

1304 延伸高分子材料の異方塑性構成式

Anisotropic Plastic Constitutive Equation of Drawn Polymers

○佐野村 幸夫 (玉川大)

早川 邦夫 (静岡大学)

水野 衛 (秋田県大)

Yukio Sanomura, Tamagawa University

Kunio Hayakawa, Shizuoka University

Mamoru Mizuno, Akita Prefectural University

Key Words: Anisotropic Plastic Constitutive Equation, Rational Continuum Mechanics, Drawn Polymers

1.はじめに

プラスチックは、押出加工することによって、押出方向の剛性と強度が、著しく改善される¹⁾⁻³⁾。このような押出材料の異方弾性定数は、横等方性となる。Wardらは、ReussとVigotの仮定とaggregate model⁴⁾を用いて、これらの異方弾性定数を予測した。このモデルでは、擬アフィン変形を仮定し、まず複屈折-延伸比関係から延伸方向と対称軸の間の角度を実験的に求めて計算した。しかし、この手法では角度の測定精度が悪いので、その角度をX線回折と核磁気共鳴によって求めて、異方弾性定数を適切に予測できた。したがって、この手法では内部構造を精密に計測する必要がある。一方、有理連続体力学理論に基づいた理論が、定式化された⁵⁾⁶⁾。この手法は、延伸高分子材料の異方弾性を容易に予測できるので、このような材料の設計に適用できる。しかし、塑性変形挙動を定式化した例は、報告されていない。

本研究では、延伸高分子材料の塑性構成式を導出する。すなわち降伏関数を偏応力テンソルと内部状態変数の基本不变量の関数として表現し、その降伏関数をボテンシャルとした連合流れ則から塑性構成式を導出する。なお、降伏関数は、延伸方向だけ降伏応力が増加し、延伸方向と垂直方向は、変わらないと仮定する。

2.延伸材料の塑性構成式

2.1 内部状態変数

内部状態変数は、延伸比を用いて次のように書ける⁵⁾⁶⁾。

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\omega_1 = \ln \lambda_1, \omega_2 = \ln \lambda_2, \omega_3 = \ln \lambda_3$$

ここに、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は、主延伸比を表す。また、延伸時における次のような変形の非圧縮性を仮定する。

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (2)$$

一軸延伸材料は、次式で表現できる。

$$\omega_1 = \ln \lambda_1, \omega_2 = \omega_3 = -\frac{1}{2} \ln \lambda_1 \quad (3)$$

また、等方二軸延伸材料では

$$\omega_1 = \omega_2 = \ln \lambda_1, \omega_3 = -2 \ln \lambda_1 \quad (4)$$

と書ける。

2.2 塑性構成式

Wangの表現定理⁷⁾⁸⁾によれば、降伏関数 $f(s, \omega)$ は、次の10個の基本不变量の関数として表される。

$$\left. \begin{aligned} \text{tr } s = 0, \text{tr } s^2, \text{tr } s^3, \text{tr } \omega = 0, \text{tr } \omega^2, \text{tr } \omega^3 \\ \text{tr}(s\omega), \text{tr}(s\omega^2), \text{tr}(s^2\omega), \text{tr}(s^2\omega^2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで s は、偏差応力テンソルを表す。降伏関数として、偏差応力テンソルの2次形式を用いれば

