

資料

日本における確率論の濫觴（2）

—陸軍士官学校編『公算学』1888年の復刻とその書誌学的考証—

上 藤 一 郎

1. 資料の復刻・紹介（承前）

第二篇 予定公算

第九章 予定公算ノ定説

公算学ニ於テ原因ナル語ハ、俗ニ所謂一事一象ヲ生来スル理由ノ謂ニ非ラス。唯其間此事象一定ノ公算ヲ有スル事勢ヲ言フ。第一篇ニ於テ一事一象ノ生起スルニ各異ノ現様アルトキハ云々トイヘリ（全公算ノ定説ヲ見ヘシ）。此現様ナル語ハ、則チ原因ノ謂イナリ。

事象ノ復行試験中、屢々其原因ノ働キヲ先知セサルコトアリ。然ルトキハ此事象ノ公算ヲ定メント欲スルモ由ル所ナシ。此ノ場合ニ在リテハ、宜ク既往試験ニ就テ、以テ原因ノ働キヲ定メ、然ルノチ未来試験ノ公算ヲ起ツヘシ。斯ク既往試験ニ基テ未来試験ノ公算ヲ定ムルヲ予定公算ノ方法ト称ス。而テ原因ノ働キヲ示定スル数ヲ原因ノ公算若クハ設想ノ公算ト称ス。

先ツ原因ノ公算ヲ定ムル方法ヲ示サン。

三箱アリ。甲ハ四白球ト一黒球ヲ納有シ、乙ハ三白球ト二黒球ヲ納有シ、而テ丙ハ二白球ト三黒球ヲ納有ス。偶然一球ヲ撮出シタルハ其色ハ白シ。之ヲ各箱ヨリ撮出シタル公算ハ如何。

甲ヨリ一白球ヲ撮出スルノ公算ハ $\frac{4}{5}$ 、乙ヨリ一白球ヲ撮出スルノ公算ハ $\frac{3}{5}$ 、而テ丙ヨリ一白球ヲ撮出スルノ公算ハ $\frac{2}{5}$ ナリ。又、一箱内ニ入手スルノ公算ハ $\frac{1}{3}$ ナリ。故ニ一白球ヲ撮出スルノ既定公算ハ、複公算及ヒ全公算ノ原則ニ拠テ $\frac{1}{3}\left[\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{5}=\frac{3}{5}$ ナリ。

撮出セシ白球、甲箱ニ属セル公算ヲ x_1 トスレハ、之ヲ甲箱ヨリ撮出シタル公算ハ複公算ノ原則ニ拠テ $\frac{3}{5}x_1$ ナリ。而テ此公算ハ $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}$ ニ等キヲ要ス。因テ $\frac{3}{5}x_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}$ アリ。此ヨリ $x_1=\frac{4}{9}$ ヲ得。

右ト同様ニ、他ノ二箱ニ関スル原因ノ公算ヲ x_2 、 x_3 トスレハ $\frac{3}{5}x_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}$ 、 $\frac{3}{5}x_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}$ アリ。此

ヨリ $x_2 = \frac{3}{9}$, $x_3 = \frac{2}{9}$ ヲ得。

x_1 , x_2 , x_3 ノ和ハ一トナル。蓋シ撮出セシ球ハ必ス三箱ノ一箇ヨリ出タルヲ以テナリ。

又、四群箱アリ。甲群ノ箱数ハ七箇ニシテ此箱ハ各々六白球ト一黒球ヲ納有ス。乙群ノ箱数ハ三箇ニシテ此箱ハ各々五白球ト二黒球ヲ納有ス。丙群ノ箱数ハ二箇ニシテ此箱ハ各々四白球ト三黒球ヲ納有ス。而テ丁群ノ箱数ハ五箇ニシテ此箱ハ各々三白球ト四黒球ヲ納有ス。偶然一球ヲ撮出シテレハ其色ハ白シ。各箱ニ於ル其公算ハ如何。

一白球ヲ撮出スル既定公算ハ前例ト同理ニ抛テ $\frac{7}{17} \cdot \frac{6}{7} + \frac{3}{17} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{17} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{17} \cdot \frac{3}{7} = \frac{80}{17 \cdot 7}$ ナリ。

故ニ撮出セシ白球ノ甲、乙、丙、丁箱ヨリ出タル公算ヲ各々 x_1 , x_2 , x_3 , x_4 トスレハ

$$x_1 \frac{80}{17 \cdot 7} = \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{7} \quad x_2 \frac{80}{17 \cdot 7} = \frac{3}{17} \cdot \frac{5}{7} \quad x_3 \frac{80}{17 \cdot 7} = \frac{2}{17} \cdot \frac{4}{7} \quad x_4 \frac{80}{17 \cdot 7} = \frac{5}{17} \cdot \frac{3}{7}$$

アリ。此ヨリ $x_1 = \frac{42}{80}$, $x_2 = \frac{15}{80}$, $x_3 = \frac{8}{80}$, $x_4 = \frac{15}{80}$ ヲ得。

一般ニ一事一象ヲ生起スル数多ノ原因ヲ $p_1, p_2, p_3 \dots p_n \dots$ トシ、各原因ニ関スル公算ヲ $h_1, h_2, h_3 \dots h_n \dots$ トシ、而テ X_n ニテ既ニ生起セシ事象、原因ヲ p_n ニ由リタル公算、即チ原因 p_n ノ公算ヲ示セハ

$$h_n p_n = (h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3 + \dots + h_n p_n + \dots) X_n$$

ナリ。此ヨリ

$$X_n = \frac{h_n p_n}{h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3 + \dots + h_n p_n + \dots}$$

ヲ得。之ト同様ニ又

$$X_1 = \frac{h_1 p_1}{h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3 + \dots + h_n p_n + \dots}$$

$$X_2 = \frac{h_2 p_2}{h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3 + \dots + h_n p_n + \dots}$$

⋮

ヲ得。

是ニ由テ之ヲ觀レハ、凡ソ原因ノ公算ハ此原因ト之ニ関スル公算トノ相乗積ヲ分子トシ、各原因ト之ニ関スル公算トノ相乗積ノ和ヲ分母トスル所ノ分数ニ等シ。之ヲ別言スレハ、原因ノ公算ハ此原因ト之ニ関スル公算トノ相乗積ト相比例ス。是レ則チ「ベー [ベイズ]」氏ノ設言セシ法則ナリ。又茲ニ一例ヲ掲シ。

四球ヲ納有スル一箱アリ。毎度既ニ撮出シタル球ヲ其内ニ納メ、更ニ一球ヲ撮出スルコト四回ニシテ三度白球ヲ得、一度黒球ヲ得タリ。箱内ノ球ハ幾箇黒ク幾箇白キヤ。之ニ種々ノ設想アリ。此設想ノ公算ハ如何。

