どうですか? 真ん中にあるみたい?

S136: うん

T148: どこに対してまん中にあるの?

S137: 折り目

T149: 折り目がちょうど真ん中に来てるねってことだね。

T150: H君は、今日休んでるけど、この三角形にこういうふうには最初から線を入れたよ。二等辺三角形はこの辺の長さとかこの辺の長さは等しくて、折り目をつけるとぴったり重なるよってことだね。

(46:50 経過)

以上

第3章 作図ツールソフトを活用した図形の対称概念の指導

この章では、小学校算数科における図形の対称概念に焦点を当て、「図形を動かす」操作を取り入れることによって図形の概念形成がより豊かになることを授業によって示す。

コンピュータを子どもたちの学習の道具として位置づけ、「図形を動かす」操作を子どもたちが自由に行うことができるように配慮した。

その結果、対称を取り入れた図形を描き、対称性を生かして動かし、その楽しさを味わうことができた。そして、動的な図形を観察することによって、対称的に動く美しさ、おもしろさを視覚的に味わい、静的な学習では発見できなかった対称な図形の性質を見つけることもできた。図形を動的に観察しその動きを楽しむ学習活動によって、対称概念を豊かにしていった。

1. 実験授業

(1) 単元の目標と指導計画

第6学年での「対称な図形」について、次のことを目標として実験授業を実施した。

- ・基本的な平面図形を線対称や点対称の観点から見直し、その美しさに関心を示し、その形を考察しようとする。
- ・基本的な平面図形を線対称や点対称の観点で考察し、その図形を操作しながら平面図形の概念を豊かにする。
- ・線対称な図形や点対称な図形を定義や性質に基づいて作図することができる。
- ・線対称な図形や点対称な図形の意味を理解する。

指導計画（全12時間）は次の通りである。

- | | | |
|-----|-------------|-------------------------|
| 第1次 | 線対称な図形（4時間） | 線対称な図形の性質、線対称な図形の作図 |
| 第2次 | 点対称な図形（3時間） | 点対称な図形の性質、点対称な図形の作図 |
| 第3次 | 多角形と対称（2時間） | 正多角形や円と対称……………作図ツール活用 |
| 第4次 | まとめ（3時間） | 動く模様を作ろう……本時2/3 作図ツール活用 |

(2) 本時のねらいと工夫

- ・日時 平成11年1月22日（金）9:00-9:45
- ・場所 山梨大学教育人間科学部附属小学校情報教室
- ・活動名 動く模様を作ろう（第4次第2時）
- ・本時のねらい 対称な図形を作図して動かし、模様を作って楽しむ。
- ・指導の工夫

本時は、これまでに学習した三角形や四角形、円などを使って自分の好きな模様を作って楽しむことがねらいである。その模様には点対称な図形や線対称な図形を盛り込み、対称性を保存させながらその模様を動かして、対称図形の動きを楽しむ。その際、コンピュータの作図ツールを動かす道具として活用する。

子どもたちはこれまでに、対称な図形を作図ツールで作図したり、変形したりしている。自分の好きな図形の模様を作図させ、対称図形の動きのおもしろさをお互いに楽しみたい。また、子ども

たちの作った模様について、動きの特徴や変形の仕方について説明ができるようにさせたい。そして、対称という観点で基本図形を見直していく。本時は「対称な図形」の学習の発展的内容として位置づけている。したがって、線対称や点対称の性質やかき方は、既知の内容である。

・図形の性質を保ちながら変形していく工夫

例えば、四角形の点対称の性質を探究するためには、点対称の形を維持しながら、図形を自由に動かす活動が必要である。作図ツールは、図形の性質を保持したまま図形を自由に変形することができる。子どもたちが実際に操作する際、できるだけ多様な動きが実現できるよう事前にいくつかの四角形を作図しておく。この設定は教師が行う。

(3) 作図ツール活用の経過

本校には、児童用に 20 台(平成 11 年 1 月現在, Apple Macintosh Performa 5220)が情報教室に配備され、ネットワークで接続されている。子どもたちには休み時間に開放し自由にコンピュータに触れることができるようになっている。

対象児童は、これまで週 1 時間のパソコンタイムや算数の時間に、お絵かきソフトや統合ソフト(表計算機能)、電子メールソフト、www ブラウザソフトなどを使いコンピュータ操作には慣れてきている。作図ツールソフト「スケッチパッド」については、本授業までに 5 時間扱っている。最初の時間はソフトに慣れるためにゲームをした。三角形をかき、表示させた辺の長さの値を見ながら二等辺三角形や正三角形に変形していくゲームを取り入れ、三角形の性質の理解を深めている。

対称の学習では、まず線対称や点対称な図形の性質を発見したり、作図方法を知って対称図形をかいたりする学習を教室で行った。

コンピュータは 2 人で 1 台を使用する。お互いに話し合いながら学習を進めている。2 人で 1 グループを作り、グループの数は、食べ物グループが 10、動物グループが 10 である。

1/19 線対称な図形の動き

線対称な図形のかき方を学習した。

三角形の 1 辺を軸にして線対称に折り返し頂点を動かすと、図 1 のように鳥が羽ばたいたような動きになる。これを提示して作図の意欲化を図った。作図は、対称の軸を設定し、対称変換して作図する。花びんや、木の絵を半分かいておき、線対称になるように作図させていった。その後、頂点や辺を動かして、線対称の図形の動きを楽しむことができた。

SA「今日の 1 校時はスケッチパッドを使って線対称を書いたりしてノートにはかくことができないことができてよかったです。最後に鳥のような図形をアニメーションで動かしてみたらいつでも線対称でした。」

KR「線対称だけではなく、点対称の図形をアニメーションで動かしてみたい。」

YU「すぐに線対称ができてすごいと思いました。最後の方にやった三角形の線対称は楽しかったです。1 つの方が動けばかってにもうかた方がうごくあたりもおもしろかったです。」

1/20 点対称な図形の動き

点対称な図形のかき方を学習した。点対称な図形をかくには対称の中心を設定し、 180° 回転させる。作図したあと、対応する点を結ぶ線分は対称の中心で 2 等分されることを発見し、確かめた。また、三角形の 1 辺の中点を対称の中心にし、点対称になるように 180° 回転するとどんな四角形にな

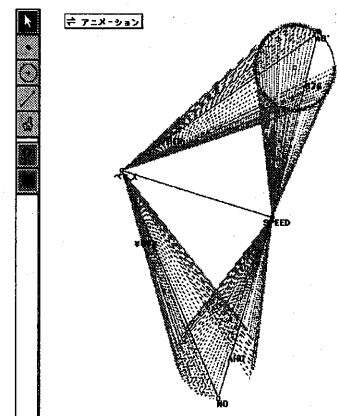


図 1 線対称な図形のかき方

るかを追求した。一般の三角形では、平行四辺形になる。これは平行四辺形の性質であるとも言える。

TM「点対称は線対称を作るより少しくろうしました。何がくろうしたかというとは180度動かす間で、くろうしました。点対称はふだん考えられないことができてよかったです。」

KS「今日はパソコンで点対称な図形を書いた。四つ葉のクローバーを作った。1つの葉を180°回転して、それを90°回転して作った。うまくできてよかったです。」

YF「点対称でも、線対称での学習感想のように、好きな形を作ってみたいと思った。点対称で作った形はよくわかんない形になった。けど、まーおもしろかった。」

1/21 対称な図形の動き

線対称や点対称の基本図形を動かしていく。鳥のくちばしを上下に線対称になるように作って提示し、くちばしの先端を動かしていった。アニメーション機能を用いると、ある点を円または直線上を動かすことが自動的にできる。対称の動きのおもしろさを味わった。ぶどうグループは対称軸自身を動かして、これまでの動きとは異なる動きを発見した。一斉送信して紹介したあと、対称軸が動いても線対称な図形のままであることを確かめた。

TF「今日は線対称と点対称で鳥のくちばしなどいろいろなものを見て、どうやって動いているか考えて、予想とはぜんぜんちがう動きをしたものがたくさんあった。今度絵をかくとき線対称と点対称をうまく使っておもしろいものを作りたい。」

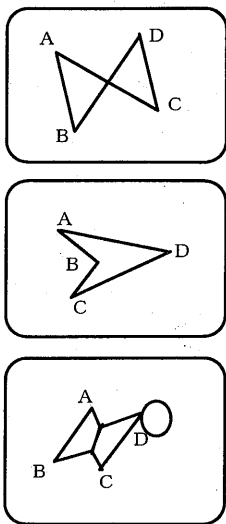
SY「めいさんたちのようにきみょうなうごきは簡単そうに見えていがいとむずかしい。次はこんなふうなきみょうな動きをする図形をつくりたい。」

EH「今日は点対称の図形がおもしろかった。線対称の図形よりおもしろいと思った。いろいろなところを動かすと、と一つもおかしい。動かす所を考えながらおもしろく動かしたい。まりえちゃんたちが作ったのはよく工夫していてめずらしい動きだった。」

KO「りんごの動きはとにかくすごい。たいした？せんでもないのに、かくして分からなくなるとすごいと思いました。目のうごきをかえて顔をかいてみたけれどおもしろい動きができなかった。」

(4) 本時の展開

	学習活動と主な児童の反応	コンピュータ活用	指導上の留意点
つ か む 追 求 す る 深 め	1. 今日の課題を把握する。		<ul style="list-style-type: none"> ・コンピュータの 正三角形や二等辺三角形、正方形、長方形、平行四辺形、台形などの作図の仕方は、定義や性質にもとづいている。しかし児童が作図するには複雑であるため、教師が作図をしておき、それを用意しておく。 ・点対称や線対称の操作に自信のない子には、個別指導する。 ・「アニメーション」機能を使うと、軌道に従って自動的に動かすことができるので、活用させる。 ・小学校では自己対称のみを学習し、対称な位置にある2つの図形(相互対称)については扱わないが、児童から考えが出てきたときには、相互対称についても扱う。
	線対称や点対称の図形を作って、自分の好きな模様を書こう。そしてその模様を動かしてみよう。	ファイルから必要な図形を選ぶ。	
	2. 絵をかく。 C：三角形を動かして、点対称の形にしてみよう。 C：二等辺三角形を線対称に動かして模様を作ろう。 C：できた形を、円周にそって動かしてみよう。		
3. 友達どうしで動き方や形の特徴について話し合い、考えを			

<p>る ま と め る</p>	<p>深める。 C：点対称な図形で、対称の中心はどこだろう？ C：対称の軸はどれだろう？ C：なぜ、こんな動き方をするのか？隠したものは何か？ C：もっとおもしろい動きにするにはどうしたらいいのだろうか？</p> <p>4. 感想を話し合う。</p>	 <p>デモンストレーション（一斉送信）機能を使って、友達の見よう。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・基本図形（三角形、四角形）について、対称性という観点から見直すことができるようにする。 ・友達相互で話し合うことにより、自分の考えとの共通点や相違点に気づかせ、自らの考えを見直したり、新たな表現の仕方に気づかせたりする。 ・学習感想にまとめさせる。 <p>[評価]対称な図形を作図でき、その動きを楽しむことができたか？</p>
----------------------------------	---	---	--

(5) 本時での自力解決の様子

本時のねらいは、作図ツールで、線対称や点対称を取り入れた絵を描いて、アニメーション機能を使って図形を動かし、対称な動きを楽しむことである。

実際の子どもたちの活動の流れは、次の①～④の通りであった。

- ①自分の好きな形を作る。
- ②目的にあった対称（線対称・点対称）をその中に取り入れる。
- ③動きを組み立てる（アニメーション機能）。
- ④友達の商品を見て、対称な絵の仕組みを考える。

授業中の追求する態度や学習感想、実施に作った作品を見てみると、多くの子どもたちが対称の動き方を楽しんでいて、線対称や点対称を意識した絵を描いていることがわかる。

以下では「好きな絵を描くときに対称を意識してつくっていたかどうか」「対称を意識して動かしていたかどうか」という視点で子どもたちの活動を振り返る。

例えば、いちごグループは、図2のように自分たちの顔を線対称になるように対称の軸を設定していた。

(いちごグループのKKとYNの学習感想)

KK「いろいろな図形をつくる楽しさ。たいしょうの楽しさはおもしろい。線対称をつかって点対称を作る、そのくりかえしをしながら△□○などをたくさんつくっていった。」

YN「点対称や線対称の楽しさがけっこうわかってきたのでよかった。」

さらに、いちごグループは、図3のように、対称軸と対称の中心を「隠す機能」を使って隠し、「どこに対称が使われているか」という問題をクラスの皆に出した。

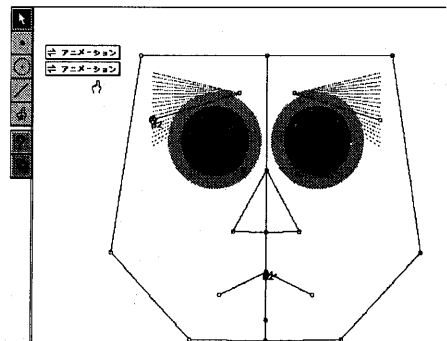


図2 いちごグループ

いちごグループ「さあ何対称かな？何個対称をつかっているかな。この作品のおもしろいところは、対称がいっぱいつかっていること！！！」

かきグループは点対称を使って、図4のような風車を作った。1つの頂点を円に沿って動かしたところ、予想以上にきれいにできて、次のように説明した。

かきグループ「この、図形は、点対称をつかい、円を使ってアニメーションで、動かした図形です。三角形の頂点が、重なる所に、点対称の中心があります。」

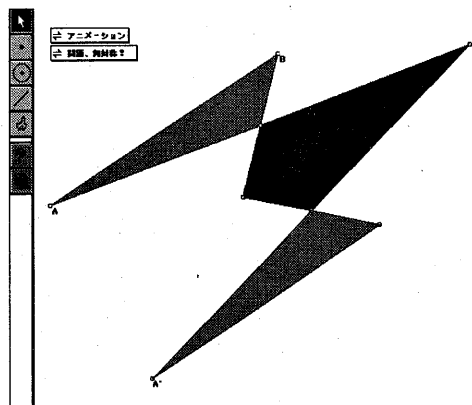


図3 いちごグループ

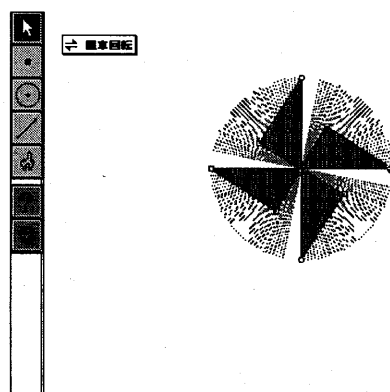


図4 かきグループ

一方、対称図形から離れて、動きの楽しさに興味が向いてしまい、夢中になった子どもたちも1組だけいた。とらグループは、対称を使わない絵を描いていた。この子たちは、ピエロの目を円でかき、その円の中に三角形を2つかき円周上に同時に回すことに興味をもった。対称性には焦点が当たらなかったようである。

(6) コンピュータを子どもの学習の道具として位置付けたこと

コンピュータの使い方の発想を転換し、「教師の指導の補助」という考え方から「子どもの学習の道具」として位置づけた。そのため、子どもたちは自分たちの思いを自由に表現することができた。そして、課題解決のために主体的に図形に働きかけ、図形操作に没頭していた。

従来の対称の学習の問題点として、対称な図形の作図が難しいことがあげられる。子どもたちは、思い通りの対称な図形を表現することがあまりできなかつたのである。作図ソフトを使うと、対称な図形を簡単に描くことができ、自分の表現したい図形を表すことができる。そして、対称な図形を動かすことができた。子どもたちにとって、対称な図形が身近な存在になったと言える。このことは、次の学習感想に表れている。

RK「今日は線対称と点対称をやって、パソコンでやるととてもたいへんなこともパソコンだと楽にできるから、もっとたくさんやってみたいと思った。」

AY「今日はコンピュータで線対称な図形を作りました。すごくかくのが大変な図形もかんたんに、かつせいかくに作ることができるのには、少しおどろいた。手でかくと動かすのができないけど、コンピュータだと点が動かせたりできてすごいと思った。」

YT「線対称をパソコンで作った。線対称にした図形は片方を動かすともう片方も動くので、線対称は変わらず、おもしろいと思った。」

2. 考察—子どもたちの追究の過程—

図形領域では、発見的考察（きまりやおもしろさに気づくこと）と確証的考察（きまりやおもしろさの根拠を探ること）が学習の中心である。小学校では前者を十分に行うことが大切である。今回の

授業では、より多くの図形に触れ、発見的活動を豊かに展開するために、テクノロジーを思考の道具として活用した。コンピュータの作図ツールを活用し発見的考察を重視した授業を行うことができた。

この授業で図形の探求活動のプロセスをどう評価するかは、重要な問題である。そこで、学習感想を書かせて活動の評価をした。授業では子どもたちは図形操作に夢中になる。授業の終わりに感想をかくことで1時間の思考をフィードバックできるようにしている。

ここでは、作図ツールを使った本時の学習感想とその前3時間の学習感想、そして授業中に作図した子どもたちの絵をもとにして、子どもたちの追求の過程を検討する。

(1) 相互対称の発見

小学校算数科で扱う対称は、自己対称な平面図形である。これは6年生の対称の学習が、これまで学んできた平面図形を対称という観点で見直すというねらいがあるためである。これに対して、相互対称とは、ある図形を対称移動させることに関係し、これは中学校で学習する。

線対称のかき方を練習していたかめグループは、図5のように三角形の1辺を対称の軸にして四角形を作った。その後、対称軸を直線で設定し、線対称な四角形を対称移動させたのである。対称軸を図形の外に設定して、相互対称に気づいたのである。このようにしても線対称な図形がかけられることを確かめていった。

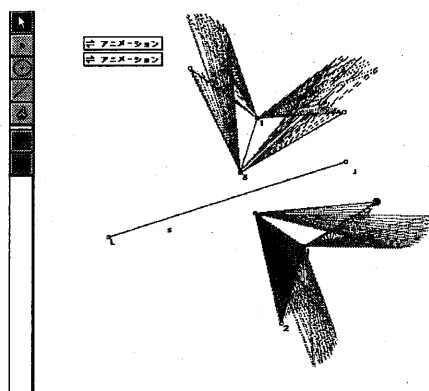


図5 相互対称 (かめグループ)

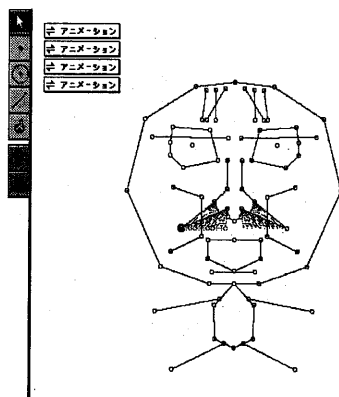


図6 自己対称 (ろばグループ)

(かめグループのYKの学習感想)

YK「鳥とは少しちがうけれど、同じようなものができた。あれは、1つつくると、同じことができるから簡単だった。やり方もおぼえやすいからまたやる。」

かめグループはこの発見の後も、相互対称を使って対称な絵を描いていった。図7は、左上の元の絵をまず描き、それを点対称移動させて左下の絵をかく。そのあと中央に直線を引き対称軸に設定して、線対称移動して完成している。したがって、左上のものと絵の点や線分を動かすと、点対称、線対称の位置にある点や線分が同時に動くことになる。かめグループはこれら4つの動きを楽しんだ。

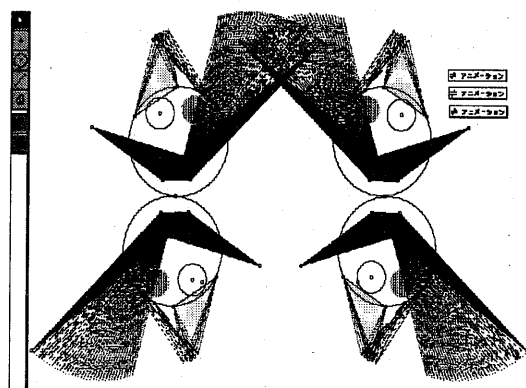


図7 かめグループ

(かめグループのYYの学習感想)

YY「公開授業では自分の所のものも見てもらったけど入倉君の所がかんたんだったけれどとてもよかつ

た。自分の所では線対称と点对称の2つを使ってかいた。耳や口などを動かしたらおもしろい絵になった。」

(2) 動きの発見

りんごグループは、図8のように、アニメーション機能を使って二等辺三角形を動かそうとしていた。頂点Bを円周上に動かし、頂点Cを線分上に動かしてみた。何度か円と直線の位置を変えてみて動かしたところ、二等辺三角形が想像を遙かに超えたユーモラスな動きをすることに気がついた。偶然に発見したという。スクリーンに映して、クラス全員で鑑賞した。

(りんごグループ以外の友達の学習感想)

SY「めいさんたちのようにきみょうなうごきは簡単そうに見えていがいとむずかしい。次はこんなふうなきみょうな動きをする図形をくつりたい。」

MK「…メメのパソコンで作品を見ました。イカみたいな動きでどういうふうにしたのかなーと思って、かくされたものを表示してみると、こんな考え方があったんだなーとすごくびっくりしました。いろんな発想をかんがえておもしろい作品を作りたいです。」

(…は筆者の省略)

EO「今日は前の学習感想でかいたように他の

人の作品を沢山見ました。とくに「りんご」

がかいたものは(題はわすれてしまったけど)船のような動きでよくわからなかったことが多かったけれど、とけたときはナルホドと思いました。」

(3) 対称軸を動かす発見

前時(1/21)は、対称な図形の動きに注目して授業を進めた。まず、図9のように鳥のくちばしを上下に線対称になるように作って提示し、くちばしの先端を動かしていった。

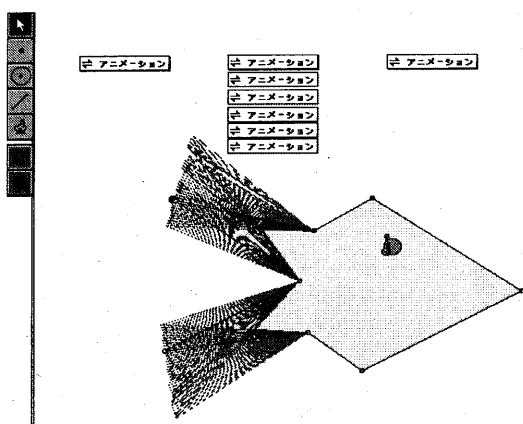


図9 ぶどうグループ

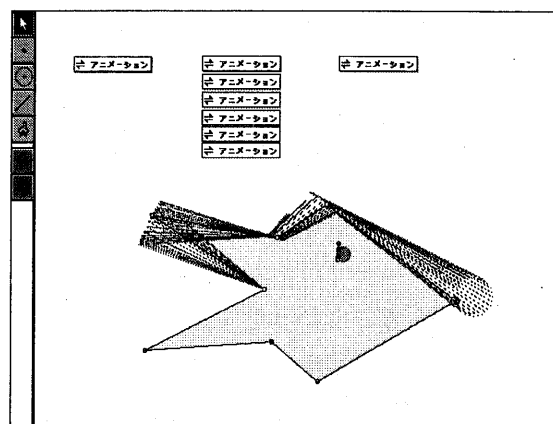


図10 ぶどうグループ

アニメーション機能を用いると自動的にある点を円または直線の上に動かすことができる。対称の動きのおもしろさを味わった。

ここで、ぶどうグループは図10のように、対称軸自身を動かして、これまでの動きとは異なる動きを発見した。一斉送信して紹介したあと、対称軸を動かしたときにも線対称な図形のままであるかどうか問題となった。対称軸の上の部分は対称軸よりも大きく動くため、全体として変形するので

はないかと考えられたが、線対称はいつも保たれることを確かめた。

(ぶどうグループ以外の友達の学習感想)

YY「今日は自分の所のコンピュータでもやったけど、他の所の物も楽しかった。ぶどうの所では、対称の軸を動かしたりしていておもしろかった。」

TF「今日は線対称と点対称で鳥のくちばしなどいろいろなものを見て、どうやって動いているか考えて、予想とはぜんぜんちがう動きをしたものがたくさんあった。今度絵をかくとき線対称と点対称をうまく使っておもしろいものを作りたい。」

この後の学習で、図 11 のようにぶどうグループは対称軸を動かすやり方を使って、うさぎの絵をかいていった。

(ぶどうグループのMSの学習感想)

MS「今まで1番がんばって作ってみて、とても、楽しい動きができたと思います。これは、線対称な図形です。工夫したところは、線対称の軸を動かしたことです。次はもっと工夫した図形を作りたいです。」

「線対称の図形をつくってみて対称のじくをはさんで1つが動くともう1つも動くことがくわしくわかりました。図形をつくっていくと、1つのことに気がつきました。「あっ線対称って鏡みたい」と思いました。家に帰って鏡の前に立って動いてみたら線対称にそっくり!!でした。今度は点対称を作ってみて、何かものに表してみたいです。」

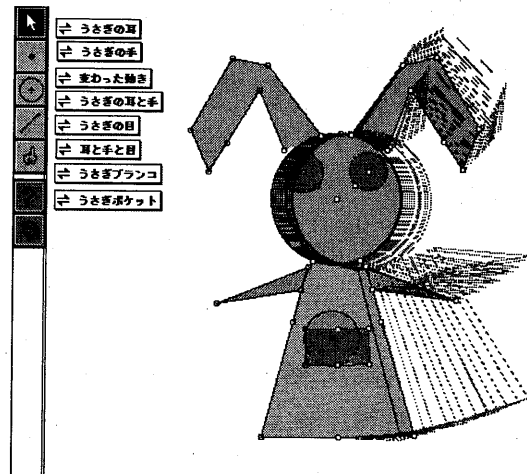


図 11 ぶどうグループ

3. まとめ

スケッチパッドを使った授業で、子どもたちは、自分の作った絵の動きを観察することによって、線対称や点対称の概念を深めていった。ノート上では体験できない対称の動きをみて、左右が対称的に動く美しさ、おもしろさを視覚的に感じ取っていった。また、線対称や点対称という視点で、自分で描く図形や身の回りにある形をとらえていこうという態度が見られるようになった。

対称な図形の単元は、これまで学習してきた基本図形を対称という観点で見直すことがねらいであるが、動的な図形の見方を通して、三角形や四角形の理解をより深めることができた。さらに、相互対称を発見したり、対称軸自身を動かして動かす方を工夫したりすることができた。

本稿は、早川健(2000)山梨大学教育学研究科修士論文「作図ツールソフトを活用した小学校の図形指導」の一部に加筆修正して作成した。

第4章 小学校での空間図形の指導

この章では、立体の見取図をかくこと、及び立体の投影的な見方について、小学校での実験授業を通して子どもの思考の様相を明らかにする。そして、それに基づいて、空間図形に関する指導システムに対する示唆を得ることをねらいとする。

1. 研究の枠組み

本章で述べることは、小中高校生の空間図形の理解に関する実態をとらえ、その発達の様相を明らかにして、空間図形についての好ましい学習指導のあり方を追究する『空間図形の理解に関する研究』の一部である。

空間図形に関する研究は、これまでも随分行われている（国本, 1995 ; 影山, 2000）が、小中高の学習指導を見通して、子どもの理解の様相を発達的にとらえようとする研究（狭間他, 2000 ; 赤井, 2002）はそう多くはない。本研究では、これらについて、「空間図形の理解の様相をとらえるための観点」を設定し、特に論理的思考力や直観力の育成も十分に視野に入れて追究しようとしている。

(1) 空間図形の理解に関する研究の枠組み

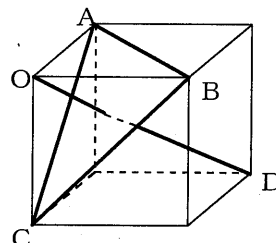
『空間図形の理解に関する研究』の枠組みは、次のようになっている。

① 空間図形に関する問題の解決で要求されること

まず、空間図形に関する問題の解決で、どのような理解や能力が要求されるかを考えてみよう。例えば高校では、ベクトルの内積が使われる空間図形に関する次のような問題がある。

[問題] 右の立方体で、対角線 OD と $\triangle ABC$ は直交する。

このことを証明せよ。



この問題を証明できる生徒は多くはない。また、仮に証明ができたとしても、機械的にベクトルの計算をするだけにとどまっていて、この問題の解決を通して、空間に対する理解が深まる生徒は少ないと考えられる。

上の問題で、命題が主張することを理解するには、次のような空間図形に関する理解や能力が必要であろう。

- ① 見取図から立方体を思い浮かべる。
- ② 切断面 ABC が正三角形であることを理解する。
- ③ 四面体 $O-ABC$ を立方体から切り取ることができる。
- ④ 四面体 $O-ABC$ が正三角錐であることを理解する。
- ⑤ 視点を移動して、四面体 $O-ABC$ を O から D の方向に投影した図を思い浮かべることができる。
- ⑥ 線分 OD と面 ABC の交点が、 $\triangle ABC$ の重心であることを理解する。

上記のことを理解してはじめて、証明すべき命題の意味を正しく理解することができる。さらに、この問題をベクトルを使って解決するには、次の点も重要である。

⑦ 平面に交わる直線は、平面上の2直線に垂直ならば、その平面に垂直であることを理解する。

このように、1つの[問題]について、その意味を理解して解決に結びつけるためには、空間図形に関する①～⑦のような様々な理解や能力が必要である。

② 空間図形の理解の様相をとらえるための観点

①で考察した問題の解決で要求されることや、授業での子どもの考え方の特徴等の分析の結果に基づいて、筆者らは「空間図形の理解の様相をとらえるための観点」として次の4点を設定した。(熊倉他, 2000)

「空間図形の理解の様相をとらえるための観点」

- ア. 基本的な立体図形に関する理解
- イ. 空間における直線や平面に関する理解
- ウ. 空間図形の操作能力
- エ. 空間図形への活用能力

ア. 基本的な立体図形に関する理解

これは、基本的な立体図形に関して、立体とその名前との対応が付き、その簡単な特徴について理解しているかどうかを観るために設けた観点である。簡単な特徴とは、例えば角錐の場合、「底面が多角形で、側面が三角形である」という程度の内容である。

イ. 空間における直線や平面に関する理解

これは、空間における直線や平面に関して、決定条件や位置関係等に関する内容を理解しているかどうかを観るために設けた観点である。具体的な内容としては、以下の①～④を挙げることができる。

- ① 平面の決定
- ② 2直線の位置関係
- ③ 平面と直線の位置関係
- ④ 2平面の位置関係

①は、「一直線上にない3点」「一直線とその上にない1点」「交わる2直線」「平行な2直線」で平面が決定されることに関する内容である。

②は、位置関係として「交わる」「平行」「ねじれの位置」があること、また2つのなす角の意味に関する内容である。

③は、平行や垂直の意味と、位置関係として「交わる」「平行」があること、また2つのなす角の意味に関する内容である。特に垂直に関して、「1本の直線と、平面上の交わる2直線が垂直であれば、その直線と平面は垂直である」という事実は重要である。

④も、③と同様に、平行や垂直の意味と、位置関係として「交わる」「平行」があること、また2つのなす角の意味に関する内容である。特に、垂直に関する内容で、③と混同して、「2つの垂直な平面上の2直線同士も垂直である」と勘違いする生徒をよく見かけるが、垂直に対しての正しい理解が重要である。

①～④を学習する主な時期は、①が中1で、②～④は、平行・垂直の意味や位置関係については小4および中1、なす角については、高校・数学I「図形と計量」または数学B「ベクトル」

である。

なお、上記①～④以外にも、「三垂線の定理」や「デザルグの定理」、平面・直線の3つ以上の位置関係等に関する内容もあるが、現行カリキュラムではほとんど扱っていない内容でもあり、本研究では除いて考えている。

ウ. 空間図形の操作能力

これは、空間図形に対して、「切断や投影等の操作を加えること」ができるかどうか、あるいは逆に、「操作の結果から、空間図形を構成すること」ができるかどうかを観るために設けた観点である。前者と後者を区別して、次のように分類することができる。

ウ-1 操作による分解

ウ-2 操作による構成

これらの操作を通して、空間図形に関する理解を深めることが重要である。

操作としては、具体的には次の①～⑤を挙げることができる。

①見取図表現 ②展開 ③運動(回転, 平行) ④切断 ⑤投影

①は、3次元の空間にある図形を、2次元の平面上に、もとの図形の形ができるだけわかるように表現する能力、あるいは逆に、平面上に表現された図から空間図形を構成する能力である。平面上に表現するのに、斜め上あるいは下の方向から見た図をかくことが多い。見取図表現については、学習の初期の段階では、丁寧に扱うべき重要な操作である。身の回りの場面で、この操作能力が活用されることは言うまでもない。

②は、空間図形の展開図をつくる、あるいは逆に、展開図から空間図形を構成する能力である。例えば、身の回りの様々な立体図形を作成する上で、この操作能力は重要である。

③は、平面図形を、ある直線の周りに回転したり、ある方向に平行に動かしたりして、空間図形を構成したり、逆に空間図形がどのような運動により構成されるかを分析する能力である。様々な空間図形の体積を区分求積法を用いて求める上からも、この操作能力は重要である。

④は、空間図形をある平面で切断する、あるいは逆に、切断面の形から空間図形を構成する能力である。例えば、地図の等高線やCTスキャン等を活用する上で、この操作能力は重要である。

⑤は、①と同様に、3次元の空間にある図形を、2次元の平面上に表現する能力であり、その図は、正面、真上、真横の3方向から見たものである。例えば、建築物や機械部品等の設計図をかいたり読み取ったりする上で、この操作能力は重要である。

①～⑤を学習する主な時期は、①が小6、②が小6・中1、③が中1である。平成10(1998)年版学習指導要領に基づくカリキュラムでは、④⑤は中1の教科書では扱われないことになったが、学習指導においては大いに取り上げていく必要がある。

エ. 空間図形への活用能力

これは、上で述べてきたア～ウの理解や能力に基づき、空間図形に関する様々な問題を解決することができるかどうかを観るために設けた観点である。活用場面としては、次の2つを挙げることができる。

① 空間図形の計量

② 空間図形の論証

必ずしも2つに類別されるわけではなく、例えば、空間図形の計量を通して、論証する活用場面もあれば、その逆もある。

なお、空間図形の計量というとき、例えば球の体積や表面積を公式を使って求める等の場面も

考えられるが、ここでは、それにとどまらず、空間における直線や平面に関する基本性質を使ったり、操作を活用しながら、様々な量を求める場面を考える。

①、②を学習する分野としては、主として中3の「三平方の定理」や、高校・数学I「図形と計量」、数学B「ベクトル」、数学III「積分」などがあげられる。

(2) 2つの実験授業の位置付け

(1)で述べた研究によって、筆者らはこれまでに、「空間図形の理解の様相をとらえるための観点」のア～エに関する中学生の実態について調査や授業を通して明らかにするとともに、「空間図形への活用能力」に関する水準を設定している(八田他, 2001; 熊倉他, 2002)。また、授業を通して、1つの平面を想定して思考を進めることの困難性や、問題の解決にふさわしい見取図をかきことの重要性(熊倉他, 2003; 八田他, 2004)等を指摘している。

ここでは、小学校6年生を対象にした立方体の見取図をかき実験授業(2005)と立体の投影的な見方に焦点を当てた実験授業(2006)を通して、空間図形に関する子供の理解の様相を明らかにし、立体の学習指導についての改善を提言する。

2つの授業の内の前者は、子どもが立方体の見取図を無地の紙の上に描く能力に関する授業であり、後者は、指導されていなくても子ども達がもっているとみられる立体の投影的な見方に関する授業である。2つの授業の詳細は、以下、それぞれ2項、3項で述べる。

