

論 説

算数・数学教育の目標としての
「算数・数学の力」の構造化に関する研究*

長崎栄三**, 国宗 進***, 太田伸也****, 五十嵐一博*****,
滝井 章*****, 近藤 裕*****, 熊倉啓之***** ほかに17名(別記)

要 約

算数・数学教育における新たな目標として「算数・数学の力」を考えた。算数・数学の力とは、算数・数学のあらゆる活動に関わるはたらきで、大きく「算数・数学を生み出す力」、「算数・数学を使う力」、「算数・数学で表す力」、「算数・数学で考え合う力」の4つの力で構成される。初めに、我が国の算数・数学科の教育課程の史的分析、算数・数学のカリキュラムの国際比較、算数・数学教科書の研究、数学的な考え方・問題解決の史的分析、社会の算数・数学教育に関する意識の分析を行った。その上で、算数・数学教育の目的・目標に算数・数学の力を位置付けた。ここでは、算数・数学教育の目標を概念理解と能力習得とで均衡を図った。そして、算数・数学の力を、算数・数学的内容との一体化、算数的活動・数学的活動の重視などの原則の下で構造化し、その質の高まりを具体化するための算数・数学の力の水準の重要性を指摘した。

キーワード：算数・数学の力、目的、目標、算数的活動、数学的活動

1. 研究の背景と目的

算数・数学教育における目標は、算数・数学教育の目的を見据えつつ、社会や時代が変わるとともに変わる。社会や時代の変化が、次代を生きる子どもたちが身に付けるべきものの変化を促すからである。とりわけ、2000年代に入ってから学力低下論は、算数・数学教育の目標としての学力とは何かを改めて問い直している。算数・数学教育を通して、単に計算ができる、問題が解けるといふことではなく、総体として、子どもは何を身に付けて社会に出ているのか、どのような能力を身に付けているのかが問われているのである。

ところで、私たちはこれまでに算数・数学教育の目標について次のような提案をしてきた。算数・数学科における基礎学力としての「行動類型、数学内容、数学過程による3次元の枠組み」(長崎ほか, 1992)、学習内容として数学の発展と応用の両方に目を向けた「数学的探究活動」(国宗ほか,

1997)、社会・文化を重視した「算数・数学と社会をつなげる力」(長崎ほか, 2004)。これらは、現在から見ると、数学的過程や数学的活動を重視し、算数・数学の力を指向しつつも、算数・数学教育の目標としては抽象的であったり、また、具体的ではあっても目標全体を俯瞰できるものにはなっていないかあったりした。

その後、私たちは、平成14年度から平成18年度にかけて、算数・数学の目標・内容についての研究を行ってきた¹⁾。ここでは数学的活動・数学的方法の側面を算数・数学教育の教育目標として「算数・数学の力」に着目して研究を進め、それを算数の授業で具体化する実践研究も進めた。

また、平成15年度から平成18年度にかけては、「算数・数学の力」を育成する算数・数学教科書の記述のあり方についても開発研究を進めた²⁾。

そこで、算数・数学の力についての私たちの研究の成果は、これらの算数・数学の目標・内容に

*平成19年11月26日受付、平成20年2月6日決定 **国立教育政策研究所 ***静岡大学 ****弘前大学 *****千葉市教育センター
*****東京都世田谷区立喜多見小学校 *****群馬県玉村町立南中学校 *****静岡大学

ついでの研究と教科書の開発研究とで別々に発表されてきた。

本稿では、これら両者の研究成果を総合し、算数・数学の力についての教育目標としての研究の全体像をまとめ、今後の課題を明らかにする。

2. 研究の方法

算数・数学の力についての本研究の過程では、それぞれの研究目的に合わせて、文献研究、歴史的研究、比較研究、調査研究、授業研究など、多様な研究方法が用いられた。研究メンバーは、大学等の算数・数学教育学の研究者、小中高校等の算数・数学教育関係者等約30名である。主な研究方法は次の通りである。

- (1) 我が国の算数・数学教育の全般的な状況を明らかにするために、我が国の教育課程や学力調査の結果を歴史的に分析する。
- (2) 算数・数学の力の先行研究とその特徴を明らかにするために、我が国を中心として数学的な考え方・問題解決などの研究の成果を歴史的に分析する。
- (3) 最近の算数・数学教育の国際的な動向を明らかにするために、英米などの算数・数学のカリキュラムやIEAの国際数学・理科教育動向調査(TIMSS)、OECDの生徒の学習到達度調査(PISA)、APECの国際比較結果などを教育目標や教育内容などについて比較教育的に分析する。
- (4) 我が国の社会が期待する算数・数学教育の目標・内容を実証的に明らかにするために、算数・数学教育関係者、保護者、研究者などを対象に調査を行いその結果を分析する。
- (5) 算数・数学の力の視点から算数・数学教科書を記述するための工夫を明らかにするために、我が国の算数・数学教科書の記述を分析しそれに基づいて教科書の記述例を開発する。
- (6) 子どもたちの算数・数学の力を実証的に明らかにするために、算数・数学の力の育成を目指した実験授業を計画し授業を行ないその結果を分析する。
- (7) 算数・数学教育に算数・数学の力を位置付けるために、算数・数学教育の目的・目標のあり方について文献を分析する。