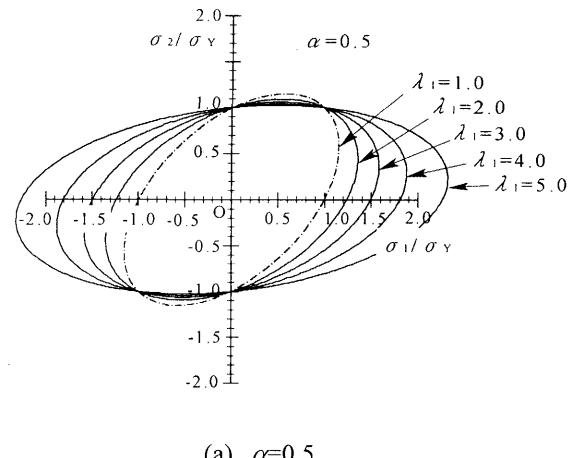
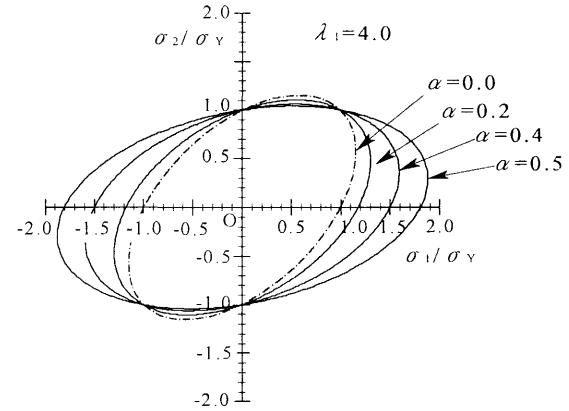
$$f = \frac{3}{2} \text{tr } s^2 - \alpha \frac{3}{2} \text{tr}(s^2\omega) - \beta \frac{3}{2} \text{tr}(s^2\omega^2) - k^2 = 0 \quad (6)$$

と書ける。ここで、1軸方向だけの一軸延伸をしたとき、他の方向(2軸と3軸方向)の降伏応力は変わらないと仮定すれば

$$\beta = \frac{2\alpha}{3\omega_1}$$

$$\therefore f = \frac{3}{2} \text{tr } s^2 - \alpha \left[\frac{3}{2} \text{tr}(s^2\omega) + \frac{1}{\omega_1} \text{tr}(s^2\omega^2) \right] - k^2 = 0 \quad (7)$$

この降伏関数を主応力平面で表現したものが、Fig.1(a)(b)である。 $\lambda_1=1$ または $\alpha=0$ のとき、Misesの降伏曲面を示す。この図から最大延伸比 λ_1 の増大または α の増大に伴って、降伏曲面の梢円が延伸方向に回転しながら延伸方向の降伏応力が増大することがわかる。

(a) $\alpha=0.5$ (b) $\lambda_1=4.0$
Fig. 1 Proposed yield surface.

一方、限界曲面は次式で表現できるものとする。

$$f^* = \frac{3}{2} \text{tr } s^{*2} - \alpha \left[\frac{3}{2} \text{tr}(s^{*2}\omega) + \frac{1}{\omega_1} \text{tr}(s^{*2}\omega^2) \right] - k^{*2} = 0 \quad (8)$$

式(17)の降伏関数を塑性ボテンシャルとして連合流れ則を用いれば、塑性ひずみ速度は

$$\dot{\epsilon}^P = \eta \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \eta \left[3s - 3\alpha \left\{ S_1 + \frac{2}{3\omega_1} S_2 \right\} \right] = 3\eta S \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} S &= s - \alpha \left\{ S_1 + \frac{2}{3\omega_1} S_2 \right\} \\ S_1 &= s \omega - \frac{1}{3} \text{tr}(s \omega) I, \quad S_2 = s \omega^2 - \frac{1}{3} \text{tr}(s \omega^2) I \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

と書ける。ここで η は、応力および負荷履歴に依存するスカラー関数である。それは、Prager の適応の条件

$$f = \text{tr} \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \right] + \frac{\partial f}{\partial \epsilon^P} \dot{\epsilon}^P = 0 \quad (11)$$

を用いて求めることができ

$$\eta = \frac{1}{2} \overline{\dot{\epsilon}^P} = -\frac{1}{2} \frac{\text{tr} \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \right]}{\frac{\partial f}{\partial \epsilon^P}} \frac{1}{S_{EQ}} \quad (12)$$

$$= \frac{3}{4} \frac{\text{tr}(S \dot{\sigma})}{C_k(1+bR)k(k^*-k) + \frac{1}{2} R(\frac{3}{2} \text{tr} s^2) C_\alpha (\alpha^* - \alpha)} \frac{1}{S_{EQ}}$$