2. 立方体の見取図をかき実験授業

(1) 実験授業のねらい

実験授業は、「直方体と立方体」の単元の指導後に実施した。「直方体と立方体」は全11時間で扱っていて、その概略は表1に示してある。

実験授業のねらいは、「小学生の見取図に対する理解の様相を明らかにし、見取図表現に関する学習指導への示唆を得ること」である。

表1 「直方体と立方体」の指導の概略

単元名：箱の形を調べよう－直方体と立方体－	
時	授業の実際～学習内容・活動～
1	<ul style="list-style-type: none"> ・教師用として、ア～カの立体模型と拡大した見取図、子ども用として見取図を配布。 [ア(立方体：大)、イ(三角柱)、ウ(直方体：正方形の面あり)、エ(直方体：大)、オ(直方体：小)、カ(立方体：小)] ・用語「見取図」について、「右のように、全体の形を見やすくかいた図を見取図といいます。」 ・実物の立体(立方体)と見取図を対応させ、6つの立体を2つの仲間に分ける。 ・面の数や形、辺の長さや数、頂点の数を「形を調べるときの目のつけどころ」としてまとめる。
2	<ul style="list-style-type: none"> ・ア、ウ、エ、オ、カの5つの立体を2つの仲間に分ける。 ・「立方体」「直方体」の定義、面の形の特徴、立方体の面は全部同じ形。
3	<ul style="list-style-type: none"> ・工作用紙で立方体、直方体を作る。
4	<ul style="list-style-type: none"> ・オ、カ、そして新たにキ(等脚ではない台形を底面とする四角柱)、ク(ひし形を底面とする四角柱)の4つの立体を提示し、2つの仲間に分ける。 ・「オカク」と「キ」に分けられる理由を考える。
5	<ul style="list-style-type: none"> ・「オカ」と「キク」の仲間分けの理由を考える。

	・面，辺，頂点の形や数，大きさの他，面と面の平行・垂直や，辺と辺の平行・垂直を，「形を調べるときの目のつけどころ」としてまとめる。
6	・直方体の見取図から長さが等しい辺の数や組，辺に平行・垂直な辺などを読みとる練習問題をする。
7	・ノートと鉛筆を使って，面と辺の平行，垂直について考える。
8	・立方体のいろいろな展開図を考える。
9	・立方体の展開図で，組み立てたときに重なり合う辺や平行になる面を考える。
10	・直方体の展開図を，切り開かずに考える。 ・工作用紙に展開図をかいて直方体を作る。
11	・練習問題（教科書・ドリル・問題集利用）

(2) 授業の実際

- ・日時 2005年2月17日(金)第4校時
- ・対象 太田市立宝泉南小6年，23名
- ・授業者 近藤裕 ・観察者 7名
- ・授業展開の概略

①立方体の見取図をかく。

「(立方体の模型を示して)立方体の見取図の上手なかき方をめざそう」と問いかけて，配布した紙(白紙)に見取図をかかせた。

全員の見取図を黒板に掲示し，立方体に見えるベスト5を話し合いで選んだ。

②(ベスト5に選ばれた)見取図が上手に見えるわけを全体で議論する。

(以下，Sは子どもの発言を表す)

S1：すべての辺の長さが同じになっている。

奥行きを示す辺の長さが，縦・横の辺の長さとは等しくないことを，コンパスを用いて全体で確認した。

S2：平行になっている(横の)4本の辺の長さが同じになっている。

他に平行な辺の組があるか問いかけた。2名の児童が，それぞれ他の2組の平行な4本の辺を指し示した。

縦と横の4本の辺に対して，奥行きを示す4本の辺は長さが短い平行であることを確認した。

S3：向かい合っている面の形が同じ。下にあるのは形に表すと正方形だけど，見取図では平行四辺形。

見取図上で，向かい合った面の合同を確認した。

S4：角度がそろうようにかく。

見取図上で， 90° にならないところがあることを，三角定規を使って確認した。

③見取図の特徴をまとめる。

見取図上で，保存される性質と保存されない性質をそれぞれ確認した。

(3) かいた見取図のタイプとその変化

① かいた見取図のタイプ

授業冒頭に子どもがかいた見取図を，表2に示す6つのタイプに分類した。

図1は，タイプA～Dの図の例である。これらの図は，表3に示した4つの特徴によって特徴づけられる。表3で，※印は，特徴Eに該当するものとしらないものが混在していることを示す。

表2 見取図のタイプ分け

	呼び名	形の特徴
A	立方体型	辺同士の平行性が保たれ、奥行きを示す辺の長さが正面の正方形の縦・横の辺の長さより短く調節されている。
B	直方体型	辺同士の平行性は保たれているが、奥行きを示す辺の長さが正面の正方形の縦・横の辺の長さと同じか、それより長い。
C	側面合同台形型	2つの側面が、互いに合同ではあるが(長方形でない)台形である。
D	側面非合同四角形型	2つの側面が、互いに合同でない四角形である。
E	その他	A, B, C, D, Fに該当しない図
F	未完成	図が完成していない。

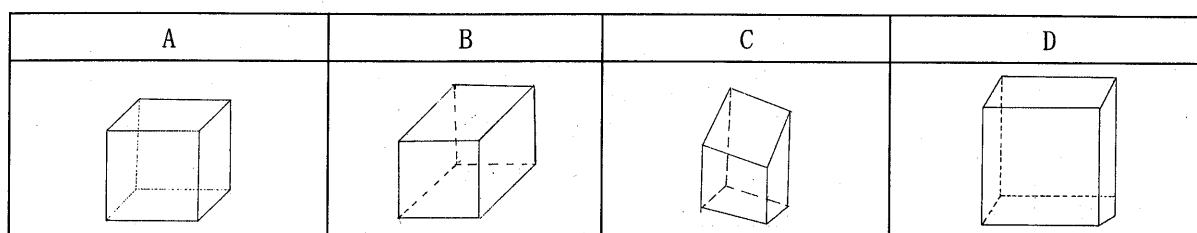


図1 タイプA~Dの図の例

表3 図の特徴と図のタイプの関係

			A	B	C	D
		特徴	立方体型	直方体型	側面合同台形型	側面非合同四角形型
平行性	ア	縦・横の辺が互いに平行になっている。	○	○	○	○
	イ	奥行きを示す左右2本の辺が2組とも平行になっている。	○	○	○	×
長さ	ウ	向かい合った辺の長さがいずれも等しい。	○	○	×	×
	エ	奥行きを示す辺の長さを短く調節しているところがある。	○	×	※	※

② かいた見取図の変化

1) 事後調査

実験授業を通して、子どもがかいた見取図がどのように変化したかをみるために、実験授業の1週間後に、次の①②の手順で事後調査を行った。

- ① 白紙に立方体の見取図をかく。(「事後」の見取図とよぶ)
- ② ①を提出させるのと引き換えに、実験授業で各児童がかいた見取図(「初めて」の見取図とよぶ)のコピーを渡し、それを赤ペンで修正させる。(「なおし」の見取図とよぶ)

2) 見取図の変化

「初めて」と「事後」の見取図のタイプの変化をまとめると、表4を得る。

また、一人ひとりの見取図の特徴の変化をまとめると、表5を得る。なお、表4で、例えば(1-1)は「初めて」で特徴に該当し「事後」でも該当しているもの、(0-1)は「初めて」では該当しな

かったが「事後」では該当しているものを意味する。

表4 見取図のタイプの変化(数値は人数)

		事後						計
		A	B	C	D	E	F	
初 め て	A: 立方体	4						4
	B: 直方体	2						2
	C: 台形	4						4
	D: 非合同	2	1		1			4
	E: その他	2		1				3
	F: 未完成	2						2
	計	16	1	1	1	0	0	19

表5 見取図の特徴の変化(数値は人数)

		(1-1)	(0-1)	(1-0)	(0-0)
平 行 長 さ	ア	13	6	0	0
	イ	10	8	0	1
	ウ	6	11	0	2
	エ	11	7	0	1

(4) 考察

1) 見取図を見ているだけでは“かく”ことができるようにはならない

表4に示したように、「初めて」の見取図で正しく立方体の見取図がかけていた子どもは4名しかいなかった。子ども達は、低学年の頃から教科書にかかれた多くの見取図を見てきており、それを「箱の形」などと呼んで学習を進めてきた。

また、実験授業前までの単元「立方体と直方体」の学習で、ほとんど毎回、教科書や教師が示す立方体の見取図を見て、それを「立方体」としてきた。

それにもかかわらず、自ら立方体の見取図をかくとなると、それを正しくかく子どもは非常に少ないことが明らかになった。印象的な例にT児の見取図がある。T児は算数も含め全教科で常にトップクラスの子ともである。そうであっても、見取図を“かく”ことは困難なことなのである。

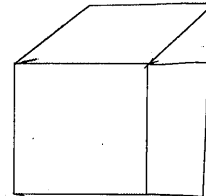


図2 T児の見取図

2) 「奥行きを示す辺の平行性」に対する意識

表4から、正しく立方体の見取図をかくことができる子どもが「事後」では16名と大幅に増えていることが分かる。

この要因は何なのか。表5を見ると、特徴ウ「向かい合った辺の長さが等しい」について、(0-1)が11名と多い。これを特徴イ「奥行きを示す左右2本の辺が2組とも平行になっている」との関連でみると、この11名は、次の2つのタイプに分けられる。

- ① 特徴イは(1-1)であり、特徴ウは(0-1)であった子ども→4人
- ② 特徴イは(0-1)であり、特徴ウも(0-1)であった子ども→7人

①は初めから「奥行きを示す辺の平行性」に対する意識のあった子ども、②は「事後」で初めて「奥行きを示す辺の平行性」を意識したといえることができる。

①の4名は、「事後」では、すでに意識していた「奥行きを示す左右の辺の平行性」に加えて、「奥行きを示す上下の辺の平行性」に注意を向け作図できるようになったと考えられる。その結果、向かい合った辺の長さは等しくなったのではないだろうか。

また、②の7名についても、まず彼らの意識は、「奥行きを示す左右・上下の辺の平行性」に向かい、その結果、向かい合った辺の長さが等しくなったと考える。

これらから「奥行きを示す辺の平行性」に対して意識がどれほど働くかが、正しい見取図をかくために重要であることが分かる。

3) 「奥行きを示す辺の長さ」に対する意識

立方体の見取図(斜投影)を正しくかくためには、奥行きを示す辺の長さを、正面の正方形の縦・横の辺より短くする必要があるが、表5から、半数以上(11名)の子どもが、「初めて」の図において、この特徴エに該当する図をかいていることが分かる。

この特徴を明確に意識してかいている子どももいれば、そうではない子どももいる。いずれにせよ、本授業を通して、多くの子どもがこれを明確に意識するようになったといえるであろう。

なお、特徴エの(0-1)の7名にとっては、特に本授業が、奥行きを示す辺の長さを短く調節する必要を認識する初めての機会になったと思われる。

4) 最後まで正しい見取図をかくことができなかった子ども

「事後」でも正しい見取図をかくことができなかった子どもが3名いた。3名がかいた図は、図3~5の通りである(「なおし」の図の中の太線は、子どもが赤ペンで修正した線を表している)。授業時に見取図の特徴を十分にとらえられなかった、あるいは、見取図をかくときにその特徴を意識できなかったなどがその理由であろう。具体的には、次のような点である。

H児は「奥行きを示す辺を短く調節する」ことに意識が向かなかつたため失敗している。それは「なおし」でも修正されていない。

Y児は、「事後」は「初めて」に比べるとかなりうまくかけている。しかし、「奥行きを示す辺の平行性」についての意識が甘いためにタイプCにとどまっている。

N児は「事後」において、「奥行きを示す辺を短く調節する」ことは完全に意識し、「奥行きを示す辺の平行性」もかなり意識している。しかし、「向かい合う辺の長さが等しいこと」については、角度や長さの微妙な誤差を修正できずに失敗している。

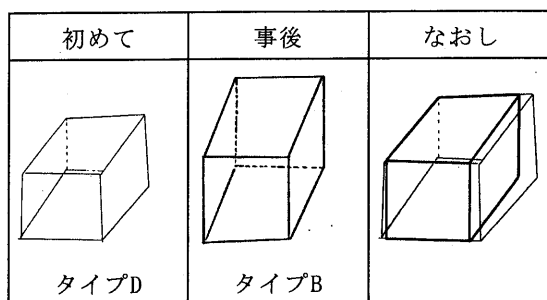


図3 H児の見取図

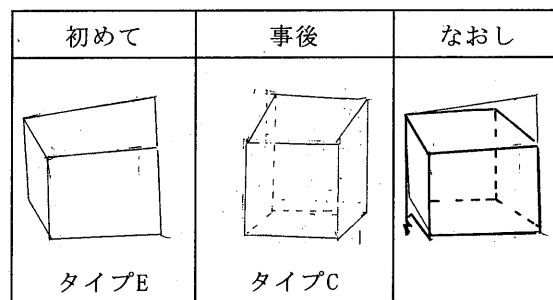


図4 Y児の見取図

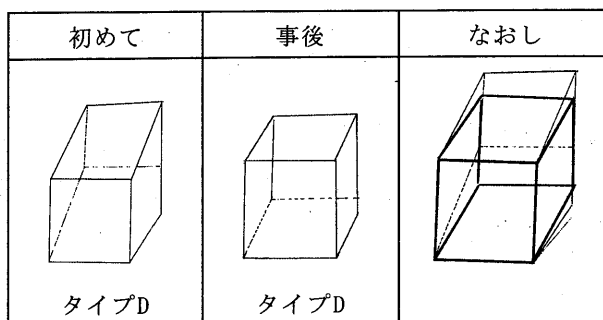


図5 N児の見取図

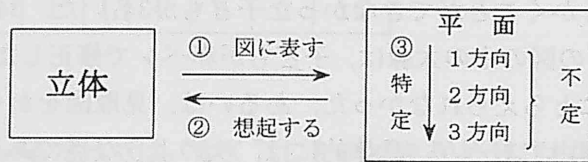
3. 立体の投影的な見方に関する実験授業

(1) 「立体の投影的な見方」のとりえ方

本研究では、「立体の投影的な見方ができる」ということを、次のようにとらえている。なお、下記の①、②は、1. (2)で述べた「空間図形の理解の様相をとらえるための観点」の中の「操作能力」に関連する。

「立体の投影的な見方ができる」とは

- ① 立体について、正面、上、横それぞれの方向から見た図をかきすることができる。
- ② 立体を正面、上、横のいずれか1方向、あるいは複数の方向から見た図から、それにあてはまる立体をいろいろと想起することができる。
- ③ 1方向や2方向から見た図だけでは 立体は一意に定まらないこと、また、見る方向を増やして図を得ると立体がよりの確に特定されることを理解する。
- ④ ①～③を使って問題を解決することができる。



(2) 実験授業のねらい

6年生を対象とした「直方体と立方体」の指導を、ほぼ教科書と同様の内容について、立体の分類や作製を重視して10時間で行った。その概略は、2.の表1に示した指導の第1～10時とほぼ同様の指導展開である。実験授業は、それに続く第11時として、次のことをねらいとして行った。

・直方体と立方体を組み合わせてできた立体を投影的に見たり、その結果を図に表したりする授業を通して、「立体の投影的な見方」に関する子どもの理解の様相を明らかにし、学習指導への示唆を得ること。

(3) 実験授業の計画と位置づけ

本授業は、次の①～④のように計画された。

なお、子どもたちは、前時まで各自で工作用紙で作成した直方体(5cm×10cm×15cm)2個、立方体(一辺5cm)2個を、手元に用意している。

① 「立体を正面から見る」ことの意味を知る。

立方体、直方体を「正面から見る」と、それぞれ正方形、長方形が見えることに気づかせる。ここで、5cm×10cmの長方形は、直方体の1面(5cm×10cm)と見ても、立方体の面(5cm×5cm)を2つ並べたものと見てもよいことを確認する。

② 順に提示される1方向、2方向、3方向から見た図をもとに立体を想像し作る。

(提示した図)

真正面から見た図(図6)、真上から見た図(図7)、右から見た図(図8)を順に提示して、段ボール箱の中に隠された立体(図9)を想像し、それを、各自が持っている立体を操作し組み合わせて作る。



図6



図7

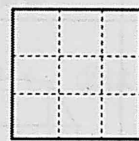


図8

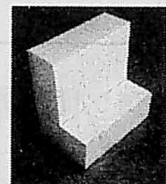


図9

②-1 正面から見た図から立体を想像し作る。

②-2 正面から見た図と、上から見た図から、立体を想像し作る。

②-3 3方向から見た図から立体を想像し作る。

③ 与えられた見取図を見て、3方向から見た図をかく。

図10の見取図を示し、その図で表される立体をかく。ワークシートには、正面、上、右から見た図それぞれをかくための方眼が入っている。

④ 正面から見た図を見て立体を想像する。

正面から見た図を示し、いろいろな立体が入った積み木箱の中から、あてはまる立体を取り出させる。

上記の②と④の活動は、(1)で述べた「立体の投影的な見方ができる」の②、③に相当する。また、①と③の活動は、「立体の投影的な見方ができる」の①に相当する。この場合、見取図と実物の立体を対応させ、また、視点や対象を移動する必要がある。これは「空間図形の理解の様相をとらえるための観点」の中の「操作能力」に関する内容である。

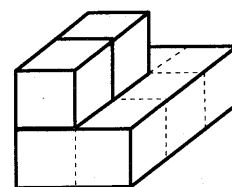


図10

(4) 授業の実際とその考察

- ・日時 2005年11月25日(金) 第4, 5校時
- ・対象 太田市立宝泉南小学校6年生, 27名
- ・授業者 近藤裕 ・観察者 6名
- ・授業展開の概略

授業は、ほぼ前項で示した計画①～④の通りに展開した。以下、その実際について、子どもの発言や活動を中心に述べる。

①「立体を正面から見る」ことの意味を知る

授業の冒頭、教師が立体を手に取り、それを自分の目の前で眺めて見せて、立体を「正面から見る」ことの意味の理解を図った。

T1: 立方体を真正面から見ると何が見えるのでしょうか?

S1: わからない

S1: (目の前に移動させた立方体をTに見せられると)四角形だ。

他の子どもたちも、それが「正方形」に見えることを認めた。

T2: (長方形を示して) 正面から見るとこんな形に見えました。何を見ているんでしょうね?

S2: 即座に直方体の1面を示した。

S3: 立方体を2つ並べた形を示した。

- ・S1 と他の子どもたちの発言より、子どもたちは、立体を1方向から見ると平面図形が見えることをとらえたと考えられる。
- ・2つの立方体を並べると境目の線が現れるが、教師が示した長方形にはその線は描かれていない。境目の線にはこだわらず「外枠の輪郭」としてとらえることにするという前提を、S3の発言によって、多くの子どもが把握したものと考えられる。

②-1 正面から見た図から立体を想像し作る

T3: 箱の中にある立体が隠されています。この立体を当てて下さい。その立体を正面から見ると、(図11を示しながら)図のまわりの縁取りがちょうどアルファベットのLのような形をしています。

S4: 直方体を2つ組み合わせた図11を作った。

S5: こう見ると真正面が見えて、(図11のL字部分の)4つの正方形が6つの正方形に見えるので違います。

教師は、子どもたちにしばらく考えさせ、立体をずらしてもよいことを確認した。子どもたちは図12のような多様な立体を作った。また、2つの立体を離したり、2つの立体を接せずに作るという子どもも現れた。

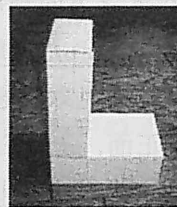


図11

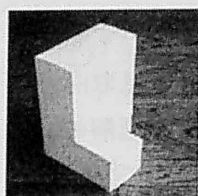


図 12-A

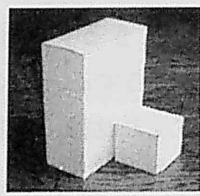


図 12-B

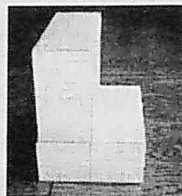


図 12-C

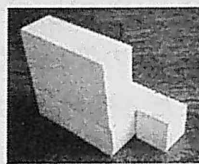


図 12-D

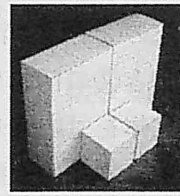


図 12-E

- ・ S4 は算数が非常に苦手であるが、「正面から見た図」から考えられる立体を直観的に認識できたと考えられる。したがって、多くの小学生にとって、「立体を1方向から見る」「1方向から見た図をもとに立体を想像する」ことは困難ではないと考えられる。
- ・ S5 の発言をきっかけに、子どもたちが作る立体は、正方形の個数にも注意を向けたものが多くなった。境目の線をもとに正方形の個数を考えると隠された立体を想像できることが、多くの子どもに認識されたといえる。
- ・ 子どもたちが多様な立体を作ったことから、1方向から見た図だけでは立体は一つに定まらないことを、多くの子どもたちは理解していたと考えられる。

②-2 正面から見た図と、上から見た図から、立体を想像し作る

T5: (図7を示して)隠された立体は真上から見たらこんな図です。はい、あててみよう。

子どもたちは、一斉に「えー!」という声をあげ、すぐに図6と図7に合うような立体を作ろうと試行錯誤を始め、図13のような立体を作った。さらに、正方形の1マスを単位として動かすのではなく「ほんの少しずらして」作る子どもも現れた。



図 13-A

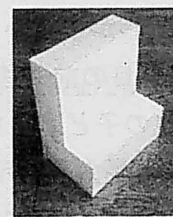


図 13-B

教師は2方向から見た図だけでは立体は決まらないことを確認した。

- ・ 図6を見て自分で作った立体を真上から見たら図7のようではなかった子どもは、この段階で、2方向からの図だけでは立体は一つに決まらないことに気付いたと考えられる。

②-3 3方向から見た図から立体を想像し作る

S6: 右から見た図があればいいんだけど。

教師はこの機を逃さず、右から見た図(図8)を示した。多くの子どもが、図8が示されるとすぐに正解の立体を手元に作り上げた。

- ・ 子どもが「右から見た図」を自ら求めたことは興味深い。その発言の背景には、(今回の課題については)「正面、真上、そして右から見た図によって立体が1つに決定する」という、子どもの直観的な理解があったと考えられる。

③-1 見取図を見て正面から見た図を確認する

T6：こんどは逆をやってみましょう（図10の見取図を示す）。

教師は、はじめは、手元の立体を操作せずにかくよう指示し、大方がかけた時点で、手元の立体でその立体を作って各自の図が正しいかどうかを確かめさせた。S7(S4と同じ)：正しく「正面から見た図」(図14)をかいた。

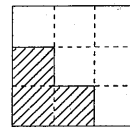


図14

③-2 見取図を見て右から見た図を確認する

S8：「右から見た図」(図15)をかく。

教師はS8にその立体を作らせて確認したら、右にあった横長の面を縦長に起こしながら自分の目の前に動かしてかいたことがわかった。

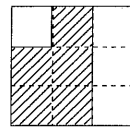


図15

T7：今回は置いたら動かさないで右から見ることにしよう。

S9：右から見た図(図16)を正しくかく。

・教師の指示は「右から見た図をかこう」であり、それ以上の条件は付けていない。普通「投影図」は、対象を水平に保ちながら、90°回転させて(あるいは視点を移動させて)見える図をかくが、S8がかいた図15は、普段の生活で使っている「右から見る」ことに従ってかかれたともいえる。

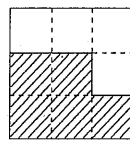


図16

③-3 見取図を見て上から見た図を確認する

S10：上から見た図(図17)を正しくかく。

T8：上の小さい直方体(立体2つがつながっている部分のこと)はくっついているんだけど、どうなっているのかな？ とってしまった図でいいのかな？

S11：(とってしまった図で)いい。

T9：真上から見るとどうなる？

S12：消える。

S13：隠れる。

S14 (S4と同じ)：カモフラージュ。

S15：とけ込む。

・S12～15の発言からは、「2つの立方体を取り除く」のではなく、2つの立方体は実際はそこにあるのだけれども、それが下の大きな長方形の面に含まれるのだと主張していると受け取れる。本時の投影的な見方の総まとめが、こうした子どもの言葉によってなされた感があった。

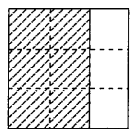


図17

④ 真正面から見た図を見て立体を想像する

T10：(図18を示して)真正面から、ちょうどこんな形をしていました。この立体あてて。

S16：直方体

教師は積み木箱に入っていた大きな直方体、小さな直方体を取り出して面の形を確認した。

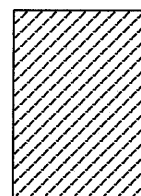


図18

T11：他に長方形にあう立体はないですか？

S17：(S5と同じ) 三角柱。

教師が三角柱を取り出し、長方形の面を確かめさせると、多くの子どもは納得した。

S18：円柱。

T12：(円柱を取り出し)これ長方形に見えますか？

S19：うーん？見えそうで見えないよ。

S20：（六角柱，五角柱を取り出して）これもそうだ。

多くの子どもは「うーん？」と納得しない様子であった。

- ・各自が手元に持っている立方体と直方体を組み合わせた立体の形については，本時前半の課題の解決を通して「とけ込む」ことについての理解を図ることができたが，他の一般の立体についての理解は不十分であると考えられる。
- ・子どもの理解は，円柱や六角柱などについて「どう見れば長方形に見えるのかが分からない」子どもや，「（円柱のように）曲面になっているときや（六角柱のように）長方形内に辺が見えるときは，長方形ではない」と考えている子どもなど，さまざまであったと考えられる。今後，こうした点の理解を図るには，本時では喩えとして扱った影絵を実際に取り上げたり，「(図13のような)長方形の穴をぴったり通すことができる立体はどれか」などの課題を扱うことが考えられる。

(5) 本授業での「立体の投影的な見方」に関する子どもの理解の様相

本授業の結果から，「立体の投影的な見方」に関する子どもの理解の様相について，次のことが指摘できる。

1) 立体を1方向から見ると平面図形が見えることについては，よく理解されていた。また，直方体を組み合わせた立体の見取図をもとにして，その立体を3方向のそれぞれから見た図をかくことも，よく行われていた。

2) その立体が（直方体を組み合わせた）複合立体であるにもかかわらず，1方向，2方向，3方向から見た図から立体を想像することは，対象学級の子どもたちにとって，十分理解できる内容であったと考えられる。特に，手元の立体を操作して立体を組み立てながら考えるという活動が，本時での子どもの活動を豊かにしている。

3) 投影的な見方に関して，1方向や2方向から見た図だけでは立体は一意に決まらないことに，また，より多くの方向から見た情報が得られるほどの確に立体を想像できることに気付いていた。

4) 上記1)～3)で述べたようなよい理解を示しているにもかかわらず，正面から見た図（長方形）をもとにして，円柱や五角柱・六角柱を想像することは難しいように見受けられた。円柱や六角柱を真正面から見ると，底面の辺に当たる部分がそれぞれ曲線や折れ線として見えると考える子どももいたであろう。「正面から見る」ということの意味をよりの確にとらえさせることが重要である。

4. 立体の学習指導への示唆

今回実施した2つの実験授業から，空間図形の学習指導について，次のような示唆が得られた。

(1) 立方体の見取図をかくことに関して

立方体の見取図をかく実験授業を通して，小学校4年から多くの見取図を見てきた子どもでも，自らそれを“正しくかく”ことのできる子どもは非常に少ないことが明らかになった。

また，正しい見取図をかくためには，以下の点が重要であることが明らかになった。

- ・「見取図においては，辺の平行は保たれる」ことを理解すること。
- ・特に，立方体・直方体の見取図については「奥行きを示す辺の平行性を保つこと」に意識を向けてかくようにすること。

・立方体の見取図を正しくかくためには、「辺の等長は保たれない」ことを理解すること。

これらのことから、見取図に対する理解を図っていくためには、立体を見取図に表現すると「立体のもつ性質のうち、見取図上で保たれるものと保たれないものがあること」の理解をねらった授業を設定することが重要である。したがって、小学校高学年において立体を扱う際には、見取図で表現したり、見取図から立体を想像するなどの操作活動を通して立体の見方を豊かにしていく必要がある。

(2) 立体の投影的な見方に関して

立体の投影的な見方に焦点をあてた授業で取り上げた立体は、直方体を組み合わせた複合立体であったにもかかわらず、前項の(5)の1)~3)で述べたように、子どもたちはよい理解を示した。小学校で「立体の投影的な見方」に関する指導を行う場合、従来のように単純な立体を中心に真正面から見た図、真上から見た図を扱うだけでなく、子どもの追究意欲が喚起されるような立体を取り上げ、具体的操作活動を通して学習を展開することが重要である。空間図形の学習を進める上で、また、社会生活を営む上で、投影の考えは重要であり、小学校算数科で「立体の投影的な見方」に関する指導を行うことには意義があり、また、よい成果が得られるものと期待される。

<引用・参考文献>

赤井利行(1996)「見取図の活用を通じた空間概念の育成-小学校高学年の実践-」『第 29 回数学教育論文発表会論文集』。

赤井利行(2000)『子どもの活動が創り出す図形学習』,明治図書。

石口彰(2006)『視覚』,新曜社。

影山和也(2000)「空間的思考の階層性に関する考察」『全国数学教育学会誌』第 6 巻,pp.163-173。

国本景亀(1995)「空間直観力育成のための一提案」『第 28 回本論文発表会論文集』。

熊倉啓之・久保良宏・八田弘恵・国宗進(2000)「空間図形の理解に関する研究」『第 33 回数学教育論文発表会論文集』。

熊倉啓之・中西知真紀・八田弘恵・国宗進(2002,2003)「空間図形についての理解に関する研究」『第 35 回,第 36 回数学教育論文発表会論文集』。

久米庸子・村上一三(1997)「立体図形指導における見取図指導のあり方についての一考察」『第 30 回数学教育論文発表会論文集』。

永江誠司(1999)『脳と認知の心理学』,ブレン出版。

狭間節子代表(2000)「数学教育における空間思考の育成に関する研究」科研成果報告書。

狭間節子編著(2002)『こうすれば空間図形の学習は変わる』,明治図書。

八田弘恵・熊倉啓之・久保良宏・国宗進(2001)「空間図形の活用能力に関する研究」『第 34 回数学教育論文発表会論文集』。

八田弘恵・近藤裕・熊倉啓之・国宗進(2004,2005)「空間図形についての理解に関する研究」『第 37 回,第 38 回数学教育論文発表会論文集』。

ロバート・L・ソルツ, 鈴木・小林訳(1997)『脳は絵をどのように理解するか』,新曜社。

第5章 中1での空間図形の指導—問題群による構成—

この章では、中1での空間図形の指導について、いくつかの「問題」を用意して、その解決を通して単元の内容を学習するという方法による実践を報告する。

1. 問題の所在

現在、中学校数学科での図形指導は、中1では直観幾何、中2からは論証幾何によって行われている。中1の図形指導は、小学校における学習と中2以降における学習との間にあって、的確に行われているとは言い難いように感じられる。その理由として、主に以下の3点をあげることができる。

- 1) 小学校での学習をまとめ中学校での図形学習についての道具立てを揃える必要性から、図形に関する基本的な用語や記号の羅列になりがちである。
- 2) 平面図形と空間図形の内容が個々別々に扱われがちである。
- 3) 図形に具体的操作活動によって働きかけ、その理解を深めるという学習の過程が取られていない場合が多い。

単元を構成する上でこれらの問題点の解消を目指すことは、中学校での図形指導の改善をねらいとする本研究にとって大きな課題である。

そこでここでは、中1での平面図形・空間図形の学習指導について、毎時間の「問題」の系列を作成し、その解決を通して中1で獲得すべき概念や性質、及び育成が期待される思考力などを明示して、「問題群による単元構成」としてとらえる試みを紹介する。すなわち、生徒が具体的な活動を行う中で見つけ出したり気がついたりしたことを基にして、数学の学習内容を確認していくという流れを単元を通して繰り返し行っていくことによって、中1で学習する内容をすべて網羅していく単元構成を目指すことである。

2. 本実践の位置付け

本実践は、2004年度に松元新一郎が東京学芸大学附属大泉中学校において行った実践を元にして書き起こしている。なお、実践の一部に、附属校に配属された教育実習生の授業を含んでいる。

4月当初から、「正負の数」「文字と式」「方程式（計算まで）」を行い、「比例」の単元を後回しにして、「図形領域」の指導に入った。教育実習の関係で、途中、方程式の応用が入り込んでいる。図形領域に関する指導内容・順序は、教科書のそれにこだわらず、「平面図形」「空間図形」を織り交ぜて指導した。

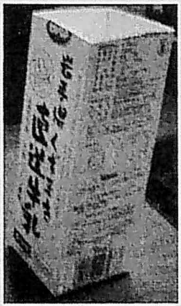

3. 取り上げた「問題群」と獲得される「概念や性質」「見方や表現」

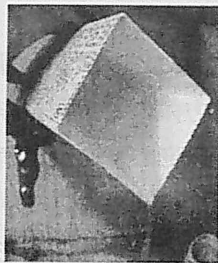
まず、取り上げた「問題」を列挙する。以下で、③～⑧の前半までは教育実習生による授業である。

- ① 1ℓ入り牛乳パックは、1ℓ入っているの？
- ② 1ℓ入り牛乳パックを斜めに切って、測りとれる体積を考えよう。
- ③ 大泉学園駅から校門までどれくらいの速さで登校しているか。
- ④ 埼玉スーパーアリーナで、歌手が登場する2カ所を、同じようにみることができる場所を探そう。
- ⑤ 直線に対して垂線を作図しよう。

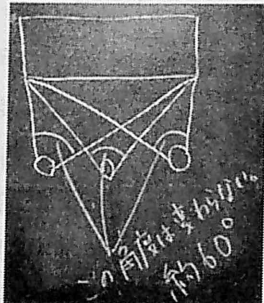
- ⑥ 凧をつくろう。
- ⑦ 部屋にピッタリな棚を作ろう。
- ⑧ 立方体の対角線を作図しよう。
- ⑨ 三角形の、2つの角の二等分線の交点、2つの辺の垂直二等分線の交点を探してみよう。
- ⑩ 円周上に点を取り、ある弧に対する角を測るとどんなことがいえそうか。
- ⑪ 円に内接する四角形の性質、生徒のノート
- ⑫ 投影して考える（平面図）円周角のまでをぴったり撮影する場所を探そう。
- ⑬ 円の接線と弦とで作る角、生徒のノート
- ⑭ 全身を映すのに必要な鏡の大きさを考えよう。グループ活動（実験・実測）
- ⑮ 鏡の反射を利用して、校舎の高さを求めよう。グループ活動（実験・実測）、レポート課題
- ⑯ 顔を写すのに必要な鏡の大きさを考えよう。グループ活動（実験・実測）

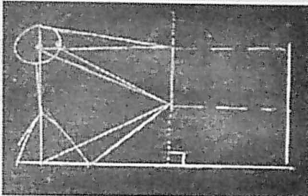

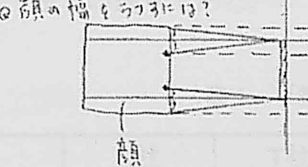

これらの「問題群」を取り上げることによって獲得される「概念や性質」及び「見方や表現」は、次の表の通りである。

学習タイトル (問題群)	学習内容	獲得される概念や性質	獲得される見方や表現
① 1ℓ入り牛乳パックは、1ℓ入っているの？	<ul style="list-style-type: none"> ・牛乳パックの3辺を測って体積(容積)を求めると1ℓにならない。その不思議を探る。 	<ul style="list-style-type: none"> ・体積・容積の換算 ・コンパス・定規の使い方、直方体の体積、円の面積などの確認 ・正多角形の定義 ・正六角形の作り方とその理由 ・等周原理(周の長さが一定であるとき、円が最も面積最大) 	<ul style="list-style-type: none"> ・底面に平行な平面で切断したときの形を想像する(空間把握)。 ・等周であるとき、四角形、五角形、六角形、…と辺の数を増やしていくと面積が増える(帰納的推論)。 ・円の半径で円周を区切っていった頂点を結びと正六角形になる理由を、<u>既知の正三角形の性質から説明する</u>。
② 1ℓ入り牛乳パックを斜めに切って、測りとれる体積を考えよう。	<ul style="list-style-type: none"> ・斜めに切った牛乳パックを使って、柱体、錐体の体積を求める。 	<ul style="list-style-type: none"> ・角柱、角錐の概念 ・角柱、角錐の体積 ・文字を使った公式 $V = S h$、$V = 1/3 S h$ ・比の概念(一は一の1/3) ・切断面の図形 ・円柱、角柱の体積 ・文字を使った公式 $S = \pi r^2$、$V = \pi r^2 h$ (アルファベット順ではない理由。言葉の式との対応) 	<ul style="list-style-type: none"> ・多様な体積の求め方。式を読みとり、他者の考えを見抜く(分類・整理)。 ・容器を斜めにした状態で水が入っている。6杯ですりきりになることから、角錐の体積の求め方を導く(実験結果から、錐体の体積を導く。操作活動から帰納的推論→一般化)。