3. 研究の内容

算数・数学の力の研究の全体像を明らかにするために、ここでは、その基盤的な研究と構造化の研究に分けてまとめる。なお、これらの研究の過程では多くの参考文献が用いられたが、本稿では紙幅の関係でその一部しか挙げられないことをお断りしておく。

(1) 算数・数学の力の基盤的な研究

① 我が国の算数・数学科教育課程の史的分析

我が国の戦後の算数・数学科の学習指導要領の目標や内容について、数学的な考え方、算数的活動・数学的活動、問題解決能力、数学力などを算数・数学の力の育成という観点から分析した。

我が国では、昭和30年告示の『高等学校学習指導要領数学科編』において数学的な考え方が「中心概念」として顕在化した。そこでは、数学的な考え方は、数学が構成されていくときの中心となるものの考え方とされていた。その後、昭和33年告示の小中学校の目標でも「数学的な考え方」が明記された。昭和43年から45年にかけて告示された小中高校の学習指導要領では、総括目標では「事象を数学的にとらえ」、「論理的」、「統合的、発展的に考察」などが謳われ、数学的な考え方は具体目標に入った。昭和50年代には、表面的には数学的な考え方に代わり、「表現・処理」、「活用」が入れられた。平成元年告示の小中高校の目標では、「数理的処理のよさ」、「数学的な見方や考え方のよさ」となり、平成10・11年告示では、さらに「算数的活動」、「数学的活動」が加わった。

我が国の算数・数学科の目標においては、全体としては、数学を構成していくときの考え方としての数学的な考え方という視点に立っていて、数学的問題解決能力やコミュニケーション能力の育成という実用的な視点は希薄である。しかし、昭和50年代に「活用」が強調されたときには「考えること」が表面的に見えなくなったことは示唆的である。「数学を生み出す」と「数学を使う」ことが対立的に捉えられているのではなかろうか。なお、算数・数学の力の育成という観点からすると、内容においては、計算力などの少数の力は見出せるがその他の力についての言及は少なく、全体的に算数・数学の概念理解が圧倒的に多い。

② 算数・数学のカリキュラムの国際比較

IEAの国際数学・理科教育動向調査(TIMSS), OECDの生徒の学習到達度調査(PISA), APECの国際比較結果, さらに, 諸外国, 特に, 英米のカリキュラムを, 算数・数学の力の育成という観点から分析した(国宗, 2007a; 2007b).

TIMSSは, 算数・数学の枠組みが内容領域と認知的領域の組合せで考えられている。PISAでは, 数学的リテラシーが状況・文脈, 数学的内容(包括的アイディア), 数学的過程(能力クラスター)から考えられており, さらに, 数学的過程の数学化では, 思考と推論, 論証, コミュニケーション, モデル化, 問題設定と問題解決, 表現, 演算, 道具の8つの数学的能力が関わっているとしている。APECのカリキュラムの国際比較では, 概念理解と能力習得という2つの面からカリキュラムが比較され, 日本を含むアジア圏では概念理解が強調されていることが報告されている。アメリカのNCTMが2000年に公表した『学校数学のための原則と基準』では, 内容基準とともに過程基準が挙げられ, 後者では, 問題解決, 推論と証明, コミュニケーション, つながり, 表現の5つの基準が挙げられている。イギリスの現在の『国家カリキュラム』(1999年版)では, 「数学を利用し応用すること」という枠が内容の領域とは別に設定され, そこでは, 問題解決, 推論, コミュニケーションが扱われている。

国際的には, 算数・数学のカリキュラムにおいて, 数学的内容とともに数学的能力をも正当に位置付けようとしているということができる。そして, 数学的能力としては, 思考や推論, 論証などという「数学を生み出す」側面, 問題解決という「数学を使う」側面, 表現及びコミュニケーションという「数学で表現し伝え考え合う」側面が取り上げられている。

なお, 英米においては, これらの教育課程が算数・数学の学力低下と結び付けて論じられた。その原因は, 算数・数学の内容と能力が分離して, 能力だけを孤立的に扱ったことに問題があったと考えられる。

③ 算数教科書・数学教科書の研究

我が国の小中学校の算数・数学の教科書を算数・

数学の力の育成という観点から分析しさらにそれを育成するための記述例の開発を行なった。なお, 分析対象としたのは, 小中学校の算数・数学の教科書を発行している教科書会社6社すべての教科書・教師用指導書である(藤村, 2006, 2007)。

小学校算数教科書には, コミュニケーションをする力については教科書によってその扱いに濃淡があり, また, 筋道立てて考える力については推論の根拠に目を向けさせるような記述があまり見られない。算数教科書の教師用指導書では, 自ら考える力を育てることに関する記述は多いが, 算数を使って考える力を育てることに関する記述は授業の展開部分については少ない。中学校数学教科書には, 生徒の多様な考えを期待する記述は少なく, 生徒自らが根拠を明確にしたりいろいろな考えを交流するといった展開や身の回りの事象を数学化する学習場面はあまり見られない。数学教科書の教師用指導書では, 自ら考える力に関する記述は, コミュニケーションをする力や数学を使う力に比べて多い。

このような分析結果をもとに, 自ら考える力, コミュニケーションをする力, 算数・数学を使う力などを育成する記述例を開発し, それらの力を育成するための工夫を検証した。

