資　料

日本における確率論の濫觴（１）
―陸軍士官学校編『公算学』1888年の復刻とその書誌学的考証―

上　藤　一　郎

はじめに

以下本稿では，数編に分け，陸軍士官学校編『公算学』1888年（明治21年）の復刻と解題を試みる。同書は，日本初の確率論に関する著作であると推定されているが，長らくその所在が不明であった。しかしながら，筆者が個人蔵書として同書を入手したのを機に，日本の確率論における歴史研究を推し進める資料としてこれを復刻・公刊することとした。復刻に先立ち，日本の統計学並びに確率論を巡る歴史研究の現状とこれまでの成果について簡単に触れておきたい。

日本における統計学の導入は，他の西欧諸科学と同じく幕末・明治初期に始まる。この時期より今日に至る日本の統計学について，その歴史的発展過程を分析した研究は比較的多く，これまで優れた研究成果が蓄積されてきた。[1)] しかし確率論・数理統計学の分野に限定すると，安藤洋美の先駆的な研究を除き，その研究は未だ端緒に就いたばかりであると言ってよい。[2)] このような状況を呈するに至った理由は幾つか考えられるが，その一つとして濫觴期に輸入され発展した統計学がドイツ流の統計学であったことを上げることができよう。

ここでドイツ流の統計学とは，19世紀後半に見られたドイツの統計学，即ちJ. E. WappäusやM. Haushofer等に代表されるドイツ国状学（Staatskunde）の末裔とも言うべき統計学と，G. von Mayr等に代表されるドイツ社会統計学を意味する。[3)] これらは，統計学を国家科学（Staatswissenschaft）として構想するか社会科学（Sozialwissenschaft）として構想するかによって相違が見られるものの，現代の数理統計学とは異なり統計学を数理科学とは看做さないという点で共通した性格を持つ。このようなドイツ流の統計学が幕末・明治期に輸入され発展していったのは，勿論，F. Galtonに始まり現代に連なる数理統計学が，当時まだ十分に成熟していなかったことも一つの要因となっている。しかしより重要なことは，これらドイツの統計学に，西欧流の中央集権的近代国家建設という，明治政府の政治的目標に合致した知識を提供し得る学問的体系が含まれていたことである。この時期の日本における統計学の発展過程は，それ自身が社会的，政治的性格を有しており，従って歴史研究の重要な素材を提供でき，結果として多くの研究蓄積を残すこと

が可能であったものと考えられる。

これに対して確率論は，明治期に観測誤差論との関連で輸入され，陸海軍や理学部（数学科・星学科）を中心とした大学アカデミー等のごく限られた分野でのみ定着し，社会的広がりを持ち得なかった。また統計学と確率論を結び付ける所謂「数理統計学」も，既述のように明治初期には十分体系化されておらず，加えて日本ではドイツ社会統計学の影響が第二次世界大戦後まで続いたこともあって，その発展・普及が立ち遅れていたことは否めない。確率論や数理統計学の歴史研究を停滞させてきた一因もここにある。とは言え，二次世界大戦前後にR. A. Fisherの数理統計学が導入されて以降，戦後60年以上を経て，Neyman=Pearson理論と基礎とする数理統計学の著しい普及を見るに至っている現状を鑑みるとき，確率論や数理統計学が日本において如何なる社会的背景の下で導入され，定着していったのか，その歴史的過程を明らかにしていくことは，第二次世界大戦後における社会統計学の発展過程との対比において重要な研究課題になり得よう。

本稿で資料の復刻・解題を試みる主な目的は，このような研究の一助たるべく基礎資料を提供することにあるが，濫觴期の確率論を巡る社会的背景について検討することも含まれる。本資料を通して明らかにされるが，日本の確率論は，純粋な西欧数学としてではなく軍事技術，観測技術の一分野として輸入された点に特徴がある。これは，明治期の西欧科学輸入における特殊性（研究者層と明治政府の目的）と，当時の確率論の国際的な研究動向という一般性を持つ。同時に，明治の前半期の段階で，既に数学的水準の高いテキストを陸軍士官学校で教育し得た事実も確認することができよう。そこで，資料の復刻と併せて，日本における確率論の導入・普及が，当時（19世紀）の西欧における確率論の現状と発展過程をある程度反映していたものであるということを，安藤洋美の先行研究に依拠しながら続稿の「解題」で詳しく検討する。

１．資料の復刻・紹介

凡　例

・本稿は，陸軍士官学校編『公算学』1888年（明治21年），を復刻したものである。復刻に際して用いた底本は，2006年に東京神田の古書肆より購入した筆者の私蔵本である。

・原本は句読点のない縦書き，漢字・片仮名による記述であるが，適宜句読点を加えた。

・漢字は原則として新漢字体に改めた。

・現在では使用されない漢字表記の用語も含まれているが，現代表記に改めることができたものについては〔　〕で示しておいた。

・縦書きを横書きに変更したため問題が生じた記述，例えば「右に述べたように…」のような記述については，「右〔上〕に述べたように…」のように〔　〕で示しておいた。

・数式等において明らかに誤植である表記については適宜改めた。但し，現代では使用されない表記法などについてはそのまま採用し，適宜注釈を加えた。

陸軍士官学校編『公算学』1888 年（明治 21 年）

第一篇　既定公算

第一欵　定説，全公算，比類公算，複公算

第一章　定説

理学上ニ於テ一事一象ノ公算〔確率〕トハ所望ノ数ト可成ノ数トノ比ヲ言フ。

一骰子ヲ投スルコト一回ニシテ其六数ノ一個ヲ表出スルノ公算ハ$\frac{1}{6}$ナリ。蓋シ所望ノ数ハ一個ニシテ可成ノ数ハ六ナレハナリ。

又，三赤玉及ヒ九黒玉ヲ納有スル一箱内ヨリ一赤玉ヲ撮出スルノ公算ハ$\frac{1}{4}$ナリ。蓋シ所望ノ数ハ三ニシテ可成ノ数ハ十二ナレハナリ。之ト同様ニ，一黒玉ヲ撮出スルノ公算ハ$\frac{3}{4}$ナルヘシ。

