剛体球のまわりの塑性流動 : 近似一般解による速度ベクトル場の記述

静岡大学地球科学教室報告 14（1988年7月）85頁〜88頁
Geosci. Repts. Shizuoka Univ., 14 (July, 1988), 85-88

剛体球のまわりの塑性流動：近似一般解による速度ベクトル場の記述

増田俊明*・安藤　伸**

Viscous flow around a rigid spherical body: description of velocity vector field by a series of polynomials

Toshiaki MASUDA* and Shin ANDO**

MASUDA & ANDO (1988) presented a hydrodynamical analysis to describe the deformation of viscous (Newtonian) matrix around a rigid spherical body. The velocity vector field is approximately given by a series of polynomials which, however, were not printed in the paper because of lack of space. This paper gives all the polynomials developed in MASUDA & ANDO (1988) as a supplement.

1. はじめに

MASUDA & ANDO (1988) は，剛体球のまわりの塑性マトリックスがどのような変形を行うのかを，流体力学を用いて解析した．その際，速度ベクトル場を多項式で近似して記述したが，その多項式が多量であったので，上記論文中に掲載することができなかった．ここでは MASUDA & ANDO (1988) の補足としてその多項式をすべて掲載する．

2. 概　要

半径 a の剛体球があり，そのまわりにはニュートン流体のマトリックスがある．この流体の変形は定常的であり，加速度が無視できるほどに遅いとする．また球の表面で流体は球に固着しているものとする．従って球の表面とそれに接した流体との相対速度はゼロである．球は固定されており，その中心を (0, 0, 0) として，xyz 座標系を考える．マトリックス中のすべての点の速度(u_a, v_a, w_a)を記述する解は本来は xyz の無限多項式で表現されるが，ここでは実用上24個の多項式で以下のように近似する．

$$u_a = \sum_{j=1}^{24} A_{1,j} \cdot B_j$$

$$v_a = \sum_{j=1}^{24} A_{2,j} \cdot B_j$$

$$w_a = \sum_{j=1}^{24} A_{3,j} \cdot B_j$$

ここで $A_{i,j}$ などについては Appendix 1に示す．また B_j はすべて定数であり，変形の境界条件によって異なる値を持つ．例えば $z=5$, $z=-5$ でそれぞれ ($u_a=1$, $v_a=w_a=0$) と ($u_a=-1$, $v_a=w_a=0$) という条件下(これは simple shear に相当する)では B_1-B_{24} は Appendix 2に示す値をとる．ただし simple shear の場合の速度ベクトル場は，球が回転

1988年3月22日受理
* 静岡大学理学部地球科学教室 Institute of Geosciences Shizuoka University, Shizuoka 422.
** 応用地質㈱新潟支店 Oyo Chishitsu Co., Niigata Branch, Niigata 950.

していない場合の (u_a, v_a, w_a) の他に，球が $\omega=\dot{\gamma}/2$（$\dot{\gamma}$は無限遠方での剪断歪速度）の角速度で回転している場合の球のまわりの速度ベクトル場 (u_b, v_b, w_b) を考慮しなければならない．回転軸が y 軸に平行だとすればこれは

$$u_b = -\omega z a^3/r^3$$
$$v_b = 0$$
$$w_b = \omega x a^3/r^3$$

となる．ここで $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である．両者の和 $(u_a+u_b, v_a+v_b, w_a+w_b)$ が simple shear の場合の速度ベクトル場を示している．

3. 応　　用

速度ベクトル場がわかれば，そこから圧力，差応力，歪速度，渦度などの大きさがわかり，これらの値の空間分布を知ることができる．またある点に注目してその点が変形中に辿る軌跡を描くことができる．これにより変形前に点を多数球状に配列するようにとると，変形中の歪楕円体を描くことができる．さらに，ある点が移動中に受ける圧力，差応力などの変化する様子も知ることができる．これらに関する詳しい記述及びその地球科学的応用に関しては，MASUDA & ANDO (1988) を参照されたい．

謝　　辞

多項式の展開に関して Prof. M. FREEDMAN, 唐戸俊一郎博士に検討していただいた．流体力学の基礎は森口治生教授に教えていただいた．原稿は狩野謙一博士と小坂和夫博士に検討していただいた．原稿を作製するにあたり，谷口裕美枝さんにお世話になった．

文　　献

MASUDA, T. and ANDO, S. (1988), Viscous flow around a rigid spherical body: a hydrodynamical approach. *Tectonophysics*, **148**, 337-346.