④ 社会の算数・数学教育に関する意識の分析

2004年に全国から無作為に抽出した数学者, 小中高校の教師, 指導主事, 数学教育研究者, 保護者, 専門的研究者を対象に, 算数・数学で重要な内容, 能力・技能などについて尋ねた。回答は合計で約4千7百名から得られた(長崎, 2005)。

すべての対象集団の平均肯定率が80%以上の項目は次の9項目であった。計算をすること, 算数・数学の式や表やグラフや図などからその意味をよみとること, 数や図形をうまく使うこと, 数や図形についての現実的な感覚を持つこと, 実験や観察で得られたデータに基づいて予測すること, 算数・数学の式や表やグラフや図などをかくこと, 算数・数学の式や表やグラフや図などを使って自分の考えを伝えること, およその数やおよその形で考えること, コンピュータを使うこと。

社会では, 算数・数学の多様な能力や技能のうち, 計算をする, 意味をよみとる, 使う, 現実的

な感覚を持つ, データに基づいて予測する, かく, 伝える, およその形で考える, コンピュータを使うという算数・数学の実用的目的に大きくかかわる能力や技能の育成が期待されている。

⑤ 数学的な考え方・問題解決の史的分析

我が国の算数・数学教育論などにおける数学的な考え方, 算数的活動・数学的活動, 問題解決能力, 数学力などを算数・数学の力の育成という観点から分析した (長崎, 2007a)。

我が国の戦後の算数・数学教育における数学的な考え方の変遷を, その誕生期 (1950年代)・発展期 (1960年代~70年代前半)・成熟期 (1970年代後半~80年代前半)・精緻化期 (1980年代後半)に分けてまとめた。数学的な考え方の中心的な発想は, 算数・数学を構成していく考え方, 算数・数学を作り出していく考え方であり, それは, 事象を数学化し, その上で, 算数・数学を発展させていくというものであった。

さらに, 算数・数学教育の最近の傾向と対比すると次のことが明らかになった。問題解決, すなわち, 算数・数学を使うという側面は, 日本が追究してきた数学的な考え方の育成を目指す問題解決とは異質な面を持っていた。とりわけ, 現実問題の数学的な解決に必要な数学的モデル化や数学的モデルの修正という考え方は, 数学的な考え方の中に入っていない。さらに, コミュニケーションについては, 表現としては, 数学的な考え方に含まれるが, より積極的に多様な人々が算数・数学で考え合うということは数学的な考え方には含まれていない。

⑥ 基盤的な研究から学ぶこと

これまで述べてきたような基盤的な研究から主として次のようなことを学ぶことができる。現在の我が国の社会は, 算数・数学で実用的な能力や技能が扱われることを期待し, また, 国際比較研究や英米のカリキュラムにも, 数学的能力や過程・応用が重視されている。他方, 我が国の教育課程は, 数学を構成していくときの考え方としての数学的な考え方を目標として概念理解に重点が置かれている。このような傾向は算数・数学教科書にも当然現れている。これらのことから, 算数・数学教育にとっての現代的な課題として, 概念理解

に加え, 能力習得が抽出される。

しかしながら, このような能力習得に関わるものとして, 我が国には数学的な考え方とともに, 問題解決や話し合い学習などの研究の伝統がある (例えば, 島田, 1977; 中島, 1981; 片桐, 1988; 古藤, 1992)。能力習得に関するこれらの研究を総合することで, 算数・数学の力の全体像が構成される。主な参考文献は表1の通りである。

表1 算数・数学の力の主な先行研究

- 1) 片桐重男 (1988)『数学的な考え方・態度とその指導 1,2』明治図書。
- 2) 金本良通 (1998)『数学的コミュニケーション能力の育成』明治図書。
- 3) 小関熙純・国宗進編著 (1999)『「よい授業」の創造と展開—抽象概念の形成を図る実践研究—』明治図書。
- 4) 古藤怜・新潟算数教育研究会 (1992)『算数科多様な考えの生かし方まとめ方』東洋館出版社。
- 5) 島田茂編著 (1977)『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』みずうみ書房。
- 6) 竹内芳男・沢田利夫編著 (1984)『問題から問題へ—問題の発展的な扱い—』東洋館出版社。
- 7) 長崎栄三編著 (2001)『算数・数学と社会・文化のつながり』明治図書。
- 8) 中島健三 (1981)『算数・数学教育と数学的な考え方』金子書房。
- 9) 中村享史 (2002)『「書く活動」を通して数学的な考え方を育てる算数授業』東洋館出版社。
- 10) 半田進編著 (1995)『考えさせる授業 算数・数学』東京書籍。
- 11) 松原元一 (1977)『数学的見方考え方』国土社。

(2) 算数・数学の力の構造化の研究

① 算数・数学教育の目的と目標の明確化

算数・数学教育は, その目的とそれに基づく目標を設定して行なわれる。算数・数学教育は, 教育一般の目的と同様に, 個人の成長と社会の発展の両者を目的の視野において行われる。このような算数・数学教育の目的論は長い伝統を持っている (例えば, 平岡, 1979; 中原, 1995)。本研究では, 算数・数学教育に特に関係がある社会とし