箱内ノ球ハ三箇白ク一箇黒ク、又二箇白ク二箇黒ク、或ハ又一箇白ク三箇黒キト設想スルヲ得。

故ニ一白球ヲ撮出スルノ公算 p 及ビ一黒球ヲ撮出スルノ公算 q ハ、各設想ニ於テ $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}$,

$p = \frac{2}{4}$, $q = \frac{2}{4}$, $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$ ナリ。而テ三度白球ヲ撮出シ一度黒球ヲ撮出スルノ既定公算 $4p^3q$

ハ、 $\frac{27}{64}$, $\frac{16}{64}$, $\frac{3}{64}$ ナリ。

故ニ生起シタル結果、右〔上〕各設想ニ由ル所ノ公算、即チ各設想ノ公算ハ

$$X_1 = \frac{\frac{27}{64}}{\frac{46}{64}} = \frac{27}{46}, \quad X_2 = \frac{\frac{16}{64}}{\frac{46}{64}} = \frac{16}{46}, \quad X_3 = \frac{\frac{3}{64}}{\frac{46}{64}} = \frac{3}{46}$$

ナリ。右〔上〕ハ三設想ノ公算ヲ定メタルノミ。左〔下〕ニ第五回ノ試験ニ於テ、又一白球ヲ撮出スルノ公算ヲ定メン。

三設想ノ公算ハ各々 $\frac{27}{46}$, $\frac{16}{46}$, $\frac{3}{46}$ ナリ。又、各設想中一白球ヲ撮出スルノ公算ハ $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$ ナリ。

故ニ複公算及ヒ全公算ノ原則ニ抛テ所求公算ハ $\frac{27}{46} \cdot \frac{3}{4} + \frac{16}{46} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{46} \cdot \frac{1}{4} = \frac{29}{46}$ ナリ。之ト同様に一黒球

ヲ撮出スルノ公算ハ $\frac{27}{46} \cdot \frac{1}{4} + \frac{16}{46} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{46} \cdot \frac{3}{4} = \frac{17}{46}$ ナリ。此兩公算ノ和一トナルハ明カナリ。

以上ニ依テ考スレハ、凡ソ未来試験ノ公算ヲ定ムルニハ、先ツ存スル所ノ設想ノ公算ヲ定メ、次ニ各設想ノ公算ト此設想中ノ事象ノ公算トノ相乗積ヲナシ、此衆相乗積ノ和ヲナセハ可ナリ。

第十章 一般の場合

前章ニ於テハ設想ノ箇数ノ一定ナル場合ヲ講究シタレドモ、實際ニ於テハ之ヲ無究ト看做ササルヲ得サルコト、即チ之ヲ零ヨリニ連続変化サセルヲ得サルコト往々之アリ。

茲ニ相反スル二象 A , B アリ。 A ハ m 度生起シ、 B ハ n 度生起セリ。而テ A ノ単公算 x ハ零ヨリニ変シ、 B ノ単公算 $(1-x)$ ハ一ヨリ零ニ変スルヲ得。

此場合ニ在テハ、 m 度 A 象ヲ生起シ n 度 B 象ヲ生起スル公算ノ形状ハ、 x ノ一値ノ為メニ

$Kx^m(1-x)^n$ ナリ。故ニ之ヲ除スルニ x ノ各値ニ応スル公算ノ和 $\sum_0^1 Kx^m(1-x)^n$ ヲ以テスレハ、 x ノ一値ニ応スル設想ノ公算

$$\frac{x^m(1-x)^n}{\sum_0^1 x^m(1-x)^n} \quad (1)$$

ヲ得。

今、 x ヲシテ其限ニ至ラシメ之ヲ連続変化セシムルトキハ、(1) 式ノ上下二項ニ dx ヲ乗シテ

$$\frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx} \quad (2)$$

ヲ得。之無究小単公算 dx ニ応スル設想ノ無究小公算ノ値ヒナリ。

(2) 式ノ分母ハ分求積分法ニ依テ算定スルモノニシテ

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(m+1)(m+2) \cdots (m+n-1)}$$

ナリ。然レトモ m, n ハ通常至大ナル故ニ之ヲ

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n+1}} \sqrt{\frac{2\pi mn}{m+n}} \quad (3)$$

ト記シテ可ナリ。故ニ (2) 式ハ

$$\frac{x^m(1-x)^n dx}{\frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n+1}} \sqrt{\frac{2\pi mn}{m+n}}} \quad (4)$$

トナル。

若シ $n=0$ ナルトキ、即チ生起セシモノ独リ A 象ノミナルトキハ、(2) 式ノ分母ハ $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$

トナル故ニ此式ハ $(m+1)x^m dx$ トナル。

(2) 式ハ x ノ一値ニ応スル設想ノ公算ナルヲ以テ之ニ x ヲ乗シ、此相乗積

$$\frac{x^{m+1}(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

ヲ $x=0$ ヨリ $x=1$ ニ至ル迄積分スレハ、 A 象ノ未来試験ノ公算ヲ得。即チ

$$\frac{\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx} = \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(m+2)(m+3) \cdots (m+n+2)}}{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(m+1)(m+2) \cdots (m+n+1)}} = \frac{m+1}{m+n+2} \quad (5)$$

ナリ。之ト同様ニ B 象ノ未来試験ノ公算ハ

$$\frac{\int_0^1 x^m (1-x)^{n+1} dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+1)}{(m+2)(m+3) \cdots (m+n+2)} = \frac{n+1}{m+n+2} \quad (6)$$

ナルヘシ。勿論 (5), (6) 式ノ和ハトナル。若シ生起セシモノ独リ A 象ノミナルトキ, 即チ $n=0$ ナルトキハ, (5) 式ハ $\frac{m+1}{m+2}$ トナル。

m, n ノ増加スルニ從テ (5) 式ハ愈々 $\frac{m}{m+n}$ ニ近キ, (6) 式ハ愈々 $\frac{n}{m+n}$ ニ近ク。之ヲ証スルニハ, 先ツ $m+n$ ヲ以テ (5), (6) 式ノ上下二項ヲ除シ, 次ニ $m+n$ ヲ至大ニスレハ足レリ。即チ

$$\frac{\frac{m+1}{m+n+2}}{\frac{m+1}{m+n}} = \frac{\frac{m}{m+n} + \frac{1}{m+n}}{1 + \frac{2}{m+n}}, \quad \frac{\frac{n+1}{m+n+2}}{\frac{n+1}{m+n}} = \frac{\frac{n}{m+n} + \frac{1}{m+n}}{1 + \frac{2}{m+n}}$$

ノ右辺中 $m+n$ ヲ至大ニスレハ足レリ。

第十一章 未来試験の回数夥多なる場合

此章ニ於テハ未来試験ノ回数 p ナルトキニ方リ, $p-q$ 度 A 象ヲ生起シ q 度 B 象ヲ生起スルノ公算ヲ定メン。

此複公算ハ単公算 x ノ一値ニ応スル設想ニ就キテハ

$$\frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q} = x^{p-q} (1-x)^q \quad (1)$$