Appendix 1:

$$A_{1,1} = \left(\frac{r^2}{6}-\frac{a^3}{6r}\right)f_1 + \left(\frac{a^3r^2}{24}-\frac{3a^5}{40}+\frac{r^5}{30}\right)f_2$$

$$A_{2,1} = \left(\frac{r^2}{6}-\frac{a^3}{6r}\right)f_3 + \left(\frac{a^3r^2}{24}-\frac{3a^5}{40}+\frac{r^5}{30}\right)f_4$$

$$A_{3,1} = \left(\frac{r^2}{6}-\frac{a^3}{6r}\right)f_5 + \left(\frac{a^3r^2}{24}-\frac{3a^5}{40}+\frac{r^5}{30}\right)f_6$$

$$A_{1,2} = \left(\frac{r^2}{6}-\frac{a^3}{6r}\right)g_1 + \left(\frac{a^3r^2}{24}-\frac{3a^5}{40}+\frac{r^5}{30}\right)g_2$$

$$A_{2,2} = \left(\frac{r^2}{6}-\frac{a^3}{6r}\right)g_3 + \left(\frac{a^3r^2}{24}-\frac{3a^5}{40}+\frac{r^5}{30}\right)g_4$$

$$A_{3,2} = \left(\frac{r^2}{6}-\frac{a^3}{6r}\right)g_5 + \left(\frac{a^3r^2}{24}-\frac{3a^5}{40}+\frac{r^5}{30}\right)g_6$$

$$A_{1,3} = \left(\frac{r^2}{6}-\frac{a^3}{6r}\right)h_1 + \left(\frac{a^3r^2}{24}-\frac{3a^5}{40}+\frac{r^5}{30}\right)h_2$$

$$A_{2,3} = \left(\frac{r^2}{6}-\frac{a^3}{6r}\right)h_3 + \left(\frac{a^3r^2}{24}-\frac{3a^5}{40}+\frac{r^5}{30}\right)h_4$$

$$A_{3,3} = \left(\frac{r^2}{6}-\frac{a^3}{6r}\right)h_5 + \left(\frac{a^3r^2}{24}-\frac{3a^5}{40}+\frac{r^5}{30}\right)h_6$$

$$A_{1,4} = \left(1-\frac{a}{r}\right)f_1 + \left(\frac{ar^2}{4}-\frac{a^3}{4}\right)f_2$$

$$A_{2,4} = \left(1-\frac{a}{r}\right)f_3 + \left(\frac{ar^2}{4}-\frac{a^3}{4}\right)f_4$$

$$A_{3,4} = \left(1-\frac{a}{r}\right)f_5 + \left(\frac{ar^2}{4}-\frac{a^3}{4}\right)f_6$$

$$A_{1,5} = \left(1-\frac{a}{r}\right)g_1 + \left(\frac{ar^2}{4}-\frac{a^3}{4}\right)g_2$$

$$A_{2,5} = \left(1-\frac{a}{r}\right)g_3 + \left(\frac{ar^2}{4}-\frac{a^3}{4}\right)g_4$$

$$A_{3,5} = \left(1-\frac{a}{r}\right)g_5 + \left(\frac{ar^2}{4}-\frac{a^3}{4}\right)g_6$$

$$A_{1,6} = \left(1-\frac{a}{r}\right)h_1 + \left(\frac{ar^2}{4}-\frac{a^3}{4}\right)h_2$$

$$A_{2,6} = \left(1-\frac{a}{r}\right)h_3 + \left(\frac{ar^2}{4}-\frac{a^3}{4}\right)h_4$$

$$A_{3,6} = \left(1-\frac{a}{r}\right)h_5 + \left(\frac{ar^2}{4}-\frac{a^3}{4}\right)h_6$$