て、民主主義社会、高度情報化社会、生涯学習社会について論じた(長崎, 2007b). そして、数学の特性(国宗, 2007c)と目指す社会を念頭に置いて、人間・社会・文化という3つの軸から、算数・数学教育の目的を、人間形成的目的、実用的目的、文化的目的の3つの目的の調和に求めた(長崎, 2007c; 太田, 2007a; 2007b). 人間形成的目的とは、算数・数学を通して人間が持っている能力などを育てようとするものであり、実用的目的とは、算数・数学を使うための知識や能力を育てるものであり、文化的目的とは、算数・数学のよさを知るものである。

なお、このような算数・数学教育の目的を考える上で、次の点を念頭に置いた。

- 1) 子どもが中心である。
- 2) 算数・数学の授業と互いに支えあうものである。
- 3) すべての算数・数学の学習指導で考えることができる。
- 4) 全体性を考えて調和をとる。
- 5) 普通教育の算数・数学教育の目的に共通するものである。

このような算数・数学教育の目的をもとに、算数・数学教育での具体的な目当てとしての目標について考えた。目標は、一般には、子どもたちが身に付けるものとして記述される。

私たちは、算数・数学教育の目標について、(1)の基盤的な研究で述べた現代的な課題から、算数・数学の能力習得に着目した。これまで、算数・数学教育の目標としては、概念理解や態度育成など

は強調されてきたが、能力習得はあまり強調されてこなかったからである。そして、算数・数学教育の目的に照らしつつ、算数・数学の力の構造化を図った。

② 算数・数学の力の構造

算数・数学の力は、(1)の基盤的な研究の成果をもとに、研究メンバーによる長期の討議と実践研究に基づいて構造化された(長崎ほか, 2007)。

算数・数学の力を構造化する上では、次の7つの原則を置いた。

- 1) 算数・数学教育の3つの目的にかかわる。
- 2) 算数・数学教育の認知的な目標に多面的にかかわる。
- 3) 算数・数学の内容と一体となったものである。
- 4) 数学の思想・方法・過程に見出される。
- 5) 算数・数学の学習指導過程に見出される。
- 6) 算数的活動・数学的活動によってよりよく育成される。
- 7) 子どもが学習によって身に付けられる。

算数・数学の力とは、算数・数学のあらゆる活動に関わるはたらきで、大きく「算数・数学を生み出す力」、「算数・数学を使う力」、「算数・数学で表す力」、「算数・数学で考え合う力」の4つの力で構成される。これらを詳しく説明すると、表2の通りである。なお、表2においては、算数・数学の力の小項目については、それぞれの中心となる「小中高校を通して目指す力」とそれに関わる「いずれかの段階で目指す力、関連する力」とに分けて説明してある。

表2 算数・数学の力

算数・数学を生み出す力

① 算数・数学できまりや方法などを見つける力

【小中高校を通して目指す力】 1) 分類・整理：集合の要素をある観点から同類の要素同士にまとめて、集合に成り立つきまりを見つけること。2) 帰納：いくつかの事例から一般的に成り立ちそうなきまりや方法を見つけること。3) 類比：2つの対応する集合があるときに、一方の集合に成り立つきまりが、もう一方の集合にも成り立ちそうな類似なきまりや方法を見つけること(参考：類推とは、類比的に推論すること)。

【いずれかの段階で目指す力、関連する力】 4) 一般化：集合のある範囲で成り立つきまりや方法がそれよりも広い範囲でも成り立ちそうなことを考えること。5) 特殊化：集合のある範囲で成り立つきまりや方法がそれよりも狭い範囲でも成り立ちそうなことを考えること。6) 逆：あるきまりの仮定と結論を入れ替えて、新たなきまりが成り立ちそうなことを見つけること。7) 関数的：2つの集合の間の対応の仕方に成り立つきまりや依存関係を、表やグラフなどの変化の様子や関係をもとに見つけること。8) 試行錯誤：ある問題意識をもっていろいろな場合を調べ、きまりや方法を見つけること。9) 電卓・コンピュータの利用：電卓やコンピュータの計算機能やグラフ機能や表計算機能などを使ってきまりや方法を見つけること。

② 算数・数学で前提をもとに確かめる力

【小中高校を通して目指す力】 1) 前提を明確にすること：考えるときや話し合うときにその共通な土台となる事柄やきまりなどを明らかにすること。2) 見通しを立てること：目的に応じた解決の方向を考えること。3) 根拠をもつこと：自分なりの拠り所をもって考えたり話したりすること。

【いずれかの段階で目指す力, 関連する力】 4) 演繹：新たなきまりや性質を三段論法で導くこと。5) 証明：きまりや性質が真であることを, 仮定から演繹的に結論を導くようにして示すこと。6) 背理法：ある仮定のもとで結論を否定すると矛盾が生じるということから結論が真であることを導くこと。7) 算数・数学の文をよむこと：証明や式変形などが書かれた算数・数学の文からその内容を適切によみとること。8) 公理的：ある共通に認められた約束をもとに考えていくこと。

③ 算数・数学で多様に考える力

【小中高校を通して目指す力】 1) 多様な考え方：ある問題についていろいろな方法で考えること。2) 多様な答え：ある問題についていろいろな答えを考えること。3) 多面的に考える：ある事柄や性質などをいろいろと視点を変えて考えること。