ナルヲ以テ之ニ各設想ノ公算ヲ乘シ此衆相乗積ノ和ヲナセハ, 直チニ所求公算ヲ得。即チ

$$\frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q} \times \frac{\int_0^1 x^{m+p-q} (1-x)^{n+q} dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx} \quad (2)$$

ナリ。

(2) 式中逐次ニ q ヲ零, 一, 二, 三...ニ等シカラシメハ, p 回施行スル試験ニ於ル夥多ノ複公算ヲ尽ク算定スルヲ得。而テ此複公算ハ皆級数

$$\frac{1}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx} \left\{ \int_0^1 x^{m+p} (1-x)^n dx + \frac{p}{1} \int_0^1 x^{m+p-1} (1-x)^{n+1} dx \right. \\ \left. + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \int_0^1 x^{m+p-2} (1-x)^{n+2} dx + \cdots + \int_0^1 x^m (1-x)^{n+p} dx \right\} \quad (3)$$

ノ内ニアリ。式中第一項ヨリ第 $q+1$ 項ニ至ル迄ノ諸項ノ和ヲナセハ、 A 象ノ生起スルコト $p-q$ 回ヨリ寡キコトナク、 B 象ノ生起スルコト q 回ヨリ多キコトナキノ公算ヲ得。

若シ $n=0$ 、 $q=0$ ナレハ、(3)式ハ約シテ

$$\frac{\int_0^1 x^{mp} dx}{\int_0^1 x^m dx} = \frac{1}{m+p+1} = \frac{m+1}{m+p+1} \quad (4)$$

トナル。故ニ一事一象ノ連続生起セシコト m ナルトキハ、其更ニ p 回連続生起スルノ公算ハ、既往試験ノ回数ニ一ヲ加ヘタルモノヲ分子トシ、分子ニ未来試験ノ回数ヲ加ヘタルモノヲ分母トスル所ノ分数ナリ。

若シ $m=p$ ナレハ、(4)式ハ

$$\frac{m+1}{2m+1} \quad (5)$$

而テ此式ハ m ノ至大ナルニ方リ $\frac{1}{2}$ トナル。

第十二章 比類 $p-q$ 公算

實際人ノ求メント欲スルモノハ設想ノ全公算ニ非スシテ大概其比類公算ナリ。而テ此比類公算ヲ定ルニハ式

$$\frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

中ノ x ヲ x' ニ代ヘ、以テ已知スル所ノ比ヲ作レハ可ナリ。即チ

$$\frac{x^m(1-x)^n}{x^m(1-x)^n + x'^m(1-x')^n} = \frac{1}{1 + \frac{x'^m(1-x')^n}{x^m(1-x)^n}}$$

ヲ得。此式ニ依テ見ルニ、 x ニ応スル設想ノ比類公算ハ x' ノ至大或ハ至小ナルニ從テ一ニ接近ス。

又、最大設想ノ公算ニ応スルノ値ヒハ、 $x^m(1-x)^n$ ノ微係数ヲ零トスレハ之ヲ得。即チ

$$mx^{m-1}(1-x)^n - nx^m(1-x)^{n-1} = 0$$

ヨリ $x = \frac{m}{m+n}$ 及ヒ $1-x = \frac{n}{m+n}$ ヲ得ル。故ニ最大公算ヲ有スル設想ハ、 A 、 B 二象ノ単公算各々

其生起セシ回数ト已往試験ノ回数トノ比ニ等キ場合ニ応ス。

又、前章ノ(3)式ノ最大項ノ為メニハ、 $\frac{q}{p} = \frac{n}{m+n}$, $\frac{p-q}{p} = \frac{m}{m+n}$ ノ結果ヲ得。故ニ既定公算ト
 予定公算ノ區別ニ依スルソ復行試験中最大ノ公算ニ応スルモノハ、事象ノ生起スル回数ト試験ノ回
 数トノ比事象ノ単公算ニ等キ場合ナリ。

第十三章 x の限に関する公算

再ヒ第九章ノ最終ノ例ヲ思考スヘシ。同章ノ解答ニ依レハ、第五回ノ試験ニ於テ一白球ヲ撮出ス
 ルノ公算ハ $\frac{29}{46}$ ナリ。而テ前章ニ拠レハ、最大公算ヲ有スル設想ハ一白球ニ応スル単公算 $\frac{3}{4}$ ニ等シ
 キ場合ナリ。若シ第五回ノ試験ニ於テ撮出シタルモノ黒球ナレハ、第六回ノ試験ニ於テ一白球ヲ撮
 出スルノ公算ハ $\frac{77}{136}$ ナリ。而シテ最大公算ヲ有スル設想ハ、一白球ニ応スル単公算 $\frac{3}{5}$ ニ等キ場合ナ
 リ。

以上ノ兩結果ヲ比較スルニ $\frac{77}{136}$ ト $\frac{3}{5}$ ノ差ハ $\frac{29}{46}$ ト $\frac{3}{4}$ ノ差ヨリ小ナリ。

若又第六回ノ試験ニ於テ撮出シタルモノ白球ナレハ、第七回ノ試験ニ於テ一白球ヲ撮出スルノ公
 算ハ $\frac{205}{308}$ ニシテ最大公算ヲ有スル設想ハ一白球ニ応スル単公算 $\frac{2}{3}$ ニ等キ場合ナリ。而テ $\frac{205}{308}$ ト $\frac{2}{3}$ ノ
 差ハ $\frac{77}{136}$ ト $\frac{3}{5}$ ノ差ヨリモ尚小ナリ。

此ニ由テ之ヲ觀レハ、愈ヨ試験ノ回数ヲ増加スレハ愈ヨ未来試験ノ公算ハ事象ノ生起セシ回数ト
 試験ノ回数ノ比ニ近接ス。此結果ハ已ニ第十章ニ於テ説示セシモノナリ。

此結果ヨリ左〔下〕ノ設論ヲ生ス。

設 論

試験ノ回数 $m+n$ ヲ増加スレハ、未来試験ノ公算ノ達至スル所ノ限、即チ事象ノ生起セシ回数 m ト
 試験ノ回数 $m+n$ ノ比 $\frac{m}{m+n}$ ヲシテ、此比象ノ真ノ公算ト相異ナルコト一定ノ量ニ等キカ如クスル
 公算ヲ増大ス。縦令ヒ此量ハ至小ナルモ充分ニ試験ノ回数ヲ増加スレハ、右〔上〕公算ヲシテ竟ニ
 一ニ至ラシムルヲ得。

証明

設論ニ所謂 x ノ真値ト $\frac{m}{m+n}$ ト相異ナルトキ、一定ノ量ヲ $\pm l$ トスレハ、式 $\frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$ ヲ

