

## 245 静水圧依存性粘塑性構成式の妥当性の検討

Validity of Viscoplastic Constitutive Equation for Hydrostatic-Pressure-Dependence Polymers

正 佐野村幸夫 (玉川大) 正 水野 衛 (秋田県大)  
正 西村 太志 (長岡技術科学大学) 正 早川 邦夫 (静岡大)

Yukio SANOMURA, Tamagawa University, Tamagawa-gakuen, Machida, Tokyo  
Mamoru Mizuno, Akita Prefectural University  
Futoshi, Nishimura, Nagaoka University of Technology  
Kunio Hayakawa, Shizuoka University

Key Words : Viscoplastic constitutive equation, Polypropylene, Hydrostatic-pressure-dependence

### 1. 緒論

一般的には、高分子材料は静水圧依存性が著しいので、粘塑性構成式もこの影響を考慮する必要がある。本研究では、これまで提案した粘塑性構成式に静水圧依存性を導入する。具体的には、従来の粘塑性ポテンシャルに応力の第1不変量を追加する。構成式の枠組みとしては、Malinin-Khadjinsky の移動硬化クリープ理論を用い、背応力の発展式として Armstrong-Frederick の非線形移動硬化則を適用する。

### 2. 粘塑性構成式

本研究では、簡単のため微小変形を考える。まず、高分子材料に生じる全ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}$  は、弾性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}^e$  と粘塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$  の和で表すことができると仮定する。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (1)$$

弾性変形は Hooke の法則に従うものとし、弾性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}^e$  は応力速度  $\dot{\sigma}_{ij}$  を用いて次のように表される。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \quad (2)$$

ここで、 $E$  は綫弾性係数、 $\nu$  はボアソン比であり、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーデルタを表す。

次に、静水圧依存性を考慮した粘塑性ポテンシャル  $g$  は、次式のように書ける。

$$g = (1-\beta) \sqrt{\frac{3}{2} \xi_{ij} \xi_{ij}} + \beta I_1 \quad (3)$$

ここで、 $\xi_{ij}$  と  $I_1$  はそれぞれ有効応力ならびに応力の第1不変量である。有効応力は、偏差応力  $s_{ij}$  ならびに移動硬化を表すための内部状態変数である背応力の  $\alpha_{ij}$ 、偏差量  $a_{ij}$  を用いて次のように定義される。さらに、 $\beta(0 \leq \beta \leq 1)$  は材料定数である。

$$\xi_{ij} = s_{ij} - \alpha_{ij} \quad (4)$$

したがって、粘塑性ひずみ速度は次のように書ける。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = A \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = A \left[ (1-\beta) \frac{3}{2} \frac{\xi_{ij}}{\sqrt{\frac{3}{2} \xi_{ij} \xi_{ij}}} + \beta \delta_{ij} \right] \quad (5)$$

ここで  $A$  は応力  $\sigma_{ij}$  と負荷履歴に依存する正値のスカラー係数であり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} &= A^2 \frac{3}{2} (1-2\beta+3\beta^2) \\ \therefore A &= \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp}}{1-2\beta+3\beta^2}} \end{aligned} \quad (6)$$

式(5)は次のように書ける。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp}}}{\sqrt{1-2\beta+3\beta^2}} \left[ (1-\beta) \frac{3}{2} \frac{\xi_{ij}}{\sqrt{\frac{3}{2} \xi_{ij} \xi_{ij}}} + \beta \delta_{ij} \right] \quad (7)$$

粘塑性仕事散逸速度  $\dot{w}^{vp}$  は、次式で表現できる。

$$\dot{w}^{vp} = \xi_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \bar{\xi} \bar{\dot{\epsilon}}^{vp} \quad (8)$$

ここで、 $\bar{\xi}$  と  $\bar{\dot{\epsilon}}^{vp}$  は、それぞれ相当有効応力と相当ひずみ速度を表す。したがって、これらは次のように二通りに定義できる。

$$\bar{\xi} = \sqrt{\frac{3}{2} \xi_{ij} \xi_{ij}}, \quad \bar{\dot{\epsilon}}^{vp} = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-2\beta+3\beta^2}} \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp}} \quad (9a)$$

$$\bar{\xi} = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-2\beta+3\beta^2}} \sqrt{\frac{3}{2} \xi_{ij} \xi_{ij}}, \quad \bar{\dot{\epsilon}}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp}} \quad (9b)$$

また、式(3)の粘塑性ポテンシャルを相当有効応力と定義することができる。このとき

$$\bar{\xi} = g = (1-\beta) \sqrt{\frac{3}{2} \xi_{ij} \xi_{ij}} + \beta I_1, \quad \bar{\dot{\epsilon}}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp}} \quad (9c)$$