④ 算数・数学で関係づけて考える力

【小中高校を通して目指す力】 1) 既習との関連：既に学習した事柄や性質を使って未だ学習していない新たな問題や性質を考えること。2) 関数的：2つの集合の間の対応の仕方に成り立つきまりを, 表やグラフなどの変化の様子や関係をもとに見つけること。3) 考え方の関連：複数の考え方の間の相違点を明らかにしてそれらの考え方の相互関係を考えること。4) 変換の考え：ある集合での問題をより解決しやすくするために他の集合に対応させて考えること。

【いずれかの段階で目指す力, 関連する力】 5) 単位の考え：ある集合とそれに関連した集合のそれぞれで, あるひとかたまりを同一視して考えること。6) 単純化：ある事象をその本質をあまり変えないようにして条件などを少なくして簡単にして考えること。7) 発展的：ある問題や性質などを考えたらそれで終わりとせず, さらにその結果をもとに考えること。8) 統合的：2つ以上の集合で成り立つきまりなどを, ある共通な考えに基づいて, より広い集合で成り立つようにして考えること。

⑤ 算数・数学で発展的に考える力

【小中高校を通して目指す力】 1) 発展的：ある問題や性質などを考えたらそれで終わりとせず, さらにその結果をもとに考えること。2) 統合的：2つ以上の集合で成り立つきまりなどを, ある共通な考えに基づいて, より広い集合で成り立つようにして考えること。3) 問題づくり：ある問題や場面から算数・数学の問題をつくること。特に, ある問題をもとにその条件を変えたり条件と結論を逆にしたりするなどして新しい問題をつくること (同義語：作問, 問題設定)。

【いずれかの段階で目指す力, 関連する力】 4) 拡張：ある集合で成り立つきまりなどを, 条件をゆるめてさらに範囲の広い集合で成り立つように変えること。5) 体系化：ある共通の約束をもとにきまりや性質を積み重ねてそれぞれが関係しあうような全体をつくること。6) 現実事象を数学でみること：社会や自然にある現実の事象に, 算数・数学で見つけられたきまりや性質などを当てはめて考えること。7) 現実事象への応用：算数・数学で真とされたきまりや性質などをもとに, 現実の問題を解決すること。

算数・数学を使う力

① 現実の問題を算数・数学の問題に直す力

【小中高校を通して目指す力】 1) 数理化：現実の問題を算数・数学の問題として考えたり, 算数・数学の問題をその解決に都合のよいようにほかの算数・数学の問題として考えたりすること。

【いずれかの段階で目指す力, 関連する力】 2) 定式化：現実の問題をその本質をあまり変えずに, より広く当てはまるように, 最善の状況になるように, 扱いやすいようにして算数・数学の形式に直すこと。3) 抽象化：現実の問題をその本質をあまり変えずに, より広く当てはまるようにして算数・数学の問題に直すこと。4) 理想化：現実の問題をその本質をあまり変えずに, 最善の状況になるようにして算数・数学の問題に直すこと。5) 単純化：現実の問題をその本質をあまり変えずに, 扱いやすいようにして算数・数学の問題に直すこと。6) 記号化：現実や算数・数学の問題における事柄や関係を目的に照らして, 算数・数学の記号を使って表すこと。7) 形式化：現実や算数・数学の問題における事柄や関係を目的に照らして, 算数・数学の記号を使ったりして形式的に表すこと。8) 仮定を置く：現実の問題を算数・数学の問題に直す際に何らかの条件を置くこと。9) 式を立てる：現実や算数・数学の問題における事柄や関係を数式で表すこと。10) 数学的モデル化：現実の問題をその本質をあまり変えないようにして算数・数学の問題に直し, それを算数・数学で解決し, さらにその解を最初の現実の問題に照らして検証すること。

② 算数・数学のきまりに従って処理する力

【小中高校を通して目指す力】 1) 数学的処理：算数・数学の記号などで表現されたものを算数・数学のきまりに従って処理すること。2) 計算：計算のきまりに従って式変形を行うこと。

【いずれかの段階で目指す力、関連する力】 3) アルゴリズム化：算数・数学の手順を有限回のきまりでもって表すこと。4) 作図：手順に従って図形をかくこと。5) 電卓・コンピュータの利用：計算をしたり作図をしたりするなどの数学的処理のために電卓・コンピュータを使うこと。

③ 算数・数学で処理した結果を振り返る力

【小中高校を通して目指す力】 1) 振り返り：一つの考えが終わった段階で、その考え全体を見直したり、考えの各段階を確認したり、処理した結果を確認したりすること。

【いずれかの段階で目指す力、関連する力】 2) 過程の吟味：処理の過程をそれぞれの段階ごとで処理が適切であったかどうかを丁寧に調べること。3) 結果の吟味：処理した結果を最初の現実の条件に照らして丁寧に調べること。4) 過程の検証：処理の過程をそれぞれの段階ごとで処理が適切であったかどうかを詳しく調べること。5) 結果の検証：処理した結果を最初の現実の条件に照らして詳しく調べること。6) 照合：処理した結果を最初の現実の条件に照らし合わせること。

④ 算数・数学で予測・推測する力

【小中高校を通して目指す力】 1) 推測：成り立ちそうなきまりや性質などについて推し量ること。2) 予測：きまりや性質などについてその処理を行う前に予め推し量ること。

