

二次元石取りゲームの解析

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2011-06-19 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 亀山, 寛 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00005672

二次元石取りゲームの解析

Analysis of Two Dimensional Nim Game

亀 山 寛

Hiroshi KAMEYAMA

（平成22年10月6日受理）

1. はじめに

二人で楽しむゲームとして三山崩しがある¹⁻⁵⁾。三山崩しは三つの石の山をもち、二人で交互に石を取り合い、最後に石を取った方が負けとするゲームであり、通常は753の配置の山が用いられ、753ゲームと呼ばれる場合もある。三山崩しには必勝法が存在し、三山の石の配置の初期状態で勝型か敗型が決まっている。三山の石の数の排他的論理和が勝敗を決定づけている¹⁻⁵⁾。三山崩しのプログラムも可能であり、アルゴリズムやプログラムの例題として取り上げられる場合もある³⁾。三山崩しは外国ではNim Gameと呼ばれ^{1, 4)}、Nim Gameを拡張したゲームも考案され、それらの解法は数学の研究として多く行われてきた⁶⁻⁸⁾。三山ゲームをはじめとし、種々の拡張したNimゲームは山の1方向のみ石を取るものであり、本研究ではこれらの石取りゲームを一次元石取りゲームと呼ぶ。そして、それらと垂直な方向にも石を取ることを可能にし、これらのゲームを二次元石取りゲーム (Two Dimensional Nim Game) と名付ける。著者の管見の限りにおいて、二次元石取りゲームの解法の研究は行われてない。本研究は二次元石取りゲームを解析し、「勝形の基本定理」や「勝形探索手順」を見いだすことを研究の目的とする。

2. 三山崩し（一次元石取りゲーム）の解法

この章で示す三山崩しの勝形の解析はすでに既知のものである¹⁻⁵⁾が、二次元石取りゲームの解析の基礎となるので再掲する。三山崩しゲームの中で通常行われているのは、山の石の数が7個、5個と3個からなるもので、753ゲームとも呼ばれている（図1）。各山から連続していくつもの石を取ることができ、2人で交互に石を取って行き、最後に石を取った方が負け（逆型）とする。

ゲームの研究として考えた場合、最後に石を取った方を勝ちとするのが正規であり、ゲームとして楽しまれている三山ゲームは通常最後に石を取った方が負けとしており、逆型と呼ばれている。通常のゲームは正規型の勝形の解法が逆型の解法よりはるかに容易であり、勝形に対してのみ研究が行われる。三山崩しの石取りゲームに関しては逆型の解法も正規型とほとんど同じく、最後の詰めのみ異なる。本研究では主として正規型で解法を示す。今k, m, n個の三

山 (k, m, n) があつたとする。

- 1) $k \oplus m \oplus n = 0$ 、すなわち各山の石数の2進数表現の排他的論理和が0であるとき、後手勝形である。
- 2) $k \oplus m \oplus n \neq 0$ 、のとき、 $k \oplus m \oplus n = 0$ となるように石を取れば、先手勝形となる。

ここで、XORは排他的論理和 (Exclusive Or) を表記する論理演算であり、入力AとBに対して、双方が1の際、0となる。三山崩しゲームの一例である753ゲームの初期配置の2進数とXORの値を図1に示してある。初期配置のXOR \neq 0なので、先手はXOR=0になるように石をとれば、先手勝形となり、各山の1つから1個石を取ることが勝ちになることがわかる。

三山崩しの拡張型で一山の途中から石を抜き取り、山を増加させる拡張型のゲームもあり、それらの勝形も上記の2条件になる。本研究では石は一山の端から取ってゆくプリミティブな石取りゲームに限定する。端は両端があるが、どちらの端から任意の数の石を取ってもよいものとする。三山存在するが、どの山から取り始めてもよいとする。

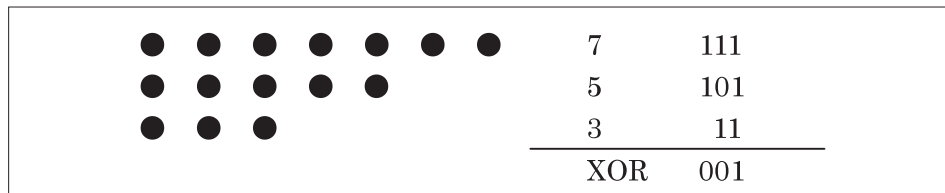


Figure 1 The 753 nim game and XOR

3. 二次元石取りゲームの解法

3. 1 二次元石取りゲームの勝形の基本定理

図2に二次元石取りゲームの一例 (2 \times 5) を示す。二次元石取りゲームの場合は一次元と同じ水平軸 (Horizontal axis) 方向だけでなく、垂直軸 (Vertical axis) 方向からも石を取ることが可能である。石は一山の中で途中の石を取することを認めないが、複数の山が存在し、複数の山の中で、どの山から石を取りはじめてもよい。1次元の場合と異なり、一山をすべて取ることによって、山の数が増加することがある。このことがゲームの展開を難しくする要因となる。水平軸方向における石の数の2進数表示での排他的論理和をHXOR (Horizontal XOR) と呼び、垂直軸方向における石の数の2進数表示での排他的論理和をVXOR (Vertical XOR) と呼ぶことにする。