一般ニA象ノ公算ヲpトシ，其所望ノ数ヲfトシ，其不望ノ数ヲcトスレハ，可成ノ数ハ$f+c$ナルヲ以テ

$$p=\frac{f}{f+c} \qquad (1)$$

ナリ。

若シ$c=0$ナルトキ，即チ不望ノ数ノ存セサルトキハ，公算ハ変シテ必成トナラサルヲ得ス。而テ（1）式ハ$p=1$トナル故ニ，公算学ニ於テハ必成ヲ示スニ一ヲ以テス。

之ニ反シテ，若シ$f=0$ナルトキ，即チ所望ノ数ノ存セラルトキハ，公算ハ変シテ不必成トナラサルヲ得ス。而テ（1）式ハ$p=0$トナル故ニ，公算学ニ於テハ不必成ヲ示スニ零ヲ以テス。

右〔上〕両推論ニ拠テ考レハ，凡ソ事象ノ公算ハ零ト一トノ間ニアリ。即チ真ノ分数ナリ。qヲA事象ノ反公算（事象ノ反公算トハ其生起セサルノ公算ヲ言フ）トスレハ

$$q=\frac{c}{f+c} \qquad (2)$$

ナリ。（1），（2）式ヲ相加レハ$p+q=1$ヲ生ス。故ニ事象ノ公算ト其反公算トノ和ハ必成ノ記号一ニ等シ。其然ル所以ハ，凡ソ事象ハ生起スルカ，将タ生起セサルカ，必ス此両場合ノ外ニ過キサレハナリ。

第二章　全公算

一事一象ノ生起スルニ各異ノ現様[4] アルトキハ其公算ヲ全公算ト称ス。

一事一象ノ全公算ハ各異ノ現様ノ公算ノ和ニ等シ。例ヘハ一箱内ニ N 球アリ，其 n 箇ハ白ク，其 n' 箇ハ赤ク，其 n'' 箇ハ青ク，而シ其余ハ皆黒シ。一タヒ箱内ニ手ヲ入レテ，白球，或ハ赤球，或ハ青球ノ一箇ヲ撮出スルノ公算ハ，明ニ

$$\frac{n+n'+n''}{N}$$

ナリ。今之ヲ

$$\frac{n}{N}+\frac{n'}{N}+\frac{n''}{N}$$

ト記シテ観ニ，$\frac{n}{N}$ ハ白球ニ応スル公算ニ異ナラス，$\frac{n'}{N}$，$\frac{n''}{N}$ モ亦各赤球，青球応スル公算ニ異ナラス。故に此公算ヲ p，p'，p'' トシスレハ，所求全公算ハ $P=p+p'+p''$ ナリ。

第一例

弾丸ノ AB 線上ニ落ルノ公算ヲ p_1 トシ，其 BC 線上ニ落ルノ公算ヲ p_2 トスレハ，其 AC 線上ニ落ルノ公算ハ $P=p_1+p_2$ ナリ。

第二例

一タヒ二骰子ヲ投シテ, 数七, 或ハ数八ヲ現出スルノ公算ハ $\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}$ ナリ。蓋シ式中ノ $\frac{6}{36}$ ハ，数七ニ応スル公算ニシテ，$\frac{5}{36}$ ハ数八ニ応スル公算ナルヲ以ナリ。

第三章　比類公算

一事一象ノ比類公算ハ，其全公算ヲ除スルニ，比較スル所ノ総事象ノ全公算ノ和ヲ以テシタルモノニ等シ。

例ヘハ前章ニ設想セシ箱内ヨリ撮出スルモノ，赤球，或ハ青球ナルヨリモ白球ヲ撮出スルノ公算

ハ，比類公算ニシテ其量ハ

$$\frac{p}{p+p'+p''}$$

ナリ。何者望ム所ノモノハ，白球，赤球，青球ナルヲ以テ，其数ハ $n+n'+n''$ ナリ。然レトモ，殊ニ企望スルモノハ白球ニシテ，其数ハ n ナリ。故ニ比類公算ハ