【いずれかの段階で目指す力、関連する力】 3) 内挿：式や表やグラフをもとに、その表された範囲内で未知の値について調べること。4) 外挿：式や表やグラフをもとに、その表された範囲外で未知の値について調べること。5) 電卓・コンピュータの利用：算数・数学のきまりや性質などについて電卓・コンピュータの計算機能やグラフ機能などを使って推し量ること。

⑤ 算数・数学で感覚的・概括的に判断する力

【小中高校を通して目指す力】 1) 見積もり：目的に応じておおよその数・量・形を考えること。2) 近似：目的に応じておおよその値を計算したりおおよその量を測定したりおおよその形で考えたりすること。

【いずれかの段階で目指す力、関連する力】 3) 数感覚：数の大きさや順序などについて柔軟な見方をもって、目的に応じて適切に判断できること。4) 量感覚：量の大きさについて基準量をもとに、目的に応じて適切に判断できること。5) 図形感覚：図形の形や大きさなどについて柔軟な見方をもって、目的に応じて適切に判断できること。6) 代数感覚：式変形の過程や結果などについて柔軟な見方をもって、目的に応じて適切に判断できること。

算数・数学で表す力

① 式・表・グラフ・図などで表す力

【小中高校を通して目指す力】 1) 式・表・グラフ・図などで表現：算数・数学の内容や考え方を式、表、グラフ、図などの数学的表現で表すこと（同義語：数学的モデルの作成）。2) 式・表・グラフ・図などの変形：目的に応じて、式、表、グラフ、図などの数学的表現を変形したりすること。

【いずれかの段階で目指す力、関連する力】 3) 記号化：現実や算数・数学の問題における事柄や関係を目的に照らして、算数・数学の記号を使って表すこと。4) 形式化：現実や算数・数学の問題における事柄や関係を目的に照らして、算数・数学が記号を使ったりして形式的に表すこと。5) 式での表現：事柄や関係を数式で表すこと。6) 表での表現：資料を整理した結果や関係、変化の様子を表で表すこと。7) グラフでの表現：資料を整理した結果や関係、変化の様子をグラフで表すこと。8) 図での表現：事柄や関係を図で表すこと。9) 式の変形：目的に応じて式を操作すること。10) 表の変形：目的に応じて表の数値の取り方を変えること。11) グラフの選択や軸の変換：目的に応じてグラフの種類を選んだりグラフの軸の目盛の単位を変えたりすること。12) 図の変形：目的に応じて図形の形や大きさを変えること。13) コンピュータでの表現：目的に応じてコンピュータでグラフや図を表したり変形したりすること。

② 式・表・グラフ・図などを使う力

【小中高校を通して目指す力】 1) 式・表・グラフ・図などの利用：目的に応じて、式、表、グラフ、図などの数学的表現を利用すること。

【いずれかの段階で目指す力、関連する力】 2) 式の利用：数や図形の性質などを式を使って考えること。3) 表の利用：数量の関係やその変化の様子など表を使って考えること。4) グラフの利用：数量の関係やその変化などをグラフを使って考えること。5) 図の利用：数量の関係や図形の性質などを図を使って考えること。6) コンピュータの利用：数量の関係や図形の性質などをコンピュータを使って考えること。

③ 式・表・グラフ・図などをよむ力

【小中高校を通して目指す力】 1) 式・表・グラフ・図などのよみとり：式，表，グラフ，図などの数学的表現から，算数・数学や現実における特徴や意味などをよみとること。

【いずれかの段階で目指す力，関連する力】 2) 式のよみとり：式から算数・数学や現実における特徴や意味などをよみとること。3) 表のよみとり：表から算数・数学や現実における特徴や意味などをよみとること。

4) グラフのよみとり：グラフから算数・数学や現実における特徴や意味などをよみとること。5) 図のよみとり：図から算数・数学や現実における特徴や意味などをよみとること。

算数・数学で考え合う力

① 算数・数学で説明する力

【小中高校を通して目指す力】 1) 説明：自分で考えた結果や過程を式や図などを用いたりして，口頭でわかるようにときあかすこと。

【いずれかの段階で目指す力，関連する力】 2) 結果の説明：考えた結果を口頭でわかるようにときあかすこと。

3) 過程の説明：解き方や考え方や証明などの過程を口頭でわかるようにときあかすこと。4) 言い換えによる説明：他者が説明したことを自分の言葉でもう一度言い換えて口頭でわかるようにときあかすこと。

② 算数・数学で解釈する力

【小中高校を通して目指す力】 1) 解釈：他者が式や図などを用いたりして説明したことを聞いてその意味をよみとること。

【いずれかの段階で目指す力，関連する力】 2) 結果の解釈：結果の説明を聞いてその意味をよみとること。3)

過程の解釈：過程の説明を聞いてその意味をよみとること。4) 批判的な解釈：説明に絶えず疑いをもって検討するなど批判的にその意味をよみとること。

③ 算数・数学で話し合う力

【小中高校を通して目指す力】 1) 真意の確認：お互いの考えの真意を確認すること。2) 話し合う：集団での話し合いを通して，個人や集団の考えをよりよいものにしていくこと。

【いずれかの段階で目指す力，関連する力】 3) 洗練すること：集団での話し合いを通して，個人や集団の考えを算数・数学的により価値があるものにしていくこと（同義語：練り上げ）。4) 考えの評価：集団での話し合いを通して，個人や集団の考えの算数・数学的な価値を判断すること。5) 考えの修正：集団での話し合いを通して，個人や集団の考えをより算数・数学的に価値があるものに修正していくこと。6) 批判的考察：集団での話し合いを通して，個人や集団の考えに絶えず疑いをもって検討すること。