		<ul style="list-style-type: none"> 平面と直線との垂直条件 (垂線定理) ねじれの位置 (表面積は、関数の単元で扱う) 	
③大泉学園駅から校門までどれくらいの速さで登校しているか。	<ul style="list-style-type: none"> 地図を使って、道のりを計算し、登校にかかる時間(分)から、分速を求め。(早歩き、友達と並んで歩く、の2通り) この後、途中で鍵を落としたという場面、その場所を特定する問題場面から、方程式を使って解く授業を実施。 	<ul style="list-style-type: none"> 地図のよみ 速さ、時間、距離の関係 縮尺と比の関係(縮尺は、比の値であること) 	<ul style="list-style-type: none"> 道のりを線分で近似すること。 縮尺と長さは比例関係にあること。
④埼玉スーパーアリーナで、歌手が登場する2カ所を、同じようにみることができる場所を探そう。		<ul style="list-style-type: none"> 2点から等距離にある点の集合 作図の意味 線分の垂直二等分線 直線と線分の違い 線対称の意識の高まり 	<ul style="list-style-type: none"> ある条件をみたす点の集合が、直線や曲線になること。
⑤直線に対して垂線を作図しよう。	<ul style="list-style-type: none"> (1) 直線l上の点Oを通る場合 (2) 直線l上にない点Oを通る場合 	<ul style="list-style-type: none"> 垂線の作図 線対称の意識の高まり 	<ul style="list-style-type: none"> 垂線を引くためには、既習の線分の垂直二等分線を利用できないかどうか考える。 条件を満たす直線を引くには、2点あれば十分であること。
⑥凧をつくらう。	<ul style="list-style-type: none"> 長方形の対角線で切って、裏返して対角線同士をつけると凧ができる。 強度を上げるために、1枚の紙から同じような凧を切り出すにはどうすればよいかを考える。 	<ul style="list-style-type: none"> 線対称の意識 折り返す(裏返す)という行為 角の二等分線 	<ul style="list-style-type: none"> きれいな形、美しい形の中に対称性があること。

<p>⑦部屋にピッタリな棚を作ろう。</p>	<p>・普通壁と壁のなす角は 90° だが、そうではない角度のとき、どのように棚を作ったらよいかを考える。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ 2面角 ・ 平行な2つの平面に交わる平面でできる2つの交線の関係 ・ 2つの平面の位置関係 ・ 垂線の作図の利用 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 平面と平面との交わり方を表す方法を考える。
<p>⑧立方体の対角線を作図しよう。</p>	<p>工作用紙で作成した立方体をみながら考える。立方体の1辺が与えられたときの対角線を平面上に作図する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ 立方体(空間図形)の対角線の定義 ・ 空間内(立方体)における「直線と直線」「直線と平面」「平面と平面」の関係 ・ 空間にある辺(対角線)の長さを平面に落とす作図 ・ 垂線の作図の利用 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 見取図では、必ずしも辺の長さが実長ではないこと。 ・ 立方体の対角線の長さはすべて等しいことを立方体の回転によって説明したり、合同な直角三角形があることを見いだしたりして説明する。 ・ 対角線を含んだ切断面を意識する。
<p>⑨三角形の、2つの角の二等分線の交点、2つの辺の垂直二等分線の交点を探してみよう。</p>		<ul style="list-style-type: none"> ・ 円の接線、接点 ・ 三角形の内接円、内心 ・ 三角形の外接円、外心 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 推移律 ($A=B, B=C$ ならば、$A=C$) ・ 2つの角の二等分線の交点と、最後の頂点とを結ぶと、角が二等分されること。 ・ 角の二等分線の性質(辺までの距離は等しい)から、三角形の内接円がかけること。 ・ 2辺の垂直二等分線の交点と、3頂点とを結ぶと、すべて等しいことを説明する。このことから、三角形の外接円がかけること。 ・ 順序立てて説明すること。
<p>⑩円周上に点を取り、ある弧に対する角を測るとどんなことがいえそうか。</p>	<p>作図⇨実測(分度器)⇨性質の発見⇨具体的な角度で説明⇨一般化⇨中心角が 180° を超えても成り立つこと (ここでは、場合分けはしない)</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ 弦、弧、円周角、中心角 ・ 三角形の外角の性質(外角の定義) ・ 二等辺三角形の性質 ・ 三角形の内角の和は 180° ・ 四角形の内角の和は 360° ・ 円周角の定理 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 帰納的推論。 ・ 演繹的推論。 ・ 変化しても変わらないものがあること。 ・ ある弧に対する円周角は一定で中心角の半分である理由を、<u>既知の三角形・二等辺三角形・四角形の性質から説明する</u>(体系づくりへの関

			心)。 ・ 中心角が 180° 以上でも成り立つことの確認。
⑪円に内接する四角形の性質、 生徒のノート	作図⇨具体的な数値の計算から性質の発見⇨具体的な角度で説明⇨一般化	・ 円に内接する四角形の対角の和は 180°	・ <u>円周角の定理を既知として、対角の和が 180° であることを説明する</u> (体系づくりへの関心)。 ・ 変化しても変わらないものがあること。
<p>期末テスト (図形分野について)</p> <p>三角柱・三角錐の体積、三角形の外接円・内接円の作図、立方体の対角線の作図、円周角の定理・内接四角形の性質が成り立つことの説明、円周角の定理・内接四角形を使って角度を求める。</p>			
⑫投影して考える (平面図) 円周角のまできをぴったり撮影する場所を探そう。	<p>視野を角度で捉え、デジタルの視野は (ズーム機能を使わないと) 一定であることから、角度が一定になる図をかく。</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 空間にあるものを平面に投影して考える (平面図) ・ 円周角の定理の逆 ・ 点の集合 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 解決に必要な図を自分でかくこと (図を理想化・抽象化すること)。 ・ 見えない線を意識する。 ・ 自分 (観測者) から離れて、第3者的にみる (メタ認知)。 ・ 見込む角が一定である点の集合が円 (の一部) であることを帰納的に導く。 ・ 見込む角が一定である点の集合が円であることを、角の大小を使って説明する。
⑬円の接線と弦とで作る角、 生徒のノート	作図⇨実測 (分度器) ⇨性質の発見⇨具体的な角度で説明⇨一般化⇨場合分け	<ul style="list-style-type: none"> ・ 接線の作図 (垂線の作図の利用) ・ 接弦定理 	<ul style="list-style-type: none"> ・ <u>二等辺三角形の性質、円周角の定理の定理を既知として、円の接線と弦とで作る角がその弦の円周角と等しいことを説明する</u> (体系づくりへの関心)。 ・ 場合分けの必要性。

<p>⑭全身を映すのに必要な鏡の大きさを考えよう。</p>		<ul style="list-style-type: none"> 空間にあるものを平面に投影して考える (立面図) 理科の知識 (概念) の確認 入射角・反射角は等しい、像 線対称 	<ul style="list-style-type: none"> 解決に必要な図を自分でかくこと (図を理想化・抽象化すること)。 見えない線を意識する。 自分 (観測者) から離れて、第3者的にみる (メタ認知)。 変化しても変わらない (鏡までの距離と必要な鏡の大きさ)。
<p>⑮鏡の反射を利用して、校舎の高さを求めよう。</p>		<ul style="list-style-type: none"> 空間にあるものを平面に投影して考える (立面図) 縮図 比の計算 相似、合同の概念 線対称 	<ul style="list-style-type: none"> 解決に必要な図を自分でかくこと (図を理想化・抽象化すること)。 見えない線を意識する。 自分 (観測者) から離れて、第3者的にみる (メタ認知)。 変化すると変わる (身長が高い人になると、鏡の位置を変える必要がある)。
<p>⑯顔を写すのに必要な鏡の大きさを考えよう。</p>	<p>◎顔の幅とつらみには?</p>  <p>「左耳を左目、右耳を右目」から、「左耳を右目、右耳を左目」への視点の変更</p> 	<ul style="list-style-type: none"> 空間にあるものを平面に投影して考える (平面図) 線対称 	<ul style="list-style-type: none"> 解決に必要な図を自分でかくこと (図を理想化・抽象化すること)。 見えない線を意識する。 自分 (観測者) から離れて、第3者的にみる (メタ認知)。 変化すると変わる (寄り目になると必要な鏡の幅は変わる)。

4. 今後の課題

今回の実践では、回転体、展開図、正多面体などを扱うことができなかった。「問題群による単元構成」の場合、生徒が取り組む「問題」にどのような数学的内容が包含されているかを常に念頭に置いて教材研究を行い、単元の指導計画を立てることが重要である。その一方で、今回のような「問題群による単元構成」に関する実践の可能性については、大いに手応えが感じられた。

今回の実践を基にして、「平面図形」や「空間図形」の単元について、問題群によるモデルプランを作成し、その有効性を検討することが今後の課題である。その際、指導時間数についても吟味し、過重な計画にならないよう配慮する必要がある。

<引用・参考文献>

松元新一郎(2000)「数学的モデルをつくることを通して数学の世界をひろげていく活動—全身が映る鏡の大きさを考える—」『日本数学教育学会誌』第 82 巻第 1 号. pp.10-17.

松元新一郎(2001)「数学的モデルをつくり数学の世界をひろげていく活動—デジタルカメラを使って撮影位置を特定しよう—」『東京学芸大学教育学部附属大泉中学校研究集録』第 42 号. pp. 23-34.

第6章 図形の相似の指導

1. 分析のねらい

平成10(1998)年版の学習指導要領では、図形の相似の学習は中2から中3へ移行された。また、それまで小学校第6学年で扱っていた「縮図・拡大図」は、中3に移行した相似の内容と合わせて指導することになった。この章では、中学校数学教科書における図形の相似に関する記述の内容や順序を分析し、今後の相似の指導の改善、及び、小中高の接続について示唆を得ることをねらいとする。

2. 分析の対象と枠組み

分析の対象は、現在発行されている中学校教科書(6社)の教科書で、平成14年度使用教科書である。調査・考察するページは、相似の単元内とし、教科書巻末にある課題学習的・トピック的な内容は含まないものとする。

分析の枠組みとしては、以下の観点を設け、量的、質的に調べて分析する。

(1) 量的分析 ア. 単元のページ数、イ. 例題・問の数、ウ. 定理の数、

(2) 質的分析

ア. 指導順序

イ. 単元内の扱い A. 三角形の相似条件までの扱い、B. 相似条件を使った論証、

C. 平行線の性質と条件、D. 中点連結定理とその利用、E. 相似の利用

3. 分析の結果と考察

(1) 量的分析

分析の対象ページは、前項で述べたように、相似の単元内とし、教科書巻末にある課題学習的・トピック的な内容は含まないものとした。3年教科書の総ページ数、相似の単元のページ数、例題・問の数、定理の数は、表1の通りである。

表1 「相似」単元 量的分析

	K社	T社	G社	S社	O社	D社
3年総ページ数	175	195	177	179	155	195
「相似」ページ数	32	28	26	28	30	30
例題の数	10	5	8	3	11	1
問の数	53	47	46	56	63	71
定理の数	3	4	3	4	4	3

単元のページ数については、O社だけがB4版、残りの5社がA5版のために単純には比較できないが、相似の単元にどの教科書も30ページ前後を割いている。

例題・問の数については、D社は学習活動形式の記述のため、「例」「例題」の用語が見あたらないが、板書形式や計算の説明や証明がすべてかかっているものは例題とみなして数えた。また、問の数は、生徒が問題を解く(考える)ものであれば、すべて大問1つとして数えた。例題の数、問の数と

もに、教科書によってかなり違うことがわかる。

定理の数が4つである教科書が3社ある。定理の数が3つである教科書3社のうち、2社は「平行線と比の定理」を定理としていないため、あとの1社は中点連結定理を2年生で学習済みのためである。定理の出ってくる順番は、質的分析で触れる。

(2) 質的分析

① 指導順序

相似の単元の指導順序をまとめると、表2を得る。教科書によって指導順序が異なることわかる。

表2 「相似」の単元の指導順序

	K社	T社	G社	S社	O社	D社
拡大・縮小	13	7の導入	1	1	1	1
縮図・拡大図	14	1	2	2	2	9の中で
相似の定義	1	2	3	3	3	2
比の値	2	なし	2年で学習	2年で学習	8	5
比の性質(内項の積=外項の積)	3	6	2年で学習	2年で学習	9	6
相似比	4	5	5	6	6	4
相似の記号	5	3	4	4	4	3
相似の位置	なし	4	7	5	5	7
三角形の相似条件	6	7	6	7	7	8
平行ならば $AP:AB=AQ:AC=PQ:BC$	7	9	8	9	11	10
平行ならば $AP:PB=AQ:QC$	8	11	9	10	12	11
$AP:AB=AQ:AC=PQ:BC$ ならば平行	10	10	11	11	13	12
$AP:PB=AQ:QC$ ならば平行	11	12	12	12	14	13
平行線と線分の比	9	14	10	14	15	14
中点連結定理	12	13	13	13	16	2年で学習
現実世界への利用	15	(7)8	14	8	10	9

<現状と問題点1>

「縮図・拡大図」を扱う位置が教科書によって異なっている。小学校で指導すべきか、相似の単元内の「拡大・縮小」のすぐ後か、それとも、現実世界の利用のところか。

平成10年版の学習指導要領では、小学校で「縮図・拡大図」を扱わなくなったこと、また、相似の内容が中2から中3へ移行したことによって、「縮図・拡大図」は身近にある図形の見方であるにもかかわらず、中3になって初出になっている。教科書会社によっては、相似の利用の場面で初出のものもあり、このような教科書はある図形を拡大・縮小した図形が相似であることを暗黙のうちに認めて相似の学習が進んでいくことになる。すなわち、従来小学校で「縮図・拡大図」を学んできたことを前提にしてきた中学校では、その扱い方に関して十分な知見が得られていないと考えられる。

<現状と問題点2>

「相似の位置」の扱いの程度が教科書によって非常に異なっている。扱わない教科書もある。

「縮図・拡大図」に絡めて、小学校で「1点拡大の図を描いて遊ぶ(パンタグラフなど)」といった活動(素地指導)はできないであろうか。

<現状と問題点3>

「三角形と平行線」「三角形と平行線の逆」「平行線と線分の比」「中点連結定理」の指導系統をどう作るか。

表2に示したように、相似条件の学習後に扱う内容の系統は、教科書によってまちまちである。特に、「平行線と線分の比」を先に学習する場合と後に学習する場合によって異なっている。

② 単元内の扱い

単元内の扱いについてまとめたものが、本章末の別表である。

A. 三角形の相似条件までの扱い

<現状と問題点4>

曲線図形の相似をどのように定義して扱うか。現在の教科書では不十分である。

三角形や四角形を扱うことが大半で、曲線図形の相似として取り上げるのは円だけである。

<現状と問題点5>

多角形の相似条件を扱うのか。現在の教科書では扱っていない。

三角形の合同条件、三角形の相似条件は扱うが、多角形の合同条件や相似条件を扱うことはほとんどない。多角形の相似条件に触れておいて次に三角形の相似条件を扱うと、三角形の相似条件のありがた味がよく納得できる。

<現状と問題点6>

比の値は中学校で扱うのか。扱わない教科書もある。

比の値については、2年の「式と計算」で扱う教科書と相似の単元で扱う教科書があり、扱い方に違いが見られる。また、平成元年度版の学習指導要領のように、小学校で扱うべきものか検討を要する。小学校で扱うとしたら、数量関係だけの扱いでなく、図形における比や比の値についても扱う（例えば長方形の縦・横の比を考える）ことによって、図形を比でみる見方が養われると考える。

また、「 a の b に対する相似比は a/b 」という表現については、扱う教科書と扱わない教科書に別れている。この単元だけを考えれば扱わなくても特に問題はないが、何が基準であるかを明確にする上で「 \sim の \sim に対する」という表現は重要であり、また、図形に関する中高の接続の観点からみると、高校で学習する三角比に対する素地指導としてスパイラルに扱う価値があると考えられる。

<現状と問題点7>

相似の位置の定義は、教科書によってかなり異なっている。扱わない教科書もある。

各社の記述は次の通りである。

<T社> 2つの図形の対応する点どうしを通る直線がすべて1点 O に集まり、 O から対応する点までの距離の比がすべて等しいとき、それらの図形は O を相似の中心として相似の位置にあるという。相似の位置にある2つの図形は相似である。

<K社> 「相似の位置」の記述なし。

<O社> \sim のようにしてかいた2つの相似な三角形では、対応する点はすべて点 O を通る直線上にあり、 O から対応する点までの長さの比は、すべて等しい。このようなとき、2つの図形は、相似の位置にあるといい、点 O を相似の中心という。

<S社> まず、点 O を適当に決め、点 O と点 A を結んだ線分の延長上に、 $OA' = 2OA$ となる点 A' をとる。同じようにして、 O と B 、 O と C を結んだ線分の延長上に点 B' 、 C' をとる。

このようにしてかいた $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ は相似の位置にあるといい、点 O を相似の中心という。相似の位置にある2つの図形は相似である。

<G社> 2つの相似な図形において、対応する辺がそれぞれ平行で、対応する点を結んだ直線がすべて1点Oを通るとき、この2つの図形は相似の位置にあるといい、点Oを相似の中心といいます。

<D社> 相似な図形の対応する2点を通る直線がすべて1点Oで交わり、対応する線分がすべて平行であるとき、それらの図形は相似の位置にあるといい、Oを相似の中心という。

B. 相似条件を使った論証

<現状と問題点 8>

相似の単元ではどこまで論証を扱うのか。教科書によって量・質ともに大きな差がある。

証明問題の図のタイプは、以下の通りである。

1) 三角形の中に相似な三角形が逆向きに入っている図で、相似を証明する。

例1：長さが指定され「2辺の比とその間の角が等しい」で証明するタイプ

例2：ある頂点からもとの三角形の残りの角に等しくなるよう

に線分を引き「2角がそれぞれ等しい」で証明するタイプ

2) 相似な三角形が直角三角形同士である場合の証明。

例1：三角形の2頂点から対辺に垂線を引くタイプ

例2：直角三角形の直角の頂点から対辺に垂線を引くタイプ

3) 2つの線分をそれぞれ○：△となるように交わらせて相似を証明する。

4) 二等辺三角形に関する証明。

例1：底角の1つを二等分する線分をひくタイプ

例2：1つの底角から底辺と等しい線分を伸ばすタイプ

例3：等しい辺の1辺を延長し底辺と同じ長さに伸ばすタイプ

5) 円周角（方べきの定理）に関する証明。

平成元年版の学習指導要領のように、「2年相似」「3年円の性質」になれば、「円の性質」で扱うことになる。

6) 長方形の頂点を折り返して相似を証明する。

7) 平行四辺形に補助線を引き相似を証明する。

8) 正五角形に関して相似を証明（黄金比）する。

C. 平行線の性質と条件

<現状と問題点 9>

どこまで厳密な証明を求めるのか。

例1) 「 $AP : PB = AQ : QC$ ならば、平行である」ことの扱いは、特に次のような差がある。

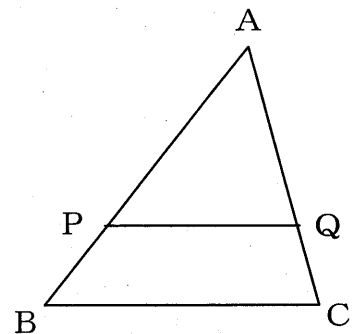
- ・具体的な比で証明する。
- ・具体的な比で考え、それを一般化して証明する。
- ・はじめから一般化したかたちで証明する。

なお、一般化の証明についても、補助線だけを与える、補助線を与えて証明のステップを示すなど、記述は多様である。命題の証明が難しいことへの対応の違いが、記述の差として表れている。

どこまで一般的な記述をするのか。

例2) 平行線（比）が三角形の外に出た場合については、次のような差がある。

- ・平行ならば、 $AP : AB = AQ : AC = PQ : BC$ の一般化：6社すべて。
- ・平行ならば、 $AP : PB = AQ : QC$ の一般化：1社



- ・ $AP : AB = AQ : AC$ ならば、平行の一般化：1社
- ・ $AP : PB = AQ : QC$ ならば、平行の一般化：1社

<現状と問題点 10>

三角形と平行線への利用では、平面図形の問題は用意されているが、空間図形の問題はほとんど扱われていない。

中1で空間図形を扱っているが、中2以降は平面図形に関する扱いが大半であり、空間図形で考える場面が極端に少ない。空間観念の育成という点から、また、高校での空間ベクトルとの関連性を考慮して、相似の単元でも空間図形に関する内容を扱う必要がある。

D. 中点連結定理とその利用

<現状と問題点 11>

「中点連結定理の逆の証明」を扱っている教科書とそうでない教科書がある。

中点連結定理の逆の命題は複数あり、命題によっては成り立たないものもある。それだけに、逆は常に成り立たないことの例としての価値がある。もっとも、それに深入りする必要はないであろう。

<現状と問題点 12>

中点連結定理を動的にとらえさせる教科書は少ない。

三角形の辺の中点どうしを結んだ線分は、いつでも「第3辺に平行で長さは半分」であることを動的に扱いたい。例えば、四角形の各辺の中点をとって結んだ四角形の特徴を考えさせる。もとの四角形の条件によって、中にできる四角形が変わることから四角形の包摂関係に目を向けさせることも可能になり、図形領域を超えた集合の概念を意識させることができる。カブリなどの幾何ソフトを使って軌跡や形の変化を考えさせると有効であろう。ただし、この点については、生徒の理解の様相を十分に把握して実践する必要がある。

E. 相似の利用

<現状と問題点 13>

空間における問題解決に相似を利用する場面が少ない。

投影の意識が弱い生徒の実態をどう改善していくかが重要である。例えば、地図上の標高の異なる2点間の距離を求める場面で、地図上の2点を結んだ線分が立面図上では斜辺になることを理解できない生徒が多い。また、現状では数値と図がすべて与えられているため、一見空間内の問題ではあるが、すでに平面図形の問題になってしまっている。「どこを測定すればよいのか」「どのような図をかけばよいのか」といったことを考えさせる必要がある。投影図の描き方の学習を復活させるのでなく、小中高を通して投影の見方を豊かにする指導が必要と考える。

4. まとめと今後の課題

図形の相似の単元について、量的および質的に考察し、特に質的分析では5つの観点から、現状と問題点を13点ほど示した。

図形全体のカリキュラムを考える上で、平成元年度版の学習指導要領で3年「三平方の定理」の単元内で扱っていた「相似の計量」について、教科書分析などによって扱う内容や位置に関する考察も重要である。

<参考文献>

中学校教科書（平成14年版）：東京書籍，啓林館，大阪書籍，教育出版，学校図書，大日本図書

第7章 高等学校における図形指導の現状と課題

1. 図形に関する内容の扱い

現行の学習指導要領（平成 11 年）において，図形に関する内容は様々な科目・項目で扱われているが，項目全体として扱っている主なものは，以下の通りである。

- ① 図形と計量（数学Ⅰ）
- ② 平面図形（数学A）
- ③ 図形と方程式（数学Ⅱ）
- ④ ベクトル（数学B）
- ⑤ 積分法の応用（数学Ⅲ）
- ⑥ 式と曲線（数学C）

戦後以降の過去の学習指導要領に遡ると，上記以外にも，さらに以下の内容が扱われていた。

- ⑦ 空間図形とベクトル（昭和 43・53 年）
- ⑧ 行列と一次変換（昭和 45・53 年）
- ⑨ 複素数平面（平成元年）

上記のうち，②，③，④，⑥，⑦，⑨は，主に図形の性質とその証明に関する内容であり，①，④，⑤は，主に図形の計量に関する内容であり，⑧は図形の変換に関する内容である。

2. 図形の具体的な指導内容

次に，各項目における図形の具体的な指導内容について，教科書の記述をもとにリストアップした。

内容を，大きく「平面図形」と「空間図形」に分け，さらにそれぞれを「基本概念」「論証」「計量」「作図・軌跡」に分類した。この中で，「基本概念」には図形・用語の意味や性質，定理，図形間の関係概念等を，「論証」には証明法や証明問題として扱っているものを，「計量」には，長さ，面積，体積，角度，比を求めるものを，「作図・軌跡」には作図題や軌跡を求めるものを含めた。なお，高等学校の場合，扱っている内容が教科書によって違いが大きいが，少数の教科書で扱っている内容も入れることにした。結果は，表 1，表 2 の通りである。

表 1 高等学校での平面図形の指導内容

平面図形	基本概念	論証	計量	作図・軌跡
数学Ⅰ	正弦定理，余弦定理 平行移動（2次関数）	角の2等分線と比	三角比の利用 ・三角形の辺，角 ・三角形の面積 ・測量 相似な図形の面積比	（該当なし）

数学 A	三角形の辺と比 重心,外心,内心,垂心 角の2等分線と比 チェバ・メネラウスの 定理 円周角の定理の逆 内接四角形の性質 接弦定理 方べきの定理 2円の位置関係	定理・性質の証明 ・三角形の辺と比 ・重心, 外心, 内心, 垂心 ・角の2等分線と比 ・チェバ・メネラウス の定理 ・円周角の定理の逆 ・内接四角形の性質 ・接弦定理 ・方べきの定理 背理法	定理を利用した線分の 長さ, 角の大きさ	(該当なし)
数学 II	内分点, 外分点 直線, 円の方程式	中線定理 垂心	点と直線の距離 扇形の弧長, 面積 (三 角関数)	軌跡 ・アポロニウスの円
数学 B	(該当なし)	中線定理 垂心	三角形の面積	(該当なし)
数学 III	サイクロイド	(該当なし)	だ円の面積	(該当なし)
数学 C	対称, 回転移動 (行列) 相似変換 (行列) 楕円, 放物線, 双曲線 サイクロイド, リサー ジュ, 正葉曲線, カー ジオイド, 渦巻線	(該当なし)	(該当なし)	(該当なし)

表2 高等学校での空間図形の指導内容

空間 図形	基本概念	論証	計量
数学 I	(正四面体) 相似 カバリエリの原理	(該当なし)	三角比の利用 ・測量 ・切断面の面積 相似な図形の面積比・体積比 球の体積, 表面積 様々な立体の体積 (面積公式の 利用)
数学 A	(該当なし)	(該当なし)	(該当なし)
数学 II	(該当なし)	(該当なし)	微分の利用 ・立体の体積の最大

数学 B	2 直線のなす角 平行 6 面体	ベクトルの利用 ・四面体の性質 ・平行 6 面体の性質	(該当なし)
数学 III	(該当なし)	(該当なし)	立体の体積 ・回転体(球・円錐)の体積 ・円柱の一部分の体積
数学 C	(該当なし)	(該当なし)	(該当なし)

表 1, 表 2 をもとにすると, 高校での図形の指導内容に関して, 中学での指導内容と関連させて次のような特徴を挙げることができる。

(1) 基本概念について

直線や曲線, 平面や曲面で囲まれた基本的な平面図形・空間図形については, ほとんど中学までに学習する。高校では, 放物線, 双曲線, 楕円やサイクロイド曲線, 正葉曲線などの曲線について扱う。

図形の性質・定理については, 中学で, 特別な三角形や四角形に成り立つ性質, 直角三角形で成り立つ三平方の定理, 円に関する円周角定理などを扱い, 高校では中学に引き続き, 一般の三角形で成り立つ正弦定理, 余弦定理, 中線定理, チェバ・メネラウスの定理, 三角形の 5 心に関する定理, 角の 2 等分線に関する定理や, 円に関する方ベキの定理, 接弦定理, 円周角定理の逆などを扱う。

図形の関係概念については, 中学で, 平面図形の合同, 相似を扱い, 高校では, 立体図形の相似を扱う。

直線や平面の位置関係については, 中学で, 平行や垂直などの基本的なものを扱い, 高校では, 空間における 2 直線のなす角について扱う程度である。

図形の移動・変換については, 中学では扱わず, 高校で, 平行・対称・回転について扱う。

中学と高校の指導内容の違いは, 基本的な図形の扱いを除くと, あまり明確ではないように感じられる。

(2) 論証について

平面図形の論証については, 中学では, 「初等幾何」による論証を扱い, 高校では, 数学 A で中学に引き続き「初等幾何」を扱い, 数学 II ・図形と方程式では座標を用いた「解析幾何」を, 数学 B ・ベクトルではベクトルを用いた「ベクトル幾何」を扱う。

空間図形の論証については, 中学では扱わず, 高校で, ベクトルによる方法をわずかに扱っている程度であり, 初等幾何や解析幾何による扱いはほとんどない。

また論証の方法として, 中学では推移律に基づく直接証明法を扱い, 高校では背理法などの間接証明法についても扱う。

中学と高校の指導内容の違いは, 数学 A の平面図形を除くと, ある程度明確であるといえる。

(3) 計量について

平面図形については, 中学では, 扇形の弧長や面積, 三平方の定理による直角三角形の辺の長さ, およびそれをもとに求められる図形の線分の長さ, 面積などを扱い, 高校では, 三角比による一般の三角形の辺の長さや角度, およびそれをもとに求められる図形の面積などを扱う。また, 積分による曲線で囲まれた図形の面積を扱う。

空間図形については、中学では、錐体の体積を直観的に扱い、高校では、数学Ⅰで、球の体積や表面積を直観的に扱い、数学Ⅲで、錐体や球等の体積を積分を用いて求めることを扱う。

中学と高校の指導内容の違いは、数学Ⅰにおける球の体積、表面積の扱いを除くと、ある程度明確であるといえる。

(4) 作図・軌跡について

作図については、中学でのみ基本作図を扱い、高校ではまったく扱わない。

軌跡については、中学でその素地を扱い、高校で解析幾何による方法を扱う。

中学と高校の指導内容の違いは、ある程度明確であるといえる。

3. 高等学校における図形指導上の問題点

高校における図形の指導内容のうち、特に「図形と計量」、「図形と方程式」、「ベクトル」について、指導上の問題点を指摘する。

(1) 図形と計量

指導上の問題点を、平成16年度用高等学校数学Bの教科書を調査して分析した。教科書は、数学Ⅰの教科書を出している主な会社のうち、内容の程度の一番高いと考えられる1冊ずつを選択した。調査・分析した教科書は、次の7冊（H14年検定）である。

啓林館、第一学習社、旺文社、実教出版、東京書籍、数研出版、桐原出版

これらの教科書について、指導の流れや、鋭角・鈍角の三角比の導入、正弦定理・余弦定理の意義に関する記述や問題の有無等について、特徴的なことを調べた。その結果は表3の通りである。

表3 三角比の内容に関する教科書分析

指導の流れ	以下の流れ<全社> ①鋭角の三角比（タンジェント→サイン・コサイン） ②三角比の相互関係 ③鈍角の三角比 ④正弦定理・余弦定理・面積公式 ⑤測量・図形の計量等への利用 ※1社だけが、①で、サイン→コサイン→タンジェントの流れであった。
鋭角の三角比の導入	三角比を、直角三角形の2辺の比で定義<全社> 測量場面で導入（相似な直角三角形の2辺の比は一定である）<6社>
鈍角の三角比の導入	鈍角の三角比を、半径rの半円によって定義<6社> ※1社だけが、半直線によって定義
正弦定理・余弦定理の意義	正弦定理の意義が明確に記述、あるいは意義がわかる問題がある。<4社> 余弦定理の意義が明確に記述、あるいは意義がわかる問題がある。<全社>

教科書によって、多少のばらつきはあるものの、概ねいずれの教科書も同様の扱いをしている。上記の調査結果から、指導上の問題点として、次の4点を挙げることができる。

① サイン、コサイン、タンジェントの導入の意義が明確に記述されていない

7社中6社の教科書が、タンジェントから導入しているが、そのうちの多くが導入として測量の場面を取り上げている。しかし、これは、相似な三角形の辺の比が一定であることを確認することが主なねらいであり、タンジェントを導入する意義には必ずしも直接つながっていない。少なくとも‘tan’という新しい記号を用いる必要性は、生徒に直接的には感じとれないであろう。

イギリスの教科書のように、例えば図10の場合にBCのおよその長さを問うことは有効である。またインドの教科書のように、導入の説明文で、三角比の有用性について説明することもまた有効といえよう。しかし、これらでさえも、記号の導入の必要性には直接触れていない。図10の場合であれば、BCの正確な長さを問うことで、はじめて記号導入の必要性が意識される。このような活動を扱っている教科書は、残念ながら見当たらなかった。

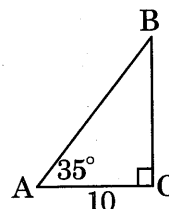


図10

② 鈍角の三角比の導入の意義が明確に記述されていない

鈍角の三角比の導入部分については、いずれの教科書も、「三角比を鈍角まで拡張してみよう」といった記述のみで、座標を用いて導入している。しかも、1社（第一学習社）を除いて、半円を用いている。1社は、円を座標平面上で扱うのは数学Ⅱであるという配慮から、半円ではなく半直線を用いている（図11）が、本質的には変わらない。この座標を用いた定義は、三角関数において、定義域を一般角に拡張して定義することにつながるという点で意味はある。

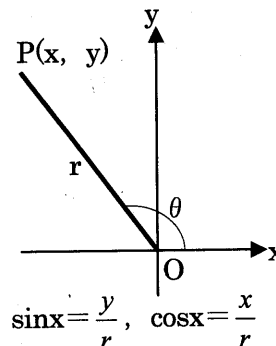


図11

しかし、三角関数が未習であるこの段階の生徒にとって、このように定義する必然性は理解できないであろう。まして、数学Ⅱ・三角関数を選択しない生徒にとっては、ほとんど意味をなさないといえる。それでは、この段階で、三角比を鈍角まで拡張する意味は何か。それは、正弦・余弦定理、面積公式を鈍角三角形でも成立させるため、と考えてよいであろう。しかし、現行の教科書の記述や指導順序から、その意味を読み取ることは困難である。

③ 正弦定理や余弦定理の導入の指導において、定理の意義が記述されていない

例えば余弦定理について、多くの教科書は、いきなり「△ABCについて、次の余弦定理が成り立つ」として、その定理と証明の記述があり、次に定理の利用例とその練習問題がある。その後、正弦・余弦定理の応用として「三角形を解く」場面で、ようやく定理の意義が見えてくることとなる。しかしこれでは、定理を覚え、その適用問題に習熟することに精一杯で、少なくとも導入の段階では、定理の意義を実感することは難しい。

また、余弦定理は、中学での学習内容である「三平方の定理」の拡張であるが、このことに触れている教科書は、7社中2社（実教出版、桐原書店）だけであった。

さらには、余弦定理の式として、1社（旺文社）を除いて、次のように3つの式が併記してある。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2cacosB$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$$

しかし、定理の意味を考えず、形式的に a, b, c, A, B, C に数値を当てはめようとしてい

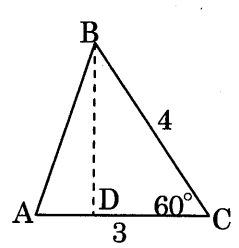
る生徒の姿を見かけることも少なくない。「2辺とその挟む角から、残りの一辺の長さを求める式」という本質をとらえるには、1つの式だけでも十分であると考える。