$$\frac{n}{n+n'+n''}$$

即チ

$$\frac{\frac{n}{N}}{\frac{n}{N}+\frac{n'}{N}+\frac{n''}{N}}$$

即チ

$$\frac{p}{p+p'+p''}$$

ナリ。

第四章　複公算

若干事象相共ニ生起シテ成立スル事象ノ公算ヲ複公算ト称ス。一事一象ノ複公算ハ，此事象ヲ成立スル若干事象ノ公算（之ヲ単公算ト称ス）ノ相乗積ニ等シ。

例ヘハ二箱アリ，甲ハ m 白球及ヒ n 黒球ヲ納有シ，乙ハ m' 白球及ヒ n' 黒球ヲ納有ス。故ニ最初甲箱ヨリ一白球ヲ撮出シ，次ニ乙箱ヨリ一白球ヲ撮出シ，都合二白球ヲ得ノ公算ハ複公算ナリ。而テ甲箱ニ応スル公算ヲ p トシ，乙箱ニ応スル公算ヲ p' トスレハ，複公算 P ハ pp' ニ等シ。何者球ノ惣数ハ，甲箱ニ於テハ $m+n$ ニシテ，乙箱ニ於テハ $m'+n'$ ナルヲ以テ可成ノ数ハ $(m+n)(m'+n')$ ナリ。所望ノ数ハ mm' ナリ。故ニ公算ノ定説ニ拠テ

$$P=\frac{mm'}{(m+n)(m'+n')}$$

ナリ。今之ヲ

$$P=\frac{m}{m+n}+\frac{m'}{m'+n'}$$

ト記シテ観ニ，$\frac{m}{m+n}$，$\frac{m'}{m'+n'}$ ハ各々 p，p' ニ異ナラス，故ニ $P=pp'$ ヲ得。

第一例

甲砲ヲ以テ標的ヲ射ルノ公算ヲ p トシ，乙砲ヲ以テ之ヲ射ルノ公算ヲ p' トスレハ，此両砲ヲ以テ之ヲ射ルノ公算 P ハ pp' ニ等シ。

第二例

二箱アリ，甲ハ m 白球及ヒ m' 黒球ヲ納有シ，乙ハ n 白球及ヒ n' 黒球ヲ納有ス。偶然一箱ヨリ一白球ヲ撮出スルノ公算ハ如何。

所求公算ハ全公算並ニ複公算ノ例トナル。其複公算ノ例タル所以ハ，此問題ニハ何箱ニ手ヲ入レルルヤ，又入手シタル上果シテ白球ヲ撮出スルヤ否，此両件ノアルヲ以テナリ。

箱ノ数ハ二ナルヲ以テ甲箱ニ入手スルノ公算ハ $\frac{1}{2}$ ナリ。之ニ入手シタル後，一白球ヲ撮出スルノ公算ハ $\frac{m}{m+m'}$ ナリ。故ニ甲箱ニ応スル複公算ハ $\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{m+m'}$ ナリ。之ト同様ニ，乙箱ニ応スル公算ハ $\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+n'}$ ナリ。

故ニ所求公算ハ，全公算ノ原則ニ拠テ

$$\frac{1}{2}\left[\frac{m}{m+m'}+\frac{n}{n+n'}\right] \qquad (1)$$

ナリ。又一黒球ニ応スル公算ハ

$$\frac{1}{2}\left[\frac{m'}{m+m'}+\frac{n'}{n+n'}\right] \qquad (2)$$

ナリ。（１），（２）式ヲ相加レハ一ヲ得，此レ当然ノ理ナリ。

第二欵　復行試験の公算

第五章

公算学ニ於テ復行試験トハ公算ノ常ニ一定ナル試験ヲ言フ。

例ヘハ f 白球及ヒ c 黒球ヲ納有スル一箱アリ。毎度已撮出シタルモノヲ箱内ニ納メテ，更ニ一球ヲ撮出スルトスレハ，一白球ニ応スル公算ハ，始終 $\frac{f}{f+c}$ ナル一定ノ数ナリ。如斯ノ試験ハ，即チ復行試験ナリ。左ニ其公算ヲ説示ス。

試験ヲ施行スルコト m 回ニシテ，n 度黒球ヲ撮出シ，$m-n$ 度白球ヲ撮出スルノ公算ハ如何。但シ一白球ヲ撮出スルノ単公算ヲ p トシ，一黒球ヲ撮出スルノ単公算ヲ q トス。

先ツ二象ノ生起スル順序ヲ定メテ，最初 $m-n$ 度白球ヲ撮出シ，次ニ n 度黒球ヲ撮出セント欲スルトキハ，所求公算ハ複公算ノ原則ニ拠テ $p^{m-n}q^n$ ナリ。

之ニ反シテ二象ノ生起スル順序ヲ問ハス，只黒球ヲ得ルコト n 回，白球ヲ得ルコト $m-n$ ナルヲ是レ望ムトキハ，所求公算ハ，$p^{m-n}q^n$ ニ乗スルニ m 物体ヲ n 個ツツ取リタル合列ノ数 ${}_mC_n$ ヲ以テシタルモノニ等シ。即チ ${}_mC_n p^{m-n}q^n$ ナリ。

今，$(p+q)^m$ ノ分解式

$$(p+q)^m = p^m + {}_mC_1 p^{m-1}q + {}_mC_2 p^{m-2}q^2 + \cdots + {}_mC_{n-1}p^{m-n+1}q^{n-1} + {}_mC_n p^{m-n}q^n + {}_mC_{n+1}p^{m-n-1}q^{n+1} + \cdots + q^m$$

即チ

$$(p+q)^m = p^m + \frac{m}{1}p^{m-1}q + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}p^{m-2}q^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}p^{m-n+1}q^{n-1} + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}p^{m-n}q^n + \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots(n+1)}p^{m-n-1}q^{n+1} + \cdots + q^m$$