「算数・数学を生み出す力」というのは，算数・数学の概念を理解し形成するために，算数・数学のきまりや方法を考えたり発展させたりする力である。「算数・数学を使う力」とは，算数・数学の概念を現実の世界で使うために，現実の問題を算数・数学の問題として捉えたり算数・数学で処理したり判断したりする力である。「算数・数学で表す力」とは，算数・数学で考えたり算数・数学を使ったりするために，式・表・グラフ・図などの数学的表現を扱う力である。「算数・数学で考え合う力」とは，算数・数学を集団で協同して創り上げるために，算数・数学の学習において数学的表現を用いて算数・数学の内容について集団の参加者みんなで考える力である。

なお，表2においては算数・数学の力の理解のために詳しく分析的に説明をしたが，実際の指導

においては，4つの大項目または中項目（○番号）のいくつかを対象にすれば十分であると考えている。本研究の主旨は，算数・数学の力を細分化してそれらを毎時間目標とすることにあるのではなく，算数・数学教育において概念理解と能力習得の両者に目を向けることにある。

このような算数・数学の力によって，算数・数学の学習活動が全体的に俯瞰できる。つまり，算数・数学の学習活動の個人思考場面と集団思考場面の両者に照らすと，そこにおけるほとんどあらゆる活動が算数・数学の力に関わっていることがわかる。すなわち，算数・数学の力は総合性を持っており，能力習得の全体像を俯瞰するものと言える。

③ 算数・数学の力の水準

算数・数学の力を目標として具体化するために，

それぞれの中項目(表2の○番号の項目)ごとに水準を設けることにした。これは、算数・数学の力の育成にあたってその質の高まりという点を一層具体化し、学習指導の方向性やあり方が明確になることを期待してのことである(国宗, 2007d)。

算数・数学の力の水準は、それぞれ3つの水準を設定した。まず、3つの水準のうち、質的に最も高い水準Ⅲの状態を示すのに相応しい2つの着眼点を明確にする。そして、その一方が満たされている状態を水準Ⅱとし、ごく基本的な状況を水準Ⅰとする。例えば、「式・表・グラフ・図などで表す力」の水準は、水準Ⅲ：目的に応じて、式・表・グラフ・図などで適切に表す、水準Ⅱ：自ら進んで、式・表・グラフ・図などで表す、水準Ⅰ：指示に従って、式・表・グラフ・図などで表す、とした。

水準Ⅰ、Ⅱについては、それらよりも高い水準を目指すために、それぞれの目標とともにそれぞれの学習内容に即した評価(観察の様子など)を示すこととした。なお、算数・数学の力のうち4つの大項目については、それぞれをまとめるような水準を作るのは無理があるので行わなかった。

(3) 算数・数学の力の様相

今回の研究では、小中学校を合わせて全体で10余りの実験授業が行われた。そこでは、目標とする算数・数学の力を明確にし、それを育てる授業を計画・実施をし、その授業をメンバーで観察して、授業後に検討会を持った。それらをもとに記録を作成し、さらに検討を重ねた(国宗, 2007e; 太田, 2007c)。このような授業研究を通して、算数・数学の力の様相について、次のことが明らかにされた(例えば、塩野, 2007; 望月, 2007)。

- 1) 算数・数学の力は、算数・数学的内容と一体化したものである。
- 2) 算数・数学の力は、場面に応じて複数の力が絡み合って出現する。
- 3) 算数・数学の力は、子どもの自発的な活動を促すことでより活発に使われる。
- 4) 算数・数学の力は、学習内容に応じて年少の子どもでも水準Ⅱ、Ⅲに達する。すなわち、算数・数学の力の水準は、内容と年齢によってずれがある。

これらは、今回の実験授業の観察を通して得られたものであり、今後これらをさらに明確にしていきたい。なお、現在、このような様相をもとに、算数の力の育成の方法について授業研究を通して分析しているところである(上田ほか, 2007)。

4. まとめ

本研究では、算数・数学教育の目標としての算数・数学の力の研究の全体像を示し、合わせて、算数・数学の力が能力習得という目標として総合性を持って全体を俯瞰できることを示した。ここでは、これまでの我が国の算数・数学教育の成果を継承しつつ、新たな時代へと向かって発展させることを目指してきた。新たな時代では、持続可能な地球環境を念頭に置いて、個人の自己実現と民主的な社会の実現が目的となろう。そのような時代に生きる子どもには、算数・数学の概念を理解するとともに、算数・数学の力を身に付けることが必要不可欠である。

本研究では、算数・数学の力を総合性を持った目標として掲げることの適切性を追究してきた。今後、算数・数学で、どのような算数・数学的内容で、どのように算数的活動・数学的活動を組み込み、そして、どのように算数・数学の力を育成するか、すなわち、教育課程をどのように具体化するかが最大の課題である。

(別記著者)

この算数・数学の目標・内容に関する研究には、標記メンバーの他に次の者が参加した(順不同、敬称略)。長尾篤志、吉川成夫、久保良宏、上田雅也、牛場正則、日下勝豊、塩野友美、島崎晃、島田功、榛葉伸吾、西村圭一、早川健、藤森章弘、牧野宏、松元新一郎、望月美樹、森照明。