勝形を求めるに大きな力を発揮する二次元石取りゲームの勝形の基本定理は次である。

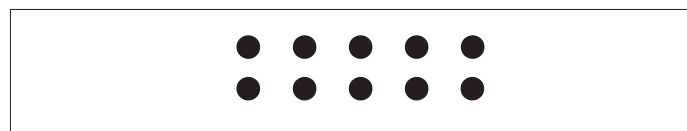


Figure 2 An example for two the dimensional Nim game (2 \times 5)

二次元石取りゲームの勝形の基本定理

$$1) \quad \text{HXOR}=0 \ \& \ \text{VXOR}=0 \quad (1)$$

すなわち、各山の水平軸方向、垂直軸方向の排他的論理和が共に0であるとき、後手勝形である。

$$2) \quad \text{HXOR} \neq 0 \ \text{OR} \ \text{VXOR} \neq 0 \quad (2)$$

のとき、先手勝形となる。

ここで&はAND、すなわち「かつ」を、ORは「もしくは」を意味する。通常石取りゲームの勝形の条件提示にはnim演算子を用いられてきた。本研究では敢えて、XOR演算子で示した。

(1) と (2) 式のレベルではnim演算子で記述した場合と全く同等である。しかし、次に節の勝形探索方法ではXOR の値が勝形探索の有力な手段になるので、XORで記述した方が有利である。

2) には、 $\text{HXOR} \neq 0 \ \& \ \text{VXOR} \neq 0$ の場合も含まれる。図2の例では、 $\text{HXOR}=0$ であるが $\text{VXOR} \neq 0$ であるので、 $\text{HXOR}=0 \ \& \ \text{VXOR}=0$ になるように石を取れば、勝つことができる。現実の問題で $\text{HXOR}=0 \ \& \ \text{VXOR}=0$ なる配置を探索するのは、かなりの検討が必要であるので、次にこのことを考慮して解法を考察する。

3. 2 二次元石取りゲームの勝形探索方法

二次元石取りゲームにおいて、 $\text{HXOR} \neq 0 \ \text{OR} \ \text{VXOR} \neq 0$ のとき、先手が勝形となるが、勝形を維持するために、 $\text{HXOR}=0$ かつ $\text{VXOR}=0$ になるように石を取る必要があり、根気よく、考えられる局面におけるXORの値を計算し続ければよい。しかし、実際の局面において、逐一可能な局面のXORの値を求め続けることは、煩雑で面倒である。

今HXOR、VXORの10進数表示を HXOR_{10} 、 VXOR_{10} とする。

勝形探索方法

- 1) $\text{HXOR} \neq 0$ で横方向の山における石数の最大値が HXOR_{10} より大きいとき、横の山から、 HXOR_{10} の石数を取る。
- 2) $\text{VXOR} \neq 0$ で縦方向の山における石数の最大値が VXOR_{10} より大きいとき、縦の山から、 VXOR_{10} の石数を取る。
- 3) $\text{HXOR} \neq 0$ で横方向の山における石数の最大値 H_{\max} が HXOR_{10} より小さいとき、横の石数の最大値の山から、 $(\text{HXOR}_{10}-H_{\max})$ 個の石を残して、石を取る。
- 4) $\text{VXOR} \neq 0$ で縦方向の山における石数の最大値 V_{\max} が VXOR_{10} より小さいとき、縦の石数の最大値の山から、 $(\text{VXOR}_{10}-V_{\max})$ 個の石を残して、石を取る。

$\text{HXOR} \neq 0 \ \& \ \text{VXOR}=0$ や $\text{HXOR}=0 \ \& \ \text{VXOR} \neq 0$ の場合は、1) もしくは2) か、3) もしくは4) の1条件のみを満たせばよいので、比較的容易である。しかし、 $\text{HXOR} \neq 0 \ \& \ \text{VXOR} \neq 0$ の場合は、1) と2) か、3) と4) の2条件を満たす必要があるので、注意を要する。このような場合、容易に勝形を見いだすことが出来るのが、次の実践的勝形探索手順である。