④ 正弦・余弦定理、面積公式の利用問題は、 30° 、 45° 、 60° 等の特別な角を利用するものばかりである

正弦・余弦定理を利用し、一般の三角形のいろいろな辺の長さや角の大きさを求める活動を通して、定理の意義が実感できる。しかし、ほとんどの問題は、 30° 、 45° 、 60° 等の特別な角を利用するものばかりで、フィンランドの教科書のような特別でない角の三角比を扱った問題はほとんど見当たらなかった。

特別な角の場合は、中学の範囲で解決できる。例えば、次の問題は、補助線を引いて三平方の定理を利用することで解決できる。

ABの長さは？



垂線BDをひくと、 $BD=2\sqrt{3}$ 、 $CD=2$ 、 $AD=1$

$\triangle ADB$ に三平方の定理を適用して、

$$AB^2=(2\sqrt{3})^2+1^2=13,$$

よって $AB=\sqrt{13}$ ▲

したがって、上のような問題では、本質的には、三角比を利用して正弦・余弦定理を用いる意義は実感できないといえるであろう。

(2) 図形と方程式

指導上の問題点を、平成15年検定済高等学校数学IIの教科書を調査して分析した。教科書は、数IIの教科書を出しているすべての会社(9社)のうち、内容の程度の一番高いと考えられる1冊ずつを選択した。これらの教科書について、教科書の本文、例(題)、問、章末問題等に掲載されている次のような図形に関する問題や記述をリストアップした。

A 図形の性質を導く問題(証明問題)

B 軌跡に関する問題

Aについてはさらに、指導内容との関連から、方程式を利用しないもの、直線の方程式を利用するもの、円の方程式を利用するものに分類した。また、半数以上の中学校教科書で扱っているものには[中学]を、高校の数学A・平面図形で複数の教科書で扱っているものには[数A]をマークした。結果は表4の通りである。なお、図形についている記号は、教科書の記号と必ずしも一致しない。また、軌跡の問題では、A、B、Cは定点である。

表4 図形と方程式の内容に関する教科書分析

A 図形の性質を 導く問題 (証明問題)	<p><方程式を利用しないもの></p> <ul style="list-style-type: none"> ・三角形の3本の中線が1点で交わる(重心の存在)[数A] ・三角形の各辺の中点を結んでできる三角形の重心は、元の三角形の重心と一致する(中点→m:nの内分点) ・長方形ABCDと1点Pに対して、$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$が成り立つ
-------------------------------	---

	<ul style="list-style-type: none"> ・中線定理 ・四角形の対辺の中点を結ぶ2本の線分は、互いに他を2等分する <p><直線の方程式を利用するもの></p> <ul style="list-style-type: none"> ・三角形の各頂点から対辺への3本の垂線は1点で交わる（垂心の存在）〔数A〕 ・三角形の各辺の垂直2等分線は1点で交わる（外心の存在）〔数A〕 <p><円の方程式を利用するもの></p> <ul style="list-style-type: none"> ・直径ABの円周上の点CからABへの垂線CDに対して、$CD^2=AD \cdot DB$が成り立つ
<p>B 軌跡に関する 問題</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・$AP=BP$であるPの軌跡〔中学〕 ・$AP:BP$=一定であるPの軌跡（アポロニウスの円） ・AP^2-BP^2=一定であるPの軌跡 ・AP^2+BP^2=一定であるPの軌跡 ・Qが円周上にあるときのAQの中点（内分点）Pの軌跡 ・Qが放物線上にあるときのAQの中点（内分点）Pの軌跡 ・Qが直線上にあるときのAQの中点（内分点）Pの軌跡 ・Qが円周上にあるときの$\triangle ABQ$の重心Pの軌跡 ・$OP^2=AP^2+BP^2$を満たすPの軌跡 ・$AP^2+BP^2=2CP^2$を満たすPの軌跡 ・直線外の1点Aを通り、直線に接する円の中心Pの軌跡 ・Aから直線への垂線をAHとするときの$AP=AH$となるPの軌跡

以上の調査結果から、指導上の問題点として、次の4点を挙げるができる。

① 図形と方程式を用いて図形の性質を導くような問題が少ない

いずれの教科書も、図形に関する問題を比較的多く扱っているが、図形の性質を導くような問題（証明問題）は必ずしも多くはない。中でも、方程式を利用する問題は少なく、特に円の方程式を利用する問題は次の1問で、扱っていたのは1社だけであった。

「線分ABを直径とする円上の点CからABへ下ろした垂線をCDとするとき、

$$CD^2=AD \cdot DB$$

であることを、座標を用いて証明せよ。」（啓林館）

全体を通して、ベクトルにおける図形の問題数よりも少ない。

一方で、図形の問題でも、例えば次のように、点の座標を求めたり方程式を求めたりする問題は多い。

「(A, B, Cの座標が与えられているとき) $\triangle ABC$ の重心の座標を求めよ。」

「(A, Bの座標が与えられているとき) 線分ABの垂直2等分線の方程式を求めよ。」

しかし、これらの問題は、図形の性質を用いた代数的処理の問題といえるものであり、座標を用いて、図形の問題を解決したことにはならない。すなわち、このような問題は、図形と方程式を学ぶ意義を実感できるとはいえないであろう。

② 初等幾何による方法との比較が明確に記述されてない

初等幾何による方法と比較することを通して、図形と方程式による方法の特徴をより深く理解し、図形と方程式を学ぶ意義がより強く実感できるといえる。しかし、どの教科書にもそれ

に関する記述は見当たらなかった。

例えば、垂心の存在証明について、ほとんどの教科書が扱っていたが、数学 A で扱っている初等幾何による方法との関連については、具体的に記述されていなかった。また、ここで始めて学習する中線定理についても、ほとんどの教科書で扱っていたが、座標を用いない証明には触れていなかった。さらに、中学で学んでいる図形の問題を扱っている教科書はなかった。また、過去の教科書に見られたような、初等幾何と異なる解析幾何の特徴を示す説明文や記述もなかった。

これらの結果から、初等幾何による方法との関連については、教師の指導に任されていることになるが、実際に指導が十分になされているかどうか疑わしい。

③ 「関数のグラフ」と「方程式が表す図形」の違いを明確に記述していない

いくつかの教科書では、1 次関数のグラフとの関連から、方程式が表す図形について説明してある。しかし、その説明はあっさりとしたもので、1 次関数のグラフと、1 次方程式が表す図形との違いは、明確に記述されていない。この場合生徒は、両者の違いを正しく理解しないまま、図形と方程式を、関数のグラフの延長線にとらえてしまう可能性がある。実際、中学での指導にも問題があり、両者を混同してしまうことが指摘されている(熊倉,2003)。両者を混同することは、図形と方程式を学ぶ意義を実感することにつながらないであろう。

④ 軌跡の問題は、始めから座標が設定されている

軌跡の問題については、解析幾何で扱う方が容易に考えやすい問題が多い。したがって、図形と方程式を学ぶ意義を実感させる指導が容易であるはずである。しかし、例えば次のように、教科書の問題は、始めから座標が与えられている。

「2 定点 $A(-6,0)$ 、 $B(2,0)$ に対して、 $AP:BP=3:1$ であるような点 P の軌跡を求めよ。」(東京書籍)

これでは、自ら座標を設定することにより図形の問題が容易に解決できる、という解析幾何のよさが実感できないであろう。

(3) ベクトル

指導上の問題点を、平成 15 年検定済高等学校数学 B の教科書を調査して分析した。教科書は、数学 B を出版している 9 社について、内容の程度の一番高いと考えられる 1 冊ずつを選択した。

まず、教科書の本文、例(題)、問、章末問題等に掲載されている次のような図形に関する問題や記述をリストアップした。

A 図形の性質を導く問題(証明問題) ・ 平面図形 ・ 空間図形

B 空間図形の基本性質に関するもの

C 空間図形の初等幾何的な証明問題

A については、さらに指導内容との関連から、内積を利用しないものと利用するものに分類した。また、半数以上の中学校教科書で扱っているものには〔中学〕を、高校の数学 A・平面図形、数学 II・図形と方程式で複数の教科書で扱っているものには、〔数 A〕、〔数 II〕をマークした。結果は表 5 の通りである。なお、図形についている記号は、教科書の記号と必ずしも一致しない。

表5 ベクトルの内容に関する教科書分析

<p>A 図形の性質を 導く問題（証 明問題）</p>	<p>平面 図形</p>	<p><内積を利用しないもの></p> <ul style="list-style-type: none"> ・平行四辺形の対角線が互いに中点で交わる，あるいはその逆〔中学〕 ・重心が1点で交わる〔数A〕〔数II〕 ・中点連結定理〔中学〕〔数A〕 ・平行線と比に関する性質〔中学〕〔数A〕 ・四角形の各辺の中点を結んでできる四角形は平行四辺形である〔中学〕 ・三角形の各辺の中点を結んでできる三角形の重心は，元の三角形の重心と一致する〔数II〕 ・三角形（あるいは平行四辺形）の边上あるいは適当に引いた線分上に，ある規則でとった3点が一直線上にある <p><内積を利用するもの></p> <ul style="list-style-type: none"> ・中線定理〔数II〕 ・垂心が一点で交わる〔数A〕 ・二等辺三角形の底辺への中線は底辺に垂直である〔中学〕 ・ひし形の対角線が直交する〔中学〕 ・直角三角形の斜辺への中線は，斜辺の長さの半分に等しい，あるいはその逆〔数A〕 ・三角形の重心，外心，垂心は一直線上にある ・四角形 ABCD において，$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$ ならば $AC\perp BD$
	<p>空間 図形</p>	<p><内積を利用しないもの></p> <ul style="list-style-type: none"> ・四面体 OABC において，OA, AB, OC, BC の中点を E, F, G, H とすると，$\square EFGH$ ・四面体 OABC において，OA, OB, OC, AB, BC, CA の中点を E, F, G, H, I, J とするとき，EI, FJ, GH は1点で交わる ・四面体 OABC において，$\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ の重心を D, E, F とし，$\triangle DEF$ の重心を G とすると，$\triangle ABC$ の垂心 H は OG 上にある ・平行6面体の4本の対角線は1点で交わる ・平行6面体 ABCD-EFGH において，$\triangle ABE$ の重心は対角線 AG 上にある <p><内積を利用するもの></p> <ul style="list-style-type: none"> ・正四面体 OABC において，$OA\perp BC$ ・正四面体 OABC において，$\triangle ABC$ の重心を G とするとき，$OG\perp\triangle ABC$ ・正四面体 OABC において，OA, BC の中点を E, F とすると，$OA\perp EF$ ・正四面体 OABC において，OA, AB, OC, BC の中点を E, F, G, H とすると，$EG\perp FH$ ・四面体 OABC において，$OA\perp BC$, $OB\perp CA$ ならば $OC\perp AB$ ・四面体 OABC において，$OA^2+BC^2=OB^2+CA^2$ ならば $OC\perp AB$ ・四面体 OABC において，$\triangle ABC$ 上に $OH\perp\triangle ABC$ となる H をとると，$OA\perp BC$, $OB\perp CA$ ならば $AH\perp BC$, $BH\perp CA$

<p style="text-align: center;">B</p> <p style="text-align: center;">空間図形の基本性質 に関するもの</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・平面の決定 [中学] ・2直線の位置関係 [中学] ・2平面の位置関係 [中学] ・直線と平面の位置関係 [中学] ・2直線のなす角 ・直線と平面の垂直 (平面上の2直線に垂直ならば, 平面と垂直) [中学]
<p style="text-align: center;">C</p> <p style="text-align: center;">空間図形の初等幾何 的な証明問題</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・正四面体 OABC において, $OA \perp BC$ であることの証明

以上の調査結果から, 指導上の問題点として, 次の5点を挙げる事ができる。

① ベクトルを用いて図形の性質を導くような問題が少ない

いずれの教科書も, 図形に関する問題を比較的多く扱っているが, 図形の性質を導くような問題(証明問題)は必ずしも多くはない。上記で挙げた問題全てを合わせると多く感じるが, それぞれの教科書には, 平面図形, 空間図形いずれも平均すると2~3題程度である。

同じ図形の問題でも, 例えば次のような位置ベクトルを求めたり, 内積を求めたりする問題は多い。

「 $\triangle ABC$ の各頂点の位置ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて, $\triangle ABC$ の内心の位置ベクトルを表せ。」

「立方体 ABCD-EFGH において, $\vec{AC} \cdot \vec{AF}$ を求めよ。」

しかし, これらの問題は, 図形の性質を用いたベクトルの計算問題といえるものであり, ベクトルを用いて, 図形の問題を解決したことにはならない。すなわち, このような問題は, ベクトルを学ぶ意義を実感できるとはいえないであろう。

② 初等幾何や解析幾何による方法との比較が明確に記述されてない

他の方法と比較することを通して, ベクトルによる方法の特徴をより深く理解し, ベクトルを学ぶ意義がより強く実感できるといえる。しかし, どの教科書にもそれに関する記述は見られなかった。例えば, ほとんどの教科書が, 垂心が1点で交わることの証明を扱っていたが, 初等幾何や解析幾何による方法との関連については具体的に記述されていなかった。またそれ以外には, 中学などで学んでいる図形の問題を扱っている教科書は多くなかった。例えば, 平行四辺形の対角線が中点で交わる性質(旺文社ほか)やひし形の対角線は直交する性質(実教出版ほか)などが数少ない例である。これらについても, 関連についての記述はなかった。

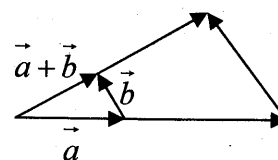
③ 循環論法になりうる図形の証明問題を扱っている

いくつかの教科書で, ベクトルを用いた中点連結定理の証明問題を扱っている。この証明の中で, ベクトルのスカラー倍に関する分配法則 $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ を用いるが, 一方この分配法則を示すのに, 中点連結定理を含む平行線と比に関する性質を利用することも考えられる。

実際, ほとんどの教科書は, 分配法則を示すのに次のような程度の扱いである。

「 $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ が成り立つことを, 右の図で確かめよ。」

右の図を使用して, 三角形の相似条件から示すこともできるが,



平行線と比を利用して示すことも容易である。この場合は、循環論法になってしまう。

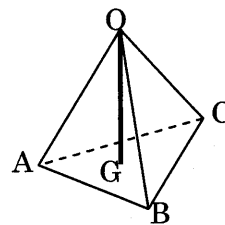
④ 空間図形の基本性質に関する内容が乏しい

空間図形の基本性質については、中学1年で、直線や平面に関する相互の位置関係や、相互の平行、垂直の意味について学習する。その後は、空間ベクトル以外の部分では、どこでも扱わない。しかし実際には、空間図形の基本性質に関してまったく扱っていない教科書が、調べた中で半分以上あり、扱っている教科書でも軽重に差があった。その内容は、中学の内容の復習が多く、高校での新しい内容は、2直線のなす角の意味について程度である。

例えば、次の問題

「正四面体 $OABC$ において、 $\triangle ABC$ の重心を G とするとき、
 $OG \perp \triangle ABC$ を示せ。」

は、「直線 m が、平面 α 上の平行でない2直線と垂直ならば、直線 m は平面 α と垂直である」という性質を利用するが、中1で学習しているとはいえ、その後は扱わないため忘れていた生徒も少なくないであろう。上の問題を扱いながら、この性質には触れていない教科書もあった。



⑤ 空間図形について、ベクトル以外の方法による扱いがほとんどない

空間図形の場合は、ベクトル以外の方法を、教科書ではほとんど扱っていない。2冊の教科書で、次のような初等幾何の問題を扱っているだけである。

「正四面体 $OABC$ において、 $OA \perp BC$ であることを証明せよ。」

空間図形の問題を解決するのに、ベクトルによる方法だけを学んだ生徒は、ベクトル以外の方法では解決できないと考えてもおかしくないであろう。

4. 中学との接続から見た図形指導に関する検討

3. では、各項目ごとに指導上の問題点を指摘したが、ここでは、特に中学との接続という観点から、「図形の基本概念」「図形の論証」と「図形の計量」について検討した。

(1) 図形の基本概念に関する扱い

① 変換の素地指導について早期の段階で扱う

前回の学習指導要領では中学で扱っていた平面図形の移動（平行・対称・回転）の内容が、現行の指導要領では数学Cに移行した。数学Cの一次変換では、変換を行列で表現することにそのねらいがある。したがって、変換の意味については、それ以前の段階で指導していることが望ましいといえよう。そのことにより、変換についてより一層理解を深めることができると同時に、行列についても理解を深めることができるはずである。そのためには、中学で、移動を扱うことが望ましいと考える。

(2) 図形の論証に関する扱い

① 中学と高校との指導内容の違いを明確にする

前回の学習指導要領では中学で扱っていた平面図形の初等幾何による論証の内容が、現行の指導要領では数学Aに移行した。しかし、これらの内容を除くと、以下のような扱いの違いを明確にすることができる。

中学 初等幾何による論証

高校 代数的処理を用いた論証（解析幾何，ベクトル幾何）

高校現場の実際は，初等幾何による論証の内容を必ずしも十分に扱っていないようである。証明はせずに定理を紹介し，その後は定理を活用した計量問題を中心に扱っている，という教員は少なくないと聞く。このような実態を踏まえるとき，中学では初等幾何による論証を中心に，高校では代数的処理を用いた論証を中心に扱うこととし，代数的処理による方法と比較する際に，初等幾何による論証について触れる程度が望ましいのではないか。したがって，数学 A の平面図形の内容は，中学で扱うことが可能なものは中学に移行し，それ以外については，数学 II ・図形と方程式や数学 B ・ベクトルに移行して指導するのがよいと考える。

② 初等幾何による方法との違いについて指導する

高校の解析幾何やベクトル幾何を扱う場合に，前述したことから，初等幾何による方法との違いについて必ずしも十分に指導されていないといえる。解析幾何やベクトル幾何による方法の特徴を理解し，初等幾何による方法について一層理解を深めるためにも，これらの方法の違いについてきちんと指導すべきである。

(3) 図形の計量に関する扱い

① 三角比と三平方の定理との関係について指導する

余弦定理等を扱う場合に，前述したことから，三平方の定理との関係について必ずしも十分に指導されていないといえる。三角比の特徴を理解し，三角比を学ぶ意義を実感できるようにするためにも，三平方の定理との関係についてきちんと指導すべきである。

② 曲線・曲面で囲まれた図形の計量について，中学と高校との指導内容の違いを明確にする

前回の学習指導要領では中学で扱っていた球の体積・表面積の内容が，現行の指導要領では数学 I に移行した。しかしこれらの内容を除くと，曲線や曲面で囲まれた図形の計量について，以下のような扱いの違いを明確にすることができる。

中学 円や扇形の面積・弧の長さ

曲面で囲まれた立体の体積の直観的な扱い

高校 円や扇形以外の曲線で囲まれた図形の面積

曲面で囲まれた立体の体積の積分による扱い

したがって，球の体積や表面積に関する直観的な扱いは，中学の方が望ましいと考える。

<引用・参考文献>

狭間節子(2000)「算数・数学の目標と内容－図形・幾何－」『日本数学教育会誌数学教育』第 82 巻第 7・8 号。

熊倉啓之(2000)「学ぶ意義を実感させる数学の指導に関する研究－三角比の指導を通して－」『日本数学教育学会誌数学教育』第 82 巻第 11 号。

熊倉啓之(2004)「学ぶ意義を実感させるベクトルの指導に関する研究」『第 37 回論文発表会論文集』。

熊倉啓之(2005a)「中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究－ベクトルの指導に焦点を当てて－」『静岡大学教育学部研究報告』第 36 号。

熊倉啓之(2005b)「学ぶ意義を実感させる図形と方程式の指導に関する研究」『第 38 回数学教育論文発表会論文集』。

熊倉啓之(2006a)「中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究－図形と方程式の

指導に焦点を当てて一」『静岡大学教育学部研究報告』第 37 号.
熊倉啓之(2006b)「学ぶ意義を実感させる三角比の指導に関する研究」『第 39 回数学教育論文
発表会論文集』.

平成 14 年検定済高等学校教科書「数学 I」.東京書籍 001, 実教出版 004, 啓林館 007, 数研
出版 010, 旺文社 016, 第一学習社 017, 桐原書店 020

平成 15 年検定済高等学校教科書「数学 II」. 東京書籍 001, 実教出版 004, 啓林館 007, 数研
出版 010, 数研出版 011, 文英堂 013, 旺文社 016, 第一学習社 017, 知研出版 019, 桐
原書店 020

平成 15 年検定済高等学校教科書「数学 B」. 東京書籍 001, 実教出版 003, 啓林館 006, 数研
出版 009, 文英堂 012, 旺文社 015. 第一学習社 016, 知研出版 018, 桐原書店 019

第8章 イギリスの幾何カリキュラム

この章では、イギリスの国家カリキュラムにおける幾何に関する内容について、文献に基づいて把握し、そこから、日本の幾何教育の改善に関する示唆を得る。本章でのイギリスとは、イングランドのことを指している。なお、次章では、イギリス訪問調査に基づく教育の実際について紹介する。

1. イギリスの国家カリキュラムの概要

イギリスでは、1989年に国家カリキュラムが導入されて以来、日本を遙かにしのぐ中央集権的な教育が行われている。

ここでは、イギリスの1999年版国家カリキュラムの概要を、*Mathematics, The National Curriculum for England (DfEE, 1999)*の記述に基づいて簡単にまとめておく。現在は、これに従った教育課程が実施されている。国家カリキュラムの示し方、考え方という点からも参考になる点が多い。

(1) 国家カリキュラムの構造

国家カリキュラムでは、複数学年にまたがる4つの教育段階(表1参照)を示す主段階(Key Stage)ごとに、学習計画(Programmes of Study)と到達目標(Attainment Target)が示されている。学習計画は子どもたちが教えられるべきこと、到達目標は子どもたちに実現が期待される標準である。

イギリスでは、小学校入学年齢が日本より1年早い。第1,2主段階が日本の小学校に、第3主段階が中学校に、第4主段階が日本の高校1,2年生に相当する。その後大学進学のためにシックス・フォームに2年間通うので、大学入学年齢は日本と同じ18歳である。

表1 学習段階と領域

主段階	第1主段階	第2主段階	第3主段階	第4主段階
年齢	5~7歳	7~11歳	11~14歳	14~16歳
学年	1~2学年	3~6学年	7~9学年	10~11学年
領域	数	数	数と代数	
	図形・空間・測定	図形・空間・測定	図形・空間・測定	
		データの扱い	データの扱い	

(2) 学習計画

学習計画は、主段階1~4の数学において、子どもたちが教えられるべきことからなり、また、学習の枠組みを計画するための基本を示している。計画の段階で、学校は、「インクルージョン、言語の使用、情報コミュニケーション技術(ICT)についての一般的な指導の要求」を考慮すべきである、としている。インクルージョンとは、全ての子どもたちに効果的な学習の機会を提供するものである。

学習計画において、知識、技能、そして理解は、子どもたちが身につける数学の主な側面である。各領域において「数学を利用し応用すること」が示されている。また、各主段階において、領域間の「関係づけが確実に行われるべきである」とし、それは数学的アイディアを使った実際の活動(practical activities)を通して発展される、と述べられている。

『算数指導のための枠組み』(The Framework for teaching mathematics)は、5歳から11歳までの子どもに対する数学を計画し指導するための詳細な目標を示している。この枠組みを十分に実行している学校は、第1、第2主段階の数学のための国家カリキュラムに関連する法定上の義務を満たすことになる。

日本の中学校に相当する第3主段階で行うことについては、教育雇用省(DfEE)、資格・教育課程機関(QCA)が例示している。

第4主段階の数学については、「基礎」と「上級」それぞれの学習計画があり、子どもには、それらのいずれかが指導される。「上級」の学習計画は、第3主段階の終末において完全に水準5(表2参照)に到達している子どもたちのために作られている。

いずれの主段階においても、「数学を利用し応用すること」では、実際的な課題や現実世界の問題や数学において、数学を利用し応用すること、及び推論を発達させる機会が与えられることが強調されている。そして、「子どもは次のことを教えらるべきである」として、その内容が次の3つの柱立てによって共通に述べられている。

- ・問題解決
- ・コミュニケーション
- ・数学的推論

この学習計画は、日本の学習指導要領の内容記述とほぼ同様に、大枠を示した程度のものとみることができる。なお、本章の2.(1)には、「形・空間・測定」に関する内容の項目を示してある。

(3) 到達目標と水準表現

数学の到達目標は、8つの水準からなっていて、異なる能力や成熟の子どもたちがそれぞれの主段階の終末までに身につけると期待される知識、技能、理解からなっている。

数学については、4つの到達目標がある。

- ・数学を利用し応用すること
- ・数と代数
- ・図形・空間・測定
- ・データの扱い

水準表現は、第1～3主段階の終末における子どものできばえを判定するための基本を示している。第4主段階については、国家資格が、数学に関する達成を評価する主な方法である。

表2 主段階と到達目標の水準

大多数の子どもたちが行うと期待される水準の範囲		その主段階の終末で多くの子どもたちに期待される到達目標		備考
第1主段階	水準1-3	7歳	水準2	2年生終了時
第2主段階	水準2-5	11歳	水準4	6年生終了時
第3主段階	水準3-7	14歳	水準5/6	中学校終了時

ある主段階の終末において子どもの到達水準を決定する場合、教師はどの表現が子どものできばえに最も合っているかを判定すべきであり、その場合、その表現は、近隣の水準の表現と共に考慮されるべきである、と述べている。それぞれの主段階の終末において法的な評価を行うことは、QCAの評価に関する年報や報告書に詳しく示されている。

(4) 国家カリキュラム全体を通じた学習

国家カリキュラム全体を通じて育成を目指しているものとして、「精神的・道徳的・社会的・文化的発達の促進」「主要スキル」そして「思考スキル」があげられていて、それぞれについて、数学学習

が負っているものが極めて明示的に述べられている(DfEE,1999, pp.8-9)。

① 数学を通して子どもたちの精神的、道徳的、社会的、文化的発達を促進すること

例えば、数学は、以下のことを促進する機会を提供する、としている。

- ・**精神的発達** 子どもたちが無限に対する洞察を得ることを援助することを通して、そして、我々の周りの世界にある美しい自然の形式や規則の背後に潜む数学的原理を説明することを通して。
- ・**道徳的発達** 特別の決定や選択の結果を考えるためにいかに論理的推論が使われるか認識することを通して、また、子どもたちが数学的真理の価値を学ぶことを援助することを通して。
- ・**社会的発達** 複雑な数学的課題について子どもたちが生産的に活動することを援助することを通して、また、その成果は個々の子どもが達することができるものよりもしばしば良いということを子どもたちがとらえることを、援助することを通して。
- ・**文化的発達** 数学的思考は我々の文化の発展に貢献していて、より高度な技術社会に対して次第に中心的になってきていることを子どもたちが感得するのを援助することを通して、そしてまた、多くの文明において数学者が現代数学の発展に貢献していることを認識することを通して。

② 数学を通して主要スキルを促進すること

例えば、数学は、子どもたちが以下の中心的な技能を発達させることを促進する機会を提供する、としている。

- ・**コミュニケーション** 考えや方法を、明確に明瞭に簡潔に表現する学習を通して。
- ・**数の利用** 数学の知識、技能や理解を使用し適用することを通して。
- ・**情報技術** 論理的思考を発達させること、数や代数やグラフの問題を解決ためにグラフソフトや表計算ソフトを使うこと、幾何学的構成を操作するのに動的な幾何ソフトを使うこと、データを表現し分析するのにデータベースや表計算ソフトを使うことを通して。
- ・**他者との協同** グループ作業や数学的な考えについての討論を通して。
- ・**自己の学習や行動の改善** 論理的思考や集中力や分析技能を発展させること、そして、問題解決の過程を振り返ることを通して。
- ・**問題解決** 方法や技術を選択し使うこと、方略的思考を発展させること、問題へのアプローチが的確であったかどうかを反省することを通して。

③ カリキュラムの他の側面を促進すること

例えば、数学は、以下のことを促進する機会を提供する、としている。

- ・**思考技能** 子どもの問題解決の技能や演繹的推論を発達させることを通して。
- ・**財政上の能力** 数学を財政上の文脈の問題に適用することを通して。
- ・**事業や企業家の技能** 科学や技術、経済において、そして危険の査定において、数学を適用する子どもたちの能力を発達させることを通して。
- ・**労働に関係する学習** 労働の状況において、また、現実生活の問題の解決において、数学を使用し適用する子どもたちの能力を発達させることを通して。

なお、思考技能(Thinking Skill)は特に数学学習に関係が深く、次の5つの範疇がある(DfEE, 2001):

情報処理技能、探究技能、創造的思考技能、推論技能、評価技能

これらに関する数学の貢献は、「数学を利用し応用する」ことから直接に引き出されるとしている。

この(4)で述べたことは、国家カリキュラム全体を通じて育成を目指すものとしてあげられている。

そのそれぞれについて、数学学習が貢献すべきことを明確に述べている点は、日本のカリキュラム記述を考える上で参考になる。特に「財政上の能力」「事業や企業家のスキル」「労働に関する学習」にまで関連づけて数学学習の意義を述べることは、日本では表だってほとんど行われていないであろう。

2. 国家カリキュラムにおける「形・空間・測定」に関する内容

ここでは、国家カリキュラム(DfEE,1999)における「形・空間・測定」に関する内容をまとめる。

(1) 学習計画:「形・空間・測定」

学習計画には、第1~4主段階ごとに、「形・空間・測定」に関する内容として、表3に示した項目が挙げられている(巻末には、第1~第3主段階の記述の全訳を示してある)。既に述べたように、第1,2主段階は日本の小学校に、第3主段階は中学校に、第4主段階は高校1,2年生に相当している。

表3 学習計画における「形・空間・測定」領域に関する内容項目

段階	項目	小項目
第1	形・空間・測定を利用し応用すること	・問題解決 ・コミュニケーション ・推論
	形の規則や性質の理解	
	位置と移動の性質の理解	
	測定の理解	
	学習の広がり	
第2	形・空間・測定を利用し応用すること	・問題解決 ・コミュニケーション ・推論
	形の性質の理解	
	位置と移動の性質の理解	
	測定の理解	
第3	形・空間・測定を利用し応用すること	・問題解決 ・コミュニケーション ・推論
	幾何学における推論	・角 ・三角形や他の直線図形の性質 ・円の性質 ・空間図形
	変換と座標	・変換を明確にすること ・変換の性質 ・座標
	測定と作図	・測定 ・作図 ・求積法 ・軌跡
第4	基礎	第3主段階と同一(各項目で述べられている内容もほとんど同じ)
	上級	第3主段階と以下の点だけが異なっている。 ・「幾何学における推論」は、小項目「角」「空間図形」がなく、「三角形や他の直線図形の性質」「円の性質」からなる。 ・「変換と座標」のもとに、新たに「ベクトル」が加わっている。

各主段階とも、幾何的な内容の記述に先立って「形・空間・測定を利用し応用すること」が問題解決、コミュニケーション、推論の小項目のもとで記述されている。

表3で、第1主段階での「学習の広がり」については、「以下のことを通して知識、技能、理解が教えられるべきである」とa~gが挙げられている。

a 実質的な活動、探究、話し合い。

b 実質的な活動の中で数学的な考えを利用する。そして、物、絵、図、言葉、数、記号などを使って

それを記録すること。

c 暗算の方法の発達を支援するために、頭の中で数のイメージやその関係を利用すること。

d 実際的な文脈の範囲で、見積もり、描き、測定すること。

e 実際的な活動の中でのデータから推論を展開すること。

f 情報コミュニケーション技術を含んだ様々な情報の供給源や教材を探究し利用すること。

g 数に関する活動と数学における他の側面を結び付けることを奨励するような活動。

第1主段階は日本の小学校第1, 2学年に相当する。その指導に当たっては実際的な活動に依ることが繰り返し述べられていて、低学年での学習の過程について、注意を喚起していることが読みとれる。

(2) 到達目標: 「形・空間・測定」

数学に関する到達目標は、「数学を利用し応用すること、数と代数、図形・空間・測定、データの扱い」の4つからなっている。国家カリキュラム(DfEE, 1999)に示された「図形・空間・測定」に関する到達目標を、日本の教育課程と比較しやすくするために横軸の項目を図形、計量に分けてまとめると、表4のようになる。

(巻末には、「形・空間・測定」部分の到達目標の全訳を示してある。本章 1. (3)で示したように、ある主段階の終末において子どもたちの到達水準を決定する場合、教師はどの表現が子どもたちのできばえに最も合っているかを近隣の水準の表現も考慮して判定することになる。)

表4 到達目標: 「形・空間・測定」

レベル	図 形	計 量	Key stage
1	日常言語で性質や位置を表す。	直接比較	
2	数学的名称により性質を表す。 回転の角, 直角	長さやかさを任意単位で。 普遍単位を使い始める。	
3	線対称。 平面図形や立体図形の分類。	長さ, 容積やかさを任意単位で。 普遍単位。時間。	レベル 1~3, 小2まで
4	立体の作製。 線対称に移動。	測定値の解釈。単位正方形を数えることによる面積。	レベル 2~5, 小卒まで
5	角。三角形の内角の和。 平面図形の対称性。	英国法定単位とその換算。 見積もり。長方形の面積公式。	
6	立体の2次元表現。 四辺形の分類。交わる直線・平行線。コンピュータ活用。	円の周と面積, 直線図形の面積・体積の公式。整数倍拡大。	レベル 3~7, 中卒まで
7	平面でのピタゴラスの定理。 分数倍拡大・相似。軌跡。	平面図形や直角柱の長さ・面積・体積。測定誤差。速さ。	
8	合同・相似。 平面での \sin, \cos, \tan 。	次元を考えた周の長さ, 面積, 体積の公式の区別。	
さらに	\sin, \cos, \tan のグラフ, グラフの一般化。 平面や空間で \sin, \cos, \tan やピタゴラスの定理を。 形式的な幾何の証明, 三角形の合同条件。	円弧の長さや扇形の面積, 円柱の表面積, 円錐や球の体積。 目盛りの連続的性質の理解。	

3. 国家ニューメラシー・ストラテジーにおける「形・空間」に関する内容

国家カリキュラム(DfEE,1999)の記述に基づいて,1.ではその概要を,2.では「形・空間・測定」に関する内容をまとめた。これは,日本の学習指導要領に相当するものといえることができる。

国家カリキュラムに続いて,より具体的な内容も示した以下の著作がDfEEから公刊されている;

- ・国家ニューメラシー・ストラテジー; The National Numeracy Strategy(1999, DfEE)
- ・国家ストラテジー 第3主段階; Key Stage 3, National Strategy(2001, DfEE)

前者は,就学前から第6学年まで,後者は,第7から第9学年までの内容を具体的に示していて,それぞれ336ページ,386ページからなるA4版ルーズリーフ形式の大部なものである。

なお,前者の『国家ニューメラシー・ストラテジー』(1999)では,国家カリキュラムの「形・空間・測定」に関する内容が,「測定」と「形・空間」に明確に分けられ,問題例や取り上げる用語とともに述べられていることは興味深い。後者の『国家ストラテジー 第3主段階』(2001)の方は,国家カリキュラムと同様,「形・空間・測定」として書かれている。

(巻末には,『国家ニューメラシー・ストラテジー』の「形・空間」部分の全訳と,『国家ストラテジー 第3主段階』の「形・空間・測定」の空間図形の部分の全訳を示してある。)

<引用・参考文献>

国宗進(2001)「最近のイギリスの数学教育」『日本数学教育学会誌』第83巻第10号, pp.32-43.