$x = \frac{m}{m+n} - l$ ヲリ $x = \frac{m}{m+n} + l$ 迄積分シタルモノ充分ニ一ニ近接スルヲ要ス。コトヲ簡易ニスル為

ニ $\frac{m}{m+n} = p$ 、 $\frac{n}{m+n} = q$ 、 $m+n=r$ トスレハ、右〔上〕積分ハ

$$\frac{\int_{p-l}^{p+l} x^{pr} (1-x)^{qr} dx}{\int_0^1 x^{pr} (1-x)^{qr} dx} = P \quad (1)$$

トナル。

先此積分ノ分子ヲ算定スヘシ。此カ為メニ $x = p+z$ トスレハ、此分子ハ $\int_{-l}^{+l} (p+z)^{pr} (q-z)^{qr} dz$ 、

即チ

$$p^{pr} q^{qr} \int_{-l}^{+l} \left(1 + \frac{z}{p}\right)^{pr} \left(1 - \frac{z}{q}\right)^{qr} dz \quad (2)$$

トナル。然ルニ

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^{pr} = e^{pr \cdot \left(1 + \frac{z}{p}\right)} \quad (3)$$

ナリ。又、 $l \left(1 + \frac{z}{p}\right) = \frac{z}{p} - \frac{z^2}{2p^2} + \frac{z^3}{3p^3} \dots$ 、 $pr \cdot l \left(1 + \frac{z}{p}\right) = rz - \frac{rz^2}{2p} + \frac{rz^3}{3p^2} \dots$ ナリ。

z ハ一般ニ至小分数ナルヲ以テ z^3 ヲ有スル項并ニ此項ノ後方ニアル諸項ヲ除キテ可ナリ。而シテ

(3) 式ハ $\left(1 + \frac{z}{p}\right)^{pr} = e^{\frac{rz - rz^2}{2p}}$ トナル。右〔左〕ト同様ニ又 $\left(1 - \frac{z}{q}\right)^{qr} = e^{-\frac{rz - rz^2}{2q}}$ ヲ得。故ニ (2) 式ハ

$$\int_{-l}^{+l} e^{\frac{rz^2}{2pq}} dz \quad (4)$$

トナル。

又、 $\frac{rz^2}{2pq} = t^2$ トスレハ、 $z = t \sqrt{\frac{2pq}{r}}$ ナリ。而テ (4) 式ハ

$$p^{pr} q^{qr} \sqrt{\frac{2pq}{r}} \int_{-\sqrt{\frac{r}{2pq}}}^{+\sqrt{\frac{r}{2pq}}} e^{-t^2} dt$$

即チ

$$2p^{pr}q^{qr}\sqrt{\frac{2pq}{r}}\int_0^{\sqrt{\frac{r}{2pq}}}e^{-t^2}dt$$

トナル。

今、(1)式ノ分母ヲ定ムルニハ、第十章ノ(3)式中 $m = pr$ 、 $n = qr$ 、 $(m+n) = r$ トスレハ可ナリ。乃チ $\frac{(pr)^{pr}(qr)^{qr}}{r^{r+1}}\sqrt{2\pi pq}$ ヲ得。故ニ(1)式ハ竟ニ

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{r}{2pq}}}e^{-t^2}dt \quad (5)$$

トナル。此積分ハ、 $l\sqrt{\frac{r}{2pq}}$ ノ増加スルニ從テ速ニ一ニ至ル。

注 意

t ノ限、 $l\sqrt{\frac{r}{2pq}}$ 即チ $l\sqrt{\frac{r}{2(1-p)p}}$ ニ就テ左〔下〕ノ三注意アリ。

第 一

l 、 r 、 p ノ三量、 t ノ限ノ不変ナルカ如ク変化スルトキハ P モ亦不変ナリ。又、此限ハ l ト同方向ニ從テ変シ、試験ノ回数 r ノ平方根ト同方向ニ從テ変シ、而シテ相乗積 $p(1-p)$ ノ平方根ト相反スル方向ニ從テ変ス。

第 二

l 、 r ニ一定ノ値ヲ与ヘテ P ヲ定メタル后チ l ヲ逐次ニ其ノ原値ノ $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 \dots 、 $\frac{1}{10}$ トスレハ、已ニ定メタル P ノ値ヲ得ルニハ試験ノ回数ヲ逐次ニ四倍、九倍、十六倍 \dots 百倍セサルヘカラス。之ヲ別言スレハ、事象ノ生起スルコト愈々至小ナル間隔内ニ狭在シアルヲ望ムニ方リ常ニ一定ノ公算ヲ得ント欲セハ、試験ノ回数ヲ此間隔ノ平方根ト相反スル方向ニ從テ増加スヘシ。

第 三

相乗積 $p(1-p)$ ハ p ノ零ニ近クカ或ハ一ニ近クトキハ至小ニシテ、其最大ナルトキハ $p = \frac{1}{2}$ ナルトキニアリ。故ニ事象ノ公算ト其反公算トノ差甚シキトキハ、 P ノ一定ノ値ヒヲ得ニハ敢テ大ニ試験ノ回数ヲ増加スルヲ要セス。或ハ又試験ノ回数ヲ不変トスレハ、 P ノ一定ノ値ヒニ応スル l ノ値ヲシテ小ナラシムルヲ要ス。

第十四章 相反スル二事象中其一個ノ生起ヲ恰適スル理由ノ存スヘキ公算

a, b ナル兩限ノ間ニアル x ノ諸値ニ応スル物設想ノ公算ハ $\frac{\int_a^b x^m (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx} = P$ ナルヲ以テ x ノ諸

値、 1 ト $\frac{1}{2}$ ノ間ニアルトキハ

$$P = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^m (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx} = \frac{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx - \int_0^{\frac{1}{2}} x^m (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx} = 1 - \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} x^m (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx} \quad (1)$$

ナリ。

試験ヲ施行シテ A 象ノ生起セシ回数、其生起セサリシ回数ヲ超過スルトキハ、人自ラ之ニ理由ノ存スヘキコトト信ス。即チ A 象ノ公算ハ $\frac{1}{2}$ ヲ超ルト想定ス。而テ此理由ノ存スルノ公算ハ則チ嚮ノ

(1) 式ニ異ラス。若シ $n = 0$ ナレハ、(1) 式ハ

$$P = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^m dx}{\int_0^1 x^m dx} \quad (2)$$

トナル。然ルニ $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^m dx = \frac{1}{m+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{m+1} = \frac{1 - \frac{1}{2^{m+1}}}{m+1}$ 、 $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ ナリ。故ニ (2) 式ハ

$$P = 1 - \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{2^{m+1} - 1}{2^{m+1}} \quad (3)$$