実践的勝形探索手順

手順 1) 偶数個の対称図形が出現するように石を取る。

手順 2) 1つの連結した図形内において相手が任意の石を取った場合、相手が取った石と対称的な配置でかつHXOR=0 & VXOR=0となるように石を取る。

手順3) 手順1) と2) が見いだすことが出来ない場合は、HXOR=0 & VXOR=0となるように石を取る。

手順1に従った例として、次章の図7、8、9、10、11があり、いずれも2個の対称図形が生じている場合である。偶数個に分割する図形内部の対称性は要求されない。すなわち、 $1 \times 2 \times 3$ のような図形でもよい。対称な図形は2個存在したとする。2個の図形A1、A2の関係は鏡映、 $\pi/2$ や π の回転対称の関係になっている。したがって図形A1、A2に対して

$$\text{HXOR (A1)} = \text{HXOR (A2)} \quad (3)$$

$$\text{VXOR (A1)} = \text{VXOR (A2)} \quad (4)$$

$$\text{HXOR (A1)} + \text{HXOR (A2)} = 0 \quad (5)$$

$$\text{VXOR (A1)} + \text{VXOR (A2)} = 0 \quad (6)$$

となる。すなわち、鏡映や $\pi/2$ や π の回転対称操作はVXORとHXORの値を変化させない。このことは4個や6個の偶数個の対称関係の図形においても成立する。手順1は手順3に含まれる手順であるが、素早く手順3を見つけ出すための方法である。

手順2も手順3に含まれる手順であるが、素早く手順3を見つけ出すための方法である。対称図形でもHXOR=0 & VXOR=0を満たさない場合は手順2と言えない。手順2は例えば 4×4 (図3) のような先手敗形、後手勝形の局面で後手が勝形を続けるための指針となる手順となる。図3において最初の 4×4 の配置A1に対して

$$\text{HXOR (A1)} = 0 \quad \& \quad \text{VXOR (A1)} = 0 \quad (7)$$

であり、敗形である。かりに先手 (first) は1個石を取り、配置A2になったとする。白丸は取った石を表わす。

$$\text{HXOR (A2)} \neq 0 \quad \& \quad \text{VXOR (A2)} \neq 0 \quad (8)$$

後手 (second) は勝形の局面であり、勝形であり続けるには手順2にしたがって、対称的に石を1個とり、配置A3の局面にする。配置A3の局面に対して、

$$\text{HXOR (A3)} = 0 \quad \& \quad \text{VXOR (A3)} = 0 \quad (9)$$

となり、先手の敗形の局面は続くことになる。

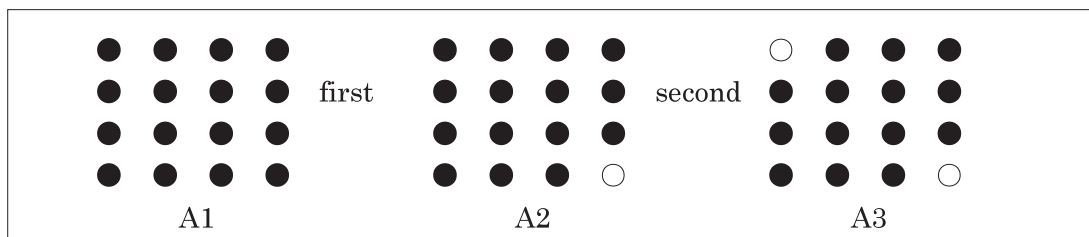


Figure 3 4×4 2d-nim game (second player wins)

4 矩形型二次元石取りゲームの解法

二次元石取りゲームの解法を示すために、考察を矩形型二次元石取りゲームに絞る。最初に縦に2行の矩形型二次元石取りゲームから始める。 $m \times n$ (m, n は整数) は m 行 n 列の矩形型二次

元の石の配列を意味することにする。

2×2 HXOR=0かつVXOR=0であるので先手敗形、後手勝形。

最初の手は図4のtype I もしくはIIしかなく、いずれも負ける。正規型で示したが、逆型で

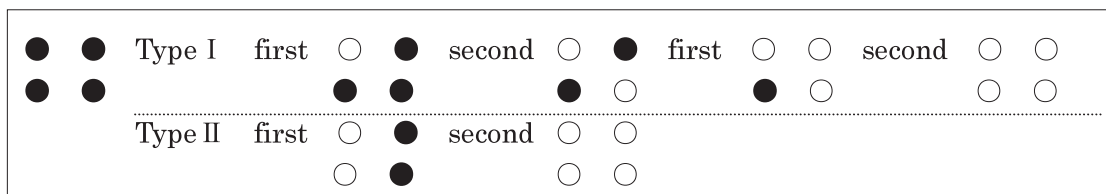


Figure 4 2 × 2 2 d-nim game (in normal type)