国宗進(2006)「イギリスにおけるニューメラシーと数学的リテラシー」,長崎栄三代表『「科学技術リテラシー構築のための調査研究」サブテーマ1科学技術リテラシーに関する基礎文献・先行研究に関する調査報告書』国立教育政策研究所科学技術振興調整費報告書, pp.215-228.

小松郁夫(2000)「イギリス 教育改革の新たな展開」,黒沢・佐久間編『世界の教育改革の思想と現状』,理想社.

長崎栄三(1994)「イギリスの算数・数学教育改革」『国際理解教育と教育実践 算数・数学における国際理解教育』エムティ出版, pp.34-51.

長崎栄三(1999)「21世紀に向かうイギリスの算数・数学教育」『日本数学教育学会誌』第81巻第10号, pp.20-29.

藤田太郎(1999)「英国の国定カリキュラム」『九州数学教育学研究第6号』, pp.23-33.

Cockcroft. W. H. (1982), Mathematics Counts; Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools, London, Her Majesty's Stationery Office.

DfEE, England and Wales(1995), Mathematics in the National Curriculum.

DfEE(1999), Mathematics, The National Curriculum for England.

DfEE(1999), The National Numeracy Strategy: Framework for teaching mathematics from Reception to Year 6.

DfEE(1999), The National Numeracy Strategy: Mathematical Vocabulary.

DfEE(2001), Key Stage 3, National Strategy, Framework for teaching mathematics: Years 7, 8 and 9.

Lawton, D. (1996), BEYOND the National Curriculum, Hodder & Stoughton; 勝野正章訳(1998), 『教育課程改革と教師の専門職性』, 学文社.

第9章 イギリスの中等学校における幾何の授業

この章では、2005年9月に国宗進、熊倉啓之、藤田太郎の3名が行ったイギリス訪問調査のうち、9月28日の全日を使って行われたワイト島における中等学校での幾何の授業について報告する。この一連の学校訪問は、同地区指導主事 Wendy Brady 氏の詳細な計画に基づいて行われた。自らの乗用車を駆使して私ども3人それぞれに異なるプログラムを用意するという、心からの歓迎があったからこそ可能になった学校訪問であったことを初めに記しておきたい。

当日は、我々3名が、のべ4校、7つの授業を観察、授業後には授業者との議論を行うことができた。以下、授業ごとに報告する。なお、時程等は、本章末の表を参照。

1. 【授業1】—最大の体積を求める—

(1) 授業の概要

- 1) 学校・対象生徒: Carisbrooke High School, 第11学年生徒29名(男子8人, 女子21人)
Set 1 out of 7 Targeting grades A and B at GCSE, (10.35 - 11.35)
- 2) 授業者: Ms C.L. 観察者: 藤田太郎
- 3) 授業内容: 課題学習 GCSE Course Work (10%)

課題1: 車の値段や燃費などの一覧表を見ながらどの車を買うのが良いかを議論する問題

課題2: 正方形から四隅を切り取り、フタのない箱を作るとき、最大となる体積を求める問題

4) 授業の実際

<導入>

授業者の授業の説明後、8人の生徒がコンピュータールームへ向かった。生徒達はそれぞれに、課題の続きに取り組み始めた。基本的に個々の生徒が課題に取り組み、授業者は机間巡視をするという形式であった。

<展開> (主に課題2に取り組む生徒を観察)

前回の授業で $12\text{ cm} \times 12\text{ cm}$ の正方形で考えてみるように授業者が指示したためか、多くの生徒は $12\text{ cm} \times 12\text{ cm}$ の場合を考えているようであった。また、多くの生徒は体積の値を方眼紙の上で点をプロットしながら考えていたようであったが、これも授業者が指示したものと思われる。

そのうちの何人かの生徒は一般の場合(正方形の一辺の長さを $x\text{ cm}$, 切り取る四隅の一辺の長さを $c\text{ cm}$) の考察へと進んでいたが(図1), 体積が $c(x-2c)^2$ と表されるのを「納得」するまでかなり時間がかかっていたようである。また代数の計算技能がおぼつかないために、 $(x-2c)^2$ を展開することは授業者のアドバイス無しには出来ないようであった。

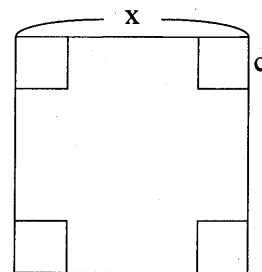


図1

式を展開した後、生徒は何をすべきかについて完全に困惑しているようであった。増減表を用いてグラフの概形を描くことなしに一般の場合を考えているために、授業者は帰納的に多くのデータから $c = x/6$ を導かせようとしていたものの、 $x = 13\text{ cm}$ などの場合では計算が煩雑になるために、うまく計算が出来ていないようであった。実際に計算に没頭して、本来の課題の目的を忘れていた生徒も見られた。

(2) この授業からの示唆

ア) 授業の導入で、音楽を聴きながら課題に取り組む生徒が多いこと（おそらく生徒からの提案であろう）が気になった。こういったことを認めるのは失敗ではないかと感じた。なぜならば、音楽を聴きながら課題に取り組む生徒は授業者や他の友人とのコミュニケーションを放棄しているように感じられたからである。

イ) 課題2の解決過程で、式 $c(x-2c)^2$ を展開した後に、何をすべきか生徒は完全に困惑しているようであった。彼らは top set の生徒であるということだが、そうであったとしても、課題は少し難しすぎるように感じた。また、 x の値をいろいろ変えて計算するのは面倒なので、エクセルなどの表計算ソフトを使えばもう少し効率的になるものと考えられる。

ウ) 授業者は「一般の場合まで考察することを目的としている。この問題は微分の導入にもなる」と言っていたので、以後の微分の学習につなげるアイデアが何かあるのかも知れない。一般化を考える場合は x と c のどちらを「変数」と見るかが重要であるが、授業者と生徒とのやり取りを見ている限りでは、生徒たちは c を「変数」と見ることはできないようであった。また授業者の「一般の場合を考えることは証明にもなる」と言ったことに対し「証明？代数で証明？」という生徒からの発言もあった。「証明」という概念が生徒にどのように捉えられているのか興味深い。

エ) この課題の意義を見出せない生徒が何人か見られた。例えば一人の生徒の「私は地理学を勉強したいのになぜこんな問題を解かなければならないの？」という質問に対し、授業者は「…フランスを大きな箱に入れるとかいう問題を考えるとか…」などと冗談で答えていたが、このような答えでは生徒を説得することは出来なかった。数学教師といえども、数学だけでなく他の関連学問分野に関する幅広い知識が必要なことを感じた。

2. 【授業2】—三角形の角—

(1) 授業の概要

1) 学校・対象生徒: Carisbrooke High School, 第9学年生徒27名(男子13名, 女子14名)

Set 3 out of 5 Target・Levels 5 to 6 on National Curriculum, (11.35 - 12.35)

2) 授業者: Mr C.T. 観察者: 藤田太郎

3) 授業内容: 三角形の角

4) 授業の実際

<導入> (10分程)

角を腕で表現する(図2を参照)。授業者の動作をまねしながら、鈍角、鋭角などの大きさの感覚を把握した。

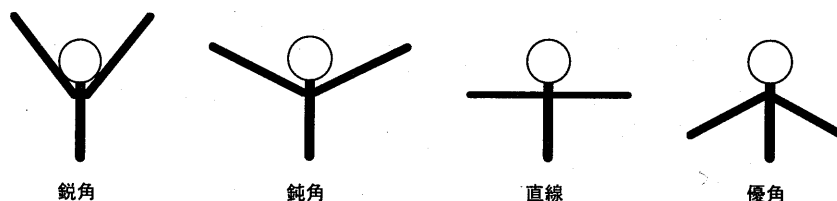


図2

<展開> (30分程)

一斉授業の形式で、授業者がメインの問題を説明した。そのねらいは、次の通りである。

目標: 三角形の内角の組み合わせ(例えば(鈍角, 鋭角, 鋭角))を列挙し, その理由を考える

ことができる。また、三角形の角の計算もできるようになる。

まず、インターラクティブホワイトボード上の三角形を用いて、鋭角、鈍角などの定義を確認した後、 $\angle ABC$ 、 $\angle BCA$ などの角の読み方について、授業者が問いかけ生徒が答えるというスタイルで行った。授業者と生徒とのやり取りを見ている限りでは、角の定義や角の記号 $\angle ABC$ の意味はよく理解しているように思えた。

その後、メインの活動となり、課題（三角形の内角の組み合わせを考える。そしてなぜそうなるのかを考える。）が書いてあるワークシートを配布した。生徒はペアで問題に取り組み、授業者はその間巡回視を行った。生徒は落ち着きがなく、問題に取りかかるまでに少し時間がかかっていた。

観察者も生徒と少し議論をしてみた。何人かの生徒は課題の意味が分からないようであったが、以下のようなやり取りをするうちに課題の意味はつかめたようであった。

生徒 A：「…英語話することができる？今日の課題、意味が分からないんだけど…」

観察者：「例えば鈍角とか鋭角は分かるよね…鈍角を一つ描いてみて。」

(図 3) もう一つ鈍角を使って、三角形は描ける？」

生徒 A：「…描けるんじゃない…あれ、描けない？」

生徒 B：「描けるよ」

観察者：「鈍角の定義は？」

生徒 A：「えーと…90度より大きくて180度よりも小さい？」

観察者：「そうだね、三角形の内角の和は何だったっけ？」

生徒 A：「180度、あ、だから鈍角を二つ使ったら…三角形は描けない」

生徒 B：「あ、そうか、描けない」

観察者：「そう、だから鈍角を使った場合の角の組み合わせは…」

生徒 A：「鈍角と鋭角と…鋭角？」

観察者：「そう、こんな風に、他の角の組み合わせを考えてごらん。」

また別の生徒は、優角を使って三角形が描けるかどうかを質問してきた。これは、三角形の角という場合はどの角を指しているのかを考えさせる良い機会になった。

生徒 C：「ねえ、優角を使って三角形って描けるんだっけ？」

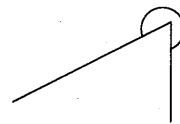


図 4

観察者：「えーと、優角って何だったっけ？」

生徒 C：「ほら、これ (図 4 を描く)」

観察者：「それで三角形は」

生徒 C：「ほら、描けるよ (図 5 を描く)」

観察者：「三角形の角ってどっちを言うんだっけ？ 外側？内側？」

生徒 C：「あ、そうか、中の方が…そうか、これは全部…鋭角か」

生徒は例えば、内角の組み合わせとして、一つの三角形には鈍角が一つしかないが、その理由を鈍角の定義から考えていた。

<まとめ> (10分程)

授業者がインターラクティブホワイトボードを用いて図を動かしながら、再び一斉授業の形式で授

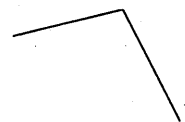


図 3

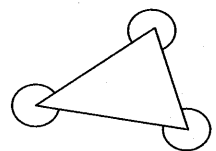


図 5

業のまとめを行った。授業者はまず鋭角を3つ使って三角形を描けるかどうかを問いかけた。

授業者：「鋭角を3つ使って三角形は描けるかな？」

生徒D：「正三角形！」

授業者：「(ホワイトボード上で三角形の頂点を一つ動かして正三角形を作る) …では正三角形の定義は？」

生徒D：「3つの辺と角が全部等しい」

授業者：「そうだね、じゃあ角の大きさは…」

生徒D：「60度…」

授業者：「そう、だから鋭角を三つ使って三角形を描くことはできるね。じゃあ正三角形以外で鋭角を3つ使って三角形を描くことは…(ホワイトボード上で三角形の頂点を1つ動かして角の大きさを変える)出来るよね。」

このようなやり取りが続き、二等辺三角形(鋭角, 鋭角, 鋭角の場合), 直角三角形とまとめていくが、途中角の大きさの計算をさせたり対称軸の話になったりと、授業がまとまっていらないように思えた。結局時間が来てしまい、角の組み合わせを全て列挙し、なぜその組み合わせで三角形が描けるのか、また描けない組み合わせは何か、それは何故か、という授業の目標のまとめには至らなかった。

(2) この授業からの示唆

ア) 導入では、体を使ったゲーム形式で楽しいものであったが、10分は長過ぎるように感じた。生徒が角の大きさの感覚を学ぶというよりも、ただ体を動かして遊んでいるようにしか見えなかった。

イ) 展開時における上記で述べたような生徒とのやり取りを通して、彼らはそれなりに論理的に考えることが出来るということが分かったが、これだけの課題で30分というのは長過ぎるように思えた。生徒の集中力も持たないようであった。生徒は課題の意義が見いだせないようであった。

ウ) イギリスでは授業研究を通して、お互いの指導案の質を高めたり生徒が意欲を持って取り組む問題を作成したりする習慣がないために、問題が少し無味乾燥になっている感がある。また、生徒の考えを発表させる機会を与えるように授業を構成すれば、もう少し生徒は整理して考える意味を見いだすことが出来たかもしれない。自分の考えをうまく人に伝えるためには、ある程度情報を整理しなければうまくいかない。

エ) この授業では、「自分の考えを書く」ということには重点が置かれていないようであった。つまり、自分の考えを論理的に「口頭で説明する」ことは出来るが、それを整理して「書く」ということは、生徒のノートを見る限り出来ていないようであった。「推論 (geometrical reasoning)」という用語は最近イングランドの図形指導に再導入されたが、この指導に関して、イングランドの授業者はかなり困惑しているようであった。日本に比べて研究の蓄積がないことがその理由であろう。

3. 【授業3】—多角形の角—

(1) 授業の概要

1) 学校・対象生徒: Carisbrooke High School, 第9学年生徒29名(男子12名, 女子17名)

Set2 out of 5, Target・Levels 6 to 7 on National Curriculum

2) 授業者: Ms C.L. 観察者: 藤田太郎

3) 授業内容: 多角形の内角・外角の性質

4) 授業の実際

<展開>

導入は特になく、インタラクティブホワイトボードで、問題を提示した(図6)。そのねらいは、次の通りである。

目標: 正多角形の内角と外角を求め、図と言葉でその証明(reasoning)を正当化し、推論し、説明する。

正方形, 正六角形, 正十二角形では隙間がないのに, 正三角形, 正六角形, 正十二角形では隙間が出来るという問題から, 多角形の内角を求めたいという動機付けを図っている。

全体的に騒々しいクラスで, 提示された問題は「おやっ」と思わせるものであったが, 生徒はあまり問題に集中していないようであった。まず, 授業者は問題を概観したあと, 正方形と正六角形の内角の大きさを確認した。その後, 敷き詰めができるということは各頂点を合わせると360度になるためであり, そこから正十二角形の内角の大きさを導こうとしていたが, 生徒の反応は鈍く, そこで課題の導入となった。また「敷き詰め Tessellation」という用語の確認もなされた。

メインの活動は, 色々な正多角形の内角と外角の大きさを求め, その求め方を説明をするというものであった。まず, 正六角形の場合が例題として取り上げられる。授業者は図7を利用して正六角形の内角と外角を求めた。

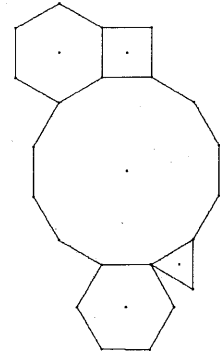


図6



図7

図7に関する生徒の考えは, 正六角形の角は「正三角形の角が2つ分だから, 内角は120度, 外角は $180-60$ で60度」, 「四角形が2つあるから, $360+360=720$, それを6で割って120度」, 「上右図を用いて, それぞれ内角は120度, 外角は60度」, というものであった。この過程で, 内角と外角の定義もそれぞれ確認されている。なお, 六角形を四つの三角形に分けて..., というやり方はまったく取り上げられなかった。

次に五角形の場合が取り上げられ, 同じようなアプローチ, すなわち中心角を5等分して正五角形の内角と外角を求めている。ここで授業者は, 見た目で判断せずに論理的に解答を導きだすように発問をしていた。生徒もそれなりに論理的に思考しようとする力はあるようだ。しかし角度を確かめる際にコンピュータを使うなど, 少し詰め甘さを感じた。

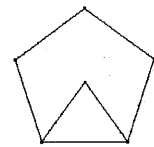


図8

授業者: 「これは正三角形かな？」

生徒(数人): 「違う…」

授業者: 「どうして違うの？」

生徒A: 「辺の長さが違うかなあ(見た目で判断している)」

授業者: 「(中心にある角の部分の指して) これは60度? $360 \div 5$ だから…何？」

生徒(数人か): 「72」, 「75」

授業者: 「72度ね, では五角形の内角は？」

生徒(数人か): 「60度」, 「58度」

生徒 B:「 $180-72$ は 108 だから、それを 2 で割って 54 度…」

授業者:「どういう仮定を使っているの? どうして 2 で割ることができるのかな」

生徒 C:「二等辺三角形?」

授業者:「そうだね、二等辺三角形だから底角が等しい、じゃあコンピュータで角度を測って確かめてみよう…」

以上のやり取りの後、次の活動に取り組んだ。授業者は画用紙を配り、自由に正多角形を円定規を使ってかかせた。さらに、その内角と外角を分度器を用いずに計算で求め、どうやって求めたかの説明も画用紙に書くように指示した。このクラスも生徒は落ち着きがなく、問題を始めるまでに少し時間がかかっている。授業者はなかなか課題に取り組もうとしない生徒に指導しながら机間巡視した。

授業者:「じゃあ正八角形の場合を考えてみなさい、こうやって円分度器で円を描いて… 360 を 8 で割ると何?…」

生徒 D:「…何だっけ」

授業者:「じゃあ、正八角形だから正方形を描いてそれをまた 2 つに分ければいいでしょう? そして内角と外角の大きさを求めて画用紙の上にその説明も書きなさい。」

あまり真剣に問題には取り組んではないようであるが、何とか正八角形の場合を説明しようとしていた。ここでも「口頭では説明出来るが、書いて説明することが出来ない」という生徒が多いようであった。例えば、観察者は以下のようなやり取りを行った。

生徒 E:「えーと、えーと、ほら、内角は…まず 360 度を 8 で割っているから…角は 45 度…だから…内角は… 135 度?」

生徒 F:「何で?」

生徒 E:「え、ほら…だから 135 度…」

生徒 F:「えー、何で?」

観察者:「うーん、そこ(中心の角)が 45 度で、これは二等辺三角形なんでしょう、それで残りの角の大きさは $180-45=135$ …結局ここに同じ角があるんだから(図 9 を参照)」

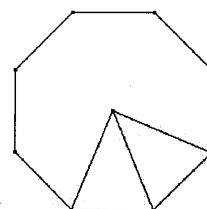


図 9

生徒 E:「そう、だから結局 135 度、それで外角は… 45 度、それは分かる」

観察者:「じゃあ後はそれを言葉で書けばいいだけでしょ?」

生徒 E:「…それは駄目、頭じゃ分かっているのよ、だけど、えーと、駄目、頭じゃ分かっているんだけど、それを書くとするとちょっと違うのよね…」

<まとめ>

再び最初の問題に戻って正十二角形の角度について議論しているときに授業の終了のチャイムが鳴り、授業はまとまらないまま終わった。

(2) この授業からの示唆

ア) 導入の問題には工夫が見られたが、結局メインの活動は正多角形の内外角を求めるという平凡な展開に終わってしまったように思える。正多角形を $(n-2)$ 個の三角形に分けて内角を求める生徒は一人もいなかった。

イ) 自分の考えを書くということにそれなりに重点は置かれていたが、授業者が一つ推論の例を明確に示す必要があったかのも知れない。また、生徒に考えを發表させる機会を与えるように授業を構成する必要があると感じた。多くの生徒はなぜ説明しなければならないのか、つまり論証の意義を感じてはいないようであった。論証指導に関してイングランドでは模索段階であり、これからどう研究

が進められていくのか興味深い。

4. 【授業4】—数列—

(1) 授業の概要

- 1) 学校・対象生徒: Bishop Lovvet Middle School, 第8学年生徒30名, Set 1, (10.55・11.55)
- 2) 授業者: Mr. G. O. 観察者: 熊倉啓之
- 3) 授業内容: 数列
- 4) 授業の実際

<導入>

以下のような数列の一般項の式を順に示して, それぞれの初項, 第2項, 第3項, …を答えさせた。また, 「3ずつ増加する」「1, 3, 5, …のように増加する」などの変化の規則についても確認した。

$$\cdot 3n+2 \quad \cdot n^2 \quad \cdot n^2+2 \quad \cdot 2n^2-2$$

授業者と生徒との間で, やり取りがテンポよくなされていて, 約10分で終わっている。

<展開>

次のような「課題」を生徒に提示した。

たてに3つ並んだ正方形の周りに, まず同じ大きさの正方形を並べる(図1)。

このとき並べた正方形は, 全部で12個である。(生徒に聞いて, 答えさせる。)

次に, 図1の周りに, 同じように正方形を並べる(図2)。

このとき並べた正方形は, 全部で20個である。(生徒に聞いて, 答えさせる。)

同じように, 正方形を並べていくとき, 規則を調べて, 周りに並べる正方形の数を表に示さない。

また, 最初に縦に並べた正方形の数を, 3個ではなく4個の場合についても, 同じように調べなさい。

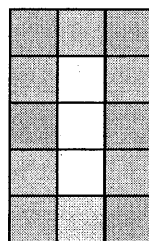


図1

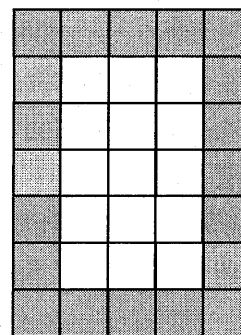


図2

課題を提示した後, 授業者は生徒に正方形のマスのついた用紙を配り, そこに, 図1, 図2, …のように次々と正方形を並べてかいて, 並べた正方形ごとに色を塗るように指示した。

生徒は, この作業にすぐに取り組み, 正方形の数を数えて表を作った。作業が終わった生徒は, 授業者からもう1枚用紙をもらい, 最初に正方形がたてに4つ並んでいる場合について同じように作業に取り組んだ。活動の時間は15分~20分程度であり, どの生徒も, 真剣に作業に取り組んでいた。

しかし, 生徒によって進度は異なっていて, 活動時間内に終了した生徒もいる一方で, 最初の課題の色塗りに時間をかけ過ぎて表を作成していない生徒もいた。なお, この課題について, 全体での答え合わせは行われなかった。

<まとめ>

授業が30分経過したところで, 授業者は, 数列の内容に関する演習プリントを配り始めた。この

とき、1つの問題について、5分ほどかけて補足説明を行った。すでに、「課題」を終えている生徒は、さっそく演習プリントに取り組んでいた。またその後、採点されて点数のついたプリント（小テストのようなもの）を生徒に配布した。

さらに、生徒全体に対して、「本日の課題について、質問はあるか」と聞くと、1人の生徒が手を上げ、教卓に行って個人的に指導を受けた。続いて、4人の生徒が次々と授業者のところに質問に行った。最後に、演習プリントを宿題としてやってくるように指示して1時間の授業は終了した。

(2) この授業からの示唆

ア) イギリスの授業の多くは、導入部分 (An oral and mental starter) , 展開 (The main teaching activity) , まとめ (A final plenary) の3段階で構成される。国宗 (2001) によれば、導入と展開の内容は、数年前の授業観察では必ずしも一致していなかった。しかし、今回の授業では、明らかに関連が図られていた。この点について、後に Ms Wendy Brady に伺ったところ、教育センターによる指導の成果であるとのことであった。

イ) 展開で実施した課題の答え合わせは行わなかった。実際、授業が終わっても、課題で求められている表を作っていない生徒が何人か見られた。どれだけの生徒が、この課題を理解したのか多少の疑問が残る。分からない生徒は、手を上げて授業者に聞くしかないように見受けられた。授業者に聞きに行った生徒に、授業後に「今日の課題は難しかったか?」と聞いたところ、その生徒は「難しくなかった」と答えてはいたが、実際のところは不明である。

ウ) 本時の課題では、数列の規則性を発見して表を作成していたが、規則性が成り立つ理由については考察しなかった。日本では、数列や関数の授業において、規則性が成り立つ理由についても必ず扱うことと比較すると、大きな違いがある。

エ) 今回の学校は習熟度別クラスを採用していて、参観したクラスは、Set 1 (一番レベルの高いクラス) であった。授業が終わった後に、授業者にこのクラスのことについて聞いたところ、1週間ごとに数名の生徒が入れ替わるという。この授業で生徒全員が真剣に取り組んでいたのは、このような事情も影響しているのかもしれない。その一方で、生徒の進度の違いも目に付いた。授業が終わった段階で、宿題になった演習プリントを既に半分程度終えた生徒もいれば、展開の課題がまだ終わっていない生徒もいた。同じ Set 1 でも、学力差は結構あるように感じられた。

5. 【授業5】—四角形の分類—

(1) 授業の概要

- 1) 学校・対象生徒: Medina High School, 第9学年生徒20名, (13.55・15.10)
- 2) 授業者: Ms J. G. 観察者: 熊倉啓之
- 3) 授業内容: 四角形の分類
- 4) 授業の実際

<導入>

授業が始まる前に、机を向かい合わせに並び替えて、3~6人ずつの4グループに分かれた。授業開始直後、各グループに1組28枚のカードが配られた。カードには、例えば次のカード1、カード2のように書かれている。

カード1を最初のカードにして、カード1の最後らに書いてある質問の答えのカードを探して、次に並べる。これを繰り返して28枚全部のカードを1列に並べるように、指示を出した。各カードの質問は、例えば次のようなものであり、図形に関する内容が多く、特に、展開の授業内容にかかわる対称

軸に関する質問が多い。一方で、図形とは関係のない質問もある。

(Start Card)

I have

A Square

follow me if you can

tell me how many lines of symmetry it has

カード 1

I have

4

follow me if you can

another shape with four right angles

カード 2

(カードの質問)

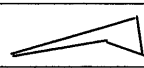

- ・正方形の対称軸の本数は何本か？
- ・4つの直角をもつ別（正方形以外）の図形は？
- ・長方形の対称軸の本数は何本か？
- ・アルファベットの2番目の文字は何か？
- ・(Bという)文字の対称軸は何か（水平な線か、垂直な線か）？
- ・水平な対称軸を持つ別（B以外）の文字は何か？
- ・2本の対称軸を持つ文字は何か？
- ・A=1, B=2などのように考えたとき、Hを表す数は何か？ など

導入の課題としては面白いものであったが、生徒はあまり集中して取り組んでいなかった。生徒同士で関係ない話をする場面も見られた。しばらく時間をとった後、答え合わせが行われた。

<展開>

まず、いろいろな四角形（正方形、長方形、ひし形、たこ形、平行四辺形、台形）を生徒にあげさせて、その図を授業者が黒板にかいた。次に、特に正方形を取り上げて、直角が4つあり、平行な2直線の組が2組あることを確認した。

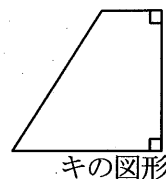
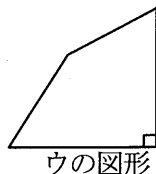
その後、黒板に次のような表を書き、表の2箇所、それぞれ正方形と凹四角形の図をかき入れた。そして、「表の残りの部分に、どのような四角形が入るか考えてみよう」と投げかけて、10分程時間をとって考えさせた。（表中のア～セは、筆者が記入）

		pairs of parallel lines		
		0	1	2
right angles	0		ア	イ
	1	ウ	エ	オ
	2	カ	キ	ク
	3	ケ	コ	サ
	4	シ	ス	セ 

生徒が考えている間、授業者は机をまわって、生徒に適宜ヒントを与えていた。

考える時間をとった後、表の各部分にどのような四角形が入るかについて、生徒とのやりとりを通して、次のような結果になることを確認した。

- ア ～ 台形, イ ～ 平行四辺形,
 ウ ～ 直角を1つもつ四角形, エ ～ なし, オ ～ なし,
 カ ～ 直角を2つもつ四角形 (授業では「なし」とした), キ ～ 直角を2つもつ台形,
 ク ～ なし, ケ ～ なし, コ ～ なし, サ ～ なし,
 シ ～ なし, ス ～ なし, セ ～ (正方形以外に, 長方形)



このとき、図形が存在しない箇所については、その理由についても生徒に説明を求めた。その際、例えばケ、コ、サの図形が存在しないことについて、生徒から次のような説明がなされた。

「直角が3つであるような四角形は、4つ目の内角も 90° になってしまうため、存在しない。」
 その他の部分の図形が存在しない理由については、生徒から発言がなかったため授業者が説明した。
 <まとめ>

いろいろな四角形の図がかいてあるカードを1枚ずつ、全員の前に提示して、その四角形の名前と性質を確認した。時間がなかったためか、授業者の方ですべて解答して、授業を終えた。

(2) この授業からの示唆

ア) 本時の授業のような、四角形を「直角の数」と「平行な2直線の組の数」で分類するような活動は、日本の現行の学習指導要領の下ではあまり行われていない。日本の教科書の記述を調べてみると、いろいろな四角形の定義と性質、および包摂関係のヒントとなるような記述はあるものの、四角形を分類するような活動はない。分類する活動は、日本の小学校算数科において、「仲間わけ」として行われているが、例えば、「平行な2直線の組の数によって、台形と平行四辺形を分類する」のように、1つの観点だけで分類している。

今回の授業を参観し、2つの観点を合わせて四角形を分類するような活動は、四角形を形成する上でも、有効であると感じた。National Strategy Key Stage 3のExampleとして、「平行な2直線の組の数」と「等しい辺の数の組」の2つの観点によって四角形を分類する活動が記述されている。今回の授業は、この活動を参考にしたものと考えられる。

イ) 表にあてはまる四角形を探す場面において、それにあてはまる四角形が存在しないものがいくつかあり、存在しない理由について生徒に考えさせていたのが印象的であった。日本の数学の授業では、解が存在しないような問題はあまり扱われないが、今回のように、解が存在しない問題を扱い、その理由を考えさせる学習は、数学的に推論する活動としても有効であると考えられる。

ウ) 授業全体を通して、集中力が欠如していた生徒も少なからず見受けられた。あとで授業者に聞いたところ、いつもと違ったグループ活動にしたからだとの説明があった。さらに別の機会に Ms Wendy Brady に伺ったところでは、参観した学校の生徒は、全般的に学習意欲に欠ける傾向があるとのことであった。授業中に集中しない生徒がいると、その生徒を注意して、教室の前のチェック用紙に生徒名を記入した。3回以上注意されてチェックされると罰則規定があるとのことである。授業に少しでも生徒が集中するように、授業者が様々な工夫をしている姿が読み取れた。

エ) この授業では、授業者以外にアシスタントが1名いた。後に伺ったところでは、教員免許は持っていないが学校が補助をもらって雇っているとのことであった。日本でも、教師を目指す大学生が

援助に入るサポーター制度などを実施しているところもあるが、授業者をサポートするこのような環境を整えていくことも、重要な課題であると感じた。

6. 【授業 6】—四角形の分類—

(1) 授業の概要

- 1) 学校・対象生徒: Osborne Middle School, 第8学年生徒 13名 (男子6名, 女子7名),
Set 4 out of 4, (11.40・12.35)
- 2) 授業者: Ms L.P. (数学科主任) 観察者: 国宗 進
- 3) 授業内容: いろいろな四角形の分類
- 4) 授業の実際

<導入> (10分間)

冒頭のおよそ10分間を使って、図形用語を確認した。

授業者が「鋭角をかきなさい」と問うと、各生徒は解答を小ホワイトボードにかき、それを授業者に向けて見せる。質問ごとに正解であったかがチェックされる。鋭角に続いて、平行線、垂直な2直線、鈍角、交わる2直線を取りあげた。また、対頂角は等しいことを確認する。授業者は、図をフリーハンドで正面の大ホワイトボードにかきながら正解を確認した。

同様の方法で、正方形、二等辺三角形、五角形、六角形、正方形、台形をかかせ、その図を確認した。

<展開>

① 問題 1 (17分間)

図1, 図2にそれぞれ示した台形, 直角二等辺三角形の紙を各生徒に1組ずつ配布する。

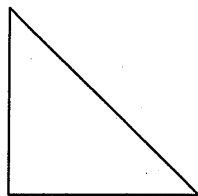


図1

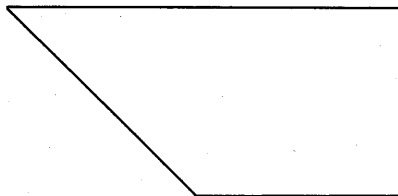


図2

直角をつくる2辺の長さが2の直角二等辺三角形について、等しい辺の部分、及び直角のしるしを入れさせ、その示し方を確認する。続いて、台形についても、等しい辺の部分、直角、及び平行のしるしを入れさせ、その示し方を確認する。

[問1] 2つの図形を合わせて、長方形を作ろう。(図, 省略)

[問2] 図3のように2つの図形を合わせてできた図形は何か。

S「台形」, T「どうしてこれが台形なのかな」の問いに対して、「辺が等しい」「対辺が平行だから」という回答があった。

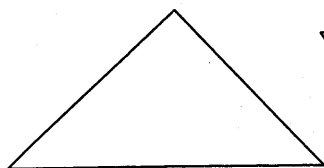


図3

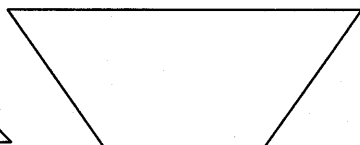


図4

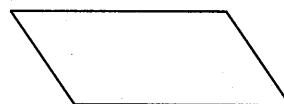


図5

[問3] 図4のように2つの図形を合わせてできた図形は何かな。

直角三角形ができること、2辺が垂直であることも確認した。

[問4] 図5のように2つの図形を合わせてできた図形は何かな。

S1「台形?」、S2「垂直?」、S3「長方形?」、Tが指名してS4「平行四辺形」、直角三角形ができること、2辺が垂直であることも確認した。

この後、Tが、対称軸に折り目を入れてたこ形 (kite)、ひし形 (rhombus) を紙で示し、正方形、長方形、平行四辺形、たこ形を括弧でまとめ、総称として四角形 (quadrilateral) と呼ぶことを述べた。そして、八角形 (octagon)、五角形 (pentagon)、六角形 (hexagon)、十角形 (decagon) の名前を知らせた。

② 問題2 (10分間)

大小2つの正方形の形の紙(薄いが腰はある)を配布し、それらを重ねた部分にできる図形をいろいろと考える。

長方形、正方形、直角三角形ができることを確認した後、ひし形はどうしてできないのかを全体で考えた。だが、その理由をはっきりとは説明されなかった。

<終盤> (13分間)

縦2、横3の長方形をかき、 3×2 と式を書く。方眼をスクリーンに映し、6個の正方形があることを確認した。これを並び替えると、一辺が2の正方形(2^2)と単位正方形が2つになる。このように、数をいろいろな正方形の並びとして表すことを、 4×2 、 5×3 、 6×3 について考える。だが、子ども達は 2^2 から抜け出られず、問題の意味がなかなか伝わらなかった。この後、1枚のプリントが宿題として配布された。

(2) この授業からの示唆

ア) 取り上げた問題のよさ

この授業では、上に示したように、2つの中心的な問題が追究された。それらは両者とも、紙で作った図形を実際に操作して考えることができるものであった。問題1では直角二等辺三角形と台形を、問題2では大小2つの正方形を、一人一人の子どもが思い思いに操作していて、この2つの問題のよさが十分に感じられた。なお、この問題は、National Strategy (2001)にあるとの話であった。実際、授業で使われた図がかかれたOHPシートも、その周辺物として用意されたものである。実際の活動が伴うこのような問題例は、多いに参考にしたい。

その展開に関して、授業が紙を単に操作するだけにとどまっていたことには疑問が残った。子どもが説明できる範囲で、なぜそうなのかの理由を考えるとところまでは求めていないように見受けられたからであり、議論が直観的な考察にとどまっている感があつた。

イ) 図形を関連づける学習

上に述べた授業展開からも読みとれるように、いろいろな四角形を取り上げるねらいは、それらの包摂関係を学習することにあるのではなく、それを使って図形を互いに関連づけて観ることにあつたと考えられる。それまで個々別々に学習してきた長方形やひし形などのいろいろな四角形を、「四角形」として統合的にとらえることができればよしとしているのであろう。日本の算数・数学教育における四角形の包摂関係の扱いは、現代化以降、改訂のたびに後退の一途をたどっているが、この授業展開程度の直観的な扱いを小学校高学年で行うことを考えてもよいであろう。

ウ) 数の合成・分解を図形の合成・分解と結びつける

終盤の数と図形とを結びつける問題は、それ自体興味深いものであつたが、その意味が子どもには

なかなか伝わらなかった。

エ) 1時間の学習内容の多さ—授業展開のパターン化—

授業4についての考察でも述べたように、授業は、導入部分 (An oral and mental starter) , 展開 (The main teaching activity) , まとめ (A final plenary) の3段階で構成することが好ましいと National Strategy で述べられている。その是非はおくとしても、3段階が意識され過ぎているのであろうか、1時間当たりの学習内容が大変多い。この授業内容の場合、日本では2,3時間の扱いとなろう。このことは、国宗 (2001) の報告でも既に指摘されている。

どんな具体物を用意して活動させるか、またどこで何を考えさせるのかを事前に検討すれば、授業案の段階でそう膨大な内容が1時間の学習内容として盛り込まれることはないであろう。

7. 【授業7】—平行線と角—

(1) 授業の概要

- 1) 学校・対象生徒: Medina High School, 第9学年生徒 32名, (13.55・15.10)
- 2) 授業者: Ms K.B. (数学科主任) 及び2名の TT, 観察者: 国宗 進
- 3) 授業内容: 平行線と角
- 4) 授業の実際

<導入> (17分間)

三角形の内角の和が 180° であることを使って角の大きさを求める問い、また、直角三角形の直角ではない2つの内角の和 90° であることを、黒板でのフリーハンドの図と口頭で復習する。

<展開> (48分間)

平行線を錯角によって概念規定。次に対頂角は等しいことを確認。さらに平行線の同位角は等しいことを確認した。以上ここまで、授業の冒頭から25分間、猛スピードで口頭でのやり取りで進行した。数人の生徒が若干落ち着かないようにみえた。

この後、教科書を使って問題練習に入る。生徒は互いに教えあっている (10分間)。

4問ほど、黒板を使った説明によって答え合わせ (10分間)。

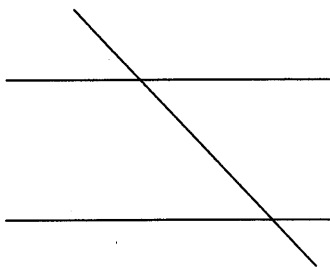
ここで、代数的な問題 (図, 参照) について、子どもとの問答による解説 (5分間)。

この後、再び教科書を使った問題練習。先ほどと同様に、生徒は互いに教えあっている (5分間)。

演習の最中に、授業者は出席をとっている。

<終盤> (10分間)

1問だけ黒板を使った説明によって答え合わせの後、3つの内角が x, t, w であって x の外角が y である三角形について、「 $t+w+x=180$, $x+y=180$, よって, $t+w+x=x+y$, $t+w=y$ 」の式変形を示し、「1つの外角は、それと隣り合わない2つの内角の和に等しい」と口頭でまとめる。



(2) この授業からの示唆

ア) 角と平行線に関する内容は、生徒にとって比較的理解しやすい内容であり、また角の大きさを

求める問いによってその理解度も確かめやすい内容ではある。この授業は、終始一貫して、授業者のかなり一方的な解説で授業が進んでいき、生徒が思考する場はほとんど用意されていなかった。そのためであろうか、学級全体として授業に望んでいたのは初めの10分間程度であり、その後は授業者がたびたびしっかり取り組むように注意を与えていた。授業者にとっては何でもない内容ではあるが、それをいかに生徒が理解していくのかに対する意識が欠けているように感じられた。

イ) 角の大きさを x, t, w …とし、それらの関係を式で表して、あとは代数的に計算処理をして図形の性質を得るという展開がみられた。代数的にはきれいな処理になるが、それが逆に図形のきれいさや論理展開のわかりやすさの点ではマイナスに働いているように感じられた。もっと図の上で等しい角の部分等を対応させて説明する必要があるだろう。

以上、藤田、熊倉、国宗がそれぞれ観察した7つの授業に関してまとめた。なお、ワイト島に関する社会事情について、Wendy Brady は次のように述べていた。

- ・生徒は島の外に出たがらない。したがって、大学に行ったりいろいろな仕事に就いたりするなどに対する目標意識が弱く、学習の意義を見出せない生徒が多い。
- ・大学に進学しても、大学で得た知識や資格を生かすことが少ない。結局は島に戻ってパブで仕事をしようとする生徒も目に付くとのことである。
- ・大きな産業はなく、観光客に頼っているところが大きい、刑務所が2つ。島としてはもう少し企業などを誘致して活気を取り戻したいところだという。

<引用・参考文献>

国宗進(2001)「最近のイギリスの数学教育」『日本数学教育学会誌』第83巻第10号, pp.32~43.