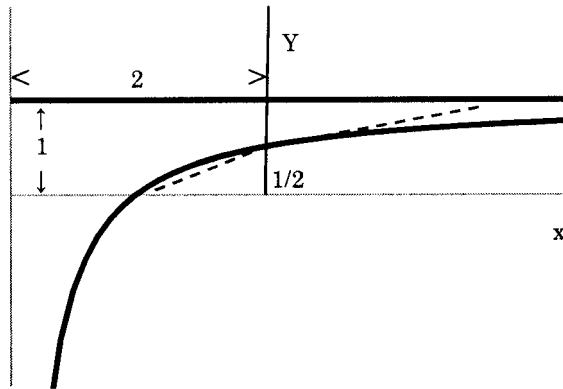
トナル。故ニ (3) 式ハ m 回連続生起セシ事象ノ公算 $\frac{1}{2}$ ヲ超過スルノ公算ナリ。即チ此象ノ生起ヲ

恰適スル一定ノ理由アルノ公算ナリ。

一般ニ数回連続生起セシ事象ノ更ニ生起スルノ理由ノ存スルノ公算ノ増大スルハ、此象ノ更ニ生起スルノ公算ノ増大ヨリモ急ナリ。

事象ノ連続生起スルコト x 回ナルトキハ、其更ニ一回生起スルノ公算ハ $y = \frac{x+1}{x+2}$ ナリ。此式ハ左

図〔下図〕ニ実線ヲ以テ示シアル双曲線ノ式ナリ。



$x = \infty$ ニ於テ $y = 1$ トナル、即チ事象ノ生起セシ回数無究ナルトキハ、所求公算ハ必成トナルヲ表示ス。 $x = 0$ ニ於テ $y = \frac{1}{2}$ トナル、即チ試験ヲ行フ前ニハ事象ノ生起スル歟、將生起セサル歟ノ疑ヒアルヲ表示ス。

事象ノ x 回連続生起セシハ偶然ニ非ス、必ス其然ルヘキ理由アルノ公算ハ $y = \frac{2^{x+1} - 1}{2^{x+1}}$ 或ハ $y = 1 - 2^{-(x+1)}$ ナリ。是レ虚線ヲ以テ示シアル対数曲線ナリ。

$x = \infty$ ナレハ $y = 1$ トナル、即チ事象ノ連続生起セシ回数無究ナレハ、之ニ其理由アルハ必然ナルヲ表示ス。又 $x = 0$ ナレハ $y = \frac{1}{2}$ ナリ、即チ試験ヲ行フ前ニハ事象ノ生起スルニハ、其理由アルカ、將アラサルカノ疑ヒアルヲ表示ス。

右〔上〕両公算ハ試験ノ回数ノ増加スルニ從テ皆必成ニ近接スレトモ、乙公算ノ之ニ近接スルハ甲公算ヨリ急ナリ。其証ハ易シ。即チ同値ノ為メニ $\frac{x+1}{x+2} = \frac{2^{x+1} - 1}{2^{x+1}}$ ヲ作り、之ヨリ $2^{x+1} = x + 2$ 、 $x = 2(2^{x'} - 1)$ ヲ作レハ可ナリ。最終ノ式ヲ觀ルニ正数 x' ハ常ニ之ニ応スル x ヨリ小ナリ。

第三篇 活用

第一款 誤差ノ総論

第十五章 定差、変差及ヒ誤差ノ研究ニ関スル要領

一値ヲ測量シテ得タル所ノ量ニハ必ス多少ノ誤差アリ。即チ誤差ハ所求ノ真量ニ非ス。是レ一値ヲ數回測量スルニ方リ、其結果ハ必ス相齟齬スルヲ見テ知ルヘシ。勿論測量ヲ精密ニスレハ、大ニ誤差異（相齟齬スル量ヲ云フ）ヲ減少スレトモ全く之ヲ消无シタルコト未タ曾テアラサルナリ。又何故ニ此差異ヲ生スルヤ、一ニハ我人ノ注意ノ不足、二ニハ我五官ノ不精、三ニハ各試験毎ニコンヂションヒジーク〔condition physique〕⁶⁾ノ不同ニ拠ルト信スヘシ。

斯ク一値ヲ表示スル各異ノ數量アルトキハ如何ナル量ヲ採用シテ可ナルヤ、即チ誤差ニ如何ナル平等ヲ得セシムヘキヤ。是レ觀測ヲ行フニ方リテ最要ノ問題タルヘシ。誤差ヲ二種ニ分ケテ、其一ヲ定差ト云ヒ其他ノ一ヲ變差ト云フ。

定差ハ各試験毎ニ必ス生起シ且其量ハ一般ニ不變ナルモノナリ。定差ノ生スルハ、試験ニ要スヘキ性能ノ充備至ラサルニヨルヲ以テ使用スル所ノ測器ノ不精或ハ方法ノ不良ヲ矯正スレハ、則チ其生起ヲ防クヲ得。然レトモ吾人ノ注意ニハ自ラ限アリテ、測器ノ精正方法ノ善良ヲシテ其最上極度ニ至ラシムルコトハ甚タ難シ。故ニ全く定差ノ生起ヲ避クルハ能ハサルモノト信スヘシ。

又、定差ノ量ハ一般ニ不變ナルヲ以テ一値ヲ表示スル數量ノ差異ハ一般ニ定差ニヨラサルト信ス。故ニ定差ノ存否ハ此數量ヲ比較スル所ノ之ヲ知ルニ由ナシ。乃チ定差ニ平等ヲ得セシムルハ能ハサル者ト決言スヘシ。之ニ反シテ變差ハ其生起不期ニシテ、其量ハ各試験毎ニ變化スルモノナリ。故ニ變差ヲ生スル原因ハ全く不變ナルモノニシテ、其感応ノ法モ亦不定ナルモノナリ。

例ヘハ一定ノ装薬及ヒ一定ノ抛角〔放角〕ヲ以テ一砲ヲ數回放射スルニ方リ、其彈丸ノ落下ニ躲避ヲ生スルノ原因ハ、彈丸各個ノ幅員及ヒ其量皆同一ナル能ハス装薬ノ成分其填実ノ強弱等、毎度異同アリ。又空氣濕燥ノ度、其抗力ノ強弱連リニ變化スモノナルカ如シ。

一値ヲ表示スル數量ノ差異ハ要スヘキ性能ノ不充備ニ基クト雖トモ、若シ此差異至小ニシテ且ツ其原因ヲ確定スル能ハサルトキハ、之ヲ變差ノ致ス所ト看做スヘシ。

是ニ由テ之ヲ觀レハ、變差ハ吾人ノ為メニハ全く不期不全ナルモノナリ。又、變差ハ一般ニ數原因ノ錯合ニヨリテ生スルカ、或ハ各原因ニヨリテ生スルカ、此亦吾人ノ知ラサル所ナリ。故ニ其生起ハ之ヲ偶然ニ属セサルヲ得ス。是レ猶ホ箱内ヨリ撮出セシモノノ白球ナルニハ必ス其原因ハ存スレトモ、認定スル能ハサルヲ以テ遂ニ之ヲ偶然ニ属シタルカ如シ。

