

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年 4 月 29 日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008 ～ 2009

課題番号：20740222

研究課題名（和文） 絶対温度 < 0 となる点渦系で見られる構造形成の理解

研究課題名（英文） Understanding of a mechanism of a structure formation in two-dimensional point vortex system at negative temperature

研究代表者

八柳 祐一（YATSUYANAGI YUICHI）

静岡大学・教育学部・准教授

研究者番号：30287990

研究成果の概要（和文）：

2次元点渦系の動力学的特徴を、温度をパラメタとして理解する研究である。本研究では、(1) Montgomery らが提唱した負温度点渦系の平衡分布解に関する検討、(2) 渦結晶などにみられる構造形成と緩和過程のメカニズムを特徴づけるパラメタに関する検討、の2点について集中的な検討を行った。(1) では、離散系において Montgomery らの予想が成り立つことが確認できた。また、(2) では、新たに、離散性に起因する拡散効果により、本来保存するはずの量が保存しなくなる可能性を発見し、現在、その定量的評価を進めている。

研究成果の概要（英文）：

A motivation of this work is to understand a dynamics of the two-dimensional point vortex system characterized by statistically-defined temperature. There are two topics to be focused: (1) to verify a validity of an equilibrium solution of the discrete point vortex system presented by Montgomery et al. that has been only checked for the continuous Euler system, (2) to determine parameters characterizing a structure formation that can be seen as vortex crystals, and decay processes. In topic (1), we have confirmed the validity of Montgomery's conjecture. In topic (2), we have found the conserved quantity does not conserve due to a diffusion effect arising from a discrete distribution of the vorticity. Now, we are trying to understand the effect quantitatively.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
2008 年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
年度			
総 計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎

キーワード：流体物理，渦構造形成，

1. 研究開始当初の背景

軸方向に強磁場をかけた円筒真空容器内に電子を閉じ込めると、磁場に垂直な平面内での電子の2次元運動方程式は、2次元非圧縮性流体の運動を記述するオイラー方程式と一致し、渦度は電子密度、流れ関数は静電ポテンシャルに比例する [1]。京都大学際本研究室では、この性質を利用し、電場と磁場により流れを高度に制御した非中性プラズマにより2次元渦実験を行っており、間歇的に数を減らしながら緩和し対称性の高い配位が準定常的な時間に渡り維持する現象が広く観察されている。図1に非中性プラズマ実験で観測された渦結晶の代表的配位を示す。

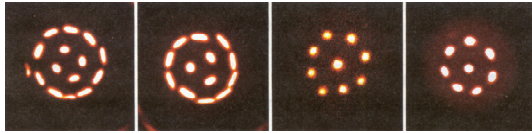


図1 渦結晶

この実験では、渦結晶形成 [2]、渦の結合・結晶化に際した背景渦の重要な寄与 [3]、及び統計的・定量的検討 [4] などの成果が残されている。

結晶化した渦は、塊の個数が多い方から少ない方へ、徐々にモード数を減らしながら最終的には、一山分布を形成する。これらの構造形成は、短→長スケールへの遷移、またはエネルギー輸送と捉えることができ、よく知られているように、2次元系に特徴的な振る舞いである。

一方、Onsager は、台風などの巨大渦形成メカニズムを説明するために、「負温度」と呼ばれる概念を提唱した [5]。壁により閉じ込められた点渦系の相空間体積は有限となることから、系のエネルギー $E \rightarrow \infty$ の極限で状態数 $W \rightarrow 0$ となること、あるエネルギー E_0 において状態数 W は極大となることが導かれる。よって、 $E > E_0$ となる高エネルギー側では、逆温度 $\beta = d(\log W)/dE < 0$ となり、統計力学的に定義される系の絶対温度が負となる状態が現れうることを指摘した。ただし、エントロピー $S = k_B \log W$ の関係を用いた。