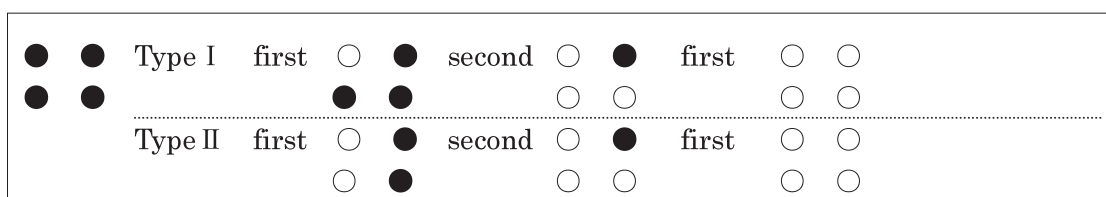


Figure 5 2 × 2 2 d-nim(2 dimensional) game (in reversed type)

は図5のようになり、先手敗形、後手勝形は変わらない。

2×3 HXOR=0かつVXOR≠0であるので先手勝形、後手敗形である。VHXOR=[10]であり、HXOR=0

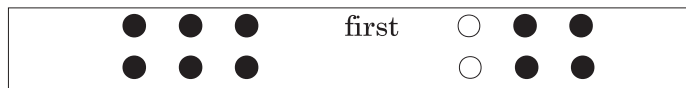


Figure 6 2 × 3 2 d-nim game (first player wins)

かつVXOR=0になる一手を図6に示す。ここで[10]は2進数表現である。

2×4 HXOR=0かつVXOR=0であるので先手敗形、後手勝形。

2×5 HXOR=0かつVXOR≠0であるので先手勝形、後手敗形である。VHXOR=[10]であり、HXOR=0

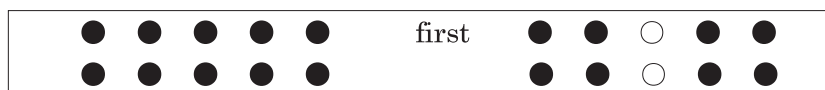


Figure 7 2 × 5 2 d-nim game (first player wins)

かつVXOR=0になる一手を図7に示す。

2×6 HXOR=0かつVXOR=0であるので先手敗形、後手勝形。

一般に次のようになる。

2×(2n+1) (n≧1) HXOR=0かつVXOR≠0である。HXOR=0かつVXOR=0になる一手が存在するので先手勝形、後手敗形。

2×2n (n≧1) HXOR=0かつVXOR=0であるので先手敗形、後手勝形。

次に3行の矩形型二次元石取りゲームを考える。3×2は2×3と同等であるので3×3からはじ

める。

3×3 HXOR≠0 かつ VXOR≠0であるので先手勝形、後手敗形である。HXOR = VHXOR=[11]であり、

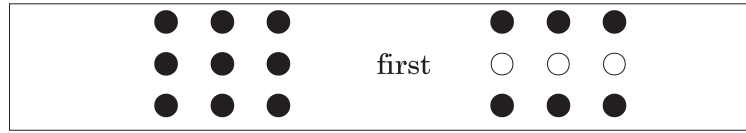


Figure 8 3×3 2d-nim game (first player wins)

HXOR=0かつVXOR=0になる一手を図8に示す。

3×4 HXOR≠0 かつ VXOR=0であるので先手勝形、後手敗形である。HXOR = [100]であり、

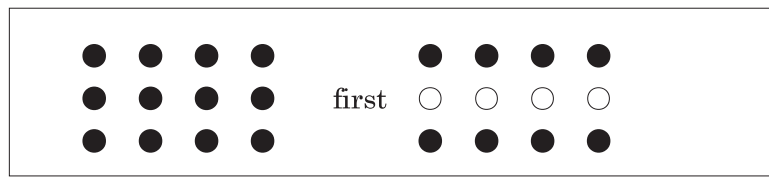


Figure 9 3×4 2d-nim game (first player wins)

HXOR=0かつVXOR=0になる一手を図9に示す。

一般に次のようになる。

3×(2n+1) (n≥1) HXOR≠0かつVXOR≠0である。HXOR=0かつVXOR=0になる一手が存在するので先手勝形、後手敗形。

3×2n (n≥1) HXOR≠0かつVXOR=0である。HXOR=0かつVXOR=0になる一手が存在するので先手勝形、後手敗形。

次に4行の矩形型二次元石取りゲームを考える。4×2は2×4と、4×3は3×4と同等であるので4×4からはじめる。

4×4 HXOR=0かつVXOR=0であるので先手敗形、後手勝形。

4×5 HXOR=0 かつ VXOR≠0 であるので先手勝形、後手敗形である。VHXOR = [100]であり、

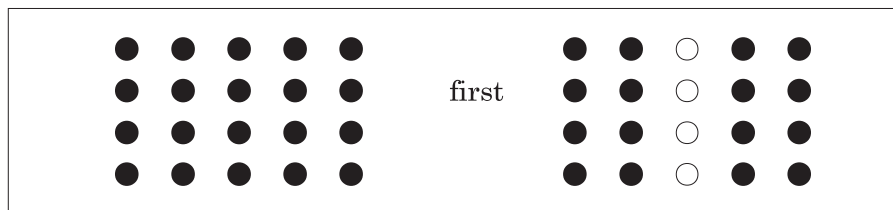


Figure 10 4×5 2d-nim game (first player wins)

