解説

AHP，ANPの固有ベクトル法における数理構造

関谷 和之

1. はじめに

重回帰分析では，正規方程式を解くことで説明変数の値を求める．それは，誤差自乗和最小化という最適化問題の最適解が正規方程式の解であることに一致するからである．それでは，AHP，ANPの一対比較行列，超行列の固有方程式の主固有ベクトルは一体どんな最適化問題に対応づくのであろうか？

本解説では，固有ベクトル法に対応する最適化問題を紹介し，これが，非負行列に対するフロベニウスの定理に基づく「ポテンシャルに関する均衡化原理」であることを述べる．この原理の下では，意思決定者の意図に対しても柔軟に対処可能になり，また，超行列解析における固有ベクトル法での問題点が解決可能であることを紹介する．

固有ベクトル法以外にも，誤差最小化原理，エントロピー最適化原理，ベンチマーク導入に基づく評価法など数多く展開されている．しかし，現在までの適用事例報告では固有ベクトル法利用が一般的なのでこれらの原理，評価法の解説は割愛する．

本稿では，一対比較行列，超行列を区別しない場合，それぞれを単に評価行列と呼ぶ．なお，本特集号の記事「ANPを組み込んだAHPの適用」で述べた例題を用いて説明することもある．例題についての詳細は先出の記事を参照されたい．

2. ポテンシャルに関する均衡化原理

「ANPを組み込んだAHPの適用」の例題「教員の教育面での査定」を用いて，固有ベクトル法に対応する最適化問題を紹介しよう．3人の教員 t_1，t_2，t_3 と2人の学生 s_1，s_2 が相互に評価した状態を図1で示す．

5人の構成員がそれぞれ自らの価値を自己評価したとしよう．この値を自己評価値と呼ぶ．例えば，図1でそれぞれが対応するポテンシャルの値を自己評価値とする．5人の構成員は自己以外から評価を受ける．例えば，教員 t_1 は2人の学生 s_1，s_2 から評価を直接受ける．具体的には，教員 t_1 は自己評価値0.423の s_1，自己評価値0.577の s_2 からそれぞれ，0.5と0.3という評価を得た．そこで，

$$0.5\times0.577+0.3\times0.423 \qquad (1)$$

を教員 t_1 の外部評価値と呼ぶ．

より一般的に記述しよう．教員 t_1，t_2，t_3 の自己評価値をそれぞれ w_1，w_2，w_3，学生 s_1，s_2 の自己評価値を w_4，w_5 とすると，各外部評価値は表1の通りである．当然のことながら，各構成員が自由に自己評価した場合，自己評価値と外部評価値にはギャップが生じる．そこで，各構成員のこのギャップを比 $\frac{外部評価値}{自己評価値}$ で測定すると，以下の五つの比が得られる．

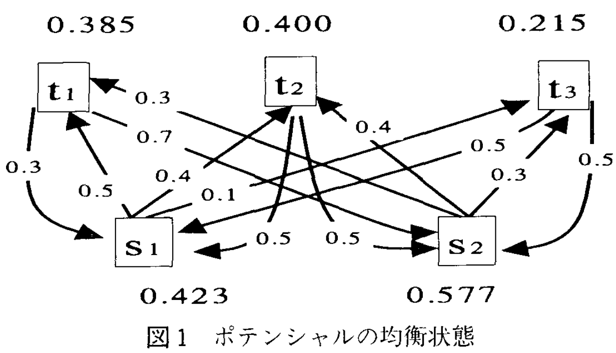

図1 ポテンシャルの均衡状態

表1 自己評価値と外部評価値

構成員	自己評価値	外部評価値
t_1	w_1	$0.5w_4+0.3w_5$
t_2	w_2	$0.4w_4+0.4w_5$
t_3	w_3	$0.1w_4+0.3w_5$
s_1	w_4	$0.3w_1+0.5w_2+0.5w_3$
s_2	w_5	$0.7w_1+0.5w_2+0.5w_3$