となる。したがって、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^P &= \frac{3}{2} \frac{\overline{\dot{\epsilon}^P}}{S_{EQ}} S \\ &= \frac{9}{4} \frac{\text{tr}(S \dot{\sigma})}{C_k(1+bR)k(k^*-k) + \frac{1}{2} R(\frac{3}{2} \text{tr} s^2) C_\alpha (\alpha^* - \alpha)} \frac{S}{S_{EQ}} \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\dot{k} = C_k(1+bR)(k^*-k) \overline{\dot{\epsilon}^P} \quad (13b)$$

$$R = \frac{\frac{3}{2} \text{tr}(s^2 \omega) + \frac{1}{2} \text{tr}(s^2 \omega^2)}{\frac{3}{2} \text{tr} s^2} \quad (13c)$$

$$\dot{\alpha} = C_\alpha (\alpha^* - \alpha) \overline{\dot{\epsilon}^P} \quad (13d)$$

ここで相当ひずみ速度ならびに S_{EQ} を次式で定義する。

$$\overline{\dot{\epsilon}^P} = \left[\frac{2}{3} \text{tr}(\dot{\epsilon}^P)^2 \right]^{1/2}, \quad S_{EQ} = \left[\frac{3}{2} \text{tr} S^2 \right]^{1/2} \quad (14)$$

3. 計算結果

ここでは、延伸方向と同一方向の引張挙動を記述する。まず、単軸引張りおよび単軸圧縮における応力を σ 、塑性ひずみを $\dot{\epsilon}^P$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma, \quad \text{その他の } \sigma_{ij} = 0 \\ \epsilon_{11}^P &= \dot{\epsilon}^P, \quad \epsilon_{22}^P = \epsilon_{33}^P = -\dot{\epsilon}^P / 2, \quad \text{その他の } \epsilon_{ij}^P = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる。一軸延伸として固相押出加工を考える。押出変形中の体積不変を仮定すれば、押出比 R_A と延伸比 λ_1 は等しくなる。したがって

$$\dot{\epsilon}^P = \frac{(1 - \alpha \ln R_A) \sigma \dot{\sigma} \text{sgn}(\sigma)}{(1 + b \ln R_A) C_k k(k^* - k) + \frac{1}{2} \ln R_A C_\alpha (\alpha^* - \alpha)} \quad (16a)$$

$$\dot{k} = C_k(1 + b \ln R_A)(k^* - k) \dot{\epsilon}^P \quad (16b)$$

$$\dot{\alpha} = C_\alpha (\alpha^* - \alpha) \dot{\epsilon}^P \quad (16c)$$

を得る。

Fig.2 は、押出温度 $T_E = 160^\circ\text{C}$ 一定として、種々の押出比で押出した押出材の応力-ひずみ曲線を示す。図中の実線と破線は、それぞれ計算結果と実験結果³⁾を示す。式(16)の材料定数は、次の値を用いた。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 0.42, \quad \alpha^* = 0.55, \quad b = 0.3 \\ C_k &= 60, \quad C_\alpha = 30 \\ k_0 &= 14.0 \text{ MPa}, \quad k^* = 35.7 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

図から実験結果は、押出比の増加に伴って、著しく綫弾性係数、降伏応力ならびに加工硬化係数が大きくなる。一方、式(16)による計算結果は、ほぼ実験結果を記述することができる。通常のMisesの降伏応力と関連流れ則を用いた弾塑性理論では、常に処女材 ($R_A = 1.0$) の応力-ひずみ曲線と同一になる。しかし、本理論によれば、押出材の力学的挙動を適切に記述することができる。