温度が負となる状態は高エネルギー側に現れ、同符号の点渦同士が凝集し塊を作る傾向がある。図2は、長時間に渡る時間発展によ

り得た緩和状態での点渦群の分布を表す。

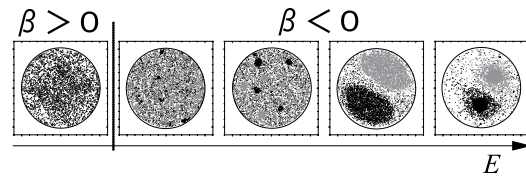


図2 平衡分布

対象とする系はエネルギー保存系なので、系のエネルギーは点渦群の初期分布でコントロールしている。左端は温度が正の場合の平衡分布である。正と負の点渦は円筒境界内にほぼ一様に分布している。一方、系の温度が負となるようにエネルギーを上げると、分布の中に正は正、負は負で凝集した領域ができてはじめて、さらにエネルギーを上げるとだんだん凝集物がはっきり見分けられるようになり、最終的に正で1個、負で1個の塊を作った状態が安定となる。これは、Navier-Stokes 方程式の定常分布としても得られており、エネルギーが高い系に遍在する平衡分布として知られるものである。つまり、渦の構造形成には、負温度性が大きく関わっていると予想することができる。そこで、負温度性と構造形成の関係を明らかにすべく、研究をスタートするに至った。

- [1] 際本泰士, 日本物理学会誌, **56**, 253, (2001).
- [2] A. Sanpei, Y. Kiwamoto, K. Ito, Y. Soga, Phys. Rev. E, **68**, 016404 (2003).
- [3] Y. Soga, Y. Kiwamoto, A. Sanpei and J. Aoki, Phys. Plasmas, **10**, 3922 (2003).
- [4] Y. Kiwamoto, N. Hashizume, Y. Soga, J. Aoki, and Y. Kawai, Phys. Rev. Lett. **99**, 115002 (2007)
- [5] L. Onsager, Nuovo Cimento Suppl. **6**, 279 (1949).

2. 研究の目的

Onsager は、より大規模な構造を安定状態とする渦現象の研究過程で、境界内に閉じ込められた点渦系では、統計力学的に定義される系の絶対温度が負となる場合が現れうることを予言し、温度が負であれば、よりエネルギーが高い凝集状態が実現しやすいと指摘してい

る [5]。渦の構造形成は、木星の大赤斑や地球高層大気でも見られるなど普遍的な現象である。本研究では、このような渦の構造形成について、渦結晶をキーワードとし、絶対温度をパラメタとしてその力学過程を理解することを目標とする。

「1. 研究開始当初の背景」で述べたように、負温度と構造形成の関連は高いと言える。しかし、「負温度」は統計力学で定義される絶対温度が負となる状態であり、熱力学的に定義される温度が負になる訳ではない。現実世界では(熱力学的)温度が負という状態は現れ得ないはずである。そこで、本研究では、統計力学上、形式的に導入された負温度が、どのような形となって、現実の渦運動、特に構造形成に現れているか、様々な面から検討を進めた。

取り組んだ課題は、次の2点である。

- (1) Montgomery らが提唱した負温度点渦系の平衡分布解に関する検討
- (2) 渦結晶などにみられる構造形成と緩和過程のメカニズムを特徴づけるパラメタに関する検討

3. 研究の方法

課題 (1) について

Montgomery らは、粒子数、エネルギー、慣性モーメントが保存するという拘束条件の下でエントロピーが最大となる条件を求め、それが最も現れやすい分布とした。正負の点渦についてそれぞれ、以下の式が成り立つ。

$$\ln N_i^+ + \alpha^+ - \frac{\beta^+}{2} \Gamma_0 \psi(\mathbf{r}_i) = 0 \quad (1)$$

$$\ln N_i^- + \alpha^- - \frac{\beta^-}{2} \Gamma_0 \psi(\mathbf{r}_i) = 0 \quad (2)$$

ここで、 N_i^+ 、 N_i^- は i 番目のセルの正及び負の点渦数、 α^+ 、 α^- 、 β^+ 、 β^- はラグランジュの未定乗数で、特に β^+ 、 β^- は逆温度と一致する。

上記予想に対する連続系での検討結果はいくつか存在する [6-8] が、検討するためには、離散系である点渦系で検証するのが本質的なので、シミュレーションで得た平衡分布に対して、(1)、(2) 式がどの程度成り立つのか、検討を行った。