ヲ観ルニ，其第 $n+1$ 項ハ嚮ニ求メタル公式，即チ白球ヲ $m-n$ 度撮出シ，黒球ヲ n 度撮出スルノ公算ニ異ナラス。而テ其余ノ諸項ハ各々 $n=0$，$n=1$，$n=2 \cdots n=m$ ナル場合ニ応スル公算ナルハ明白ハリ。故ニ m 回施行スル試験ノ公算ハ，尽ク $(p+q)^m$ ノ分解式中ニアリト謂フヘシ。

第一注意

右分解式衆項ノ和ハ一ニ等シ。

第二注意

首項ヨリ項 ${}_mC_n p^{m-n}q^n$ 迄ノ惣項ノ和ヲナセハ，A 象ハ少ナクモ $m-n$ 回生起シ，B 象ハ多クモ n 回生起スル公算を得。

第一例

一骰子ヲ投スルコト四回ニシテ，一度六ノ数ヲ表出スルノ公算ハ如何。

此場合ニ在テハ，$p=\dfrac{1}{6}$，$q=\dfrac{5}{6}$，$m=4$，$n=3$ ナル故ニ所求公算ハ，$\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}\right)^4$ ノ分解式ノ第四

項$\dfrac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}\cdot\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^3$，即チ$\dfrac{1\cdot2\cdot5}{3\cdot2\cdot4}$ナリ。

第二例

一骰子ヲ投スルコト四回ニシテ，六ノ数ヲ表出スルコト少ナクモ二回ナルノ公算ハ如何。

此場合ニ在テハ所求公算ハ，$\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}\right)^4$ノ分解式ノ首項ヨリ第三項迄ノ和

$$\frac{1}{6^4}+4\frac{1}{6^3}\cdot\frac{5}{6}+6\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5}{6^2}$$

即チ

$$\frac{1+20+150}{6^4}=\frac{171}{1296}$$

ナリ。

第六章　$(p+q)^m$ の分解式に関する要領

第一要領

$(p+q)^m$ ノ分解式ノ最大項ハ，p，q ノ指数，p，q ト同比ヲナス所ノ項ナリ。之ヲ別言スレハ，復行試験中最大ノ公算ニ応スルモノハ，A 象ノ生起スル回数ト B 象ノ生起スル回数トノ比，其単公算ノ比ニ等シキ場合ナリ。

実ニ第 $n+1$ 項ト其前後両項トノ比ハ，各々$\dfrac{q}{p}\cdot\dfrac{m-n+1}{n}$，$\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{n+1}{m-n}$ナルヲ以テ第 $n+1$ 項ノ最大ナルニハ，$\dfrac{q}{p}\cdot\dfrac{m-n+1}{n}>1$，$\dfrac{q}{p}\cdot\dfrac{m-n}{n+1}<1$，即チ $q(m+1)>n$，$q(m+1)<n+1$ ヲ要ス。故ニ n ハ $q(m+1)$ ノ最大整数ニ等シカラサル可ラス。

若シ qm 整数ナレハ，$q(m+1)$ ノ最大整数ハ即チ qm ニ異ナラス。故ニ n ハ qm ニ等シキヲ要ス。而テ $m-n$ ハ pm トナル。若シ qm 整数ナラサルトキハ，n ハ全ク qm ニ等シクナルヲ得ス。然レトモ，q ハ真ノ分数ナルヲ以テ mq ト $q(m+1)$ ノ最大整数トノ相違ナル量ハ一ヨリ小ナリ。故ニ $n=mq$ トスルトモ，敢テ甚キ誤差ヲ生セス。

此ニ由テ之ヲ観レハ，最大項ノ形状ハ

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}p^{mp}q^{mq}\qquad（１）$$

ナリ。

又，最大項ニ他ノ形状ヲ與フルコト屡アリ。之ラカ為メニ（1）式ノ上下両項ニ乗スルニ，$1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-n)$ ヲ以テスレハ

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{1\cdot 2\cdots n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-n)}p^{mp}q^{mq} \qquad (2)$$

ヲ得。然ルニ

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots m = e^{-m}m^{m}\sqrt{2\pi m}$$
$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n = e^{-n}n^{n}\sqrt{2\pi n}$$
$$1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-n) = e^{-m+n}(m-n)^{m-n}\sqrt{2\pi(m-n)}$$

ナリ。故ニ（2）式ハ

$$\frac{e^{-m}m^{m}\sqrt{2\pi m}}{e^{-n}n^{n}\sqrt{2\pi n}e^{-m+n}(m-n)^{m-n}\sqrt{2\pi(m-n)}}p^{mp}q^{mq}$$

即チ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} \qquad (3)$$

トナル。

第二要領

試験ノ回数ヲ逓加スレハ，分解式ノ各項ハ最大項ニ近ク。而テ一項ノ最大項ニ近クノ緩急ハ，其最大項ヲ距ル列次ノ大小ニ因ル。

実ニ最大項ヲ M トシ其 r 列後項ヲ T_r トスレハ，此両項ノ比ハ

$$\frac{M}{T_r}=\frac{p^r}{q^r}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+r-1)(n+r)}{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)\cdots(m-n-r+2)(m-n-r+1)}$$