せきたに かずゆき
静岡大学 工学部
〒432-8561 浜松市城北3-5-1

$$\frac{0.5w_4+0.3w_5}{w_1}, \frac{0.4w_4+0.4w_5}{w_2}, \frac{0.1w_4+0.3w_5}{w_3} \quad (2)$$

$$\frac{0.3w_1+0.5w_2+0.5w_3}{w_4}, \frac{0.7w_1+0.5w_2+0.5w_3}{w_5} \quad (3)$$

これらの比それぞれを過剰評価率と呼ぼう．$w_1=\cdots=w_5=1$とすると，t_1，t_2，t_3，s_1，s_2の過剰評価率はそれぞれ，0.8，0.8，0.4，1.3，1.7となる．これらの五つの過剰評価率はばらつくが，$w_1=0.385$，$w_2=0.400$，$w_3=0.215$，$w_4=0.423$，$w_5=0.577$とすると，五つの過剰評価率は全て1であり一致する．

ここで，過剰評価率のばらつきが構成員全体での不公平感を示すものとして，できるだけ均一な過剰評価率を達成する自己評価値を求めることにしよう．さらに，最大の過剰評価率をできるだけ抑えることで均一な過剰評価率を求めよう．それは，以下の最適化問題

$$\min_{w>0} \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{0.5w_4+0.3w_5}{w_1}, \frac{0.4w_4+0.4w_5}{w_2}, \frac{0.1w_4+0.3w_5}{w_3} \\ \frac{0.3w_1+0.5w_2+0.5w_3}{w_4}, \frac{0.7w_1+0.5w_2+0.5w_3}{w_5} \end{array} \right\} \quad (4)$$

として定式化できる．この式(4)の最適解は

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

の主固有ベクトルに一致する．つまり，「均一な過剰評価率を求めること」を「過剰評価率の均衡化原理」と呼ぶと，固有ベクトル法は「過剰評価率の均衡化原理」に基づきウエイト算出すると解釈できる．なお，「過剰評価率の均衡化原理」と固有ベクトル法との関係[3]は以下の定理で保証される．

定理1（フロベニウスのミニマックス定理）：n次元の非負の正方行列$C=[c_{ij}]$の最大固有値を$\lambda_{\max}$とすると，任意の（全ての成分が）正のベクトル$\boldsymbol{w}=[w_1,\cdots,w_n]^T$に対して，つねに

$$\min_{i=1,\cdots,n} \frac{\sum_{j=1}^n c_{ij}w_j}{w_i} \leq \lambda_{\max} \leq \max_{i=1,\cdots,n} \frac{\sum_{j=1}^n c_{ij}w_j}{w_i}$$

が成立ち，かつCが既約行列であれば

$$\max_{w>0} \min_{i=1,\cdots,n} \frac{\sum_{j=1}^n c_{ij}w_j}{w_i} = \min_{w>0} \max_{i=1,\cdots,n} \frac{\sum_{j=1}^n c_{ij}w_j}{w_i} \quad (6)$$

が成立ち，Cの主固有ベクトルが式(6)の左辺の最大値，右辺の最小値を与える．さらに，Cの主固有ベクトルはスカラー倍を除いて唯一つである．

この定理での仮定「行列$C=[c_{ij}]$が既約であること」について説明しよう．$c_{ij}>0$ならばまたそのときに限りノードjからiへ枝を引くことで得たグラフで全てのノードから全てのノードに辿り着けるならば，行列$C=[c_{ij}]$が既約である．図1のグラフは全てのノードから全てのノードに少なくとも1本以上枝を経て辿り着くので，行列(5)は既約である．

3. 最適化モデリングとその分析

主観情報，直観による判断を枝の値へと巧みに変換するモデル化がAHP，ANPの優れた点である．さらに，AHP，ANPではその結果を評価行列としてまとめ，固有ベクトル法で分析し，ウエイト算出する．しかし，主観情報を柔軟にモデリングすることが可能なプロセスにおいても，分析者もしくは意思決定者（「ANPを組み込んだAHPの適用」の例題では学部長）がウエイトに対する意図，しかも，枝の値に反映されていない意図を持つことがある．