勿論白球ノ現出ヲ偶然ニ属シタルハ大ニ理学ノ意ニ負ケトモ、是全く事象ノ生起スル公算式ヲ立ンカ為メニシテ己ヲ得サルニ出ツルナリ。變差ノ生起ヲ偶然ニ属スルモ亦此ノ如シ。即チ既ニ誤差

ノ在ルヲ知ル上ハ之ヲ矯正セサルヲ得サレハ其方法ヲ設ケサルヲ得ス。然ルニ此方法ノ基本、即チ変差ノ原因ハ吾人之ヲ知ル能ハス。故ニ已ヲ得ス之ヲ偶然ニ属シタリ。

変差ハ試験ノ種類ニ関セス一定ノ公算ヲ有スル虚値ト看做スヲ要ス。然レトモ此公算ノ量ハ試験毎ニ多少変スルモノナリ。何者偶然ト看做ス所ノ原因ハ各場合ニ於テ各異ノ実原因ヲ表示ス。而テ此諸原因、同量ノ変差ヲ生スルニハ素ヨリ多少ノ難易アレハナリ。是ニ由テ之ヲ観レハ、変差ノ公算式中其生起ノ難易ニ関スル所ノ係数アラサルヘカラス。

此係数ハ平等法ヲ施サント欲スル数量ノ差異、或ハ同種ノ試験ノ差異ニ依テ之ヲ算出スルモノナリ。而シテ其方法ハ此係数ヲ変数ト看做シテ各誤差ノ公算ノ相乗積ノ最大ナルヘキ性能ヲ作レハ可ナリ。是レ他ナシ。数多ノ試験中諸誤差ノ生起ヲ複事象ト看做スレハ、其複公算ハ所求係数ノ為メニハ最大ナルモノト予定シタレハナリ。何故ニ斯ク最大ノ原則ヲ要スルヤ、之ヲ証スルコト能ハスト雖トモ其理由ナキニ非ラス。何者諸誤差ニ平等ヲ得セシメント欲スル上ハ、之ニ応スル諸試験ハ幾分カ相互ニ関スル故、此諸誤差ヲ以テ一箇ノ複事象ト看做ササルヲ得ス。然ルニ此事象ハ已ニ生起セリ故ニ其公算ヲ最大ト看做シテ不可ナラス。

誤差ノ生起スル公算ハ其量ノ増加スルニ從テ減少スルモノト予定シテ不可ナラス。何者凡ソ試験ハ精密ニ之ヲ行フヲ人ノ常トス。故ニ大誤差ノ生スルハ稀レニシテ無窮小誤差ノ生スルハ最も多クナリ。

又、思考スヘキモノハ実原因ニ非サル故ニ、誤差ノ生起ノ方位ハ思考セスシテ可ナリ。即チ一定虚値ノ誤差ハ其正負ニ関スルコトナク同一ノ公算ヲ有ス。故ニ諸誤差ノ平均ハ零ニ近接ス。乃チ一値ヲ表示スル諸量ノ平均量ハ真量ニ近接スルト謂フヘシ。

是ニ由テ之ヲ観レハ、一値ヲ表示スル諸量ノ平均量ハ最大公算ニ応スル量ナリ。

又此平均量ノ真量ニ近クハ試験ノ回数ノ増加スルニヨル。故ニ此回数ハ大ニ所求ノ量ニ関係ス。因テ之ヲ重量ト名ク。

第十六章 誤差ノ公算ノ公式

誤差ノ公算ハ誤差ニ從テ変スルヲ以テ誤差 x ノ公算ハ x ノ関数タルヘシ。因テ之ヲ $F(x)$ トスレハ、誤差ノ x 及ヒ $x + dx$ ノ間ニアルノ公算ハ $F(x + dx) - F(x) = F'(x)dx$ ナリ。

通常 x ハ至小ノ限ヲ有スルモノナリ。故ニ若シ $\pm\alpha$ ヲ此ノ限トスレハ $\int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi(x)dx = 1$ ナリ。而シテ

一般ノ場合ニ於テハ $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$ ナリ。左〔下〕ニ $\varphi(x)$ ノ形状ヲ定メン。

n 回ノ試験ニ於テ生起セシ誤差ヲ各々 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ トスレハ、此諸誤差ノ生起スルノ公算ハ

$$\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdot \varphi(x_3) \cdots \varphi(x_n) dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_n \quad (1)$$

ナリ。

真誤差ハ未知ナレトモ假定ニ依レハ φ ノ形状ハ、(1) 式中 $x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$ ニ与フルニ衆量ノ平均量ト各量トノ差ヲ以テスレハ此式ハ最大トナルヘキモノナリ。故ニ衆量ヲ各々 $o', o'', o''' \cdots o_n$

トシ、其平均量 $\frac{o' + o'' + o''' + \cdots + o_n}{n}$ ヲ o トシ、 $x_1 = o - o', x_2 = o - o'', x_3 = o - o''' \cdots x_n = o - o_n$ ト

スレハ (1) 式ノ代リニ

$$\varphi(o - o') \cdot \varphi(o - o'') \cdots \varphi(o - o_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (2)$$

ヲ得。(2) 式ハ最大トナルヲ以テ

$$\frac{\varphi'(o - o')}{\varphi(o - o')} + \frac{\varphi'(o - o'')}{\varphi(o - o'')} + \frac{\varphi'(o - o''')}{\varphi(o - o''')} + \cdots + \frac{\varphi'(o - o_n)}{\varphi(o - o_n)} = 0$$

アリ。又、 $\psi = \frac{\varphi'(o - o')}{\varphi(o - o')}$ トスレハ、 $\psi(o - o') + \psi(o - o'') + \psi(o - o''') \cdots + \psi(o - o_n) = 0$ アリ。

此式ハ $o', o'', o''' \cdots o_n$ ノ量ノ如何ヲ問ハスシテ存スルヲ以テ之ヲ $o', o'', o''' \cdots o_n$ ニ対シテ微分スレハ

$$\psi'(o - o') \frac{do}{do'} - \psi'(o - o') = 0, \quad \psi'(o - o'') \frac{do}{do''} - \psi'(o - o'') = 0, \quad \cdots \psi'(o - o_n) \frac{do}{do_n} - \psi'(o - o_n) = 0$$

ヲ得。然ルニ $\frac{do}{do'}, \frac{do}{do''}, \frac{do}{do'''} \cdots \frac{do}{do_n}$ ハ皆 $\frac{1}{n}$ ニ等シ。故ニ

$$\psi'(o - o') = \psi'(o - o'') = \psi'(o - o''') = \cdots = \psi'(o - o_n)$$

ナリ。乃チ ψ' ハ不変数ナリト謂フヘシ。

今、此不変数ヲ α トスレハ $\psi(o - o')$ 、或ハ $\psi(x) = \alpha x + \beta$ 、即チ

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \alpha x + \beta \quad (3)$$