DfEE(1999), Mathematics, The National Curriculum for England.

DfEE(2001), Key Stage 3, National Strategy, Guide to the Framework.

資料: 当日の行程表

07.30 Leave Waterloo arrive Portsmouth Harbour 09.09 – walk to front of train and down slope to Wightlink Ferry		
9.15 Catch the ferry to Ryde Pier Head where I will meet you when it arrives at 9.33.		
T. Fujita	H. Kumakura	S. Kunimune
Carisbrooke High School 11-18 School 10.35 – 11.35 a year 11 class doing coursework – open box (top set) teacher Catherine Linsell – 2 nd in Mathematics	10.55 – 11.55 Bishop Lovett Middle School – Year 8 class	11.40 – 12.35 Osborne Middle School – Year 8 lesson with Leah Pecile – Head of Mathematics
11.35 – 12.35 year 9 class Chris Tagart – Head of Mathematics	Talk to teacher about lesson – collected 12.15 by Wendy Brady	Talk to teacher about lesson –collected 12.45 by Wendy Brady
12.35 – 1.35 lunch and talk to Mathematics staff	Lunch with WB on route to Medina High School	
1.35 – 2.35 year 9 Catherine Linsell 2 nd in Mathematics	Medina High School 1.55 – 3.10 Year 9 lesson Jane Griffiths	Medina High School 1.55 – 3.10 Year 9 lesson Karen Begley – Head of Mathematics
Wendy Brady collects T. Fujita from Carisbrooke High at 2.40	Talk to teacher about lesson – collected by Wendy Brady at 3.30	Talk to teacher about lesson – collected by Wendy Brady at 3.30
David Pettitt Strategic Director of Children's Services meets with professors at Thompson House Wendy Brady to debrief about the Day with all three		
Wendy Brady takes back to Ryde Pier Head and travels with Professors to Portsmouth Harbour		
Wendy Brady and Husband invite all three to share a meal near Portsmouth Harbour Station and either see them on to a train back to Waterloo		

第 10 章 小中高の接続からみた図形教育の改善

この章では、第 1～第 9 章の考察に基づいて、小学校算数、中学校数学、高校数学の接続からみた図形教育の改善点をまとめる。

1. 学習の段階とその特徴

第 1 章で述べた学習指導に関して改善が望まれている点や、それ以降の章で述べた授業実践に基づく子どもの理解の状況等を考慮に入れて、小中高を見通した図形学習の段階を表 1 に示した第 I 期～第 III 期に分けてとらえることにする。これは、戦後の算数・数学科における内容の学年配当を基本にして、第 1～第 12 学年までを 4 年ごとに大きく区分したものである（この区分は、学習内容に関するものであって、学校制度の変更を提案するものではない）。

これらの期ごとにみることによって、特に第 I 期、第 II 期の到達目標が明確になる。また、第 II 期のあり方を考えることが小学校と中学校の接続を検討することになり、第 III 期のあり方を考えることが中学校と高校の接続を検討することになる。

表 1 学習の段階とその特徴

区 分	学 年	区分の特徴付け
第 I 期	小 1～小 4	日常事象と算数。整数の集合での四則の定着。
第 II 期	小 5～中 2	代数や幾何、関数・確率・統計の世界へ。1 次の世界の理解。
第 III 期	中 3～高校	代数と幾何、解析の世界へ。2 次の世界へ踏み出しその理解。

2. 各期における図形指導

表 1 に示した区分に従って図形に関する学習目標を示すと、表 2 のようになる。

また、具体的な指導内容を一覧表にまとめると、表 3 を得る。表 3 で、第 II 期中盤からは次第に数学的色彩が濃くなるので、横軸は第 I 期とは別の区分にしてある。

表 2 図形に関する学習目標による、各期の特徴付け

区 分	図形の学習内容による特徴付け
第 I 期	<ul style="list-style-type: none"> ・単一の平面図形の概念を理解する。 ・直方体・立方体を中心とした身の回りの立体について理解する。
第 II 期	<ul style="list-style-type: none"> ・図形の合同や相似という関係概念を理解する。 ・数学的推論能力を育成する。 論証の意義を理解する。 ・柱体・錐体について理解する。 ・投影する、切断する、展開するという操作能力を育成する。
第 III 期	<ul style="list-style-type: none"> ・図形に関する内容を代数的に処理する能力を伸ばすとともに、そうすることの意義を理解する。

表3 図形に関する指導内容の概略

[第Ⅰ期]

学年	重点	考察の対象/構成要素等		関係把握	計量(量と測定領域)	調べ方、操作活動
		平面	立体			
小1		身の回りのものの形				<ul style="list-style-type: none"> 立体の観察、構成・分類 立体の中にある平面図形
小2	単一の図	三角形、四角形、正方形、長方形、直角三角形/直線、直角	箱の形/面、辺、頂点(構成要素)	辺の相等	長さ m, cm, mm かさ l, dl, ml	<ul style="list-style-type: none"> 観察、分解・構成 展開 箱の分解と箱作り 【小2, 小3年のそれぞれで、うまい場面を用意して、
小3	形概念の理解	二等辺三角形、正三角形/角 円/中心、半径、直径、(回転の角)	球	角の相等 作図を通して二等辺三角形と正三角形の関係	長さ km 重さ g, kg *角の大きさ [度]	三角形、四角形、正方形、長方形、直角三角形、二等辺三角形、正三角形/直線、直角】
小4	解	台形、平行四辺形、ひし形/対角線	立方体、直方体	平行、垂直 立体とその見取図、展開図	面積 c m ² , m ² , k m ² 長方形、正方形の面積	<ul style="list-style-type: none"> 見取図で表現する、展開してみる

[第Ⅱ期]

		平面	空間	調べ方、操作活動	
小5	図形の関係の理解～合同	<ul style="list-style-type: none"> 図形の合同、三角形の決定 円周、円周率～正六角形、簡単な扇形 		三角形、平行四辺形、台形、ひし形、円の面積 体積 cm ³ , m ³ 直方体、立方体の体積 速さ、平均	<ul style="list-style-type: none"> コンパスの役割 ずらす、回す、裏返す
小6		<ul style="list-style-type: none"> 線対称、点対称 拡大図、縮図 	<ul style="list-style-type: none"> 角柱、円柱/角錐、円錐/平面、底面、側面 	角柱、円柱の表面積と体積	<ul style="list-style-type: none"> 角柱、円柱の分解・構成 真正面から、真上から見て調べる
中1		<ul style="list-style-type: none"> 基本作図、条件を満たす点 扇形の弧の長さとの面積 	<ul style="list-style-type: none"> 直線や平面の位置関係 運動による立体の構成、平面上への表現 切断、投影 		<ul style="list-style-type: none"> 展開して 立体を切断して、投影して調べる

		<ul style="list-style-type: none"> ・平行線と角 ・多角形の内角の和、外角の和 	<ul style="list-style-type: none"> ・正多面体 ・角錐、円錐の表面積と体積 ・球の表面積と体積 	<ul style="list-style-type: none"> ・平行線の性質と条件を根拠に
中 2		<ul style="list-style-type: none"> ・図形の合同 ・三角形や平行四辺形の性質と条件、 ・四角形の包摂関係 ・証明の意義と方法、反例 ・命題とその逆 ・図形の相似 ・平行線と線分の比 	<ul style="list-style-type: none"> ・理由を説明する 立方体を切断して現れる図形が、正三角形やひし形、等脚台形になることの原因を述べる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・三角形の合同条件を根拠に ・作図から証明へ ・性質を見だし、論理的に確かめる ・三角形の相似条件を根拠に

[第Ⅲ期]

		平 面	空 間	調べ方、操作活動
中 3	図形の 代数的 処理	<ul style="list-style-type: none"> ・円周角の定理とその利用 内接四角形、接弦定理 ・三平方の定理 定理とその逆 	<ul style="list-style-type: none"> ・相似形の面積比・体積比 ・三平方の定理の立体への応用 	<ul style="list-style-type: none"> ・性質と式表現（直角であることと $a^2+b^2=c^2$）
高		数Ⅰ 三角比 数Ⅱ 図形と方程式 数A 三角形の性質、円の性質 数A 命題と証明 数B ベクトル 数C 二次曲線 数C 媒介変数表示と極座標	数Ⅰ 三角比 数B ベクトル	

3. 図形教育の改善に向けた提言

表 1, 表 2 で示し特徴付けた学習の段階の考えに立ち、表 3 に示した指導内容の配列に基づくカリキュラムを実践することを前提にして、以下、図形教育の改善に向けた提言(1)~(17)を列挙する。これらは、研究メンバーによって一応の合意が得られたものである。

なお、17 項目のうち、(8)~(12)は本研究グループの一員が既に提案したもの、(13)~(17)は中高の接続の観点からの提言であって第 7 章の 4 で既に述べたものである。

図形教育の改善に向けた提言

第Ⅰ期（第1～第4学年）

- (1) 取り上げる平面図形の学年指定を緩やかにする
- (2) 展開したり展開図や見取図で表現する活動を重視して、直方体、立方体の概念を理解する

第Ⅱ期（第5～第8学年）

- (3) 図形の合同・相似の理解を図る
- (4) 低学年の段階から線対称について親しむとともに、対称な図形を小6で扱う
- (5) 図形の計量を通して、図形に関する理解を深め、興味・関心を高める
- (6) 見取図を描いたり読んだりする活動を重視する
- (7) 空間図形の学習指導に、投影する、切断する、展開するという操作を積極的に取り上げる
- (8) 平行線と角、多角形の角は中1で扱い、論理的に考察する基礎を培う内容として位置づける
- (9) 実験・実測による方法と証明による方法という、調べ方の違いを理解する
- (10) 作図し証明するという過程を重視する

第Ⅲ期（第9～第12学年）

- (11) 円周角の定理、内接四角形の性質と条件、接弦定理を扱い、発見し証明する過程を重視する
- (12) 三平方の定理の立体への応用では、空間概念育成のための的確な「問題」を用意する
- (13) 変換の素地指導について早期の段階で扱う
- (14) 図形の論証に関する中学校と高校の指導内容の違いを明確にする
- (15) 初等幾何の方法と解析幾何やベクトル幾何の方法の違いを明確にする
- (16) 三角比と三平方の定理との関係について指導する
- (17) 曲線・曲面で囲まれた図形の計量について、中学校と高校の指導内容の違いを明確にする

以下、提言(1)～(17)のそれぞれについて、順に考察する。

第Ⅰ期

この第Ⅰ期の指導は、単一の平面図形の概念を理解すること、直方体・立方体を中心とした身の回りの立体について理解することがねらいである。

(1) 取り上げる平面図形の学年指定を緩やかにする

三角形、四角形、正方形、長方形、直角三角形、二等辺三角形、正三角形のような単一の平面図形概念を、複数の学年で取り上げるようにする。すなわち、単一の図形概念の形成に関する学習を2年間で行うこととし、初年時にはそれらの図形に出会い、次年時にきちんと概念規定をして定着を目指すようにする。例えば三角形、四角形、正方形、長方形、直角三角形は小2で、二等辺三角形、正三角形は小3で扱うというような学年指定を厳格には示さず、身近なよい「学習問題」を用意し子どもの活動を通して図形概念の獲得を目指す、という方針にする。

具体的には、小学校第2、第3学年の両学年において、例えば、「箱作りと分解」「色板並べ」「形の分類」等のような豊かな操作活動ができる場面を用意して、そこに現れる三角形、四角形、正方形、長方形、直角三角形、二等辺三角形、正三角形や直線、直角について取り上げ、概念の獲得を目指す。小2ではそれらの図形に出会い、小3では二等辺三角形、正三角形等の用語とともにそれらの獲得、定着を目指す。

この方針に基づく具体的な実践の可能性については、既に第2章で示してある。

なお、台形、平行四辺形、ひし形やその対角線については、小4で扱う。これらの形は、次項で述べる直方体、立方体の見取図を描く際に、上の面の形の表し方を考える上でも有用である。すなわち、箱の形の表面に長方形、正方形を見だし、直方体、立方体の見取図上に平行四辺形やひし形を見だすことになる。

(2) 展開したり展開図や見取図で表現する活動を重視して、直方体、立方体の概念を理解する

空間図形に関して、第Ⅰ期においては、直方体、立方体を理解することを目標とする。そして、その考察にあたっては、展開する、展開図を描く、見取図で表現するという具体的活動を重視する。

そのために、小1では「身の回りのものの形」を集めそれを観察して立体に関する興味・関心を高め、小2では箱の分解と箱作りを行い、分解・構成の操作を通して「箱の形」を理解する。なお、その表面に現れる形を調べることを通して正方形、長方形、直角、直線へとつなげることも考えられる。そして、小4では直方体、立方体を理解するとともに「展開する」という操作に目を向け、展開図を描くことも取り上げる。

見取図に関しては読むことを中心にして学習を進め、次第に描くことに慣れることを目指す。

第Ⅱ期

この第Ⅱ期の指導は、先に述べたように、小中の接続のあり方に大きく関係する。第Ⅱ期の指導は、図形の合同や相似という関係概念の理解、論証の意義の理解、そして、数学的推論能力の育成が中心的なねらいである。空間図形に関しては、柱体・錐体の理解、そして、投影する、切断する、展開するという操作能力の育成がねらいである。

(3) 図形の合同・相似の理解を図る

図形の合同については小5で取り扱い、その論証的な扱いについては中2で行う。

第Ⅰ期は、単一の図形概念の理解がねらいであったが、そこでの学習においても、例えば平行四辺形の対辺や対角が等しいことを導くのに、単に測定に依るだけではなく、紙で作った平行四辺形を対角線で切って重ねるといった具体的な活動も取り入れて、図形の合同の理解の基礎を培うようにする。

図形の相似は、授業時間数の影響を大きく受けがちであるが、中2で扱う。中2での学習が「三角形と四角形」の内容で終わってしまうと、子どもたちにとっては新たに得た性質が少なく、論証の学習指導を、小学校で既に知っている性質を証明し直したただけにとらえてしまう可能性がある。

図形の相似に先立つ拡大図・縮図は、コピーの倍率や地図の縮尺等、日常と大きく関わる内容であり、中学校での相似概念の理解がゆるやかになるという点からも、小学校での扱いとする。ここでは、方眼紙上で拡大図・縮図を描く活動を重視し、中学校での1点拡大につなげるようにする。

(4) 低学年の段階から線対称について親しむとともに、対称な図形を小6で扱う

小6で扱う対称な図形では、対称性という観点から基本的な図形の性質等を調べて、それまでに学習してきた図形のまとめをし、図形に対する見方を一層深めることをねらいとする。例えば、正方形、長方形、ひし形、平行四辺形、台形などの四角形を対象にして、線対称か、点対称か、線対称ならば対称軸は何本あるか、等の検討を通して、個々の図形の特徴を明らかにする。それによって、四角形相互の関係について着目することができる。また、線対称図形の代表である二等辺三角形ABCにおいて、頂角 $\angle A$ の二等分線と底辺BCとの交点をDとして、 $\triangle ABD$ が $\triangle ACD$ に重なるという見方をすることによって、中学校での図形学習における証明の考え方につなげることができる。

なお、線対称な形については、日常生活においてよく目にし、安定感や審美感を抱かせるものであ

り、低学年から取り扱うようにするとよい。そのような取り扱い、第8章で見たように、イギリスの国家カリキュラムでも示されている。

(5) 図形の計量を通して、図形に関する理解を深め、興味・関心を高める

平面図形の面積に関して、長方形・正方形は小2、小3で扱い、その面積は小4で導入する。また、台形、平行四辺形、ひし形は小4で、その面積は小5で扱う。

これと同様な考え方で、立体とその体積・表面積の扱いを位置付ける。すなわち、小4で扱う直方体、立方体の体積は、小5で導入する。

柱体・錐体は、小6で取り上げる。その表面積・体積は、柱体については小6で、錐体については中1で扱ことを基本とする。小6で錐体の計量を扱うことも可能であろうが、その場合は、円錐の側面が特別な場合に限られてくる。小6で扱うか、中1で扱うかは、時間数との関係が大きいものの、錐体の体積が同底面、同高の柱体の体積の $\frac{1}{3}$ であることを小学校で扱った時期には、その内容に関して小学校算数教科においても豊かな実践が行われていたことは記憶に新しい(正木,1998)。

立体の計量の指導においては、具体物や作成した模型や展開図等を手に、具体的操作活動を通して理解し、興味・関心を高めるような授業を設定することが重要である。特に表面積を求めることは、展開図を描くこととともに達成されることを銘記したい。

(6) 見取図を描いたり読んだりする活動を重視する

空間図形を考察する際、2次元の紙の上に表して直観的な見方を与えるものとして見取図が使われる。日常生活の上でも、また、中学校、高校へと数学学習を進める上でも、見取図が果たす役割は大きい。だが、第4章で見たように、小4から多くの見取図を見てきた子どもでも自らそれを正しく描く子どもは非常に少ないことが、立方体を見取図をかく実験授業を通して明らかになった。

また、正しい見取図をかくためには、「見取図では、辺の平行は保たれる」「辺の等長は保たれない」等の理解が重要であることが明らかになった。立体を見取図に表現すると「立体のもつ性質のうち、見取図上で保たれるものと保たれないものがあること」の理解は重要である。

小学校高学年において立体を扱う際には、見取図で表現したり、見取図から立体を想像するなどの活動を通して立体の見方を豊かにする必要がある。

(7) 空間図形の学習指導に、投影する、切断する、展開するという操作を積極的に取り上げる

空間図形がもつ特徴等を調べるには、展開したり切断・投影したりする操作を施してみることが欠かせない。立体を観察しそれに働きかけようとする、すぐに要求されるのがこれらの操作であり、子どもの数学的活動を生み出す上でも重要である。

—投影的な見方—

本研究では、「立体の投影的な見方ができる」ということを、次の①～④の総体としてとらえている(第4章参照)。

- ① 立体について、正面、上、横それぞれの方向から見た図をかくことができる。
- ② 立体を正面、上、横のいずれか1方向、あるいは複数の方向から見た図から、それにあてはまる立体をいろいろと想起することができる。
- ③ 1方向や2方向から見た図だけでは立体は一意に定まらないこと、また、見る方向を増やして図を得ると立体がよりの確に特定されることを理解する。
- ④ ①～③を使って問題を解決することができる。

この内の①②については小学校で、①～④については中1で取り扱うことが基本である。小学校では「投影的な見方ができる」ことをゆるやかに目指し、中学校では投影図を描くことも扱って空間認識

を豊かにすることをねらう。

その実現の可能性は、平成元年版学習指導要領に基づく教育課程及びそれ以前において実践済みであり、十分な指導実績を得ているとみることができる。

なお、第4章で指摘したように、小学校で「立体の投影的な見方」に関する指導を行う場合、従来のように単純な立体を中心にして、真正面から見た図、真上から見た図を扱うだけでなく、子どもの追究意欲が喚起されるような立体を取り上げ、具体的操作活動を通して学習を展開することが重要である。それが可能であることは、4章での実験授業の考察で示しておいた。

－立体の切断－

切断については、その教育的価値は高いものの、高校入試において目に余る難問が出題されるという事実の積み重ねが、多くの子どもたちに対するカリキュラムを考える場において問題点として指摘され、今回の学習指導要領改訂の議論の中で第一に削除されたと聞いている。立体の特徴を調べる方法としての有用性を理解したり、そこに潜む審美性を味わったりすることをねらいとして、切断という見方、方法を導入し、的確な学習指導を構想することが重要である。

(8) 平行線と角、多角形の角は中1で扱い、論理的に考察する基礎を培う内容として位置づける

現在中2で扱っている平行線と角、多角形の角に関する内容は、図形の合同や相似のような関係概念とは異なり、単一の図形を対象とするものであり、特に角の大きさに関する性質であるだけに生徒にとって理解しやすく関心・意欲も高まりやすい。三角形の内角の和の性質に基づいて多角形の内角の和が求められ外角の和が求められるというような、性質間のつながりもとらえやすい。現状では「論理的に考察する基礎を培う」という中1の指導のねらいをいかに達成するかがとらえにくい。平行線と角、多角形の角に関する内容を中1での指導内容に位置づけることによって、それが改善される(国宗・羽田・榛葉, 1999; 羽田・榛葉・国宗, 2001)

(9) 実験・実測による方法と証明による方法という、調べ方の違いを理解する

三角形の内角の和、星形の5つの角の和、二等辺三角形や平行四辺形の順逆などに関する論証の初期の学習指導において、性質を実験・実測によって調べることを積極的に行い、証明し、さらにそのような図形の調べ方にも常に目を向けていくようにすることが重要である。それによって、生徒自らが性質を発見し、そして「なぜ?」を追究する授業が展開されることになる(小関, 1987; 国宗, 2000; 国宗, 2002)。

(10) 作図し証明するという過程を重視する

図形の論証の初期指導において、作図の問題を積極的に取り入れる。生徒からはいろいろな作図の方法が示される。その中には、確かに正しい作図法であると判断できるものもあるが、本当にその作図の方法でよいのかがはっきりしないものも出てくる。生徒自身に、「こうすれば作図できそうだがこの方法で正しく描けているのか→理由を考えてみよう」という意識が働き、証明することにつながっていく。定規・コンパスを使って図を描くという具体的活動はまた、子どもの学習意欲を高めることにもつながっている(榛葉・羽田・園田・国宗, 2002; 羽田・榛葉, 2002; 榛葉・園田・国宗, 2003; 榛葉・園田, 2003)。

なお、コンパスを使う技能を高めるとともに、コンパスの役割にも目を向けるための指導は、意図的に行う必要がある。特に、小5での円周、円周率の学習の際に、正六角形を描いたり簡単なおうぎ形を取り上げたりすることも重要である。

第Ⅲ期

この第Ⅲ期の指導は、図形に関する内容を代数的に処理する能力を伸ばすとともに、そうすることの意義を理解することがねらいである。

(11) 円周角の定理、内接四角形の性質と条件、接弦定理を扱い、発見し証明する過程を重視する

円周角の定理とその逆、内接四角形の性質と条件、接弦定理について、またそれらの関係についての学習は、直観と論証の両者の能力を伸ばすことを目指して、的確な論証指導が行われることが期待される。円の性質には意外なものも多く、結論を予想しそれを証明するという学習の過程をとりやすいからである。三角形や四角形に関する学習では、性質の多くが見て明らかなものであるだけに、「本当か、証明してみよう」という学習意欲も生じやすい。円の性質の学習によって、それまでの論証学習の積み上げが一気に花開く、ということが出来る(藤森・羽田・榛葉, 1999)。

(12) 三平方の定理の立体への応用では、空間概念育成のための的確な「問題」を用意する

中2から図形の論証に関する学習が始まると、空間図形に関する内容が極端に少なくなる。その点からも、中3での三平方の定理の応用として立体に関する問題の解決にじっくりと取り組むことには大きな意義がある。その際には、単に計量だけに走ることなく、空間図形の概念を豊かにすることもねらった学習指導を構想することが重要である。例えば、直方体の対角線の長さを考える際に、対角線を含む平面、すなわち切断面に着目することになり、中1で学習した切断の見方を一層深めることができる(熊倉・中西・八田・国宗, 2003)。

(13) 変換の素地指導について早期の段階で扱う

前回の学習指導要領では中学校で扱っていた平面図形の移動(平行・対称・回転)の内容が、今回の改訂で数学Cに移行した。数学Cの一次変換では、変換を行列で表現することにそのねらいがある。したがって、変換の意味については、それ以前の段階で指導していることが望ましいといえよう。そのことにより、変換についてより一層理解を深めることができると同時に、行列についても理解を深めることができる。そのためには、中学校で、移動を扱うことが望ましい。

中学校での論証学習の中心的内容である図形の合同や相似では、図形の移動の見方が重要であり、この点からも図形の移動は中学校で扱うべきである。

(14) 図形の論証に関する中学校と高校の指導内容の違いを明確にする

高校現場の実際として、初等幾何による論証の内容は必ずしも的確には扱っていないようである。中学校では初等幾何による論証を中心に、高校では代数的処理を用いた論証(解析幾何、ベクトル幾何)を中心に扱うこととし、代数的処理による方法と比較する際に、初等幾何による論証について触れる程度が望ましい。

そのためには、今回の改訂で数学Aに移行した平面図形の内容は、中学校で扱うことが可能なものは中学校に移行し、それ以外については、数学Ⅱ・図形と方程式や数学B・ベクトルに移行して指導するのがよい。

(15) 初等幾何の方法と解析幾何やベクトル幾何の方法の違いを明確にする

高校の解析幾何やベクトル幾何を扱う場合に、前述したように、初等幾何による方法との違いについて必ずしも十分に指導されていない。解析幾何やベクトル幾何による方法の特徴を理解し、初等幾何による方法について一層理解を深めるためにも、これらの方法の違いをきちんと指導すべきである。また、空間ベクトルの指導に当たっては、中学校での学習を踏まえて行うことが重要である。

(16) 三角比と三平方の定理との関係について指導する

余弦定理等を扱う場合に、三平方の定理との関係について必ずしも十分に指導されていない。三角

比の特徴を理解し、三角比を学ぶ意義を実感できるようにするためにも、例えば具体例をもとにして鈍角三角形の場合は $a^2+b^2 < c^2$ で鋭角三角形の場合は $a^2+b^2 > c^2$ であることを導く等、三平方の定理との関係についてきちんと指導すべきである。

(17) 曲線・曲面で囲まれた図形の計量について、中学校と高校の指導内容の違いを明確にする

前回の学習指導要領では中学校で扱っていた球の体積・表面積の内容が、今回の改訂で数学Ⅰに移行した。しかしこれらの内容を除くと、曲線や曲面で囲まれた図形の計量について、以下のような扱いの違いを明確にすることができる。

- ・中学校 円や扇形の面積・弧の長さ、曲面で囲まれた立体の体積の直観的な扱い
- ・高校 円や扇形以外の曲線で囲まれた図形の面積、曲面で囲まれた立体の体積の積分による扱いしたがって、球の体積や表面積に関する直観的な扱いは、中学校の方が望ましい。

<引用・参考文献>

国宗進・羽田明夫・榛葉伸吾(1999)「中学校での図形指導の改善」『第32回数学教育論文発表会論文集』, pp.221-226.

国宗進(2000)「図形の論証に関する理解度の変化」『日本数学教育会誌数学教育』第82巻第3号, pp.2-12.

国宗進(2002)「豊かな「図形」指導を求めて」; 相馬一彦・国宗進・長崎栄三編著『中学校新数学科授業プラン集②「図形」編』, 明治図書, pp.7-15.

熊倉啓之・中西知真紀・八田弘恵・国宗進(2003)「空間図形についての理解に関する研究」『第36回数学教育論文発表会論文集』, pp.199-204.

小関熙純編著(1987)『図形の論証指導』, 明治図書.

榛葉伸吾・羽田明夫・園田博人・国宗進(2002)「中学校での図形の学習指導の改善—生徒の探究活動を重視して—」『静岡大学教育実践研究指導センター紀要』No.8, pp.49-66.

榛葉伸吾・園田博人・国宗進(2003)「中学校での図形の学習指導の改善—作図し証明する過程を重視して—」『静岡大学教育実践研究指導センター紀要』No.9, pp.11-30.

榛葉伸吾・園田博人(2003)「中学校での図形の学習指導の改善—作図問題を軸にした「相似な図形」の授業モデル—」『第36回数学教育論文発表会 課題別分科会発表収録』pp.224-227.

狭間節子(2000)「算数・数学の目標と内容—図形・幾何—」『日本数学教育学会誌数学教育』第82巻第7・8号, pp.64-68.

羽田明夫・榛葉伸吾・国宗進(2001)「中学校での図形の学習指導の改善—中1での授業実践に基づいて—」『静岡大学教育実践研究指導センター紀要』No.7, pp.23-41.

羽田明夫・榛葉伸吾(2002)「作図から証明への過程を重視した図形学習—数学的活動の楽しさを実感する授業の創造—」『日本数学教育学会誌数学教育』第84巻第5号, pp.20-28.

正木孝昌(1998)「授業現場の活性化のきっかけとして改善案を読もう」『楽しい算数の授業』臨時増刊No.161. 明治図書, pp.25-28.

藤森章弘・羽田明夫・榛葉伸吾(1999)「より豊かな数学学習をめざして」『日本数学教育学会誌数学教育』第81巻第5号, pp.39-42.