図1で具体的に説明しよう．学部長は教員t_1，t_2，t_3と学生s_1，s_2の相互評価を下に「熱意」に関する教員の評価を行うが，図1での枝の値，つまり表1には学部長の直接の判断は含まれていない．一方，学部長は3名の教員のウエイトw_1，w_2，w_3の決定において一方の学生のウエイトが他方のそれのα倍以下であるという意図

$$\alpha w_4 \geq w_5, \quad \alpha w_5 \geq w_4 \quad (7)$$

を持ったとしよう．この制約式(7)を満たす教員のウエイトw_1，w_2，w_3でなければ，学部長には受け入れ難い．

図1で示した固有ベクトル法での分析結果$w_4=0.423$，$w_5=0.577$は$\alpha=2$であれば学部長には受け入れられるが，$\alpha=1.2$であれば無理である．評価行列(5)の解析である固有ベクトル法を最適化問題

$$\min \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{0.5w_4+0.3w_5}{w_1}, \frac{0.4w_4+0.4w_5}{w_2}, \frac{0.1w_4+0.3w_5}{w_3} \\ \frac{0.3w_1+0.5w_2+0.5w_3}{w_4}, \frac{0.7w_1+0.5w_2+0.5w_3}{w_5} \end{array} \right\} \quad (8)$$

$$\text{s.t.} \quad \alpha w_4 \geq w_5, \quad \alpha w_5 \geq w_4$$
$$w_4+w_5=1, \quad \boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$$

の求解として捉え直せば，常に学部長には受け入れるウエイトを算出することができる．ここで，$w_4+w_5=1$は正規化条件である．そこで，今後は固有ベクトル法による評価行列の解析を最適化問題(8)による解析に置き換えて考えよう．

では，最適化問題(8)の最適解を求めることは可能であろうか？　実は，線形計画問題を繰り返し解くこと

で最適化問題(8)の最適解を求めることができる．その説明のために，いくつか記号を導入して最適化問題(8)の記述を簡略化しよう．まず，教員 t_i の外部評価値を $r_i(\boldsymbol{w})$，学生 s_i の外部評価値を $r_{i+3}(\boldsymbol{w})$ とすると，過剰評価率は $\dfrac{r_i(\boldsymbol{w})}{w_i}$ $(i=1,\cdots,5)$ である．最適化問題(8)の実行可能領域を Ω とすると，最適化問題(8)は

$$\begin{aligned}&\min\ \max\left\{\frac{r_i(\boldsymbol{w})}{w_i}\middle| i=1,\cdots,5\right\}\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{w}\in\Omega\end{aligned}\tag{9}$$

である．問題(9)は分数計画問題[1]であり，パラメータ μ を導入した補助問題(10)を考える．

$$\begin{aligned}&\min\quad s\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{w}\in\Omega\\&\qquad r_i(\boldsymbol{w})-\mu w_i\leq s\quad i=1,\cdots,5\end{aligned}\tag{10}$$

$r_i(\boldsymbol{w})$ は $\boldsymbol{w}$ の線形関数なので，パラメータ μ を固定すると最適化問題(10)は線形計画問題である．μ を逐次更新して線形計画問題(10)を解くことで問題(8)の最適解を与えるアルゴリズムを以下に示す．

アルゴリズム

Step 0：$k:=0$ とする．$\boldsymbol{w}^0\in\Omega$ を適当に選び，

$$\mu^0:=\max\left\{\frac{r_i(\boldsymbol{w}^0)}{w_i^0}\middle| i=1,\cdots,5\right\}$$