HXOR=0かつVXOR=0になる一手を図10に示す。

4×6 HXOR=0かつVXOR=0であるので先手敗形、後手勝形。

4×7 HXOR=0 かつ VXOR≠0 であるので先手勝形、後手敗形である。VXOR = [100]であり、HXOR=0かつVXOR=0になる一手を図11に示す。

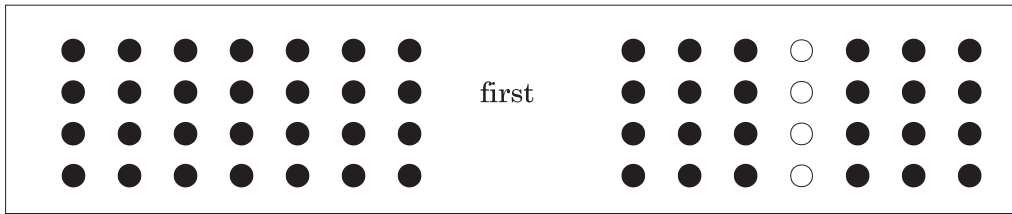


Figure 11 4 × 7 2d-nim game (first player wins)

一般に次のようになる。

4 × 2n (n ≥ 1) HXOR=0かつVXOR=0であるので先手敗形、後手勝形。

4 × (2n+1) (n ≥ 0) HXOR=0かつVXOR ≠ 0である。HXOR=0かつVXOR=0になる一手が存在するので先手勝形、後手敗形。

一般にn × m (n ≥ 2, m ≥ 2) の矩形型二次元石取りゲームに対して、nとmとを偶数と奇数に分ける。偶数 × 偶数、奇数 × 偶数、偶数 × 奇数、奇数 × 奇数の4通りの二次元石取りゲームに分類される。

- 1) 偶数 × 偶数 HXOR=0かつVXOR=0であるので先手敗形、後手勝形
- 2) 奇数 × 偶数 HXOR ≠ 0かつVXOR=0であるので先手勝形、後手敗形
- 3) 偶数 × 奇数 HXOR=0かつVXOR ≠ 0であるので先手勝形、後手敗形
- 4) 奇数 × 奇数 HXOR ≠ 0かつVXOR ≠ 0であるので先手勝形、後手敗形

これらを表にまとめると表1のようになる。矩形型二次元石取りゲームの可能性は表1の場合にすべて含まれている。

Table 1 Winner type of two dimensional nim game in n × m (n ≥ 2, m ≥ 2)

		m	
		Even	Odd
n	Even	HXOR=0 & VXOR=0 second player	HXOR=0 & VXOR ≠ 0 first player
	Odd	HXOR ≠ 0 & VXOR=0 first player	HXOR ≠ 0 & VXOR ≠ 0 first player

5 ヤング図型二次元石取りゲームの解法

5. 1 単純ヤング図型二次元石取りゲーム

矩形型でない初期配置をもつ二次元石取りゲームの一般的な配置は煩雑であるので、プリミティブな配置として、初期配置がヤング図型である二次元石取りゲームを考える。ここでいうヤング図型は正確な「ヤング図」そのものでなく、番号付けのない石が、石の縦と横の配置数が昇順に並んだ配置を意味し、「ヤング図」型 (Young diagram type) の二次元石配置をもつものである。簡単な例として、図12に (3, 2, 1) のヤング図型二次元石取りゲームを示す。ヤン

グ図型を (3, 2, 1) と表現するのは文献⁹⁾にしたがった。山の石数がすべて異なる場合をここでは、「単純ヤング図型」(simple Young diagram type) と呼び、単純ヤング図型二次元石取りゲームに焦点を充てて、勝形を検討する。

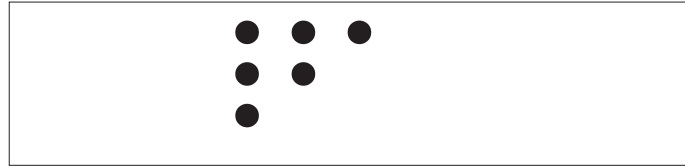


Figure 12 (3, 2, 1) Young diagram type 2d-nim game (second player wins)