ヲ得。(3) 式ヲ積分スレハ、 $l.\varphi(x) = \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x + \gamma$ 、即チ $\varphi(x) = e^{\frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x + \gamma}$ ヲ得。式中 α ハ負ニシテ β

ハ零ニ等シ。是 $x = \pm\infty$ ノ為メニハ $\varphi(x)$ ハ零トナレバナリ。

x^2 ノ係数ノ常ニ負ナルヲ表示スル為メニ之ヲ $-h^2$ トシ、又常数 e^γ ヲ K トスレハ $\varphi(x)$ ハ $Ke^{-h^2x^2}$ トナル。然ルニ $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$ ナリ。故ニ $K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} dx = 1$ ナリ。式中 $hx = t$ トスレハ、此積分ハ

$$\frac{K}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

トナル。 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ トナルハ已ニ之ヲ知ル。此ヨリ $K = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$ ヲ生ス。故ニ $\varphi(x)$ ノ所求形状ハ

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (4)$$

ナリ。而テ誤差ノ x 及ヒ $x + dx$ ノ間ニアルノ公算ハ

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx \quad (5)$$

ナリ。

第十七章 精密ノ測度

h ハ第十五章ニ於テ所謂誤差ノ生起ノ難易ニ関スル係数ニ異ナラス。実ニ一種ノ観測ニ於テ式

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-h^2 x^2} dx \quad (1)$$

ハ誤差 x ノ零ト α トノ間ニアルノ公算ヲ示ス。或ハ此両限間ニアル誤差ノ惣數ハ一ヲ以テ示スモノトス。

又、他ノ一種ノ観測ニ於テ誤差ノ零トトノ間ニアルノ公算ハ

$$P' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha'} e^{-h'^2 x'^2} dx' \quad (2)$$

ナリ。

$$hx = h'x' = t \quad (3)$$

トスレハ、(1)、(2) 式ハ各

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt, \quad P' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha h'} e^{-t^2} dt \quad (4)$$

トナル。而テ

$$ah = \alpha'h' \quad (5)$$

トスレハ、此兩式ハ相等カルヘシ。

又、(2) 及ヒ (5) 式ヨリ $\frac{\alpha'}{x'} = \frac{\alpha}{x}$ ヲ生ス。故ニ零ト α トノ間ニ在ル誤差ノ箇數ハ、零ト α' トノ

間ニアル誤差ノ箇數ニ等シ。或ハ又一種ノ観測ニ於テ x ヨリ小ナル誤差ヲ生スルノ公算ハ他ノ一種ノ観測ニ於テ x' ヨリ小ナル誤差ヲ生スルノ公算ニ等シ。

然ルニ (3) 式ニ依レハ $\frac{h}{h'} = \frac{x'}{x}$ ナリ。是ニ由テ之ヲ觀レハ、常数 h 、 h' ハ生起ノ公算ヲ等クスル所ノ誤差 x 、 x' ト反比例ヲナス。乃チ觀測ノ精密ハ之ニ応スル h 量ニヨリテ度〔測〕ルヲ得。是レ則チ h ヲ精密ノ測度ノ名クル所以ナリ。⁷⁾

注 意

誤差ノ公算曲線式 (4) ハ第一篇ニ於テ求得タル公算曲線式 (5) ノ形状ニ異ナラス。是レ他ナシ。虚量同一ノ誤差ハ其符号ノ如何ヲ問ハス其公算ヲ等クスル。故ニ其正ナルモノノ公算ヲ p トシ其負ナルモノノ公算ヲ q トスレハ、誤差ノ生起ヲ $p = q$ ナル場合ニ応スル復行試験ト看做スヲ得レハナリ。

第十八章 t ノ限 $\pm ah$ ナル場合

誤差ノ公算ハ唯誤差ノ虚量ニ関スルヲ以テ t ノ零ト $\pm ah$ トノ間ニアルノ公算 P_2 ヲ得ルニハ、前章ノ (4) 式ヲ二倍スレハ可ナリ。即チ

$$P_2 = 2P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt \quad (1)$$

ナリ。

此式ハ t ノ虚量零ヨリ ah ニ変スルニ方リテ生起スル所ノ諸誤差ヲ其量ノ大小ニ從テ分配シタルモノヲ表示スルト想像スヘシ。或ハ又 $+ah$ 及ヒ $-ah$ ノ間ニアル誤差ノ箇數ヲ表示スルト想像スヘシ。但シ斯ノ如ク想像スルトキハ、公算曲線ノ全面積及ヒ誤差ノ惣數ヲト看做スヘシ。式中逐次ニ $t = \pm 0.5$ 、 $t = \pm 1.0$ 、 $t = \pm 1.5$ 、 $t = \pm 2.0$ トスレハ、逐次ニ $P_2 = 0.520$ 、 $P_2 = 0.843$ 、 $P_2 = 0.966$ 、 $P_2 = 0.995$ ヲ得。

此結果ノ謂ヒハ、千回ノ試験ヲ行フニ方リ $t = 0$ ト $t = \pm 0.5$ ノ間ニ 520 箇ノ誤差ヲ生シ、 $t = 0.5$ ト $t = 1.0$ ノ間ニ 323 箇ノ誤差ヲ生シ、 $t = 1.0$ ト $t = 1.5$ ノ間ニ 123 箇ノ誤差ヲ生シ、而テ $t = 1.5$ ト $t = 2.0$ ノ間ニ 29 箇ノ誤差ヲ生スルニアリ。又、算討ニ依レハ、 $t = 2$ ト $t = \infty$ ノ間ニ於テ生スル所ノ誤差ハ唯五箇ノミ。故ニ同一ノ間隔内ニアル誤差ノ箇數ハ t ノ増加スルニ從テ急速ニ遞減ス、或ハ又誤差ノ量ノ増大スルニ從テ急速ニ遞減スルト謂テ可ナリ。

第十九章 公算誤差

t ノ諸量中 P_2 ヲシテ $\frac{1}{2}$ ノ兩ヲ取シムルモノアリ。夥多ノ觀測ヲ行ヒタルノチ生起セシ所ノ諸誤差ヲ其量ノ大小ニ從テ順列スレハ、右〔上〕 t 量ハ之ヲ二班等分ス。而テ此 t 量ニ応スル x 量ハ、更ニ行フ所ノ一觀測ニ於テ生起する所ノ誤差、一定ノ限ヲ超ヘサルノ公算 $\frac{1}{2}$ ニ等シキカ如ク此限ヲ定ム。勿論此限愈々小ナレハ觀測ヲシテ愈々精密ナラシム。