ナリ。式中 $m-n$， n ヲ各々 mp， mq ニ代ヘ， m ニテ上下両項ヲ除スレハ

$$\frac{M}{T_r}=\frac{p^r}{q^r}=\frac{\left(q+\frac{1}{m}\right)}{p}\cdot\frac{\left(q+\frac{2}{m}\right)}{\left(p-\frac{1}{m}\right)}\cdot\frac{\left(q+\frac{3}{m}\right)}{\left(p-\frac{2}{m}\right)}\cdots\frac{\left(q+\frac{r-2}{m}\right)}{\left(p-\frac{r-3}{m}\right)}\cdot\frac{\left(q+\frac{r-1}{m}\right)}{\left(p-\frac{r-2}{m}\right)}\cdot\frac{\left(q+\frac{r}{m}\right)}{\left(p-\frac{r-1}{m}\right)} \qquad (4)$$

ヲ得。$\frac{p^r}{q^r}$ ノ後ニアル因数ノ箇数ハ r ナリ。故ニ m ヲ逓加スルニ従テ此比ハ $\frac{q^r}{p^r}\cdot\frac{p^r}{q^r}=1$ ニ近ク。故

ニ曰ク，試験ノ回数ヲ逓加スルニ従テ各項ハ最大項ニ近ク。又，最大項 M ノ右方一列，二列… $r-2$ 列， $r-1$ 列ノ諸項ノ比ハ，各々

$$\frac{M}{T_1}=\frac{p}{q}\cdot\frac{\left(q+\frac{1}{m}\right)}{p},\quad \frac{M}{T_2}=\frac{p^2}{q^2}\cdot\frac{\left(q+\frac{1}{m}\right)}{p}\cdot\frac{\left(q+\frac{2}{m}\right)}{\left(p-\frac{1}{m}\right)},\quad \cdots$$

$$\frac{M}{T_{r-2}}=\frac{p^{r-2}}{q^{r-2}}\cdot\frac{\left(q+\frac{1}{m}\right)}{p}\cdots\frac{\left(q+\frac{r-2}{m}\right)}{\left(p-\frac{r-3}{m}\right)},\quad \frac{M}{T_{r-1}}=\frac{p^{r-1}}{q^{r-1}}\cdot\frac{\left(q+\frac{1}{m}\right)}{p}\cdots\frac{\left(q+\frac{r-1}{m}\right)}{\left(p-\frac{r-2}{m}\right)}$$

ナリ。

此比ハ M ノ逓加スルニ従テ皆一ニ近クヲ得レドモ，之ニ緩急アリ。即チ $\frac{M}{T_{r-1}}$ ハ $\frac{M}{T_{r-2}}$ ヨリ緩， $\frac{M}{T_{r-2}}$ ハ $\frac{M}{T_{r-3}}$ ヨリ緩ナリ。故ニ曰ク一項ノ最大項ニ近クノ緩急ハ，其最大項ヲ距ル列次ノ大小ニヨル。

第三要領

最大項ト末項ニ近ク所ノ諸項トノ比ハ，此項ノ末項ヲ距ル列次ノ小ナルニ従テ増大ス。

実ニ（４）式ヲ

$$\frac{M}{T_r}=\frac{pq+\frac{p}{m}}{pq}\cdot\frac{pq+\frac{2p}{m}}{pq-\frac{q}{m}}\cdot\frac{pq+\frac{3p}{m}}{pq-\frac{2q}{m}}\cdots\frac{pq+\frac{p(r-2)}{m}}{pq-\frac{q(r-3)}{m}}\cdot\frac{pq+\frac{p(r-1)}{m}}{pq-\frac{q(r-2)}{m}}\cdot\frac{pq+\frac{pr}{m}}{pq-\frac{q(r-1)}{m}}$$

ト記シテ観ニ，其諸因数ハ逐次ニ増大ス。故ニ之ニ代フルニ最小因数 $\frac{pq+\frac{p}{m}}{pq}$ ヲ以テスレハ

$$\frac{M}{T_r}>\left(\frac{pq+\frac{p}{m}}{pq}\right)^r$$

ヲ得。括弧内ノ量ハ一ヨリ大ナリ。故ニ $\left(\dfrac{pq+\dfrac{p}{m}}{pq}\right)^r$ ヲシテ何量ヨリモ大ナルカ如ク r ヲ定ムルヲ得。

注　意

r ヲ増大（r ヲ増大スルニハ勢ヒ m ヲ増大セサルヘカラス）スレハ，$\dfrac{M}{T_r}$ ハ増大スレトモ最大項 M ノ直値ハ次第ニ減少ス。是レ（3）式ニ依テ知ルヘシ。然レトモ，M ノ比類公算ハ常ニ一ニ近ク，是レ式 $\dfrac{M}{M+T_r}=\dfrac{1}{1+\dfrac{T_r}{M}}$ ニ依テ知ルヘシ。

約　言

最終ノ二要領ニ拠レハ，試験ノ回数ノ逓加スルニ従テ最大項ノ左右ノ諸項ハ，最大項ニ近キ且減少ス。又，両末項ノ近傍ニアルモノハ，減少スルコト甚タ急ニシテ遂ニ何量ヨリモ小ナルニ至ル。之ヲ約言スレハ，愈々試験ノ回数ヲ逓加スレハ，大公算ハ愈々最大項ノ左右ニ密集ス。

例

此章ノ例トシテ，二白球及ヒ一黒球ヲ納有スル一箱ニ於ル復行試験ノ結果ヲ掲示セン。

$m=3$ ナルトキハ

白三	白二	白一	白零
黒零	黒一	黒ニ	黒三

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{27}+\frac{12}{27}+\frac{6}{27}+\frac{1}{27} \qquad (5)$$