(3, 2, 1) HXOR=0かつVXOR=0であるので先手敗形、後手勝形

(4, 3, 2, 1) HXOR≠0 かつVXOR≠0 であるので先手勝形、後手敗形である。HXOR =VXOR = [100]であり、HXOR=0かつVXOR=0になる一手を図13に示す。

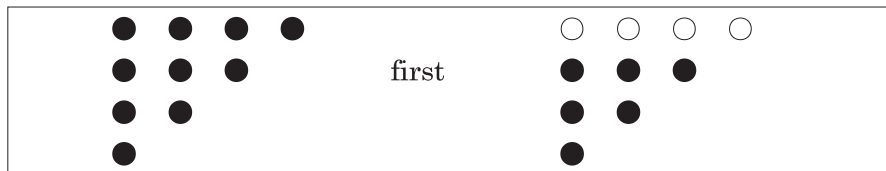


Figure 13 (4, 3, 2, 1) Young diagram type 2d-nim game (first player wins)

(5, 4, 3, 2, 1) HXOR≠0 かつVXOR≠0 であるので先手勝形、後手敗形である。HXOR =VXOR = [1]であり、HXOR=0かつVXOR=0になる一手を図14に示す。

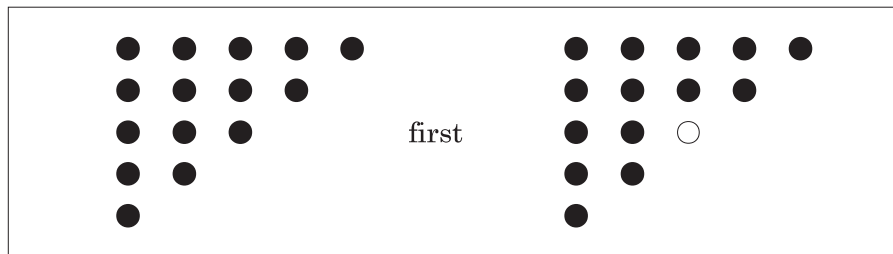


Figure 14 (5, 4, 3, 2, 1) Young diagram type 2d-nim game(first player wins)

(6, 5, 4, 3, 2, 1) HXOR≠0 かつVXOR≠0 である。HXOR=0かつVXOR=0になる次の手が存在するので先手勝形、後手敗形である。HXOR =VXOR = [111]であり、HXOR=0かつVXOR=0になる一手を図15に示す。

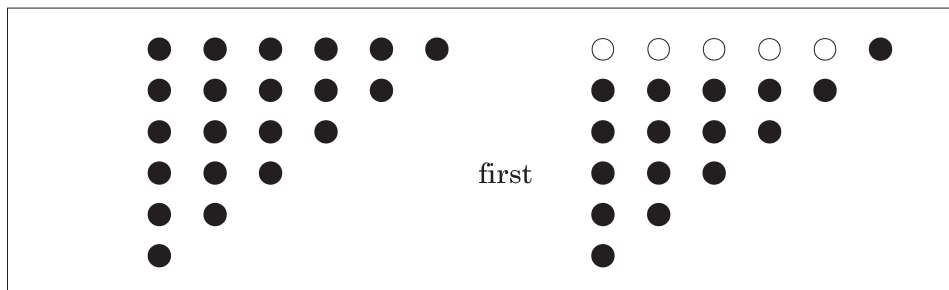


Figure 15 (6, 5, 4, 3, 2, 1) Young diagram type 2d-nim game (first player wins)

(7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) HXOR=0 かつ VXOR=0 である。単純には先手敗形、後手勝形である

さらに単純ヤング図型二次元石取りゲームの要素数を多くし、それらの勝形を検討する。検討を容易にするために、要素数がk個の単純ヤング図型二次元石取りゲーム (k, ..., 2, 1) を Y_k とする。 $Y_3 = (3, 2, 1)$ である。「単純ヤング図型」においては、HXOR = VXORであることを考慮に入れて、簡単のためにHXOR と VXORをXで表現し、 Y_k におけるXORの値を $X(Y_k)$ と表現する。コンピュータのCプログラムを援用して、 Y_k と $X(Y_k)$ の関係を $k=3$ から $k=1,003$ まで1,000通り求めた。これの結果から、 $n \geq 1$ に対して、

$$\begin{aligned}
 X(Y_{4n-1}) &= 0, \\
 X(Y_{4n}) &= 4n, \\
 X(Y_{4n+1}) &= 1, \\
 X(Y_{4n+2}) &= 4n + 3
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