$$A_{1,7} = -a^3 z f_4 + a^3 y f_6 + z f_3 - y f_5$$

$$A_{2,7} = -a^3 x f_6 + a^3 z f_2 + x f_5 - z f_1$$

$$A_{3,7} = -a^3 y f_2 + a^3 x f_4 + y f_1 - x f_3$$

$$A_{1,8} = -a^3 z g_4 + a^3 y g_6 + z g_3 - y g_5$$

$$A_{2,8} = -a^3 x g_6 + a^3 z g_2 + x g_5 - z g_1$$

$$A_{3,8} = -a^3 y g_2 + a^3 x g_4 + y g_1 - x g_3$$

$$A_{1,9} = -a^3 z h_4 + a^3 y h_6 + z h_3 - y h_5$$

$$A_{2,9} = -a^3 x h_6 + a^3 z h_2 + x h_5 - z h_1$$

$$A_{3,9} = -a^3 y h_2 + a^3 x h_4 + y h_1 - x h_3$$

$$A_{1,10} = 2x\left(\frac{r^2}{10} - \frac{a^5}{10r^3}\right) + \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right)\left(\frac{2x}{r^5} + x^2 d_x\right)$$

$$A_{2,10} = \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right) x^2 d_y$$

$$A_{3,10} = \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right) x^2 d_z$$

$$A_{1,11} = \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right) z^2 d_x$$

$$A_{2,11} = \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right) z^2 d_y$$

$$A_{3,11} = 2z\left(\frac{r^2}{10} - \frac{a^5}{10r^3}\right) + \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right)\left(\frac{2z}{r^5} + z^2 d_z\right)$$

$$A_{1,12} = y\left(\frac{r^2}{10} - \frac{a^5}{10r^3}\right) + \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right)\left(\frac{y}{r^5} + xyd_x\right)$$

$$A_{2,12} = x\left(\frac{r^2}{10} - \frac{a^5}{10r^3}\right) + \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right)\left(\frac{x}{r^5} + xyd_y\right)$$

$$A_{3,12} = \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right) xyd_z$$

$$A_{1,13} = \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right) yzd_x$$

$$A_{2,13} = \left(\frac{r^2}{10} - \frac{a^5}{10r^3}\right) z + \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right)\left(\frac{z}{r^5} + yzd_y\right)$$

$$A_{3,13} = \left(\frac{r^2}{10} - \frac{a^5}{10r^3}\right) y + \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right)\left(\frac{y}{r^5} + yzd_z\right)$$

$$A_{1,14} = \left(\frac{r^2}{10} - \frac{a^5}{10r^3}\right) z + \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right)\left(\frac{z}{r^5} + zxd_x\right)$$

$$A_{2,14} = \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right) zxd_y$$

$$A_{3,14} = \left(\frac{r^2}{10} - \frac{a^5}{10r^3}\right) x + \left(\frac{a^5 r^2}{10} - \frac{5a^7}{42} + \frac{2r^7}{105}\right)\left(\frac{x}{r^5} + zxd_z\right)$$

$$A_{1,15} = 2x\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + \left(a^3 r^2 - a^5\right)\left(\frac{2x}{r^5} + x^2 d_x\right)$$

$$A_{2,15} = (a^3 r^2 - a^5) x^2 d_y$$

$$A_{3,15} = (a^3 r^2 - a^5) x^2 d_z$$

$$A_{1,16} = (a^3 r^2 - a^5) z^2 d_x$$

$$A_{2,16} = (a^3 r^2 - a^5) z^2 d_y$$

$$A_{3,16} = 2z\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + \left(a^3 r^2 - a^5\right)\left(\frac{2z}{r^5} + z^2 d_z\right)$$

$$A_{1,17} = y\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + \left(a^3 r^2 - a^5\right)\left(\frac{y}{r^5} + xyd_x\right)$$

$$A_{2,17} = x\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + \left(a^3 r^2 - a^5\right)\left(\frac{x}{r^5} + xyd_y\right)$$

$$A_{3,17} = (a^3 r^2 - a^5) xyd_z$$

$$A_{1,18} = (a^3 r^2 - a^5) yzd_x$$

$$A_{2,18} = z\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + \left(a^3r^2 - a^5\right)\left(\frac{z}{r^5} + yzd_y\right)$$

$$A_{3,18} = y\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + \left(a^3r^2 - a^5\right)\left(\frac{y}{r^5} + yzd_z\right)$$

$$A_{1,19} = z\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + \left(a^3r^2 - a^5\right)\left(\frac{z}{r^5} + zxd_x\right)$$