$m=6$ ナルトキハ

白六	白五	白四	白三	白二	白一	白零
黒零	黒一	黒ニ	黒三	黒四	黒五	黒六

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^6=\frac{64}{729}+\frac{192}{729}+\frac{240}{729}+\frac{160}{729}+\frac{60}{729}+\frac{12}{729}+\frac{1}{729} \qquad (6)$$

$m=9$ ナルトキハ

$$\begin{array}{cccccc} & \text{白九} & \text{白八} & \text{白七} & \text{白六} & \text{白五} \\ & \text{黒零} & \text{黒一} & \text{黒二} & \text{黒三} & \text{黒四} \\ \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^9 = & \frac{512}{19683} & +\ \frac{2304}{19683} & +\ \frac{4608}{19083} & +\ \frac{5376}{19083} & +\frac{4032}{19083} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{白四} & \text{白三} & \text{白二} & \text{白一} & \text{白零} \\ \text{黒五} & \text{黒六} & \text{黒七} & \text{黒八} & \text{黒九} \\ +\ \frac{2016}{19083} & +\ \frac{672}{19083} & +\ \frac{144}{19083} & +\ \frac{18}{19083} & +\ \frac{1}{19083} \end{array} \qquad (7)$$

ナリ。

此三式ヲ観ニ，其最大項$\frac{12}{27}$，$\frac{240}{729}$，$\frac{5376}{19683}$ニ応スルモノハ，白球ノ現出スル回数ト黒球ノ現出スル回数トノ比，其単公算$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$ノ比２ニ等キ場合ナリ。而テ其他ノ項ハ，最大項ヲ遠カルニ従テ逓減ス。

又，各最大項ト其前項トノ比ハ，各々$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{311}{288}$ニシテ皆一ニ近ケレトモ，mノ逐次ニ三ヨリ六ニ移リ，六ヨリ九ニ移ルニ従テ逓減ス。之ニ反シテ，各最大項ト末項トノ比ハ次第ニ逓加ス。但シ，末項ノ近傍ニアル諸項ノ逓減スルハ他ノ項ニ比スレハ急ナリ。

今又（７）式ヲ観ニ，最大項ト其前後項トノ和ハ全項ノ和ノ十分ノ七ヲ超ユ。乃チmヲ増加スレハ，大公算ハ尽く最大項ノ左右ニ密集スルヲ知ルヘシ。

第七章　「ベルヌーリ」の設論

愈々試験ノ回数ヲ増加スレハ，愈々大公算ハ最大公算ノ左右近傍ニ密集スルハ前章ノ結言ニ依リテ已ニ之ヲ知ル。「ベルヌーリ」ノ設論ハ，則チ大公算ノ和ヲ略定スルニ用ユルモノナリ。其設言ハ，

左〔右〕ニ試験ノ回数ヲ逓加スルニ従テ，A象ノ生起スル回数ト試験ノ全回数トノ比$\frac{m-n}{m}$ヲシテ，A象ノ単公算pト相異ナルコト一定ノ量ヲ過クルコトナキノ公算ヲ増大ス。又縦令ヒ誤量ハ至小ナルモ，充分ニ試験ノ回数ヲ増大スレハ右〔上〕公算ヲシテ終ニ一ニ至ラシムルヲ得。

実ニ最大項ヨリ r 列後項

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-n-r)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+r)}p^{m-n-r}q^{n+r} \qquad (1)$$

中

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots m=e^{-m}m^{m+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}$$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-n-r)=e^{-m+n+r}(m-n-r)^{m-n-r+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}$$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+r)=e^{-m-r}(n+r)^{n+r+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}$$

トスレハ，（１）式ハ

$$\frac{m^{m+\frac{1}{2}}}{(m-n-r)^{m-n-r+\frac{1}{2}}(n+r)^{n+r+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{p^{m-n-r}q^{n+r}}{\sqrt{2\pi}}$$

トナル。又，$m-n=mp$ ，$n=mq$ トスレハ

$$\left(1-\frac{r}{pm}\right)^{r-m+n-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{r}{mq}\right)^{-r-n-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} \qquad (2)$$

トナル。今又，$\left(1-\frac{r}{pm}\right)^{r-m+n-\frac{1}{2}}=z$ トスレハ

$$l.z=\left(r-m+n-\frac{1}{2}\right)\cdot l.\left(1-\frac{r}{mp}\right)$$

$$l.z=-\left(r-m+n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{r}{pm}+\frac{r^2}{2p^2m^2}+\frac{r^3}{3p^3m^3}+\cdots\right)$$

トナリ，m ハ r^2 ニ比シテ至大ナリト仮定スレハ，$\frac{r^3}{m^3}$，$\frac{r^4}{m^4}\cdots$ヲ除クヲ得ヲ以テ

$$l.z=-\frac{r^2}{mp}+\left(m-n+\frac{1}{2}\right)\frac{r}{mp}+\frac{(m-n)r^2}{2p^2m^2}=-\frac{r^2}{2mp}+\left(1+\frac{1}{2(m-n)}\right)r$$

即チ

$$z = e^{\frac{-r^2}{2mp}} e^{r\left(1+\frac{1}{2(m-n)}\right)}$$

ヲ得。右〔上〕ト同様ニ又

$$\left(1+-\frac{r}{mq}\right) = e^{-\frac{r^2}{2mq}} e^{-\left(\frac{1}{2n}\right)r}$$