となる単純ヤング図型二次元石取りゲームのXORに関する一般式が得られた。ここでXORの値は10進数で表示してある。(10) 式が一般的に成立することの証明は次節で示す。(10) 式は周期が4であることを示し、 $X(Y_k) = 0, 1$ なる定数値は周期4で出現することを表している。周期が4であることを考慮し、(9) 式から導かれる結果を表2にまとめた。表中の $n=1$ の場合はすでに例示した「単純ヤング図型」である図12から図16の値である。先手敗形、後手勝形なる場合は $k=4n-1 (n \geq 1)$ の時に1/4の割合で生じることがわかる。残りの3/4の割合で先手勝形が生じる。

Table 2 XOR values in simple Young diagram type $Y_k (k \geq 3)$

n \ X	0	4n	1	4n+3
1	$X(Y_3)=0$	$X(Y_4)=4$	$X(Y_5)=1$	$X(Y_6)=7$
2	$X(Y_7)=0$	$X(Y_8)=8$	$X(Y_9)=1$	$X(Y_{10})=11$
...
n	$X(Y_{4n-1})=0$	$X(Y_{4n})=4n$	$X(Y_{4n+1})=1$	$X(Y_{4n+2})=4n+3$

$k=4n+1 (n \geq 1)$ の場合は、 $X(Y_{4n+1}) = 1$ であるので、先手勝形である。図14のように1個の石を取るによってHXOR=0かつVXOR=0とすることができる。

$k=4n (n \geq 1)$ の場合は、 $X(Y_{4n}) = 4n$ であるので、先手勝形である。山の中で一番多い個数の山に対して、図13のように1列の石をすべて取るによってHXOR=0かつVXOR=0とすることができる。

$k=4n+2 (n \geq 1)$ の場合は、 $X(Y_{4n+2}) = 4n + 3$ であるので、先手勝形である。山における石数の最大値は $4n + 2$ であり、 $X(Y_{4n+2})$ より小さいので、勝形探索方法の3) もしくは4) に相当する。図15のように石数の最大値の山から、 $X(Y_{4n+2}) - (4n + 2) = 1$ 個の石を残して、石を取るによってHXOR=0かつVXOR=0とすることができる。

5. 2 単純ヤング図型二次元石取りゲームのXORに関する一般式の証明

ここでは、単純ヤング図型二次元石取りゲームのXORに関する一般式 (10) が成立することの証明を数学的帰納法で行う。正の整数 m に対して、 $m=n$ のとき、(10) 式が成立したと仮定し、 $m=1$ と $m=n+1$ の場合も成立することを示せばよい。10進数例えば4の2進数表現を $(4)_2$ とする。また $X(Y_3)$ は直接計算すると0となることやXORの計算は2進数で行うことなどを考慮する。

$m=1$ の場合：

$$\begin{aligned} X(Y_3) &= 0 \\ X(Y_4) &= X(Y_3) \quad \text{XOR} \quad (4)_2 = (4)_2 = 4 = 4 \times 1 \\ X(Y_5) &= X(Y_4) \quad \text{XOR} \quad (5)_2 = (4)_2 \quad \text{XOR} \quad (5)_2 = (1)_2 = 1 \\ X(Y_6) &= X(Y_5) \quad \text{XOR} \quad (6)_2 = 1 \quad \text{XOR} \quad (6)_2 = [111] = 7 = 4 \times 1 + 3 \end{aligned} \quad (11)$$

従って、(10) 式は $m=1$ の時、成立する。

$m=n$ のとき、(10) 式が成立したと仮定する。

$m=n+1$ の場合：

$$\begin{aligned} X(Y_{4(n+1)-1}) &= X(Y_{4n+3}) = X(Y_{4n+2}) \quad \text{XOR} \quad (4n+3)_2 \\ &= (4n+3)_2 \quad \text{XOR} \quad (4n+3)_2 = 0 \\ X(Y_{4(n+1)}) &= X(Y_{4(n+1)-1}) \quad \text{XOR} \quad (4(n+1))_2 = (4(n+1))_2 = 4(n+1) \\ X(Y_{4(n+1)+1}) &= X(Y_{4n+1}) \quad \text{XOR} \quad (4(n+1)+1)_2 \\ &= (4(n+1))_2 \quad \text{XOR} \quad (4(n+1)+1)_2 = (1)_2 = 1 \\ X(Y_{4(n+1)+2}) &= X(Y_{4(n+1)+1}) \quad \text{XOR} \quad (4(n+1)+2)_2 \\ &= (1)_2 \quad \text{XOR} \quad (4(n+1)+2)_2 = (4(n+1)+3)_2 = 4(n+1)+3 \end{aligned} \quad (12)$$

となり、 $m=n+1$ の場合も成立している。以上で証明は終わりである。

5. 3 ヤング図型二次元石取りゲーム

単純ヤング図型でないヤング図型二次元石取りゲームは、一般論として周期性は見いだせないが、基本的には単純ヤング図型と同様な扱いができる。x軸方向とy軸方向の対称性は失われるので、HXORとVXORの両方を考慮しないといけない点が大きな違いである。数多くの例が考えられるが、ここでは $(7, 5, 3)$ のみを扱う。