円筒境界系で検証するためには、円筒内をメッシュに区切り、各メッシュに属する点渦

の個数 (= 循環) から各メッシュ上での流れ関数の値を計算し、sinh-Poisson 方程式が満たされているか否かを検証する。例えば円筒を 100×100 の正方メッシュで分割すると、今までの結果では粒子数が 7×10^3 程度のため、円筒内に一様に点渦が分布しているとすると、1 メッシュあたりに割り振られる平均点渦数は 1 個となる。幸い、負温度の場合には、点渦は凝集するので点渦群が占有する面積は円筒内の $1/3$ 程度となり、凝集している領域では 3 個程度となる。しかし、1 メッシュあたり 3 個の点渦しかない状態で上記の検証をすると、精度上問題がでることが確認できた。上記問題をクリアするために、本研究では最低でも 1 メッシュあたり 10 個を目指し、 4×10^4 個程度の平衡状態分布に対して検討を行った。これは、MDGRAPE-3 の計算速度があって初めて実現できるシミュレーション研究である。

課題 (2) について

対称的な配位の渦塊が準安定的に存在すること、および時間間歇的に数を減らしながら緩和していく過程について、その過程を特徴付けるパラメタは何なのか検討することに集中し、研究を進めた。

2 次元点渦系には無限個の Casimir 不変量があることが知られている [9]。エントロピーやこれら不変量が構造形成に関連しているとの示唆を与える研究結果 [10, 11] があるので、負温度点渦系ではどうなのかを調べるため、各種温度領域に於ける Casimir 不変量を測定した。

- [6] W. H. Matthaeus, W. T. Stribling, D. Martinez, S. Oughton and D. Montgomery, *Physica D* **51**, 531 (1991).
- [7] D. Montgomery, W. H. Matthaeus, W. T. Stribling, D. Martinez and S. Oughton, *Phys. Fluids A* **4**, 3 (1992).
- [8] S. Li and D. Montgomery, *Phys. Lett. A* **218**, 281-291 (1996).
- [9] 阿部純義, プラズマ核融合学会誌, **78**, 36 (2002).
- [10] D. Z. Jin and Daniel H. E. Dubin, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 4434 (1998).

[11] Y. Kiwamoto et al., Phys. Rev. Lett., **99**, 115002 (2007).

4. 研究成果

課題 (1) について

MDGRAPE-3 にて時間漸近的に得た以下の二つの分布を用い、最小二乗法により (1), (2) 式に現れるパラメタ α^+ , α^- , β^+ , β^- を決定する。

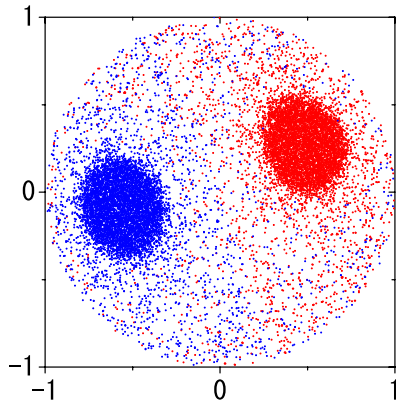


図3 平衡分布 $E=2.87 \times 10^4$

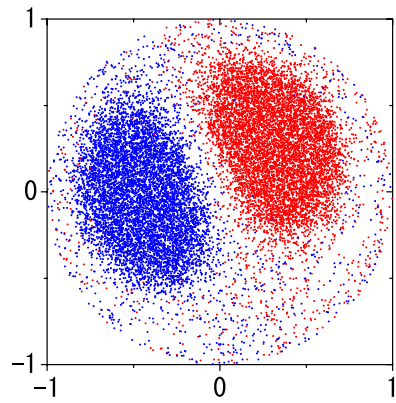
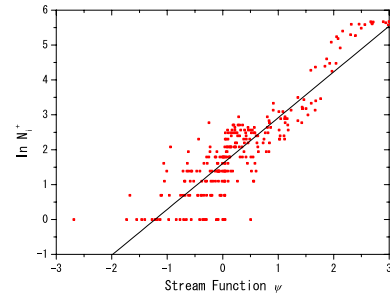