この相当有効応力  $\bar{\xi}$  と相当粘塑性ひずみ速度  $\bar{\dot{\epsilon}}^{vp}$  の関係は、単軸応力状態におけるクリープ速度と応力の関係と同一の関係で与えられる。クリープ構成式として Norton 則がよく用いられるが、種々の構成式を検討した結果、高分子材料の粘性変形挙動を適切に記述できることから、本研究ではクリープ構成式として Soderberg 則を適用し、相当有効応力  $\bar{\xi}$  と相当粘塑性ひずみ速度  $\bar{\dot{\epsilon}}^{vp}$  の関係を次式で与える。

$$\bar{\dot{\epsilon}}^{vp} = n \left\{ \exp \left( \frac{\bar{\xi}}{K} \right) - 1 \right\} \quad (10)$$

ここで、 $n$  と  $K$  は材料定数である。

最後に、背応力  $\alpha_{ij}$  の発展式が必要となるが、まず、背応力  $\alpha_{ij}$  を線形項  $\alpha_{ij}^{(1)}$  と非線形項  $\alpha_{ij}^{(2)}$  の和で表す。

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^{(1)} + \alpha_{ij}^{(2)} \quad (11)$$

線形項  $\alpha_{ij}^{(1)}$  に対しては、Prager 則を適用し、また、非線形項

$\alpha_{ij}^{(2)}$ に対しては、Armstrong-Frederick の非線形移動硬化則を用いる。

$$\dot{\alpha}_{ij}^{(1)} = A \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \quad (12a)$$

$$\dot{\alpha}_{ij}^{(2)} = b(C \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} - \alpha_{ij}^{(2)} \bar{\varepsilon}^{vp}) \quad (12b)$$

ここで、 $A$ 、 $b$ 、 $C$  は材料定数である。式(14)で表される Armstrong-Frederick の非線形移動硬化則は、右辺第 1 項のひずみ硬化項と第 2 項の回復項からなる。

## 2. 単軸応力下の粘塑性構成式と材料定数の同定

相当応力と相当ひずみ速度の定義によって、計算結果が異なる。まず、単軸引張りと圧縮での計算結果を比較する。

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{11}, \text{ その他の } \sigma_{ij} = 0 \\ \varepsilon_{11}^{vp}, \varepsilon_{22}^{vp} = \varepsilon_{33}^{vp}, \text{ その他の } \varepsilon_{ij}^{vp} = 0 \end{array} \right\} \quad (13)$$

なので、式(9)に対応する式(7)ならびに式(12)は次のように記述できる。

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_{11}^{vp} = \dot{\varepsilon}^{vp} \left[ \operatorname{sgn}(\sigma_{11} - \alpha_{11} + \alpha_{22}) + \frac{\beta}{1-\beta} \right] \\ \dot{\varepsilon}_{22}^{vp} = \dot{\varepsilon}_{33}^{vp} = \dot{\varepsilon}^{vp} \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\sigma_{11} - \alpha_{11} + \alpha_{22}) + \frac{\beta}{1-\beta} \right] \\ \bar{\varepsilon}^{vp} = n \left[ \exp \left( \frac{|\sigma_{11} - \alpha_{11} + \alpha_{22}|}{K} \right) - 1 \right] \end{array} \right\} \quad (14a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_{11}^{vp} = \frac{\dot{\varepsilon}^{vp}}{\sqrt{1-2\beta+3\beta^2}} [(1-\beta)\operatorname{sgn}(\sigma_{11} - \alpha_{11} + \alpha_{22}) + \beta] \\ \dot{\varepsilon}_{22}^{vp} = \dot{\varepsilon}_{33}^{vp} = \frac{\dot{\varepsilon}^{vp}}{\sqrt{1-2\beta+3\beta^2}} \left[ -\frac{1}{2}(1-\beta)\operatorname{sgn}(\sigma_{11} - \alpha_{11} + \alpha_{22}) + \beta \right] \\ \bar{\varepsilon}^{vp} = n \left[ \exp \left( \frac{1-\beta}{\sqrt{1-2\beta+3\beta^2}} \frac{|\sigma_{11} - \alpha_{11} + \alpha_{22}|}{K} \right) - 1 \right] \end{array} \right\} \quad (14b)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_{11}^{vp} = \frac{\dot{\varepsilon}^{vp}}{\sqrt{1-2\beta+3\beta^2}} [(1-\beta)\operatorname{sgn}(\sigma_{11} - \alpha_{11} + \alpha_{22}) + \beta] \\ \dot{\varepsilon}_{22}^{vp} = \dot{\varepsilon}_{33}^{vp} = \frac{\dot{\varepsilon}^{vp}}{\sqrt{1-2\beta+3\beta^2}} \left[ -\frac{1}{2}(1-\beta)\operatorname{sgn}(\sigma_{11} - \alpha_{11} + \alpha_{22}) + \beta \right] \\ \bar{\varepsilon}^{vp} = n \left[ \exp \left( \frac{(1-\beta)|\sigma_{11} - \alpha_{11} + \alpha_{22}| + \beta\sigma_{11}}{K} \right) - 1 \right] \end{array} \right\} \quad (14c)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\alpha}_{11}^{(1)} = A \dot{\varepsilon}_{11}^{vp} \\ \dot{\alpha}_{22}^{(1)} = \dot{\alpha}_{33}^{(1)} = A \dot{\varepsilon}_{22}^{vp} \\ \dot{\alpha}_{11}^{(2)} = b(C \dot{\varepsilon}_{11}^{vp} - \alpha_{11}^{(2)} \bar{\varepsilon}^{vp}) \\ \dot{\alpha}_{22}^{(2)} = \dot{\alpha}_{33}^{(2)} = b(C \dot{\varepsilon}_{22}^{vp} - \alpha_{22}^{(2)} \bar{\varepsilon}^{vp}) \end{array} \right\} \quad (15)$$