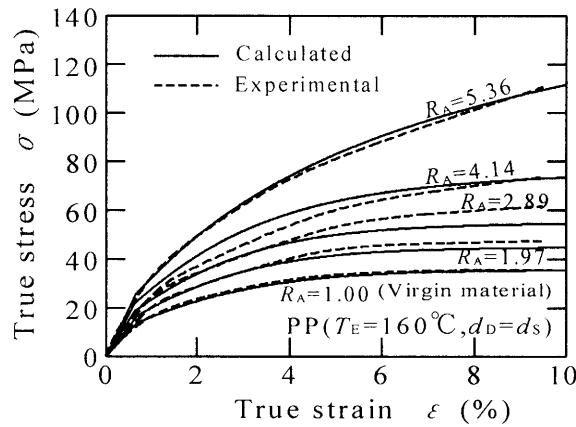


Fig. 2 Stress-strain curves of extruded PP

3. 結論と今後の方針

本研究は、延伸材料における弾塑性構成式を定式化するために行っている。前報³⁾では、延伸材料の弾性構成式を定式化するために、ひずみエネルギー関数を弾性ひずみテンソルと内部状態変数テンソルの基本不变量で具体化し、延伸高分子材料における弾性構成式を導出する。一方、延伸材料の塑性構成式は、降伏関数を偏差応力テンソルと内部状態変数の基本不变量の関数として表現し、その降伏関数をボテンシャルとした連合流れ則から塑性構成式を導出する。なお、降伏関数は、延伸方向だけ降伏応力が増加し、延伸方向と垂直方向は、変わらないと仮定した。得られた構成式を用いて、固相押出成形した丸棒の応力-ひずみ曲線を予測した。本理論は、延伸材料の弾塑性挙動を適切に記述できる可能性が高い。

今後の課題として、まず延伸方向（1軸方向）とは異なる方向での引張り挙動を予測する。すなわち延伸方向と角度θだけ傾いた方向に単軸引張りする場合を考える。次に、二軸延伸材料の引張り挙動を予測する。さらに、このような高分子材料は、延伸してもひずみ速度依存性を有するので、塑性構成式を粘塑性構成式へ拡張する。最後に、除荷時のひずみ回復を記述する¹⁰⁾¹¹⁾ことならびに静水圧依存性¹²⁾⁻¹⁴⁾を考慮する必要がある。

参考文献

- 1) 佐野村幸夫, 塑性と加工, 36-418, (1995), 1324.
- 2) 佐野村幸夫, 成形加工, 12-11, (2000), 736.
- 3) Y.Sanomura, Materials Science Research International, 9-4, (2003), 248.
- 4) D. W. Hadley, P. R. Pinnock and I. M. Ward, J. Mater. Sci., 4, (1969), 152.
- 5) 佐野村幸夫・早川邦夫・水野衛・春日幸生・川森重弘, 日本材料強度学会, 39-3, (2005), 印刷中.
- 6) 佐野村幸夫・早川邦夫・水野衛, 成形加工, 投稿中.
- 7) C.-C.Wang, Arch. Rational Mech. Anal., 33, (1969), 249.
- 8) S. Murakami and A. Sawczuk, Nuclear Engineering and Design, 65-1 (1981), 33.
- 9) A. J. M.Spencer 編, Continuum Theory of the Mechanics of Fibre-Reinforced Composites, (1984), Springer-Verlag.
- 10) 佐野村幸夫・水野衛, 日本材料強度学会, 38-1, (2003), 7.
- 11) 水野衛・佐野村幸夫, 材料, 54-4, (2005), 414.
- 12) Y. Sanomura, Materials Science Research International, 9-4, (2003), 243.
- 13) 佐野村幸夫・早川邦夫, 材料, 53-2, (2004), 143.
- 14) 早川邦夫・佐野村幸夫, 水野衛, 春日幸生, 中村保, 塑性と加工, 46-531, (2005), 332.