図4 平衡分布 $E=1.99 \times 10^4$

結果を図5, 6に示す。円筒内を小さなセルに区切り、各セルでの流れ関数の値を横軸、そのセル内の点渦の個数の対数を縦軸にプロットした。

(a)



(b)

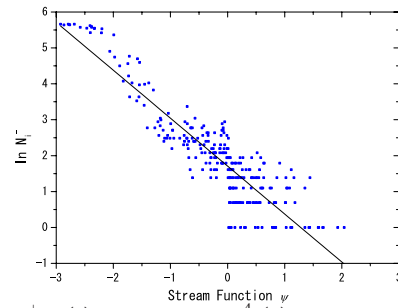
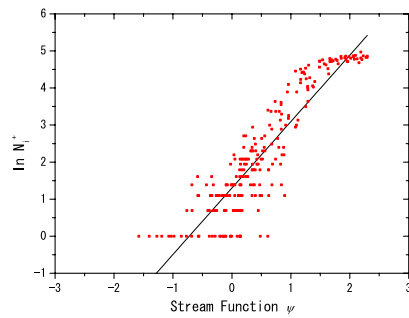


図5 β^+ 。(a) $E=2.87 \times 10^4$ (b) $E=1.99 \times 10^4$

(a)



(b)

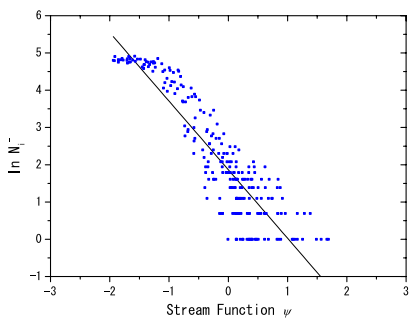


図6 β^- 。(a) $E=2.87 \times 10^4$ (b) $E=1.99 \times 10^4$

これらの図から、エネルギーの変化に対して β が変化する様子が読み取れ、確かに相関はあることがわかる。次に、傾向を知るために、以下のことを調べた。

時間発展シミュレーションの初期から最後まででの分布から求めた β^+ , β^- をプロットする

と、図7のようになり、ある時刻以降は β は変化していないことがわかる。これは、時間漸近的な平衡解が本当の意味での平衡解に達していることを表すと考える。

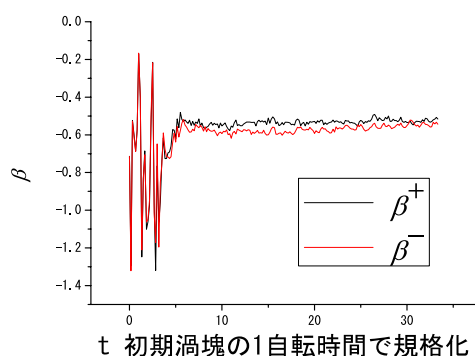


図7 β^+ と β^- の時間発展

次に粒子数をパラメタにして、(粒子数) × (循環) が一定、すなわち渦度が一定となるようなシミュレーションを多数行い、 β がどのような影響を受けるか調べた。結果を図8に示す。

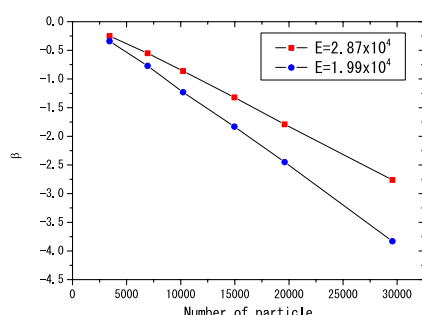


図8 エネルギーを一定に保って粒子数を変化させた場合の β の変化

理想気体ならば、 $T \propto E/N$ なので、 β は N/E に比例するはずである。すなわち、 E = 一定の条件下で N に比例するはずである。図8では一見比例しているように見えるが、実は粒子数が多い方で線形関係から徐々に外れていくことが確認できた。