第1主段階 形・空間・測定領域

形・空間・測定を利用し応用すること

1 生徒は以下のことを教えられるべきである。

・問題解決

- a 形と空間に関する問題解決の際に、いろいろな方法で取り組み、問題点を克服する方法を見つけること。
- b 測定に関する問題解決の際に、適切な数学的な器具を選び、利用すること。
- c 形と空間に関する問題解決の際に、適切な器具や具体物を選び、利用すること。

・コミュニケーション

- d 形・空間・測定に関する正しい用語と語彙を使うこと。

・推論

- e 簡単な形と空間の規則や関係を認識し、それらについて予想を立てること。
- f 数学的コミュニケーションや説明の方法を使うこと。

形の規則や性質の理解

2 生徒は以下のことを教えられるべきである。

- a 関連する語彙を使って、目に見える形の性質を説明すること。
- b 一般的な平面図形や立体図形を観察し、扱い、説明すること；いろいろな三角形、正方形を含む四角形、円、立方体、直方体などの一般的な平面図形や立体図形に名前を付け、数学的特徴を説明すること。後に六角形、五角形、円柱、三角錐、円柱、球までひろげる。
- c 平面図形や立体図形を作ること。
- d 一般的な平面図形の線対称とその規則を認識すること。

位置と移動の性質の理解

3 生徒は以下のことを教えられるべきである。

- a 日常の用語を使って、位置、方向や移動を観察し、描き、説明すること。
- b 直線移動や回転移動を認識し、それらを簡単な方法で組み合わせること。
- c 直角を認識すること。

測定の理解

4 生徒は以下のことを教えられるべきである。

- a 適切な用語を使って、ものの大きさを見積もり、直接比較により並べること；よく知られた出来事を年代順に並べること；最初は任意単位(例えばストローや木製の立方体)を使って、そして後に長さ(cm, m)、重さ(kg)、容積(l)などの普遍単位を使ってものを比較し測定すること(例えば1mの物差しより長いあるいは短い、1リットルの水差しで3杯ちょっと)；時間の普遍単位を使って時間の長さを測ること。
- b 1回転、半回転、1/4回転を使って、回転の単位としての角を理解すること。
- c ものの重さを見積もり、測定すること；簡単な測定用具を選び、使い、測定値やはかりの測定値を目盛りが一番近いところで読み取り解釈する。

学習の拡がり

1 第1主段階では、生徒は以下のことを通して**知識、技能、理解**が教えられるべきである。

- a 実際的な活動、探究、話し合い。
- b 実際的な活動の中で数学的な考えを利用する。そして、物、絵、図、言葉、数、記号などを使ってそれを記録すること。
- c 暗算の方法の発達を支援するために、頭の中で数のイメージやその関係を利用すること。
- d 実際的な文脈の範囲で、見積もり、描き、測定すること。
- e 実際的な活動の中でのデータから推論を展開すること。
- f 情報コミュニケーション技術を含んだ様々な情報の供給源や教材を探究し利用すること。
- g 数に関する活動と数学における他の側面を結び付けることを奨励するような活動。

第2主段階 形・空間・測定領域

形・空間・測定を利用し応用すること

1 生徒は以下のことを教えられるべきである。

・問題解決

- a 測定の普遍単位の必要性を認識すること。
- b 図形の問題を解決するために適切な計算技能を選んで利用すること。
- c 困難を克服するために、別の視点からの方法を試みることを含めて、空間に関する問題に柔軟に取り組むこと。
- d 図形の問題に関する結果が適切であるかを確かめるために、検証の手順を利用すること。

・コミュニケーション

- e 図形の問題の解法を発表する際に、作業を計画し、それらを様々な方法で記録したり表現したりすること。
- f 図形に関する表記法や記号を正しく使うこと。
- g 問題の解法を発表し解釈すること。

・推論

- h 形と空間の性質を説明するために、数学的推論を利用すること。

形の性質の理解

2 生徒は以下のことを教えられるべきである。

- a 直角、垂直や平行線を認識すること；角は「度」で測定できること、1回転は360度であること、そして1点での角の和も360度であること、そして直線の角は180度であることを知ること；三角形の内角の和は180度であることを知ること。
- b 平面図形や立体図形やそれらの振る舞いの方法を描き、説明する。また、特に三角形、四角形、いろいろな角柱や角錐などについて、より正確な図形に関する用語を使うこと；形が同じ時に認識すること。
- c 平面図形や立体図形とそれらの規則をより正確に作り、描くこと；正多角形の線対称を認識すること；角、面、平行線や対称などを含んだ幾何学的な特徴や性質を認識すること。そしてそれらを、形の分類や問題解決に利用すること。
- d 平面図形から立体図形を想起すること。

位置と移動の性質の理解

3 生徒は以下のことを教えられるべきである。

- a 適切な用語を使って移動を描き、説明すること。
- b 実際的な場面でものを移動させること；情報コミュニケーション技術を利用して図形を移動させるこ

- と；回転、線対称、平行移動により変換された図の位置を視覚化し、予想すること。
- c 格子上にいろいろな方向に平面図形を認め描くこと；最初は第 1 象限で、そして最終的にはすべての象限において、座標を利用して図形の位置を定め、描くこと（例えば座標を使って、コンピュータゲームで位置を示す）。

測定の理解

- 4 生徒は以下のことを教えられるべきである。
- a 長さ、かさ、容積の普遍単位の必要性を認識し、課題に応じて単位を選ぶこと。そしてそれらを日常の状況において適切な見積もりをするために利用すること；計量単位を他の単位に換算すること（例えば 3.17kg を 3170g に換算すること）；日常で利用されているイギリス本国の法定単位と大体等しい計量単位を知ること。
- b 測定値は近似値であることを認識すること；課題に応じて適切な測定用具を選び、利用すること；より正確に、測定値を読み取り目盛りを読むこと；小数の表記法を使って測定値を記録すること。
- c 直角や半回転より大きい、または小さい角を認識し、それらの大きさを見積もり、並べること；鋭角、鈍角、直角を度の単位まで測定し描くこと。
- d アナログ時計、及び 12 時間や 24 時間デジタル時計の時間を読むこと；秒、分、時、日、週などの時間の単位を使うこと。そしてそれらの間の関係を知ること。
- e 簡単な形の周の長さを見いだすこと；単位正方形を数えること及びそれが拡張される方法を理解して、公式を利用して長方形の面積を見いだすこと；長方形から作られる図形の周の長さや面積を計算すること。

第 3 主段階 形・空間・測定領域

形・空間・測定を利用し応用すること

- 1 生徒は以下のことを教えられるべきである。

・問題解決

- a 幾何学の課題で使う問題解決のストラテジーや情報コミュニケーション技術を含む手段を選択し、それらの有効性をモニターすること。
- b 複雑な問題を解決するために、既知の事実と問題解決のストラテジーを選び結びつけること。
- c 問題を解決するのにさらに必要な情報は何かを見いだすこと；複雑な問題を課題の系列へと解きほぐすこと。

・コミュニケーション

- d いろいろな形態で提示された幾何学の情報を解釈し議論し総合すること。
- e 幾何図表や関連する説明の文を使って、数学的にコミュニケーションすること。
- f 幾何の構成を分析するために正確な言語や確かな方法を使うこと。
- g 数学的表現の選択を再検討し正当化すること。

・推論

- h 実際の説明、証明、約束、事実、定義、導かれた性質を区別すること。
- i 数学的推論を使った推測や演繹を説明し正当化すること。
- j 幾何学における関係を探究すること；「もし…ならば、…である」のような条件的な制約を主張すること；「…とすると」や「なぜ？」と問うこと。
- k 幾何の問題を解決する際に、徐々に演繹を示すこと。

- l 演繹を行う際に、制限を言い、出発点を与えること。
- m 設定された前提の限界を認識すること；前提を変えることが解に与える影響を理解すること。
- n 幾何学の問題を解決するときに、例外的な場合を見いだすこと。

幾何学における推論

2 生徒は以下のことを教えられるべきである。

・角

- a (直角を含む) ある点の角や直線の角、垂線、対頂角の性質を思い起こし使うこと。
- b 鋭角、鈍角、優角と直角とを区別すること；角の大きさを度で概測すること。

・三角形や他の直線図形の性質

- c 平行線、錯角や同位角を使う；平行四辺形の性質や三角形の角の和が 180° であることの証明を理解すること；三角形の外角は他の 2 つの頂点における内角の和に等しいことの証明を理解すること。
- d 正三角形、二等辺三角形、直角三角形についての角の性質を使うこと；合同を理解し、2 つの三角形が合同であるときにそれを認めること；どんな四角形の内角の和も 360° である理由を説明すること。
- e 長方形の面積公式から平行四辺形や三角形の面積公式を導くために、長方形、平行四辺形、三角形の知識を使うこと
- f 正方形、長方形、平行四辺形、台形やひし形を含んで、四角形の特別な場合の主要な性質を思い起こすこと；四角形をそれらの幾何学的性質によって分類すること。
- g 四角形、五角形や六角形の内角や外角の和を計算し使うこと；正多角形の角を計算し使うこと。
- h ピュタゴラスの定理を理解し、思い起こし、使うこと。

・円の性質

- i 円の定義や、中心、半径、弦、直径、周、接線、弧、扇形や線分のような、関係する用語を思い起こすこと；円の任意の点における接線は、その接点において半径と垂直であることを理解すること；中心から弦への垂線が弦を二等分する理由を説明すること；描かれた正多角形は円の等分によって作図できることを理解すること。

・空間図形

- j (立方体を含む) 直方体や直方体でできる形の幾何を探究すること。
- k 立体図形の平面表現を使うこと、また、平面図や立面図を含んで、平面への投影や切断を通して立体図形を分析すること。

変換と座標

3 生徒は以下のことを教えられるべきである。

・変換を明確にすること

- a 回転移動は中心と(半時計回りの)角によって明確なることを理解すること；直角や何分のいくつかの回転、回転の角を測るために度を使う；対称移動は対称軸によって、平行移動は距離と方向によって、また拡大は中心と倍率によって明確なることを理解すること。

・変換の性質

- b 平面図形や立体図形の対称性や平面図形の回転を含む、回転移動、対称移動、平行移動を認識し視覚化すること；平行移動、回転移動、対称移動によって平面図形を変換すること、そして、これらの変換が長さや角を保存し、したがって、どんな図形もこれらのいかなる変換のもとでの像と合同であることを認識すること。
- c 1 より大きい整数倍に、そして 1 より小さい数の倍率で拡大することを認識し視覚化し作図すること；

このことから、どんな 2 つの円や 2 つの正方形は数学的に相似であること、その一方で、2 つの長方形はふつうそうではないことを理解すること。

d 拡大は角を保存する一方で、長さは保存しないことを認識すること；周の拡大の結果を理解すること；地図やその縮尺を使い解釈すること；面積や体積の拡大の結果を理解すること。

・座標

e 1 つの成分は数直線上の点を決め、2 つの成分は平面上の点を決め、3 つの成分は空間上の点を決めることを理解し、そして 1 次元、2 次元、3 次元の用語を使うこと；4 つの象限における点を明示するために軸や成分を使うこと；与えられた座標に点を取り、幾何学的情報によって指示された点の座標を見いだすこと[例えば、(2, 1)(-7, 3)(5, 6)の座標をもつ平行四辺形の 4 番目の頂点の座標を見いだすこと]；A, B が与えられたとき、線分 AB の中点の座標を見いだし、AB の長さを計算すること。

測定と作図

4 生徒は以下のことを教えられるべきである。

・測定

a 時間や体積を含んで、測定器具の範囲での目盛りを解釈すること；実数を使った測定は単位の選択に依存することを知ること；最も近い単位まで与えられた測定は、上下で 1/2 まで不正確であることを認識すること；1 つの単位から他の単位へ変換すること；パウンズ、フィート、マイル、ポイント、ガロンに等しい大まかな単位を知ること；日々の状況において意義ある測定範囲の概測をすること。

b 関連する言語を使って、角の測定を理解すること[例えば方向を明示するために方位を使う]。

c 速さや密度を含む、複雑な測定を理解し使う。

・作図

d 最も近い mm までの線分を、また最も近い度までの角を、測定し描くこと；辺の長さや角についての情報が与えられて、定規とコンパスを使って三角形や他の平面図形を描くこと；それらを作図する経験から、SSS, SAS, ASA, そして RHS を満たす三角形はただ 1 つに決まり、SSA の三角形はそうではないことを理解すること；与えられた情報から、立方体、正四面体、正四角錐や他の立体図形の図を描くこと。

e 辺が与えられた正三角形、線分の中点や垂直二等分線、1 点からの直線への垂線、直線上の 1 点における垂線、角の二等分線を含む、基本作図を行うために、直定規やコンパスを使うこと。

・求積法

f 長方形の面積を見いだし、公式を思い起こし、正方形を数えることとの関係やこの追究法をいかに広げるかを理解すること；平行四辺形や三角形の面積公式を思い起こし使うこと；三角形や長方形の面積公式を使って、単純な形の面積を見いだすこと；三角形や長方形からできた図形の周の長さや面積を計算すること。

g 直方体の体積を見いだし、公式を思い起こし、立方体を数えることとの関係及びこの追究法をいかに広げるかを理解すること；正角錐の体積や、立方体や直方体からできた立体の体積を計算すること。

h 円の周や円で閉じた面積を見いだし、適切な公式を思い起こすこと。

i cm^2 や m^2 を含む面積の単位や、 cm^3 や m^3 を含む体積の単位の間の変換をすること。

・軌跡

j 推論、そしてまた、形や経路[例えば正三角形]を作り出す ITC を使って、軌跡を見いだすこと。

資料 2 イギリスの国家カリキュラム (DfEE, 1999) における「形・空間・測定」に関する到達目標 全訳

レベル 1 2次元や3次元の図形を扱う際に、子どもは、性質や位置を表すのに日常の言語を使う。彼らは、直接比較によって対象を測定したり、並べたり、事象を並べたりする。

レベル 2 子どもは、3次元や2次元の図形の図形に共通な数学的名称を使い、辺や角の数を含めて、それらの性質を表す。彼らは、直線運動と回転運動とを区別し、回転の測度としての角を理解し、直角を認識する。長さやかさを測定するための日常の任意単位や普遍単位を使い始める。

レベル 3 子どもは、2次元の図形の線対称のような数学的な方法を使って、いろいろな方法で3次元や2次元の図形を分類する。彼らは、いろいろな場面で、長さ、容積やかさの日常の任意単位や普遍単位、また時間の単位を使う。
<レベル 1~3, 小2まで>

レベル 4 子どもは、与えられた面や辺を組み合わせて3次元の数学的モデルを作り、格子上にいろいろな方向に一般的な2次元の図形を描く。彼らは、簡単な図形を1つの対称軸で反転させる。適切な単位や用具を選択し使って、測定用具の範囲において適切な正確さで測定値を解釈する。簡単な図形の周の長さを求め、単位正方形を数えることによって面積を求める。

レベル 5 立体を作ったり、図形を描いたり使ったりするときに、子どもは、度の単位まで角を測定し描き、また、角に関する用語を使う。三角形の角の和や、ある点での角の和を知る。彼らは、2次元の図形の対称性をすべて特定する。彼らは、日常的に使われている英国法定単位に等しいおおよその計量単位を知り、また、一方の単位を他の単位に換算する。毎日の状況に関連づけて、測定値の適切な見積もりをする。長方形の面積公式を理解し使う。
<レベル 2~5, 小卒まで>

レベル 6 子どもは、3次元の対象の一般的な2次元表現を認識し使う。彼らは、異なったタイプの四辺形を分類することで四辺形の性質を知り、利用する。角や多角形の対称性、交わる直線や平行な直線の角の性質を使って問題を解決し、また、それらの性質を説明する。図形や線を一般化し変形するためにコンピュータへの命令を工夫する。問題解決の際に、円周や円の面積、直線図形の面積や立体の体積を求めるための適切な公式を理解し利用する。図形を正の整数倍に拡大する。

レベル 7 子どもは、2次元の問題の解決に、ピタゴラスの定理を理解し適用する。彼らは、平面図形や直角柱について、長さや面積や体積を計算する。図形を分数倍に拡大し、また図形の相似を理解する。対象をある規則に従って動かしたときの軌跡を決定する。子どもは、測定の不正確さを理解し、整数値による測定は最大で前後 1/2 まで不正確かもしれないということを認識する。彼らは、速さのような合成単位を理解し利用する。
<レベル 3~7, 中卒まで>

レベル 8 子どもは、合同や数学的な相似を理解し利用する。彼らは、2次元での問題解決の際に、直角三角形でサイン、コサイン、タンジェントを利用する。次元を考えることによって、周の長さ、面積、体積の公式を区別する。

発展的活動 子どもは、任意の角のサイン、コサイン、タンジェントの関数のグラフを描き、また、それらの関数に基づいてグラフを一般化し解釈する。彼らは、2次元や3次元での問題解決の際に、任意の大きさの角のサイン、コサイン、タンジェントやピタゴラスの定理を利用する。[例えば、二等辺三角形の底角は等しいことを証明するために]形式的な幾何の証明において三角形の合同条件を利用する。円弧の長さや扇形の面積を計算し、円柱の表面積、円錐や球の体積を計算する。測定に使われる目盛りの連続的性質を理解する。

以上 (< >内は訳者注)

資料3 イギリスの国家ニューメラシー・ストラテジー(1999)「形・空間」の内容 Year1-3 全訳

The National Numeracy Strategy

Framework for teaching mathematics from Reception to Year 6(DfEE, 1999)

Supplement of examples: Year1,2 & 3 pp.1-93

SHAPE AND SPACE

生徒は以下のことを教えられるべきである。

特性に従って、一般的な3-Dと2-Dの形の特徴を述べ、分類する。

pp.80-81

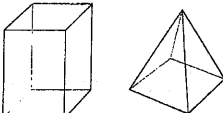
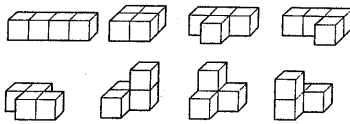
1年	2年	3年
<p>実際の文脈で理解し使う： 形、パターン、平面、立体、くぼみ、面、へり、表面、まっすぐ、曲がった、丸い、点、かど、… 分類する…、作る、組み立てる、描く…</p> <p>次のような見慣れた3-Dと2-Dの形の特徴に名前をつけ分類し描くために、日常の言語を使う： 立方体、直方体、球、円錐、円柱、円、三角形、四角形、正方形… 例：</p>	<p>前の学年からの言葉を使い理解し読み始める。そして広げる： 円形の、三角形、四角形…、面…</p> <p>以前に広げた3-Dや2-Dの形のいくつかの特徴を名づけ分類し描写するために、数学的な言葉を使う： 四角錐、五角形、六角形、八角形… 例：</p>	<p>前の学年からの言葉を使い、読み、書き始める。そして、広げる： 五角形、六角形、八角形… 直角、頂点、… しきつめ…、図…</p> <p>以前に広げた3-Dや2-Dの形のいくつかの特徴を名づけ分類し描写する： 角柱、半球… 四角形の、半円… 例：</p>
3-Dの形	3-Dの形	3-Dの形
<ul style="list-style-type: none"> ・クラスで立体の形を見いだす： 例えば、立方体（箱）や円柱（焼いた豆の缶詰） ・次のような特性に応じて違った方法で3-Dの形を分類する： どんなかどがあるかどうか。 すべての辺は直線かどうか。 中身がつまっているか空洞か。 ・例を選んで、いくつかの立体の形を使い、それを描写する。例えば、 ・この形は6面あり、各面は長方形である。 この形は5面ある—4つは三角形で1つは正方形である。 この立方体は辺が12ある… ・背後に置かれた立体を手で認識し、それを感覚で名づけることができるようになる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・立方体、直方体、円柱そして球の例を集める。そして、それらに合った名前をつける。 ・次のような面の特性に応じて違った方法で3-Dの形を分類する： 6面ある； 三角形の面、長方形の面がある… ・立体の形を使って、他の人によって説明された特性に合う例を選ぶ。 例えば、形を見つけ名づける： 1つの曲面と2つの平らな円の面； 8つのかどと6つの正方形の面； 1つの正方形の面と4つの三角形の面… ・それを見いだすために、隠された形についての質問に「はい」か「いいえ」で答える。例えば：「それには曲がった面はありますか」 	<ul style="list-style-type: none"> ・角柱はその高さに沿って同じ切断面があり、2つの向かい合う面が同じであることを知る。 ・角柱や円柱の例を集め、それらに合うラベルの名前をつける。 ・特性に応じて3-Dの形を違った方法で分類する： それらが角柱かそうでないか： 面や辺や頂点の数… ・立体を名づけ描写する 例： 三角柱は反対側に2つの同じ三角形の面があり他のすべての面は長方形である。 半球は球を半分にしたものであり、その平面は円である。

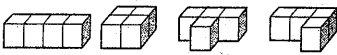
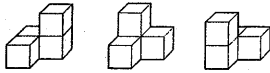
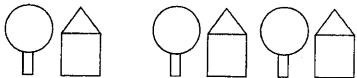
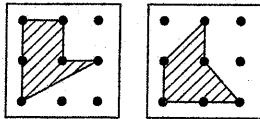
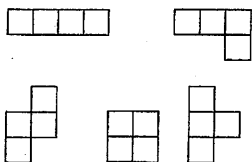
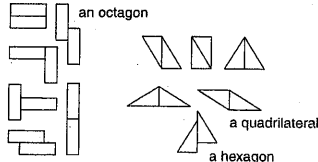
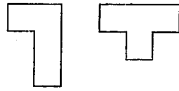
2-D の形	2-D の形	2-D の形
<ul style="list-style-type: none"> いくつかの平らな形を使って（薄いプラスチックの形、または描かれた、またはボードに止められた形）： 例を選び日常の言葉で描写する。先生や他の子ども達によって説明された特徴に合う例を選び、それを名づける： 例、形を見つけて名づける：同じ長さの4つの辺を持つ；丸い；3つのかどがあり、3つの異なった辺がある。6点をもつ…4つのかどと2つの短い辺と2つの長い辺がある…正方形でない… ・形やカーテン・服・飾りの模様について話す。 	<ul style="list-style-type: none"> いくつかの平らな形を使って（薄いプラスチックの形、紙で作った形、または紙に描かれた形）： 例を選び、それを名づけて特徴を述べる。先生や他の子ども達によって説明された特性に合う例を選ぶ。例、次のような形を見つけて名づける： 1つの曲がったへりがある；5つのかどと5つの線がある；等しい長さの4つの直線がある；4つの直角があるが、辺の長さは等しくはない…それは長方形ではない… ・次のような特性によって、平面の形を分類する：かどの数；へりの数；辺はまっすぐか曲がっているかどうか。 	<ul style="list-style-type: none"> 四角形はどれも4つの直線のある平らな形であることを知る。 ・いくつかの平らな形を使い、他の人によって説明された特性に合う例を選ぶ。例、次のような形を見つけて名づける： 円の半分；直角のない三角形；8つの辺と8つの頂点がある；4つの直角があり向かい合う辺が等しい；5つの等しい辺があり、2つの直角がある… ・平面の形の集まりを分類する。次のような特徴に応じてベン・キャロル図に表す；辺は同じ長さかどうか；少なくとも1つの角は直角かどうか；形は対称軸をもつかどうか。

生徒は以下のことを教えられるべきである。

より正確に模型や形や模様を作り、それらの特徴を述べる。

pp.82-83

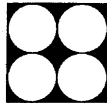
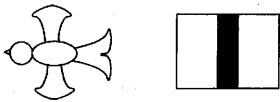
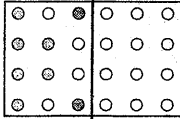


1年	2年	3年
より正確に模型や形や模様を作り、それらの特徴を述べる。 例：	より正確に模型や形や模様を作り、それらの特徴を述べる。 例：	より正確に模型や形や模様を作り、それらの特徴を述べる。 例
3-D	3-D	3-D
<ul style="list-style-type: none"> ・次のような3-Dの形を使って模型や模様を作る：レゴやデュプロのような構成キット；日常の素材（小包, ロール, 容器）；粘土やプラスチックのような展性のある素材… 模型や模様を描写し、どの形がそれを作るために使われたか言う。例：この木の頂上は球で、その幹は円錐です。この家は立方体で作られ、屋根は角錐です… ・それらの絵に3次元の形を関連付け始める。 	<ul style="list-style-type: none"> ・3-Dの模型を作り、使われた形を記録する。例えば：私の模型は7つの直方体、10個の立方体、6個の円柱と1つの円錐で作られた。 ・構造キットまたはストローから、骨組みの形を作る。そして、辺やかどの数を数える。  <ul style="list-style-type: none"> ・それらの絵に3次元の形を関連付ける。 	<ul style="list-style-type: none"> ・2つまたはそれ以上の形を異なった方法で一緒にして、新たな形を作ることを理解する。例えば、4つの立方体の面と面を合わせてできる、すべての異なった形を見つける。  <ul style="list-style-type: none"> ・それらの絵に3次元の形を関連付ける。

<p>例: それらの絵に類似の立体を合わせる; 絵から模型を組み立てるために積み木を使う。</p>	<p>例: それらの絵に類似の立体を合わせる; 立方体を使って、1層の立体を絵から作る。</p> 	<p>例: それらの絵に類似の立体と合わせる; 立方体を使って、2層の立体を絵から組み立てる。</p> 
<p>2-D</p> <p>・次のような2-Dの形を使って、絵や模様を作る: ストローやパイプクリーナー; 薄いプラスチックの形; 切る前のべとべとした形; スタンプを押したり印刷した形 ...</p>  <p>その絵や模様を描写し、それを作るためにどの形が使われたかを言う。</p> <p>例: この木は長方形や円でできている。この家は正方形と三角形できている。この模様は木と家が繰り返してできている。</p> <p>・紙を折ってその半分を作る。 対称の模様を作る: 例えば、小片を切ることによって、またはインクのしみを描くことによって...</p>	<p>2-D</p> <p>・2-Dの形を使って、絵や模様を作って描写する: それらの周りを描くことによって; 四角の紙を使って; ピンボードとゴムバンドを使って;</p>  <p>pentagons</p> <p>4つの正方形を組み合わせて、新しい形を作る、そして辺の数を数える...</p>  <p>・線、正方形、長方形をかくためにプログラムされたロボットを使う。</p>	<p>2-D</p> <p>・2-Dの形を使って、絵や模様を作って描写する: 周りを描いて、薄いカード上の形を切って、模様を作るのにテンプレートとしてそれを使うことによって; 紙を折って切ることによって正方形、八角形そして星を作る; 幾何棒を使って; 2つの同じ形を合わせて置くことによって、そして、新しい形に名前をつける...</p> <p>八角形、四角形、六角形</p>  <p>an octagon a quadrilateral a hexagon</p> <p>・次のような直線の形を描くためにプログラムされたロボットを使う。</p> 

生徒は以下のことを教えられるべきである。
簡単な場合に線対称を理解する。

pp.84-85

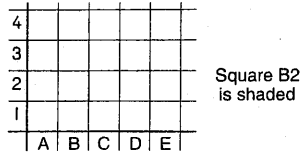
1年	2年	3年
	<p>理解し使い読み始める: 対称軸... 折る、重ねる、鏡の線、反射、対称性...</p> <p>認識し、対称の軸を描き始める。 例: ・反射を作り特徴を述べるために、万華鏡のおもちゃ、鏡、明るい表面を使う...</p>	<p>前学年からの言葉を使い、読み、そして書き始める。</p> <p>1本以上対称の軸を識別し描く。 例: ・模様、大文字、ロゴ、道路標識の例を見つける...対称軸が一本以上あるもの。</p>

	<p>・ペンキ・インクのしみ・ハンガーボード・四角い紙にゴムで貼り付けた形・立方体を組み合わせたもの・薄いプラスチックを並べた形または色の塗られたブロックを使って、対称の形を作り、話して、特徴をいう。</p>  <p>・対称軸を認め、描く： 例えば、虫、道路標識、旗の絵… 鏡を置く適切などころを調べる 例えば、対称軸を描く：</p>  <p>・残りの半分を描いたり作ったりすることによって、対称の型を完成させる：例えば、ペグボードを使って。</p> 	<p>・紙を折り切ることによって、直角に2本の対称軸がある模様を作る。 ・対称軸がない形を認める。</p> <p>・2本の対称軸を認め描く： 例えば、旗の図や形… 鏡を置く適切などころを調べる。</p> <p>2本の対称軸を描く：</p>  <p>・その完成を助けるために鏡を使って、1つの辺にそった鏡の線に簡単な2次元の鏡像を描く。</p> 
--	---	---

生徒は以下のことを教えられるべきである。
位置と方向の特性を述べる。

pp.86-87

1年	2年	3年
<p>実際の文脈で、理解し使う： 位置、上、下、下のほう、上のほう、～より下に、上に、中に、外側、内側、前に、後ろに、そばに、～の前に、～の後に、隣に、反対側に、間に…、ごく近い、遠い、離れて… 真ん中、中央、はずれ、かど、てっぺん、底、側… 方向、左、右、上、下、前方、後方、横、交差して、沿って、まわりに、～を通過して、～に向けて、～から、向かって、離れて… 旅行…</p> <p>日常の言語を使って、位置の状況を述べる。例えば：</p>	<p>前学年からの語彙を理解し、使い、読み始め、広げる： より高い、より低い… 右回りに、左回りに… 道順…</p> <p>位置の状況を述べる。例えば： ・ある場所に在る物体の特徴を述</p>	<p>前学年からの語彙を使い、読み、書き始め、そして広げる： 格子、列、行…、地図、プラン…コンパスの点、北、南、東、西… 水平の、垂直の、斜めの… 下がる、上がる…</p> <p>列と行にラベルが貼られた正方形の格子上に、正方形の位置の状況</p>

<p>・体育で、相手の正面に、そばに、隣に、反対側に立つ… または二人の間に…</p> <p>・人形の家で家具がどのように配置されているか述べる； TVの前に椅子が置いてある、腰掛はテーブルの下にある、冷蔵庫の脇にレンジがある…</p> <p>・教室で、ドアの上にある・机の後ろにある・窓と洗面台の間にある、物体の名前を言う。</p> <p>・大きな1枚の紙にある物体の場所の特徴を言う： 例えば、真ん中に近い・へりに・てっぺんに…</p> <p>・絵の中や他の物体に関するマグネットボード上の物体の位置の特徴を述べる： 例えば、家は飛行機より下にある、窓はドアの上にある。</p> <p>日常の言語を使って、方向の状況を述べる。例えば：</p> <p>・体育で、後につく、そして、動くための指示を特に方向について与える： 上の方へ、下の方へ、～に向かって、それる、横切る、沿って、～を通って… 左または右に回る… 前方に、後方にまたは横に動く… ドアに向かって、窓から離れて…</p> <p>・旅について話す：例えば、学校から家にどのように行くか、どのように運動場に書かれたトラックに沿っていくか。</p> <p>・特別な場所にたどり着くフロアロボットを作るために、指示を考案する。</p>	<p>べ、置き、動かし、描くことによって、口頭での、または書かれた質問や指示に答える。</p> <p>与えられた物体より高い、～よりも、～より低い、隣に、～より下に、さらに遠くに、辺の上に、かどに…</p> <p>例えば、異なった方法で簡単な地図上の場所の特徴を述べる。</p> <p>・紙の真ん中に近い正方形から、辺に近い正方形に動かすために正方形の紙とカウンターを使う 3つの正方形にそって、そして2つの正方形を下に、または、左に3つの正方形そして2つの正方形は上にする道順の特徴を述べる。</p> <p>方向の状況を述べる。例えば：</p> <p>・体育で、時計回りに、反時計回りに、内側に面して、外側に面して動く…</p> <p>・正方形に描かれた簡単な迷路を通る道を見つけ、たどり着くために、他の誰かに指示を与える。</p> <p>・すべての道が相互に直角でいくつかは行き止まりのある、間取り図や迷路を案内するフロアロボットを作るための指示を与える。</p>	<p>を述べ、見つける。例えば： <図 14> 正方形 B2 には影が付けられている</p>  <p>・他の競技者にマークの置いてある場所を言う「0と10字路」で、または「戦艦」や「宝集め」のようなゲームで遊ぶ。</p> <p>・地理で、正方形の紙に簡単な地図やプランを作り、使って、特色ある場所の特徴を述べる。</p> <p>方向の状況を述べる。例えば：</p> <p>・地理で、N、S、E、Wの4つのコンパスの方向を理解する。</p> <p>・正方形の紙と動かすためのカウンターを使う、例えばA3からC1では、東に2マス、南に2マスした時の道順を描写する。</p> <p>・「北へ12、西へ7行く…」あるいは「6前進し、反時計回りに直角だけ回り、8だけ戻る…」というような指示に基づいて、道順を導くフロアロボットに指示を与える。</p> <p>・北、登る、時計回り、左、水平の…のようなキーワードを増やすべき物語を話す。</p>
---	---	---

生徒は以下のことを教えられるべきである。

直線の運動や回転の特徴を述べ、回転の角として角を理解する。

pp.88-89

1年	2年	3年
実際の文脈で理解し使う： ずらす、巻く、回す…	前学年からの語彙を理解し、使い、読み始め、広げる：	前学年からの語彙を、使い、読み、書き始め、広げる：

一周、半周…

運動について認識し、話す。

例；

・体育で、ベンチをずらす、マット上を転がる、窓に向かって回転する、直線上を動く、円周上を動く、点を回す…

・こま、蛇口、風車の腕、車輪、腕時計、回転式木戸、はさみの刃を回転するような、点の周りを回転することについて話す。

・ドア、本のページ、ちょうつがいされたふたのような、直線の周りを回転することについて話す。

・次のような物体を見つけ分類する；

転がる（ボール、オレンジ、木の卵、球）

滑る（本、直方体の箱、立方体、角錐）

転がり滑る（コットンリール、硬貨、すず製のスープ容器、円錐、円柱）

・技術で、簡単な腕時計、簡単な風車のような回転するものを作る。

・1回転や半回転を認識する。例：体育で、あなたの左に2回転し、あなたの右に半回転する…

2回転して、風車の羽を動かす。

腕時計の分を1周、半周動かし、3時半のような時間について話す…

・媒介物の多くを使って模様を繰り返すことについて話し、起こったことの特徴を述べる。例えば：この模様には3つの形があります…円、長方形、三角形、そしてまた、円、長方形、三角形…



1/4 回転…

直角、直線…

1 回転、1/2 回転、1/4 回転を認識する。

1/4 回転は直角と呼ぶことを知る。

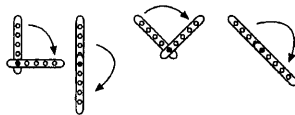
例；

・体育で、その地点を回る、一周・半周または1/4周、時計回りまたは反時計回りに回る。

・クラスで、ドア・窓・本・テーブル…の角は直角であることを認識する。

・正方形や長方形はそれぞれのかど1頂点が直角であることを認識する。

・同じ出発点から半周や1/4周を作り描くために、2つの幾何棒（geo-strips）を使う。



・繰り返しのパターンについて話し、作る。そして、起こったことを描写する。例えば：



このパターンは、L字形をずらしたり、半周回転させ…

角度は…より大きい、より小さい角

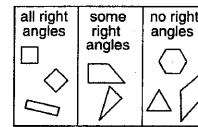
1 回転、1/2 回転、1/4 回転を認識する。1/4 回転は直角と呼ぶこと、そして直線は2直角であることを知る。

例；

・体育で、西に向く、直角に時計回りに回る…というような指示に従う。

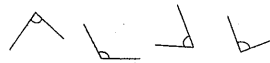
半周または同じ方向に1/4回転を2回すると、あなたは反対の方向を向いていることを知る

・2-D の形を、直角が全部か、いくつかあるか、ないかによって、分類する。

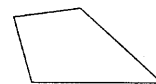


・直角を作るために紙を折る。教室で直角を見つけるためにそれを使う。

・直角を描いたり測ったりするためにテンプレートを使う。例えば、これらの角のどれが直角より大きいか、直角より小さいかを決定する。



・この形にしるしを付ける：一番小さい角にSの文字を；一番大きい角にLの文字を。



・線にそって繰り返されるパターンを作り出すタイルを張るコンピュータプログラムを使う。1つの軸にタイルを反射し、どのようにパターンが変わるか述べる。

資料4 イギリスの国家ニューメラシー・ストラテジー(1999)「形・空間」の内容 Year4-6 全訳

The National Numeracy Strategy

Framework for teaching mathematics from Reception to Year 6(DfEE, 1999)

Supplement of examples: Year4,5 & 6 pp102-111

SHAPE AND SPACE

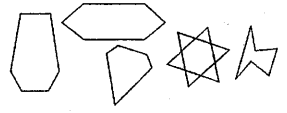
生徒は以下のことを教えらるべきである。

3-D や 2-D の形を特徴を述べ、視覚化する；それらの特性に従って、分類する

P.102,103

4年	5年	6年
<p>以下の言葉を使い、読み、書く： 模様、形、2-D、二次元、3-D、三次元… 直線、辺、へり、面、表面、底面、 頂点、角、頂角、頂点… 中心、半径、直径… 展開図…作る、組み立てる、作図 する、描く、略図を描く… そして、次のような形容詞的な； 曲がっている、まっすぐ…、規則 的な、不規則な… 凹面の、凸面の…、閉じられた、 開かれた… 円形の、三角形の、六角形の、円 柱の、球の…正方形の底辺、直角 の…</p> <p>2-D と 3-D の形を名づけ、分 類し、描写する： 円、半円、三角形、等辺三角形、 二等辺三角形、四角形、長方形、 長方形の、正方形、五角形、六角 形、七角形、八角形、多角形…、 立方体、直方体、四角すい、球、 半球、円柱、円錐、角柱、四面体、 多面体…</p> <p>例：</p>	<p>前の学年からの語彙を使って、読 み、正しいスペルで書き、広げ る： 合同の…</p> <p>形を名づけ、描写することを続 け、広げる： 不等辺三角形…八面体…</p> <p>例：</p>	<p>前の学年からの語彙を使って、 読み、正しいスペルで書き、広 げる： 同心の…タングラム… 円周、弧…</p> <p>形を名づけ、描写することを続 け、広げる： 平行四辺形、ひし形、たこ、台 形… 十二面体…</p> <p>例：</p>
3-D の形	3-D 形	3-D 形
多面体を理解する：	次のような特徴に応じて立体を	平行または垂直の面、辺のよう