とする．

Step 1：パラメータ μ を μ^k に固定して問題(10)を解き，その最適解を $s^k,\boldsymbol{w}^k$ とする．

Step 2：$s^k=0$ であれば，問題(8)の最適解は $\boldsymbol{w}^k$ であり，終了．さもなくば，

$$\mu^{k+1}:=\max\left\{\frac{r_i(\boldsymbol{w}^k)}{w_i^k}\middle| i=1,\cdots,5\right\},\quad k:=k+1$$

として，Step 1へ．

これは分数計画問題に広く適用できるDinkelbachのアルゴリズムを問題(8)に則した形で記述したものである．なお，最適値周辺で収束速度が遅くなるが，この点についての改良は文献[1]を参照されたい．

4. 既約でない評価行列での問題点

フロベニウスのミニマックス定理では評価行列が既約であることが十分条件であるが，特に超行列は既約であるとは限らない．まずは，既約でない評価行列を持つ例を示す．

「ANPを組み込んだAHPの適用」での例題「教育面の査定」では，学部長が3名の教員の教育面での評価項目として「熱意」と「巧さ」の二つの観点で評価し，「熱意」と「巧さ」は1：2のウエイト付けを与えるという評価項目の評価を学部長の意見により決定した．

ここでは学部長は3人の教員の主張

- 「二つの評価項目「熱意」と「巧さ」に対するウエイトの値決定には教員各自の意見も加味されるべきである」

を認め，新たに評価項目の評価を考え直した．

3名の教員それぞれは評価項目「熱意」と「巧さ」へのウエイトに対して以下のように主張した．若手の教員 t_1 は「熱意」が「巧さ」より重要視されるべきであると主張し，中堅の教員 t_2 は「熱意」と「巧さ」は同等であるべきであると主張し，ベテランの教員 t_3 は「巧さ」が「熱意」より重要視されるべきであると主張した．そして，各教員毎に二つの評価項目への一対比較行列を作成し，それらの解析から，教員から評価項目への評価を表2のように得た．

この評価全体の構造を図2に，解析すべき超行列を式(11)に与える．

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & \text{査定} & \text{熱意} & \text{巧さ} & t_1 & t_2 & t_3\\ \hline
\text{査定} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\text{熱意} & 1/3 & 0 & 0 & 0.7 & 0.5 & 0.3\\
\text{巧さ} & 2/3 & 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.7\\
t_1 & 0 & 0.385 & 0.255 & 0 & 0 & 0\\
t_2 & 0 & 0.400 & 0.380 & 0 & 0 & 0\\
t_3 & 0 & 0.215 & 0.365 & 0 & 0 & 0
\end{array}\tag{11}$$

図2の枝は査定，評価項目，教員の3階層間での評価関係を示す．ノード「熱意」からノード「教育面での査定」へは辿り着けないので，超行列(11)は既約でない．なお，2次以上の評価行列の対角要素に非負のいかなる値を与えてもその評価行列の既約性は不変であ

表2 教員から評価項目への評価

	t_1	t_2	t_3
熱意	0.7	0.5	0.3
巧さ	0.3	0.5	0.7

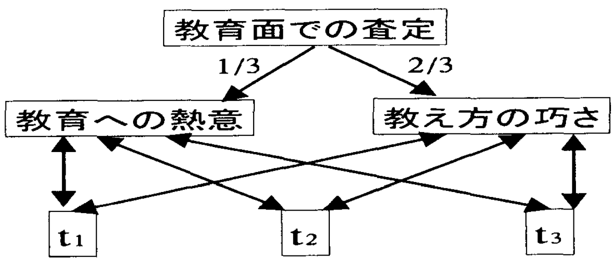

図2 教員の評価項目への意見を加味した評価構造

る．

超行列(11)の主固有値は1で，それに対する固有ベクトルは

$$[0.00, 0.51, 0.49, 0.32, 0.39, 0.29]^T \tag{12}$$

である．したがって，超行列(11)の主固有値1での固有方程式から以下の式(13)，(14)が成立する．

$$w_{査定}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}+0.32\begin{bmatrix}0.7\\0.3\end{bmatrix}+0.39\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}+0.29\begin{bmatrix}0.3\\0.7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_{熱意}\\w_{巧さ}\end{bmatrix} \tag{13}$$

$$w_{熱意}\begin{bmatrix}0.385\\0.400\\0.215\end{bmatrix}+w_{巧さ}\begin{bmatrix}0.255\\0.380\\0.365\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.32\\0.39\\0.29\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_{t_1}\\w_{t_2}\\w_{t_3}\end{bmatrix} \tag{14}$$