これは、点渦系は点渦同士、強い相互作用によって結ばれており、理想気体のような希薄な条件は成り立たないことが確認できた。

課題 (2) について

粒子数をパラメタとして、渦度を一定に保つシミュレーション結果を多数比較したとこ

ろ、かならずしも同じような時間経過をしない場合があることがわかった。見た目には、粒子性に由来する拡散が働いているような印象である。もちろん、数値積分の精度も影響しているだろうが、さまざまな保存量をもとにした渦結晶状態の定量的評価を行うにあたり、この問題をまず解決するべきであると考え、この問題に取り組むことにした。

2次元非粘性非圧縮の流体を記述する Euler 方程式から得られる渦度方程式

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_z = 0 \quad (3)$$

には、点渦解

$$\omega_z(\mathbf{r}, t) = \sum_i \Omega_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (4)$$

が存在する。我々は、この粒子性に由来する拡散効果があるのではないかと考えた。これを「ミクロな渦度」と定義する。同様にミクロな流れ関数、ミクロな速度場は次のように定義される。

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \Omega_i G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = -\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \quad (6)$$

一方、マクロな量を次のように導入する。

$$\begin{aligned} \text{ミクロな量} &= \langle \text{ミクロな量} \rangle + \text{ゆらぎ} \\ \langle \text{ミクロな量} \rangle &\equiv \text{マクロな量} \end{aligned}$$

我々は、このゆらぎに起因する散逸効果を定量的に評価する研究を遂行中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Yuichi Yatsuyanagi: "Statistical Mechanical Understanding of Two-Dimensional Point Vortex System at Negative Absolute Temperature", J. Plasma Fusion Res. SERIES, Vol. 8 (2009) 931-935. (査読有り)
- ② 八柳祐一: 「絶対温度 <0 となる点渦系の平衡分布の特性」, 京都大学数理解析研究所講究録, **1642** (2009) 87-100. (査読無し)
- ③ 八柳祐一, 佐野光貞, 戎崎俊一: 「絶対温度 <0 にある2次元点渦系の特性の力学的理解」 京都大学数理解析研究所講究録, **1608** (2008) 67-77. (査読無し)

- ④ Yuichi Yatsuyanagi: "Massive point-vortex simulation using special-purpose computer, MDGRAPE-3", RIMS Kokyuroku, **1606** (2008) 1-17. (査読無し)

〔学会発表〕(計 7 件)

- ① 八柳祐一, 羽鳥尹承: 「負温度点渦系の平衡分布と sinh-Poisson 方程式」, 日本物理学会 2009 年秋季大会, 熊本大学黒髪キャンパス, 2009 年 9 月 28 日
- ② 八柳祐一, 羽鳥尹承: 「sinh-Poisson 方程式で記述される負温度平衡分布の検討」, 日本流体力学会 年会 2009, 東洋大学 白山キャンパス, 2009 年 9 月 4 日
- ③ 八柳祐一: 「分子動力学専用計算機 MDGRAPE-3 を用いた負温度点渦系の大規模シミュレーション」, 第 58 回理論応用力学講演会, 日本学術会議, 2009 年 6 月 11 日
- ④ 八柳祐一: 「絶対温度 < 0 となる guiding-center プラズマで見られるエネルギースペクトルの温度依存性」, 第 25 回プラズマ・核融合学会年会, 栃木県総合文化センター, 2008 年 12 月 2 日
- ⑤ 八柳祐一: 「絶対温度 < 0 となる点渦系で見られるエネルギースペクトルの温度依存性」, 日本物理学会 2008 年秋季大会, 岩手大学上田キャンパス, 2008 年 9 月 20 日
- ⑥ Yuichi Yatsuyanagi: "Statistical mechanical understanding of two-dimensional point vortex system at negative absolute temperature", International Congress on Plasma Physics 2008, Fukuoka, Japan, Sep. 9th (2008).
- ⑦ 八柳祐一: 「絶対温度 < 0 となる点渦系で見られるエネルギースペクトルの温度依存性」, 日本流体力学会 年会 2008, 神戸大学 六高台キャンパス, 2008 年 9 月 6 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

- 出願状況 (計 0 件)
- 取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~eyyatsu>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

八柳 祐一 (YATSUYANAGI YUICHI)

静岡大学教育学部・准教授

研究者番号: 30287990