ヲ得ル。故ニ（２）式ハ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{\frac{-r^2}{2mpq}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} e^{r\left(\frac{1}{2(m-n)}-\frac{1}{2n}\right)}$$

即チ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{\frac{-r^2}{2mpq}\left[1+r\left(\frac{1}{2(m-n)}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots\right]} \qquad (3)$$

トナル。

最大項ヨリ r 列前項ノ式ヲ定ムルニハ，（３）式中 r ヲ $-r$ ニ代レハ可ナリ。故ニ最大項ノ左右ニアル r 列二項ノ和ハ

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{\frac{-r^2}{2mpq}} \qquad (4)$$

ナリ。若シ

$$\frac{r^2}{2mpq} = t^2 \qquad (5)$$

トスレハ，最大項ト其左右 r 列二項ニ至ル迄ノ惣項ノ和ハ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt \qquad (6)$$

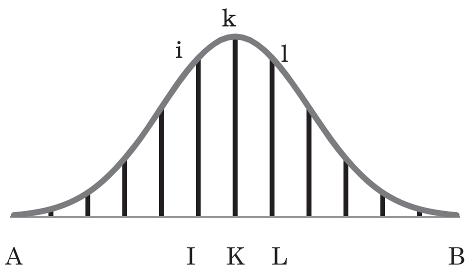
ナリ。此式ハ m ノ無究〔無窮〕[5] ニ増大スルトキハ終ニ一ニ至ル。

公算曲線

一直線 A， B ヲ引キ之ヲ m 個ニ等分シ，此 $m+1$ 点ヨリ垂線ヲ作リ，此各線上ニ $(p+q)^m$ ノ分解式ノ項ニ比例スル長サヲ取リ，其項点ヲ連接シテ得ル所ノ曲線ヲ公算曲線ト称ス。而シ其方程式ハ

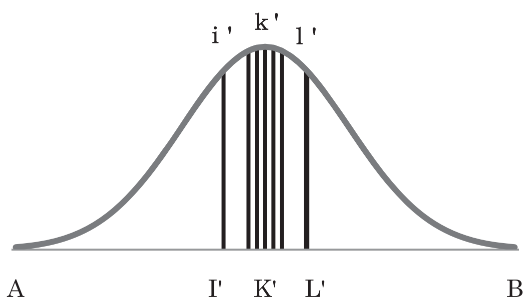
$$y = C_m^n p^{m-n} q^n \qquad (7)$$

ナリ。



公算曲線ハ復行試験ニ関スル公算ノ諸法則ヲ象様スルヲ以テ，之ヲ用ユレハ大ニ其説解ノ労ヲ省ク。例ヘハ $(p+q)^m = 1$ トハ全縦線ノ和一ニ等キノ謂ヒニ異ナラス。又，其縦線 Ii ハ， A 象ノ生起スル回数ト B 象ノ生起スル回数トノ比 $\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{IA}}$ ニ等キ公算ヲ表シ，而テ最大縦線ノ脚点 K ニ於テハ $\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AB}} = \frac{q}{p}$ ナルカ如シ。

又，試験ノ回数ヲ増大スルトキハ，大公算ハ最大公算ノ左右近傍ニ密集スルヲ以テ曲線モ亦従テ変形セサル可ラス。故ニ左図〔下図〕ヲ観ルニ，其某二点，I’，L’ ニ応スル縦線 I’ i’，L’ l’ ハ，前図ニ於テ同様ノ二点 IL ニ応スル縦線 Ii, Ll ニ比スレハ大ニ減少ス。之ヲ約言スレハ, 大縦線ハ愈々最大縦線ノ左右ニ密集シ，以テ惣縦線ノ和ノ大部分ヲ成ス。



第八章　$p=q=\frac{1}{2}$ ナル場合

此場合ニ在リテハ，曲線ノ公式ハ $y=C_m^n\left(\frac{1}{2}\right)^m$ トナレトモ，之ヲ $y=C_m^n$ トナスヲ常トス。此レ他ナシ。因数 $\left(\frac{1}{2}\right)^m$ ハ，分解式ノ各項ニ附属スルヲ以テ之ヲ省テ不可ナラサレハナリ。

今，C_m^n ノ上下両行ニ乗スルニ $1\cdot2\cdot3\cdots(m-n)$ ヲ以テスレハ

$$y=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots m}{1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot1\cdot2\cdot3\cdots(m-n)}=\frac{m^{m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}(m-n)^{(m-n)+\frac{1}{2}}}$$

ナリ。又，最大縦線 Y ノ為メニハ，$n=\frac{m}{2}$ ナルニヨリ $Y=\frac{2^{m+1}}{\sqrt{2\pi m}}$ ナリ。故ニ

$$y=Y\left[\frac{m^{m+1}}{n^{n+1}(m-n)^{(m-n)+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2^{m+1}}\right]=Y\left\{\frac{m}{2(m-n)}\right\}^{(m-n)+\frac{1}{2}}\left\{\frac{m}{2n}\right\}^{n+\frac{1}{2}}\qquad(1)$$