また、教科書研究では、さらに次のメンバーが参加した(順不同、敬称略)。藤村和男(代表)、半田進、家田晴行、松田泉、浅沼健一、小俣弘子、清水壽典、村越新、安部浩一、飯嶋一博、久永靖史、山根浩孝、山口啓。

本稿は、科学研究費補助金特定領域研究「算数・数学において育成する諸能力とその系列に関する研究」(平成17・18年度：課題番号17011071)の

成果の一部である。

なお、本稿は、日本数学教育学会『数学教育論文発表会』第40回における同じ標題の発表論文を加除修正したものである。

注

1) 算数・数学の目標・内容に関する研究 (文部科学省科学研究費補助金特定領域研究「新世紀型理数科系教育の展開研究」:平成14~18年度), 研究代表者:長崎栄三 (国立教育政策研究所).

2) 算数・数学教科書の研究開発に関する研究 (文部科学省委嘱研究:平成15~18年度), 研究代表者:藤村和男 (教科書研究センター).

参考文献

上田雅也, 清水壽典, 滝井章, 塩野友美, 近藤裕, 日下勝豊, 早川健, 牧野宏 (2007) 「算数教育の目標としての「算数の力」の育成に関する研究」『第40回数学教育論文発表会論文集』 pp. 205-210.

太田伸也 (2007a) 「算数教育の目的としての実用性」『何のための算数教育か』東洋館出版社. pp. 91-102.

太田伸也 (2007b) 「算数教育の目的としての文化性」『何のための算数教育か』東洋館出版社. pp. 113-122.

太田伸也 (2007c) 「算数の力への着目が授業を変える」『算数の力』東洋館出版社. pp. 116-126.

片桐重男 (1988) 『数学的な考え方・態度とその指導 1, 2』明治図書.

国宗進 (2007a) 「諸外国における算数教育の目的・目標」『何のための算数教育か』東洋館出版社. pp. 148-160.

国宗進 (2007b) 「諸外国における算数・数学の力」『算数の力』東洋館出版社. pp. 28-39.

国宗進 (2007c) 「数学の特徴とその教育的価値」『何のための算数教育か』東洋館出版社. pp. 48-60.

国宗進 (2007d) 「算数・数学の力の水準」『算数の力』東洋館出版社. pp. 62-73.

国宗進 (2007e) 「算数の目標に応じた授業を考

える」『よい算数の授業をつくる』東洋館出版社. pp. 39-51.

国宗進・長崎栄三・重松敬一・関口靖弘・瀬沼花子・日野圭子 (1997) 「小学校算数科・中学校数学科のカリキュラム改善」『第30回 数学教育論文発表会論文集』日本数学教育学会. pp. 205-210.

古藤伶・新潟算数教育研究会 (1992) 『算数科多様な考えの生かし方まとめ方』東洋館出版社.

塩野友美 (2007) 「算数の能力の授業研究による分析」『算数・数学において育成する諸能力とその系列に関する研究』国立教育政策研究所. pp. 61-79.

島田茂編著 (1977) 『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』みずうみ書房.

長崎栄三 (代表) (2005) 『算数・数学では何をいつ教えるのか—算数・数学教育の内容とその配列に関する調査報告書—』国立教育政策研究所.

長崎栄三 (2007a) 「数学的な考え方の再考, 算数・数学の力へ」『算数の力』東洋館出版社. pp. 166-192.

長崎栄三 (2007b) 「算数教育の目的はどう考えるか」『何のための算数教育か』東洋館出版社. pp. 12-34.

長崎栄三 (2007c) 「算数教育の目的としての人間形成」『何のための算数教育か』東洋館出版社. pp. 71-80.

長崎栄三ほか (2007) 「算数・数学で育成する力の構成の過程」『算数・数学において育成する諸能力とその系列に関する研究』国立教育政策研究所. pp. 18-53.

長崎栄三・瀬沼花子・島崎晃・島田功・山田正樹・久保良宏・中島健三 (1992) 「算数・数学科における基礎学力についての3次元の枠組みによる分析」『数学教育論文発表会論文集』日本数学教育学会. 第25回. pp. 499-504.

長崎栄三・西村圭一・島田功・牧野宏・島崎晃 (2004) 「算数と社会をつなげる力に関する研究」『日本数学教育学会誌』第86巻8号. pp. 3-13.

中島健三 (1981) 『算数・数学教育と数学的な考

え方』金子書房.

中原忠男 (1995) 「何のための算数・数学教育か—算数・数学教育の目的」『日本数学教育学会誌』第82巻第7・8号. pp.104-107.

平岡忠 (1979) 「算数科の目標」『算数科教育法演習と資料』明治図書, pp.7-11.

藤村和男(代表) (2006) 『新しい時代に即した児童の学ぶ意欲や考える力などを一層高めるための小学校算数教科書の研究開発』教科書研

究センター.

藤村和男(代表) (2007) 『新しい時代に即した生徒の学ぶ意欲や考える力などを一層高めるための中学校数学教科書の研究開発』教科書研究センター.

望月美樹 (2007) 「数学の能力の「線分の垂直二等分線の作図」の授業を通じた分析」『算数・数学において育成する諸能力とその系列に関する研究』国立教育政策研究所. pp.105-122.