$(7, 5, 3)$ HXOR=0 かつVXOR $\neq 0$ である。HXOR=0かつVXOR=0になる次の手が存在するので先手勝形、後手敗形である。HXOR=0かつVXOR=0になる一手を図17に示す。



Figure 16 $(7, 5, 3)$ Young diagram type 2d-nim game (first player wins)

一次元753ゲームにおける勝形は7、5と3のいずれかの山から1個石を取るのがXOR=0であり、勝形であった。これを二次元石取りゲームに拡張すると3個の山から同時に1個、計3個取ることが勝形となる。一次元の取り方を包含した形となっていることは興味深いといえる。

6. まとめ

一次元石取りゲームを二次元に拡張した二次元石取りゲームにおいて勝形の基本定理は存在し、

1) $H XOR = 0$ & $V XOR = 0$ すなわち、各山の水平軸方向、垂直軸方向の排他的論理和が共に0であるとき、後手勝形である。

2) $H XOR \neq 0$ OR $V XOR \neq 0$ のとき、先手勝形となる。

である。これは一次元石取りゲームの場合のXOR ($H XOR$) に垂直軸方向の $V XOR$ が付加された形になっている。二次元石取りゲームの勝形探索方法は

1) $H XOR \neq 0$ で横方向の山における石数の最大値が $H XOR_{10}$ より大きいとき、横の山から、 $H XOR_{10}$ の石数を取る。

2) $V XOR \neq 0$ で縦方向の山における石数の最大値が $V XOR_{10}$ より大きいとき、縦の山から、 $V XOR_{10}$ の石数を取る。

3) $H XOR \neq 0$ で横方向の山における石数の最大値 $Hmax$ が $H XOR_{10}$ より小さいとき、横の石数の最大値の山から、 $(H XOR_{10} - Hmax)$ 個の石を残して、石を取る。

4) $V XOR \neq 0$ で縦方向の山における石数の最大値 $Vmax$ が $V XOR_{10}$ より小さいとき、縦の石数の最大値の山から、 $(V XOR_{10} - Vmax)$ 個の石を残して、石を取る

である。

$n \times m$ ($n \geq 2, m \geq 2$) の矩形型二次元石取りゲームの場合、 n と m とを偶数と奇数に分けると偶数 \times 偶数、奇数 \times 偶数、偶数 \times 奇数、奇数 \times 奇数の4通りの二次元石取りゲームに分類される。このうち、偶数 \times 偶数の場合のみ先手敗形、であり、他の場合は先手勝形となる。

単純ヤング図型石取りゲーム $Y_k = (k, \dots, 2, 1)$ におけるXORの $X(Y_k)$ は、XORに関して次の一般式が存在する。 $n \geq 1$ に対して、 $X(Y_{4n-1}) = 0$ 、 $X(Y_{4n}) = 4n$ 、 $X(Y_{4n+1}) = 1$ 、 $X(Y_{4n+2}) = 4n + 3k$ が成立し、数学的帰納法で証明できる。 k に対して周期4をもち、 $k=4n-1$ ($n \geq 1$) の場合のみ、先手敗形となる。残りの $k=4n+1$ ($n \geq 1$)、 $k=4n$ ($n \geq 1$)、 $k=4n+2$ ($n \geq 1$) の場合は、先手勝形となる。

二次元石取りゲームにおいて、本研究で提案した「勝形の基本定理」や「勝形探索手順」は成立していると結論づけられる。

最後に奥村朋樹君に、実践的勝形探索手順に関する検討と討論に感謝する。

文献

- 1) 一松信：『石取りゲームの数理』森北出版、1968年
- 2) 前原昭二：ゲームの必勝法について、科学**34** (1964) 9月号、pp. 503-504
- 3) 二村良彦：「3山くずしゲーム」『プログラム技法 -PADによる構造化プログラミング-』, 情報工学基礎講座第4巻、オーム社、pp. 110-122、1984年
- 4) 山崎洋平：『組み合わせゲームの裏表』, シュプリシガー・フェアラク、1989年
- 5) 秋山仁・中村義作：『ゲームにひそむ数理』, 森北出版、1998年
- 6) 佐藤文広：「数理で読み解く石取りゲーム」『数学セミナー』連載1-12、2009年4月号～2010年3月号
- 7) J. H. Conway, "On Numbers and Games", Academic Press, 1976

- 8) E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy, “Winning ways, for your mathematical plays” Academic Press, 1982
- 9) 寺田至: 『ヤング図形のはなし』、日本評論社、2002年