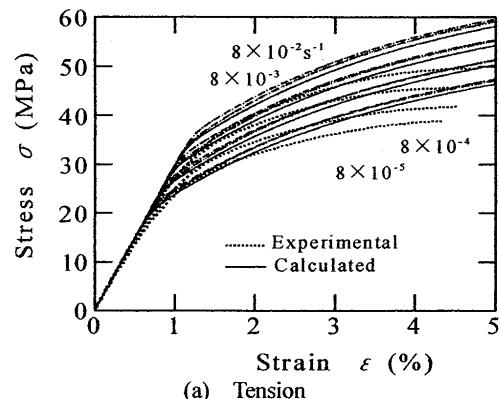
Fig.1 は、実験結果と計算結果の比較を示す。図中の実線、一点鎖線、二点鎖線、点線は、それぞれ式(14a)、(14b)、(14c)による計算結果ならびに実験結果を示す。なお、計算には次の材料

定数を用いた。

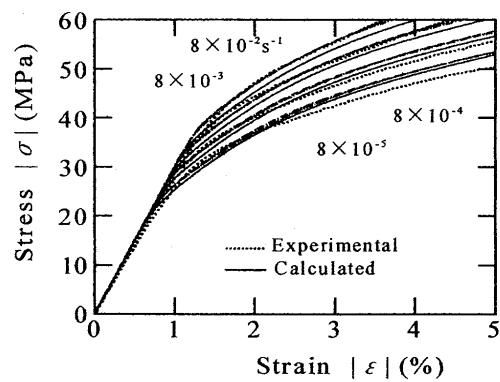
$$\left. \begin{array}{l} E = 3.0 \text{ GPa}, n = 8.0 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1}, K = 1.9 \text{ MPa} \\ A = 200 \text{ MPa}, b = 100, C = 12.0 \text{ MPa} \end{array} \right\} \quad (16)$$

なお、式(14a)と式(14b)では  $\beta = 0.2$ 、式(14c)では  $\beta = 0.05$  を用いた。

図のように、いずれの相当応力と相当ひずみ速度の定義を用いてもほぼ同様な計算結果を得る。このことは、クリープ曲線および応力緩和曲線の予測においても同じであった。Fig.1 の単軸での引張りと圧縮における非弾性体積ひずみの計算結果を Fig.2 に示す。式(14a)と式(14b)は、ほぼ同じ値を予測した。一方、式(14c)はそれとは小さな値を予測した。しかし、従来測定されている結果に比べて、著しく大きい。このように、粘塑性ポテンシャルに応力の第 1 不変量を追加する手法では、非弾性体積ひずみを過大に見積もることがわかる。損傷力学を適用する必要がある。



(a) Tension



(b) Compression

Fig.1 Stress-strain curves of PP at various strain rate.

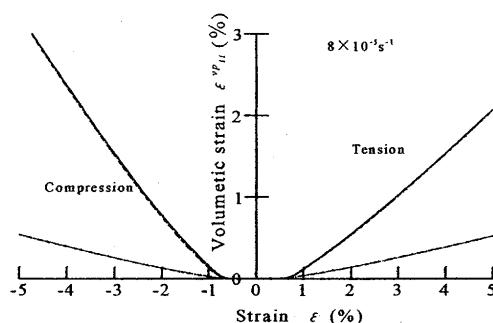


Fig.2 Inelastic volumetric strain at uniaxial stress.

結論および参考文献：省略