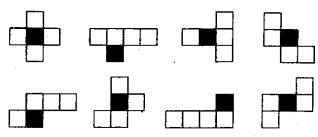
<ul style="list-style-type: none"> 各面は平面で多角形である； 辺は2つの平面が交わるところの直線である； 頂点は3つまたはそれ以上の辺が交わるところの点である； <p>角柱は2つの同一の側の表面と同じ長さの横断面がある。例を集めて、名前をつけて、描写する。</p>	<p>分類する。</p> <ul style="list-style-type: none"> 面の形； 面、辺、頂点の数； どの面が直角であるかないか。 同じまたは違う各頂点に交わる辺の数はあるかどうか。 	<p>な3-Dの形の特徴を述べる。</p>
<p>2-D 形</p>	<p>2-D 形</p>	<p>2-D 形</p>
<p>多角形は閉じていて、3本またはそれ以上の直線のある平面であること、正多角形はすべての辺、角が等しいことを理解する。</p> <p>二等辺、正三角形の角や辺の特徴を理解し、そしてそれらを使う：例えば、三角形の模型を作る。多角形を分類し、名前をつける</p> <div data-bbox="183 1164 494 1355" data-label="Diagram"> </div> <p>それらのいくつかの特徴を理解する。例えば：</p> <ul style="list-style-type: none"> 七角形すべて7本の辺がある。 四角形はどれも4直線のある形である。 正方形や正三角形は正多角形の例である。 二等辺三角形は不規則な多角形の例である。 多角形は凹形か凸形かです。混ざった集まりから特定の形を分類する。 <p>例えば、これらの形は六角形がありますか？</p>	<p>次のような長方形の特徴を認識する。</p> <ul style="list-style-type: none"> 4つの角は直角である。 向かいあう辺は等しく平行である。 対角線は一方を二等分する。 <p>三角形を名づけて分類する。</p> <div data-bbox="614 1164 933 1355" data-label="Diagram"> </div> <p>それらの特徴のいくつかを知る例：</p> <ul style="list-style-type: none"> 正三角形のすべての3辺は同じ長さで、すべての3つの角は同じ大きさである。 二等辺三角形は2つの等しい辺と2つの等しい角がある。 不等辺三角形の2つの辺や角は等しくない。 直角三角形の1つの角は直角である。 <p>2-Dの形の集まりを分類し、確認するためにコンピュータープ</p>	<p>平行四辺形を名づけ、分類し始め、平行な辺、等しい角、等しい辺、対称の線のような基準を使う。</p> <p>次のような特徴を知る：</p> <ul style="list-style-type: none"> 平行四辺形は向かい合う辺が等しく、平行である。 ひし形は4つの辺が等しい平行四辺形である。 長方形は4つの直角があり、向かい合う辺が等しい 正方形は4つの辺が等しい長方形である。 台形は向かい合う平行な辺が一組ある。 たこ型は接した等しい辺が2組ある。 <p>次のような特徴を知り始める。</p> <ul style="list-style-type: none"> 正方形、ひし形、またはたこ形のどれも対角線が直角に交わる。 正方形、長方形、ひし形、または平行四辺形のどの対角線も一方を2等分する。

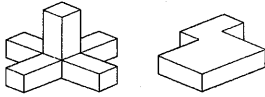
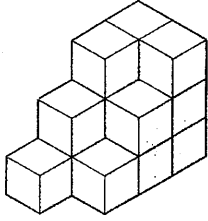
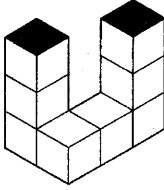
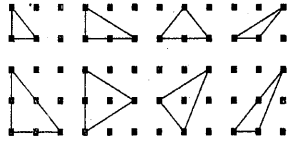
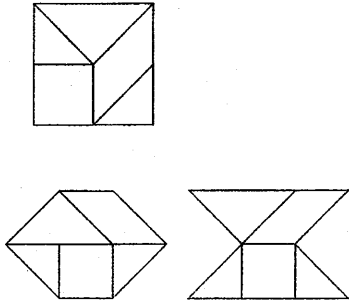
	<p>ログラム binary tree を使う。</p> <p>対称も参照しなさい (107 ページ)。</p>	<p>対称も参照しなさい (107 ページ)。</p>
---	--	-----------------------------

生徒は以下のことを教えられるべきである。

より正確に形や模様を作る

P.104,105

4年	5年	6年
<p>より正確に、模型、形そして模様を構成する。例えば:</p>	<p>より正確に、模型、形そして模様を構成する。例えば:</p>	<p>より正確に、模型、形そして模様を構成する。例えば:</p>
<p>3-D の形</p>	<p>3-D の形</p>	<p>3-D の形</p>
<p>3-D の形の簡単な展開図で分類する。例えば、これらの展開図を分類するために、立方体や直方体の模型を切り開く。</p> <p>骨組みの形を作るのにストローやパイプを使って、あるいは立体の形を作る構成キットを使って、立方体、直方体、錐、柱のような多面体を作る。</p> <p>面や辺の数を数える。次のような特徴を理解する:</p> <ul style="list-style-type: none"> すべての錐体は偶数本の辺がある。 角柱の直線の数 は 3 の倍数である。 錐体の面の数は、底面の辺の数より 1 つ多い。 柱体の面の数は、下の面の辺の数より 2 つ多い。 <p>2-D の線画から 3-D の形を思い浮かべる。</p> <p>例えば、これらの形を作るために必要な立方体の最小の数で、作る。</p>	<p>ふたのない立方体 (5 つの正方形の面) の展開図の違いを分類をする (黒い正方形は立方体の底面を示している)。</p>  <p>2-D の線画から 3-D の形を思い浮かべる。</p> <p>例えば、これらの形を作るために必要な単位 1 の立方体の最小の数で、作る。</p>	<p>閉じた立方体 (6 つの正方形の面) の展開図の違いを分類する。</p> <p>2-D の線画から 3-D の形を思い浮かべる。</p> <p>例えば、影のつけられた面を覆ったり、つないだりするために必要な立方体の最小の数を見つけ理由をつける。</p>

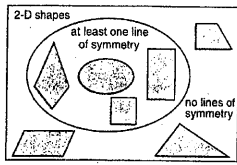
		
<p>2-D の形</p>	<p>2-D の形</p>	<p>2-D の形</p>
<p>紙を折ったり、ピンボード上で、異なった多角形を作り、対称軸のような特徴を話し合う。</p>	<p>形を作るためにピンボードを使う。</p> <p>例えば：</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 3×3 のピンボード上で異なった三角形を作る。 ・ 5×5 のピンボード上で異なった正方形を作る。  <p>これらの三角形は不等辺である、または一番大きい面積であるというような特徴を話し合う。</p>	<p>タングラムの部品を使ってできる異なった多角形を調べる。</p> <p>例えば、六角形を形作るために5つのタングラムの部品を再構成する。</p>  <p>多角形を描くために、タートルグラフィックを使う。</p> <p>作られた形の幾何学的特徴を話し合う。</p>

生徒は以下のことを教えられるべきである。

2-D の形の線対称、反射、変換を理解する。

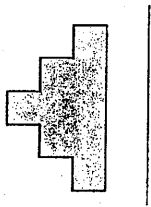
P.106,107

4年	5年	6年
<p>使い、読み、書く：</p> <p>鏡の線、対称軸、線対称、対称の、反射する、反射、変換…</p> <p>2本またはそれ以上の対称軸を分類し描く。そして、対称軸のない形を理解する。</p> <p>例：</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 模様、ロゴ、広告…を対称軸があるかどうかで分類する。 ・ 対称軸によって2-D の形を分類する。 	<p>前学年からの語彙を使って読み、正しいスペルで書き、広げる：</p> <p>対称軸、反射した対称…</p> <p>正多角形の反射した対称軸の数を数える。</p> <p>例：</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 四角い紙に規則的と不規則な多角形を描いて、それらを切り取る。 	<p>前学年からの語彙を使って読んで正しいスペルで書き、広げる：</p>



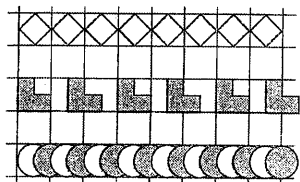
1つの辺に平行な鏡の線で簡単な形の鏡像を描く。形の辺または模様は鏡の線に平行または垂直である。

例：



対応する点は対称軸から同じ（もっとも短い）距離であることを知る。

形を繰り返し移動することによって模様を作る。



コンピュータープログラムを使うこと：

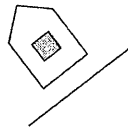
- ・模様を作り、水平または垂直の線でそれを反射させる。
- ・‘タイル’を作り、線にそって繰

鏡を使い、折ることで、対称かどうかを調べる。

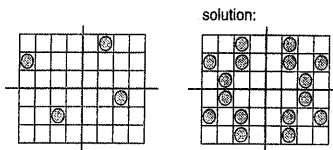
- 1回以上対称に折るものを言う。
- ・正多角形の対称軸を調べる。

正多角形の対称の線の数は辺の数と同じであること、つまり正方形は4つの対称の線がある、そして、正三角形は3つあることを知る。

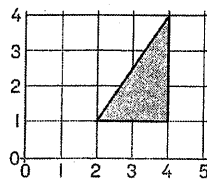
1つの辺に平行な鏡の線で簡単な形の鏡像をスケッチする、形の辺は鏡の線にすべて平行または垂直ではない。



直交する2本の対称軸がある四角い紙に、対称な模様を完成させる。例えば、このパターンを完成させる。

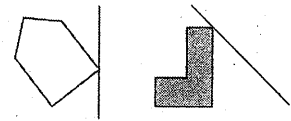


例えば2単位左にというように、移動させた後の単純な形の位置をスケッチする。

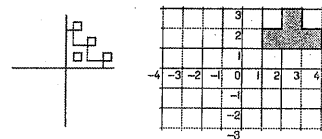


‘タイル’を作り、そのタイルを繰り返し移動させ線にそってそれを反射させて使うために、コンピュータープログラムを使

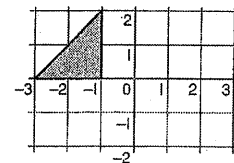
1つの点に接する鏡の線で簡単な形の鏡像をスケッチする。形の辺は、鏡の線にすべて平行または垂直な必要はない。



直交する2つの鏡の線で、簡単な形の反射を描く。形の辺は鏡の線に平行または垂直である。



例えば3単位右に移動させ、2単位下に移動というように、移動させた後の単純な形の位置をスケッチする。



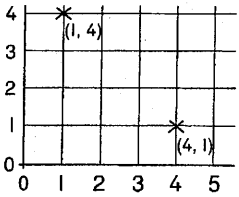
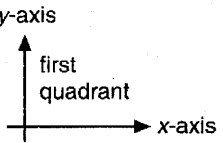
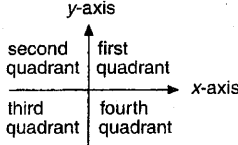
形を変形させるためのコンピュータープログラムを使う。作られた形を予測し話し合う。

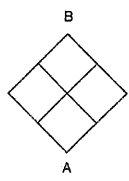
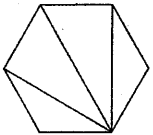
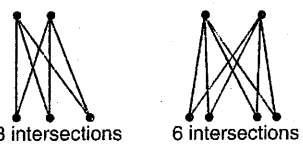
<p>り返してそれを移動する。 作られた形を予測し話し合う。</p>	<p>う。 作られた形を予測し話し合う</p>	
--	-----------------------------	--

生徒は以下のことを教えらるべきである。

位置と方角を理解し、座標を使う

P.108,109

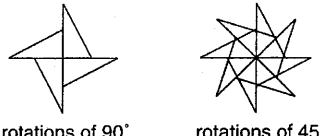
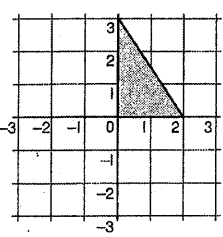
4年	5年	6年
<p>使い、読み、そして書く： 位置や方向の特徴を述べるための前置詞と日常の言語… 位置、方向… 上がる、下がる…、旅、ルート、地図、プラン… 格子、列、行、原点、座標… 方位磁石の針、北、南、西、東、北西、北東、南西、南東… 水平の、垂直の、対角線…</p> <p>数直線上の正方形の格子上で、点の位置を述べ、見つける。 (3,2)は、原点(0,0)から始めて3つの線を横に動き、2つの線を上に動くことによって見つけられる点を示しているという取り決めを理解し始める。 (4,1)と(1,4)が違う点を示していることを理解する。</p>  <p>環境の中で、平行または垂直または辺の単純な例を理解し分類する。</p> <p>例： ・テーブルのへりは平行である。 ・ドアの辺は垂直である。</p> <p>格子上で、列は平行に描かれたもの、垂直に描かれたものが行、</p>	<p>前の学年からの語彙を使って読み、正しいスペルで書き、広げる： x軸、y軸…、四分円… 平行、垂直…</p> <p>第一象限の座標を使って、点を読み、また、点をとる。</p>  <p>(3,2)は原点(0,0)から始めて3つのラインを横に動き、2つのラインを上を動くことによって見つけられる点を示しているという取り決めを理解する。</p> <p>次のような質問に答える。 ・これらの点は形の頂点の座標です：(1,5)(2,5)(4,3)(2,1)(1,1) その形の名前は何でしょう？ ・正方形の頂点の3つは、(2,1)(2,4)(5,4)です。4つ目の頂点の座標はどこでしょう？</p> <p>理解すること： ・垂直な線は互いに直交している。 ・平行な線は同じ距離だけ離れている。</p>	<p>前の学年からの語彙を使って読み、正しいスペルで書き、広げる： 交わる、交差… 次元…</p> <p>第一象限を超えた座標を使って、点を読み、点をとる。</p>  <p>次のような質問に答える ・正方形の頂点の3つは、(-1,1)(2,5)(6,2)です。4つ目の頂点の座標はどこでしょう？ ・第一象限に各頂点がある多角形を描く。y軸にその反射を座標で示し、反射された形の座標を示す。</p> <p>四角形の平行、垂直な線を理解する。</p> <p>3-Dと2-Dの形の特徴も参照しなさい(P103)。</p>

<p>対角線は反対側のかどを結んだ直線であることを理解する。</p> <p>8 つの方位 N,S,E,W,NE,NW,SE, SW を使う。</p> <p>例：</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ (1,4) から (2,3) (3,2) (4,1) (5,0) を通っていく南東の道を描写する。 ・ 原点から格子状に沿って 5 単位の距離を動いて(0,5),(1,4), (2,3),(3,2),(4,1)や(5,0)にあなたを連れて行く練習をする。 ・ 北東または北西だけに移動し、A からBに行く異なった道順のすべてを描写する 	<p>環境の中で、平行または垂直な線や、正方形、五角形、八角形のような正多角形を理解し分類する。</p> <p>対角線は多角形の頂点から隣接しない頂点へ引かれた線であることを理解する。</p> <p>例：</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 五角形または八角形のような形の対角線のすべてを描く。  <p>3 of the 9 diagonals of a hexagon</p>	<p>互いに交わる 2 直線は交わる直線と呼ばれ、そしてそれらが交わった点は交点と呼ぶことを知る。</p> <p>例：</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 2 点、3 点、4、5…他の点から描かれる線のすべての交点を分類する。  <p>3 intersections 6 intersections</p> <p>2 点から 10 点の交点の数を予測する。</p>
---	--	--

生徒は以下のことを教えられるべきである。

回転させる;角を見積り、描き、測る;回転を理解する。

P.110,111

4 年	5 年	6 年
<p>使い、読み、そして書く； 回す、回転する、一回転、半回転、4分の1回転… 角、直角、直線、…度… 定規、三角定規、角の測定器… 角は度で測られること、そして次のことを理解する：</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 1 回転は 360 度または 4 直角である。 ・ 4 分の 1 回転は 90 度または 1 直角である。 ・ 直角の半分は 45 度である。 <p>長方形や正方形のかどにある角は 90 度であること、そして正三角形の角は 60 度であることを</p>	<p>前の学年からの語彙を使って読み、正しいスペルで書き、拓げる：</p> <p>回転する… 鋭角、鈍角…、分度器… 形を回転することによって、模様を作る。</p>  <p>rotations of 90° rotations of 45°</p> <p>直角を認め、理解し、度で角を測ることを使う。 鋭角、鈍角、直角を分類し、見積り、整理し、測り、計算し始める。</p>	<p>前の学年からの語彙を使って読み、正しいスペルで書き、拓げる：</p> <p>反転させる… 頂点について 90 度または 180 度の回転の後の簡単な形の位置をスケッチする。</p>  <p>鋭角、鈍角、直角を分類し、見積り、整理し、測り、計算する。</p>

理解する。

度でそれらを表し、右回り、左回りの回転を作り、測る。

例：

・腕時計上で時間の針を使って、30度、60度、90度の回転を作り特徴を言う。：例えば、10時から2時、または5時から7時、または2時から3時など。

・方位を使って回転を作り特徴を言う：例えば、西に向いて45度右回りに回し、あなたが今向いている方向を言う。

・地理で、南西から西の方向に日々変化する風向きを度で表現する。

・「洗い」から「脱水」の針の回転度はどのくらいでちょうどよいか。

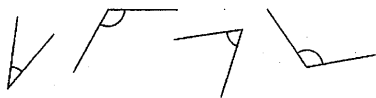


角の順番をつけ始める。例えば：

・90度、60度、45度、30度の角を描き、測るために45度または60度の三角定規を使う。

・2つの角のどちらが大きいか理解する：例えば、60度の角は45度の角より大きい。

・2直角より小さい角の集まりを大きさの順に並べる。



次のことを知る：

・90度より小さい角は鋭角である。

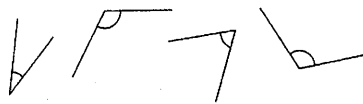
・90度から180度までの角は鈍角である。

・180度の角は直線である。

例：

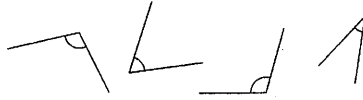
・学級にある2-Dの形を、鋭角、鈍角、直角に分類する。

・次の角は鋭角か、鈍角かを言う。



それぞれの角で、5度に近い角を推定する

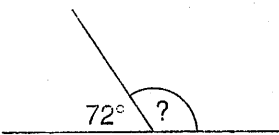
・これらの角で5度に近いものを測るために分度器を使う。



・25度、80度、135度の角を描くために分度器を使う。

・直線上の角を計算する。

例：



例：

・角の集まりのそれぞれの大きさを度で見積る。

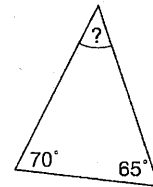
・与えられた角を最も近い度で測るために、分度器を使う。

・与えられた角を最も近い度で描くために、分度器を使う。

・測ること、または折ることによって、三角形の3つの角の合計が180度になることを調べる。

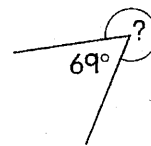
例えば、三角形を描いて、そして切る。直線を作るために3つの角を切り取り、配列しなおす。

・2つの角度が与えられた三角形の3つめの角を、計算する。



・頂点における角を計算する。

例：



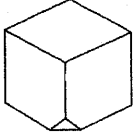
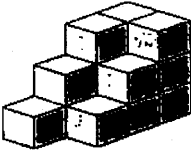
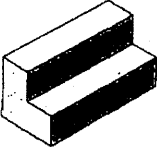
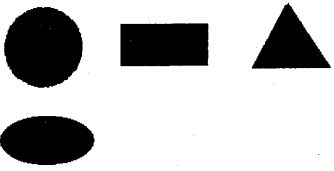
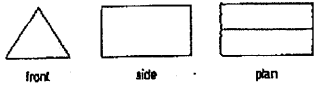
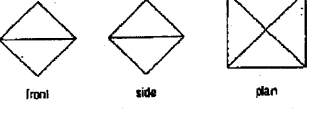
・正多角形の外角の特徴を調べるために、Logo Procedureを使う。

以上、図形と空間、1年～6年

SHAPE, SPACE, AND MEASURES

生徒は以下のことを教えられるべきである。

3次元の立体を視覚化し、そのいくつかの性質を表すために、2次元の平面図形や正面図を使って、
 言い表す。 pp.198-199

7年(中1)	8年(中2)	9年(中3)
<p>次のものを正しく綴り、書き、読み、使う。 2-D、3-D、立方体、立方体の、4角錐、4面体、三角錐、円柱、球、半球、頂点、辺 見取図</p> <p>3次元の立体を視覚化し、そのいくつかの性質を表すために、2次元の表現を使って言い表す。 例 ・2つの同じ立方体がある。面と面を合わせておく。その新しい形をかいて、名前をいう。面と辺と頂点はいくつあるか？</p> <p>・立方体の角を切断し、新しくできた面と形を述べる。面と辺と頂点はいくつあるか？</p>  <p>・パートナーと背中合わせにすわり、モデルの絵を見る。パートナーに見せてはいけない。どのようにモデルが作られているかパートナーに説明する。</p> <p>・「形を想像しよう」に積極的に参加する。</p> <p>1cm角の立方体からできている形がバッグの中にある。 a その形に触ってその特徴を交代しながらいう。 b 他の人がそれが何か想像しているあいだにその形を交代しながらいう。 c その立体に関する質問をしながらその隠れている立体を推察する。ただし、その質問には「はい」と「いいえ」としか答えてもらえない。</p> <p>・立方体の6つの面の上に、1</p>	<p>前年の用語を正しく使い、見取図 平面図 正面図、立面図、合同などに拡張する。</p> <p>平面図、正面図を使って、立方体や立方体でできている立体の幾何的な特徴を理解して使う。 例 ・壁のポスターや写真から視覚化できた空間図形をいう。 ・立方体の辺の間の関係を視覚化し、次の辺を見つける。 ・交わる ・平行 ・垂直 ・平行でもなく交わらない</p> <p>・朝食のシリアルの箱を思い浮かべる。箱の前と後ろを赤色にし、箱の上と下を赤色に他の面を青にする。箱を使って注意深く学習する。 辺はいくつあるか？ 赤と青の面がつくる辺はいくつあるか？ 赤と他の赤の面がつくる辺はいくつあるか？ 青と他の青の面がつくる辺はいくつあるか？</p> <p>・パートナーと背中合わせにすわり、右の立体を見る。パートナーに見せてはいけない。どのように立体が作られているかパートナーに説明する。</p> <p>・右の立体の見取図をかき、この形を作る。</p>   <p>・同じ立方体の3つの見取図がある。どの文字が反対の位置にあるか？</p>	<p>前年の用語を正しく使い、断面図、投影図、平面などに拡張する。</p> <p>3次元の立体を2次元の正面図、立面図などの投影図や断面図を通して分析する。 例 言葉で述べたことから立体を視覚化する。 例えば、 a 正面図と立面図が正三角形平面図が正方形である立体 b 正面図と立面図が長方形、平面図が円である立体 c 正面図が長方形で、立面図が正三角形、平面図が長方形である立体 d 正面図と立面図と平面図がすべて円である立体</p> <p>・立体の影がある。それぞれの影でできる立体をできるだけいう。(多くの答えがあるかもしれない。)</p>  <p>・それぞれの場合にあてはまる立体をいい、見取図をかく。</p> <p>a.  front side plan</p> <p>b.  front side plan</p> <p>・側面が二等辺三角形か正三角形である立体の名前をいう。</p>

から6の数字が反対側の数を足すと7になるようにかいてある。



立方体の見取り図をかく。面を選んでその上に5をく。

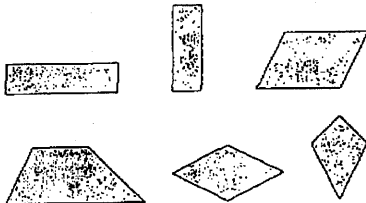
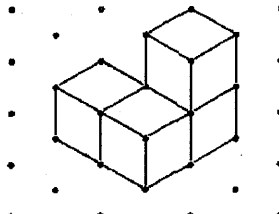
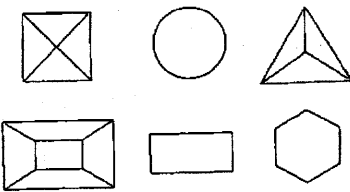
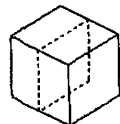
立方体をもちあげたとき、反対側の面を数を足すと7になるように他の面に数をかく。

・エジプトのピラミッドを訪れていると想像する。地上に立って、ピラミッドを見上げている。見ることのできる面の最大の数はいくつかか。もし、空を飛んでいるとすると、いくつになるか？

・立方体の大きなダンボールの箱を見ていると想像する。ちょうどひとつの面を見ることができるよう立つことができるか？
みることのできる概形をスケッチする。
2面、3面または4面だけを見ることができるよう立つことができるか？見ることのできる概形をスケッチする。

生徒は以下のことを教えられるべきである。

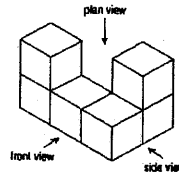
正面図と立面図と平面図で表された2次元の図から3次元の立体を視覚化してその立体の性質を推論する。 pp.200-201

7年(中1)	8年(中2)	9年(中3)
<p>・光の反対側にできる、異なった角度から照らされた正方形のカードの影がある。 次のうちどれが影として考えられるか？どれがありえない影か？</p>  <p>・4つの立方体からできる立体をできるかぎり見つけ、方眼用紙を使ってかく。</p> 	<p>方眼を正しい向きにして、方眼に図形をかくために次のことを使う。 ・垂直な辺は垂直な線としてかく。 ・水平な辺は30度にかく。</p> <p>かかれた立体の中の見えない線の位置を見つける。</p> <p>平面図や正面図を使う。</p> <p>・下の図は、立体を上から直接見たものである。この立体が何かいい、その理由を説明する。</p> 	<p>異なった平面で切断した面を視覚化し、特徴を述べる。</p> <p>例 ・異なった高さの水平な面で切断した正四面体の切断面を比べる。</p> <p>・右の立方体は正方形の切断面ができるように切断されている。</p>  <p>立方体の切断面が次のような形になるように切断することができるか？ a 長方形 b 三角形 c 五角形 d 六角形 もしできるのなら、どのように切断するのかいう。</p>

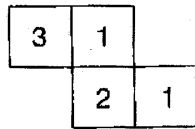
・ 1 辺が 2cm の立方体を 2 つに分けるには、何通りの異なった分け方があるか調べる。

- a 同じ形と大きさ
- b 異なった形と大きさ

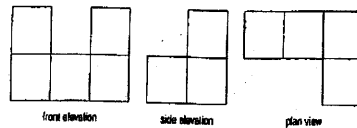
・ 右の立体の正面図、平面図、立面図をかく。



・ 次の図はいくつかの立方体からできた立体の平面図である。それぞれの正方形に書かれた数は、底面の上にくいつ立方体があるかを示している。どこから見るか選んで、この立体の見取図をかきなさい。



・ 次の正面図、平面図、立面図が与えられている立体を作る。



・ 8 つの立方体のできる立体の中で、表面積がもっとも大きいものと、小さいものを見つけ、それを方眼紙にかく。12 個の立方体のできた立体で同じことをする。

・ 立方体のそれぞれの面の真ん中に点を入れ、隣の面の点を直線で結ぶ。その線によってどんな形ができるか？

・ 八面体を思い浮かべ、それぞれの面の真ん中に点を入れ、隣の面の点を直線で結ぶ。その線によってどんな形ができるか？

・ それぞれの立方体のかどを線対称に切断する。残った立体をいう。もっとできるか？同じことを四面体や八面体でする。

・ 立方体の 3 つの頂点を結ぶと三角形ができる。いくつ異なった形の三角形を見つけることができるか？それらをか。

生徒は以下のことを教えられるべきである。

2次元、3次元で長さ、周囲の長さ、面積、体積などを計算する公式を活用し、推論する。pp.238-239

7年 (中1)	8年 (中2)	9年 (中3)
<p>立方体の表面積や立方体から作られた形を見つけ、測定や計算によって調べる。</p> <p>立方体や他の3次元の立体を展開し、展開図の図形と表面積を関係づける。</p> <p>日常の中の立体の表面積を測る。 例 ・家のレンガ、シリアル箱の箱、マッチ箱の表面積を測り、測定し、計算し、概算する。</p> <p>縦、横、高さを使って立方体の表面積の公式を推論し、活用する。 $S = 2(\text{縦} \times \text{横}) + 2(\text{縦} \times \text{高さ}) + 2(\text{高さ} \times \text{横})$</p>	<p>立方体の体積の公式を知り、立方体に関する問題を解くために使う。</p> <p>1cm^3の立方体をどのように数えたのかを考え、立方体の体積の公式を理解する。</p> <p>長さが1、横がw、高さがhの直方体がある。</p> <p>底面積 = 1個の 1cm^2 正方形 体積 = 底面積 \times 積んでいる個数 = 1個の 1cm^3 の立方体</p> <p>体積を測る。 例 日常にあるまな板、石鹼、靴箱の体積を測るり、測定し、計算し、見積もる。 cm^3、m^3 で測定した体積を考える。</p>	<p>角柱の表面積と体積を計算する。</p> <p>角柱は、はじめから終わりまで、同じ断面の長方形でできている。直方体も同じである。</p> <p>次の角柱の総体積を求めるには、角柱は直方体が集まってできていることを使う。</p> <p>角柱は、断面の面積が $A_1 A_2 A_3$ で、そのすべての高さが b である。</p> <p>$V = A_1 b + A_2 b + A_3 b + \dots$ = $(A_1 + A_2 + A_3 + \dots) b$ = 断面の総面積 \times 高さ</p> <p>円柱の表面積と体積 底面の半径が r、高さが h の円柱の表面積を A とすると、A は次の公式で与えられる。</p>

体積と置き換え

科学は体積と置き換えの間の関係を正しく理解することから出発した。

例

いくつかの立方体、または、異なった数の 1cm 角の立方体でできた立体をつくり、水を半分入れたメスシリンダーの中に入れる。

水は何 ml あがってくるか？置きかわった水の体積と立方体、または立方体でできた立体の体積との関係は何か？
(水 1ml は 1 cm³ である。)

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

円柱の体積を V とすると、V は次の公式で与えられる。

$$V = \pi r^2 h$$

地理では降雨量を使い、それからある決まった期間に特定の地域に降った水の体積を測る。

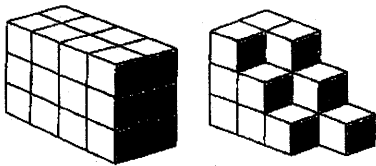
生徒は以下のことを教えらるべきである。

2次元や3次元の形の高さ、周囲の長さ、面積、体積を計算する公式を使い、推論する。pp.240-241

7年(中1)

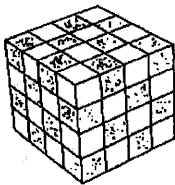
次の簡単な問題を解く。

・次の立体にいくつの単位立方体があるか？それぞれの形の表面積はいくらか？

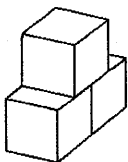


・24個のさいころを使って違った形を作る。それらは同じ表面積か？

・次の立体は交互に並んだ青と白の単位立方体からできている。表面積はいくらか？青の表面積はいくらか？



・次の立体は3つの同じさいころからできていて、一番上のさいころは他の2つのさいころの真ん中にある。

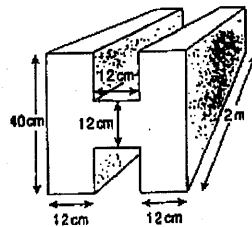


8年(中2)

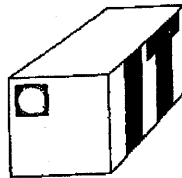
次の問題を解く。

・3cm、4cm、5cmの箱の体積を求める。

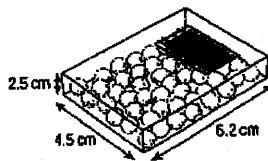
・次のHの形をしたギルダの体積を cm³ の単位で求める。



・12m、9m、6mの3つの高さの容器がある。横の長さも縦の長さも2.3mである。それぞれの容器の中に1.1mと1.1mと2.9mの枠が何個とれるか？



・2.5cm、4.5cm、6.2cmの箱がある。

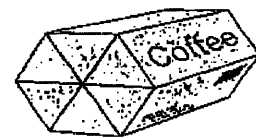


店員が次のようなトレイに箱をいれる。

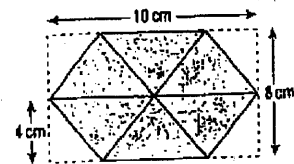
9年(中3)

次の問題を解く。

・コーヒーの箱は六角柱である。



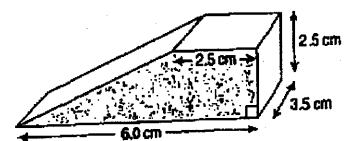
六角形のなかの6つの三角形は同じ形である。



六角形の面積を計算する。

箱の高さは12cmで、パッキングしたあと、コーヒーは箱の80%入っている。コーヒーは何グラム入っているか？(1cm³のコーヒーは0.5gである。)

・ドアのくさびは角柱である。

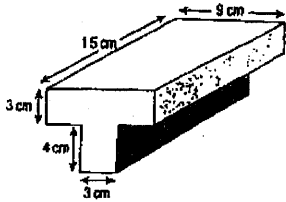


濃く塗られた部分の台形の面積を計算する。ドアのくさびの体積を計算する。

この立体の表面を粘着性の紙で覆うとき、必要な紙の異なる形をかく。それぞれの形は何個必要か？

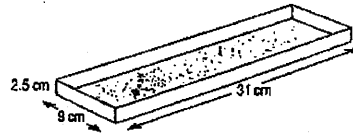
それぞれのさいころの1辺の長さが5cmであるとき、この形の表面積を求める。異なったやり方で求め、その方法を比べる。

・次のギルダの表面積を計算する。



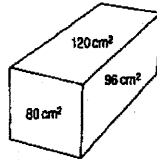
1辺が1cmの12個のさいころが紙で覆われているとき、どのくらいの紙が必要か？

12個のさいころが1つの小包でラップされている。最も少ない紙で包むには、どのようにさいころをならべたらよいか。

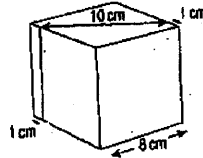


このトレイに平らになるようにおくことができる最大の箱の数を求める。

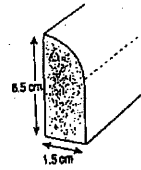
・次の箱の表面積の合計を求め、それぞれの辺の長さを求める。



・次のチーズの固まりはさいころの形をしている。それぞれの辺の長さは8cmである。対称に切って2つにわけたとき、濃くぬられた部分の体積と表面積を求める。



・次のスカーティングボードは4分の1円を上においた長方形の形をしている。スカーティングボードの薄さは1.5cmで、高さは6.5cmである。トータルで120mの長さの気を注文した。この注文で木の体積はいくらか？



・大きなワックスのろうそくは底面の円の直径が8cmで高さが20cmの円柱である。ろうそくが、きちんとはいるくらいの直方体の箱に別々に入れられ梱包される。それぞれの箱の中の空気はどのくらいの割合でか？ろうそくと箱が2倍の大きさになったとき、空気のしめる割合に影響があるか？

・円柱の形をしたAのコップの体積が1000cm³になるようにデザインされていて、金属が最小限になるように使われている。このコップの体積とコップの上の面の直径はいくらか？コンピュータのスプレッドシートを使ってよい。

小学校算数、中学校数学、高校数学の接続を重視した
幾何教育の改善に関する研究

平成 19 年 3 月 30 日 発行

〒422-8529 静岡市駿河区大谷 836 静岡大学教育学部
研究代表者 国宗 進

印刷所: 文章堂印刷所
〒220-0021 横浜市西区桜木町 4-17