トナル。

実際講究シテ利用アルモノハ，唯最大縦線ノ左右近傍ニアル線弧ノミ。故ニ横線ノ原点ヲ最大縦線ノ脚ニ置クヲ良トス。然トキハ，思考スル項ノ最大項ヲ距ル列次ヲ K トスレハ，C_m^n ハ $C_m^{\left(\frac{m}{2}-\mathrm{K}\right)}$ トナリ，（1）式ハ

$$Y\left\{\frac{m}{2\left(\frac{m}{2}+\mathrm{K}\right)}\right\}^{\frac{m}{2}+\mathrm{K}+\frac{1}{2}}\left\{\frac{m}{2\left(\frac{m}{2}-\mathrm{K}\right)}\right\}^{\frac{m}{2}-\mathrm{K}+\frac{1}{2}}$$

トナル。

此式ヲ約スルニハ，先ツ之ヲ

$$Y\left(1+\frac{2\mathrm{K}}{\mathrm{m}}\right)^{\frac{-m}{2}-\mathrm{K}-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2\mathrm{K}}{m}\right)^{\frac{-m}{2}+\mathrm{K}-\frac{1}{2}}$$

ト記シテ最終ノ両因数ヲ分解スヘシ。

此カ為メニ$\left(1+\frac{2\mathrm{K}}{m}\right)^{\frac{-m}{2}-\mathrm{K}-\frac{1}{2}}=z$ トスレハ

$$lz=-\left(\frac{m}{2}+\mathrm{K}+\frac{1}{2}\right)\cdot l\left(1+\frac{2\mathrm{K}}{m}\right)=-\left(\frac{m}{2}+\mathrm{K}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2\mathrm{K}}{m}-\frac{4\mathrm{K}^2}{2m^2}+\frac{8\mathrm{K}^3}{3m^3}\cdots\right)$$
$$=-\mathrm{K}+\frac{\mathrm{K}^2}{m}-\frac{2\mathrm{K}^2}{m}-\frac{\mathrm{K}}{m}=-\frac{\mathrm{K}^2}{m}-\mathrm{K}\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

ヲ得。

故ニ

$$\left(1+\frac{2\mathrm{K}}{m}\right)^{\frac{-m}{2}-\mathrm{K}-\frac{1}{2}}=e^{\frac{-\mathrm{K}^2}{m}-\mathrm{K}\left(1+\frac{1}{m}\right)}$$

ナリ。之ト同様ニ又

$$\left(1+\frac{2\mathrm{K}}{m}\right)^{\frac{-m}{2}+\mathrm{K}-\frac{1}{2}}=e^{\frac{-\mathrm{K}^2}{m}+\mathrm{K}\left(1+\frac{1}{m}\right)}$$

ナリ。

故ニ横線 K ニ応スル y ノ式ハ

$$y=Ye^{\frac{-2\mathrm{K}^2}{m}} \qquad (2)$$

ナリ。或 $\mathrm{K}=x$ トスレハ

$$y=Ye^{\frac{-2}{m}x^2} \qquad (3)$$

ナリ。此所求曲線ノ公式ナリ。

右〔上〕ハ唯曲線ノ式ヲ定メタルノミ。今，x ノ一値ニ応スル y ノ値ヒヲ定ムルニハ，（3）式ニ$\left(\frac{1}{2}\right)^m$ ヲ乗シ且ツ Y ヲ其値ヒニ代フヘシ。即チ

$$y=\sqrt{\frac{2}{\pi m}}e^{\frac{-2}{m}x^2} \qquad (4)$$

ナリ。然レトモ，現ニ此式ヲ用ユルトキハ，$\frac{2}{m}=h^2$ トシテ之ヲ

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \qquad (5)$$

ノ形状トナスヲ常トス。

（以下次号）

注

１）例えば次のような研究を上げることができる。大橋隆憲『日本の統計学』法律文化社，1965年。小島勝治『日本統計文化史』未来社，1972年。藪内武司『日本統計発達史研究』法律文化社，1995年。また政府統計の作成史については，次のような研究がある。日本統計研究所編『日本統計発達史』1960年。金子治平『近代統計形成過程の研究－日英の国勢調査と作物統計－』法律文化社，1998年。佐藤正広『国勢調査と日本近代』岩波書店，2002年。島村史郎『日本統計発達史』日本統計協会，2008年。

２）安藤洋美「川谷致秀と大阪砲兵工廠」，『大阪の産業記念物』桃山学院大学総合研究所，2005年，９～14頁。安藤の研究には，これ以外にも未公刊ながら，「明治期の確率論についての一考察」，「明治前半期の確率論の受容」，「日本陸軍における確率論の一受容」，「日本確率論史」，といった多くの論考がある。

３）日本の統計学の先駆者である杉亨二は，藪内が「ハウスホーファーの『統計学』によって，統計学なる学問に開眼し，統計思想の涵養を受けた」（藪内武司，前掲書，27頁）と指摘するように，次のHaushoferによる著作から強い影響を受けたことは良く知られている。Haushofer, M., *Lehr- und Handbuch der Statistik,* Wien,1872. また呉文聡には，Wappäus の以下の文献の翻訳がある。Wappäus, J.E., *Einleitung in das Studium der Statistik,* herausgegeben von Gandil, O., Leipzig, 1881.　呉文聡訳『統計學論』博文社，1889年。Mayrについては，高野岩三郎が師事したことは良く知られているが，同じくMayrに師事した光岡安藝の次の著作が彼の影響を受けた最も早期の著作であると看做される。光岡安藝『国勢調査論』隆文館，1912年。

４）この「現様」とは，次号で予定しているベイズの定理を解説した第二篇第九章で，「原因」の意味であることが述べられている。

５）明らかにこれは「無限」を意味している。