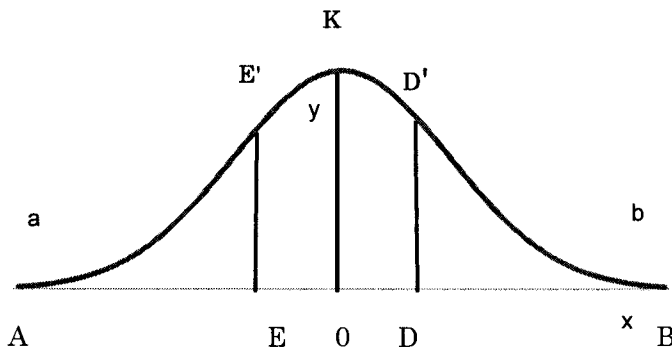
右〔上〕 t 量ヲ ρ トシテ算討ニ依テ $t = \rho = 0.476936$ ヲ得。⁸⁾而テ前章ノ(1)式ハ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\rho} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \quad (1)$$

トナル。 ρ ハ存スル所ノ場合ニ適用シ得ルモノト雖トモ之ニ応スル x 量ニ至テハ然ラス。是レ他ナシ。 $t = hx$ 中 h ハ觀測ノ精否ニ從テ變スル。故ニ右〔上〕 x 量ハ觀測ノ良否ニ從テ伸縮スレハナリ。 $t = \rho$ ニ応スル x 量ヲ r トスレハ、甲種ノ觀測ニ就テハ $\rho = hr$ ナリ。乙種ノ觀測ニ就テハ $\rho = h'r'$ ナリ。此兩式ヨリ $hr = h'r'$ 、即チ

$$\frac{r}{r'} = \frac{h'}{h} \quad (2)$$

ヲ生ス。 r ヲ名ケテ公算誤差〔確率誤差〕ト謂フ。



AO 或ハ BO ヲ誤差ノ限トスレハ、面積 AOKa 或ハ KOBb ヲ二箇ニ等分スル所ノ縦線 EE' 或ハ DD'ニ応スル横線 OE 或ハ OD ハ、則チ公算誤差 r ノ量ニ異ナラス。故ニ r ヨリ小ナル誤差ノ箇数ハ之ヨリ大ナル誤差ノ箇数ニ等シ。又一種ノ諸觀測ヲ行フニ方リ、 r ヨリ小ナル誤差ヲ生スルノ公算ハ之ヨリ大ナル誤差ヲ生スルノ公算ニ等シ。

r ヲ單位トシ且比 $\frac{x}{r}$ 、即チ $\frac{t}{\rho}$ ヲ已知〔既知〕スルトキハ、直ニ零ト x ノ間ニアル誤差ノ箇数ヲ得。

此法ニ依テ算定スレハ、千回ノ試験ニ於テ r ヨリ小ナル誤差ヲ 500 箇、 $2r$ ヨリ小ナルモノヲ 823 箇、

3r ヨリ小ナルモノヲ 957 箇, 4r ヨリ小ナルモノヲ 993 箇, 而テ 5r ヨリ小ナルモノヲ唯一箇生ス。

公算誤差ニ応スル縦線 y_1 ト第八章ノ Y ⁹⁾ トヲ比較スルニ $y_1 = 0.7963Y$ ナリ。是レ比 $\frac{y_1}{Y} = \frac{1}{e^2}$ ニ依

テ知ルヘシ。故ニ公算誤差ノ公算ハ殆ント無究小誤差ノ公算ノ五分四ニ等シ。

式 $p = rh$ アルニヨリ, 若シ一種ノ観測ニ就テ r ヲ已知スルトキハ, 容易ニ其生スル所ノ諸誤差ノ公算曲線ヲ作ルヲ得。但シ此ニ種々ノ方法アリ。

第一方法

$0.476936 = hr$ ヨリ $h = \frac{0.476936}{r}$ ヲ得。 h ヲ $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ 中ニ代入スレハ可ナリ。

第二方法

h ヲ定ムルニハ x ノ其量ニ応スル縦線ヲ知ムレハ可ナリ。即チ若シ $x = 0$ ニ応スル Y ノ量ヲ已知スルトキハ, 直ニ $h = Y\sqrt{\pi}$ ヲ得。

第三方法

又, 已知ノ二横線 xx' ニ応スル二縦線ノ比 m ヲ知レハ足レリ。然ルトキハ

$$m = \frac{e^{-h^2 x'^2}}{e^{-h^2 x^2}} = \frac{1}{e^{-h^2 (x'^2 - x^2)}}$$

アリ。之ヨリ h ヲ生スルヲ得。事ヲ簡易ニスル為メニ $x = 0$ ニ応スル縦線ヲ思考スレハ $m = \frac{1}{e^{-h^2 x'^2}}$ アリ。

最終ノ式ヨリ左〔右〕ノ設言ヲ生ス。誤差零ノ公算ト誤差 x ノ公算トノ比 $\frac{1}{e^{-px^2}}$ ニ等シキトキハ, 精度ノ為メニ \sqrt{p} ヲトルヘシ。

注 意

(2) 式ニ依レハ公算誤差ハ精度ト反比例ヲナス。是レ其理学者ノ r ヲ以テ精度ト名ケタル所以ナリ。

(以下次号)

注

6) この単語の使用をみても明らかなように、この著作は明らかにフランス語による確率論・誤差論のテキストを参照している。これは、設立当初、陸軍士官学校がフランス式の陸軍制度・教育を採用していたことと関係している。この点については、改めて「解題」で詳しく検討する。

7) 係数は、精度定数 (Präzisionskonstante) と呼ばれるもので、数理統計学で定義される標準偏差を σ とすると $h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ の関係式が成り立つ。

8) これは F. W. Bessel による確率誤差 (Wahrscheinliche Fehler) に関する数値である。Bessel が最初に確率誤差の概念を用いたのは、Bessel, F. W., "Ueber den Ort des Polarsterns.", *Astronomisches Jahrbuch für* 1818, 1815, S.233-240 であるが、ここでは詳しく確率誤差を定義していない。しかし「オルバース彗星の軌道に関する考察」と題する論文で Bessel は、「この名称を、より小さい誤差とより大きい誤差 (の確率) が等しくなるような数の限界であると理解する。各々ある広さの限界内に陥る観測値は、その限界の外に陥る観測値よりはるかに確からしい」と述べ、誤差分布 (正規分布) における正負各々の確率を二部する点であることを定義している。Bessel, F. W., "Untersuchungen über die Bahn des Olbersschen Kometen.", *Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaft*, 1816, S.142. なお現代的表記法では、確率変数 X が $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

の場合、平均の確率誤差は 0.6745σ 、 $X \sim N(0,1)$ の場合 $0.6745 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ となる。文中の数値 0.476936 は、

$hr = 0.476936$ を意味しており、観測値が十分大きいときは、 $r = \frac{0.47636}{h} = 0.6745\sigma$ が成り立つ。

このことは次の C. F. Gauss の文献に示されている。Gauss, C. F., "Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen.", *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften*, Bd.1, 1816, S.187-197.

9) 最大縦線を指す。