ただし，$w_{査定}=0$，$w_{熱意}=0.51$，$w_{巧さ}=0.49$ である．$w_{査定}$ は「査定」のウエイトであり，$w_{熱意}$，$w_{巧さ}$ は添え字通り，評価項目「熱意」「巧さ」のウエイトである．

式(13)から，「熱意」と「巧さ」のウエイト $w_{熱意}$，$w_{巧さ}$ のそれぞれは，学部長，教員 t_1，t_2，t_3 それぞれによる「評価項目」への評価 $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0.7\\0.3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0.3\\0.7\end{bmatrix}$ にウエイトを課して決定することがわかる．しかし，$w_{査定}=0$ であるので，学部長による評価項目の評価 $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ は「熱意」と「巧さ」のウエイト $w_{熱意}$，$w_{巧さ}$ に全く影響を与えない．そのため，式(14)から，学部長による意見が全く反映されてないウエイト $w_{熱意}$，$w_{巧さ}$ で，各教員のウエイト w_{t_1}，w_{t_2}，w_{t_3} が決定することがわかる．

このように教員のウエイト w_{t_1}，w_{t_2}，w_{t_3} および評価項目のウエイト $w_{熱意}$，$w_{巧さ}$ には意思決定者である学部長の意見が全く反映されておらず，教員と評価項目間の相互評価のみで決定された結果に一致する．実際，教員のウエイト $w_{t_1}=0.32$，$w_{t_2}=0.39$，$w_{t_3}=0.29$ および評価項目のウエイト $w_{熱意}=0.51$，$w_{巧さ}=0.49$ は，図3で示した相互評価構造に対応する評価行列

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}熱意 & 巧さ & t_1 & t_2 & t_3\end{array} \\ \begin{array}{c}熱意\\巧さ\\t_1\\t_2\\t_3\end{array} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0.7 & 0.5 & 0.3\\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.7\\ 0.385 & 0.255 & 0 & 0 & 0\\ 0.400 & 0.380 & 0 & 0 & 0\\ 0.215 & 0.365 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array} \tag{15}$$

の主固有ベクトルである．

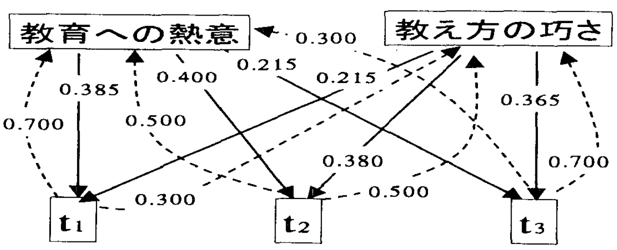

図3 「査定」を除いた相互評価構造

学部長の意見が無視されたウエイトは意思決定者である学部長には受け入れ難いものであり，分析結果としては不適当である．

5. 既約でない評価行列の分析

既約でない評価行列に対してフロベニウスのミニマックス定理が成立せず，固有ベクトル法では0のウエイトを算出する問題点がある．この問題を解決する方法の一つに平均原則[3]の適用がある．そこで，平均原則に関して簡単に紹介する．