$$A_{2,19} = (a^3r^2 - a^5)zxd_y$$

$$A_{3,19} = x\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + \left(a^3r^2 - a^5\right)\left(\frac{x}{r^5} + zxd_z\right)$$

$$A_{1,20} = -a^5x^2zd_y + a^5x^2yd_z$$

$$A_{2,20} = -a^5x^3d_z + a^5z\left(\frac{2x}{r^5} + x^2d_x\right) - 2xz$$

$$A_{3,20} = -a^5y\left(\frac{2x}{r^5} + x^2d_x\right) + a^5x^3d_y + 2xy$$

$$A_{1,21} = -a^5z^3d_y + a^5y\left(\frac{2z}{r^5} + z^2d_z\right) - 2yz$$

$$A_{2,21} = -a^5x\left(\frac{2z}{r^5} + z^2d_z\right) + a^5z^3d_x + 2xz$$

$$A_{3,21} = -a^5yz^2d_x + a^5xz^2d_y$$

$$A_{1,22} = -a^5z\left(\frac{x}{r^5} + xyd_y\right) + a^5xy^2d_z + xz$$

$$A_{2,22} = -a^5x^2yd_z + a^5z\left(\frac{y}{r^5} + xyd_x\right) - yz$$

$$A_{3,22} = -a^5y\left(\frac{y}{r^5} + xyd_x\right) + a^5x\left(\frac{x}{r^5} + xyd_y\right) + y^2 - x^2$$

$$A_{1,23} = -a^5z\left(\frac{z}{r^5} + yzd_y\right) + a^5y\left(\frac{y}{r^5} + yzd_z\right) + z^2 - y^2$$

$$A_{2,23} = -a^5x\left(\frac{y}{r^5} + yzd_z\right) + a^5yz^2d_x + xy$$

$$A_{3,23} = -a^5y^2zd_x + a^5x\left(\frac{z}{r^5} + yzd_y\right) - xz$$

$$A_{1,24} = -a^5xz^2d_y + a^5y\left(\frac{x}{r^5} + zxd_z\right) - xy$$

$$A_{2,24} = -a^5x\left(\frac{x}{r^5} + zxd_z\right) + a^5z\left(\frac{z}{r^5} + zxd_x\right) + x^2 - z^2$$

$$A_{3,24} = -a^5y\left(\frac{z}{r^5} + zxd_x\right) + a^5x^2zd_y + yz$$

where

$$f_1 = 1,\quad f_2 = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5},\quad f_3 = 0,$$

$$f_4 = -\frac{3xy}{r^5},\quad f_5 = 0,\quad f_6 = -\frac{3xz}{r^5},$$

$$g_1 = 0,\quad g_2 = -\frac{3xy}{r^5},\quad g_3 = 1,$$

$$g_4 = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5},\quad g_5 = 0,\quad g_6 = -\frac{3yz}{r^5},$$

$$h_1 = 0,\quad h_2 = -\frac{3xz}{r^5},\quad h_3 = 0,$$

$$h_4 = -\frac{3yz}{r^5},\quad h_5 = 1,\quad h_6 = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5},$$

$$d_x = -\frac{5x}{r^7},\quad d_y = -\frac{5y}{r^7},\quad d_z = -\frac{5z}{r^7}.$$

Appendix 2 :

B_1	$= 1.25275 \times 10^{-3}$	B_{13}	$= 0$
B_2	$= 0$	B_{14}	$= -5.12655 \times 10^{-4}$
B_3	$= -2.68437 \times 10^{-4}$	B_{15}	$= 9.83307 \times 10^{-4}$
B_4	$= -9.15836 \times 10^{-3}$	B_{16}	$= -1.70186 \times 10^{-4}$
B_5	$= 0$	B_{17}	$= 0$
B_6	$= 9.01162 \times 10^{-4}$	B_{18}	$= 0$
B_7	$= 0$	B_{19}	$= 0.102165$
B_8	$= 0.100427$	B_{20}	$= 0$
B_9	$= 0$	B_{21}	$= 0$
B_{10}	$= -2.16441 \times 10^{-4}$	B_{22}	$= 4.68393 \times 10^{-6}$
B_{11}	$= 4.00598 \times 10^{-5}$	B_{23}	$= -7.18422 \times 10^{-6}$
B_{12}	$= 0$	B_{24}	$= 0$