平均原則は，節2で導入したノードの外部評価値

$$\sum_{そのノードを終点とする枝全て}(枝の値)\times(枝の始点の自己評価値) \tag{16}$$

の枝1本当たりの平均を自己評価値と対比することであり，具体的には

- 評価行列の各行毎でその行に含むウエイトの個数で割る．

という計算手続きに対応する．

まず，節2の既約な評価行列(5)と図1の相互評価構造を例にとり，平均原則による分析を具体的に解説する．s_i，t_j の自己評価値をそれぞれ w_{s_i}，w_{t_j} とする．図1のノード t_1 に対して，t_1 を終点する枝は2本（s_1，s_2 からの枝）なので，t_1 の枝1本当たりの外部評価値は

$$\frac{0.5w_{s_1}+0.3w_{s_2}}{2} \tag{17}$$

である．この例題では，どの教員も同人数の受講生から評価を受けるが，一般に，評価する受講生の数は教員毎に異なり，多くの受講生から評価を受ける教員ほど外部評価値は高くなるであろう．そこで，受講生1人当たりの外部評価値と自己評価値の比をとり，それを過剰評価率とする．つまり，t_1 の過剰評価率は

$$\frac{0.5w_{s_1}+0.3w_{s_2}}{2w_{t_1}} \tag{18}$$

である．同様に，t_2，t_3，s_1，s_2 それぞれの過剰評価率は

$$\frac{0.4w_{s_1}+0.4w_{s_2}}{2w_{t_2}},\ \frac{0.1w_{s_1}+0.3w_{s_2}}{2w_{t_3}}$$
$$\frac{0.3w_{t_1}+0.5w_{t_2}+0.5w_{t_3}}{3w_{s_1}},\ \frac{0.7w_{t_1}+0.5w_{t_2}+0.5w_{t_3}}{3w_{s_2}} \tag{19}$$

である．これら五つの過剰評価率(18)，(19)への均衡化原理の適用，つまり最適化問題

$$\min_{w>0}\max\left\{\begin{array}{l}\frac{0.5w_{s_1}+0.3w_{s_2}}{2w_{t_1}},\ \frac{0.4w_{s_1}+0.4w_{s_2}}{2w_{t_2}},\ \frac{0.1w_{s_1}+0.3w_{s_2}}{2w_{t_3}}\\ \frac{0.3w_{t_1}+0.5w_{t_2}+0.5w_{t_3}}{3w_{s_1}},\ \frac{0.7w_{t_1}+0.5w_{t_2}+0.5w_{t_3}}{3w_{s_2}}\end{array}\right\} \tag{20}$$

を解くことは

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5/2 & 0.3/2\\ 0 & 0 & 0 & 0.4/2 & 0.4/2\\ 0 & 0 & 0 & 0.1/2 & 0.3/2\\ 0.3/3 & 0.5/3 & 0.5/3 & 0 & 0\\ 0.7/3 & 0.5/3 & 0.5/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

の主固有ベクトルを求めることに一致する[1]．評価行列(21)は，評価行列(5)の各行に対応するノードを終点として持つ枝の本数でその行を割ったものである．

つまり，評価行列(5)に対する平均原則による分析は，評価行列(5)の各行に対して対応するノードを終点する枝の本数で割ることで得られる評価行列(21)の主固有ベクトルを求めることである．

さて，既約でない評価行列(11)に対して平均原則による分析を行うと

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1/12 & 0 & 0 & 0.7/4 & 0.5/4 & 0.3/4\\ 2/12 & 0 & 0 & 0.3/4 & 0.5/4 & 0.7/4\\ 0 & 0.385/2 & 0.255/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.400/2 & 0.380/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.215/2 & 0.365/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

の主固有ベクトルを求めることになる．そして，教員 t_1，t_2，t_3 のそれぞれのウエイトはその主固有ベクトルの教員に対応する成分和を1とする正規化により，0.30，0.39，0.31として与えられる．同様に，「熱意」と「巧さ」のウエイトはそれぞれ0.35，0.65である．したがって，平均原則による分析結果 $[w_{熱意}, w_{巧さ}]^T=[0.35, 0.65]^T$ は式(12)の結果 $[0.51, 0.49]^T$ と比較して学部長の意見 $[1/3, 2/3]^T$ に近く，学部長の意見も組み込まれた結果を得た．

既約でない評価行列に対する平均原則による分析以外の方法もある．例えば，評価行列(11)の $(1,1)$ 成分を1から $\beta>1$ に置き換えた評価行列(23)

$$\begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1/3 & 0 & 0 & 0.7 & 0.5 & 0.3\\ 2/3 & 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.7\\ 0 & 0.385 & 0.255 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.400 & 0.380 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.215 & 0.365 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

の主固有ベクトルを求める方法もある．β を大きくとれば，学部長の意見が最終結果のウエイト $w_{熱意}$，$w_{巧さ}$ に大きく反映する．

行列(22)，(23)は既約ではないが，平均原則等を用いることで学部長の意見を組込むことが可能である．この事実は一般の場合でも成立するのであるが，それを支える定理を紹介する．

定理2：n_1 次の非負で既約な正方行列 C^1 と n_2 次の非負で既約な正方行列 C^2，$n_2\times n_1$ 行列 C^{21} に対して，n_1+n_2 次の非負の正方行列

$$C=\begin{bmatrix} C^1 & 0\\ C^{21} & C^2 \end{bmatrix}$$

を考える．C^{21} の全ての成分が非負で少なくとも一つは正の成分が存在し，かつ C^1 の最大固有値が C^2 の最大固有値より大きければ，C の最大固有値は C^1 の最大固有値と一致し，さらに主固有ベクトルはスカラー倍を除いて唯一つであり，成分が全て正のものが存在する．

さて，評価行列の主固有ベクトルを求めるためには，パワー（べき乗）法がよく利用されている．しかし，パワー法では収束しない評価行列が存在する．これを C とすると，C の全対角成分に適当な正数 ε を加えた行列 $C+\varepsilon I$（I は単位行列）にパワー法を適用すると収束し，C の主固有ベクトルを求解できる．

6. おわりに

意思決定のプロセスではそれに関わる人たちができるだけ自由に意見や主観判断を出し，それらを一見してわかりやすい形式で記述することが望ましい．

ここで紹介したAHP，ANPでは各人の意見が評価行列，グラフ表現，さらに制約式で記述される．これらの記述は全て「過剰評価率の均衡化原理」の下で，

[1] 超行列(21)の主固有ベクトルを $[w^*_{t_1}, w^*_{t_2}, w^*_{t_3}, w^*_{s_1}, w^*_{s_1}]^T$ とすると，t_1，t_2，t_3 のウエイト $[w^*_{t_1}, w^*_{t_2}, w^*_{t_3}](w^*_{t_1}+w^*_{t_2}+w^*_{t_3})^{-1}$ と s_1，s_2 のウエイト $[w^*_{s_1}, w^*_{s_2}](w^*_{s_1}+w^*_{s_2})^{-1}$ は超行列(5)から得られる t_1，t_2，t_3，s_1，s_2 のウエイトに等しい．

数理計画問題(4), (8), (20)として定式化でき，それらに対する頑健で精緻なアルゴリズムが存在する．

AHP，ANPで要求される細かいルール（例えば，完全一対比較，ウエイト正規化や絶対評価法）には拘らずに，意思決定問題を自由に大胆に数理計画問題[4]として記述しアルゴリズムで解くプロセスが定着することを期待する．

参考文献

[1] Borde, J. and Crouzeix, J. P.: "Convergence of a Dinkelbach-Type Algorithm in Generalized Fractional Programming", Zeitcshrift für Operations Research, 31 (1987), 31-54.

[2] Sekitani, K. and Takahashi, I.: "A unified model and analysis for AHP and ANP", Journal of the Operations Research Society of Japan, 44 (2001), 67-89.

[3] Sekitani, K. and Yamaki, N.: "A Logical Interpretation for the eigenvalue method in AHP", Journal of the Operations Research Society of Japan, 42 (1999), 219-232.

[4] 田地宏一, 嵯峨山洋介, 田村坦之："不完全情報を考慮した集団ANPの提案", システム制御情報学会論文誌, 15 (2002), 305-311.