「算数・数学科の問題の発展的な扱いによる指導」における原題と発問について

「算数・数学科の問題の発展的な扱いによる指導」における原題と発問について

長崎栄三

Ⅰ　はじめに

算数・数学科の高次目標(1)の評価方法の確立をめざして，昭和53年度から，「算数・数学科の問題の発展的な扱いによる指導とその評価方法」の研究に，本研究所・数学教育研究室は取り組んだ。(2) 高次目標の評価方法の探究ということでは，この研究は，それ以前に数年間取り組んだ「オープンエンド　アプローチによる指導」(3)に続くものであり，目的とするところは同じである。

現在は，「問題の発展的な扱いによる指導」に重点を置き，昭和53年度から昭和54年度にかけての２年間は，主に，実験授業とその学習成果を解析することにより，「問題の発展的な扱いによる指導」の授業形態，児童・生徒の反応などについての探究を行ってきた。

筆者は，本論においては，そのうち，特にこの指導における課題設定，課題提示などについての考察を行う。

Ⅱ　目的と方法

ふつうの算数・数学科の授業においては，与えられた問題の解答を求めることや，解法の理解などに重点が置かれ，児童・生徒は受身になりがちである。そこで，私達は，児童・生徒が問題を自分のものとして，主体的に授業に取り組むようにしたいと考える。

ところで，算数・数学科においては，児童・生徒に数学的な考え方ができるようにすることは重要な目標であり，私達は，その中でも，一般化や類推などの考えを重視したいと考える。

そこで，私達は，このねらいを達成するための１つの方策として，「児童・生徒が与えられた１つの問題から出発して，その問題の構成要素となっている部分を類似のものやより一般的なもの等に置きかえたり，その問題の逆を考えたりすること等を通して，新しい問題をつくり，自ら解決しようとするような学習活動」を児童・生徒が経験すればよいのではないかと考えた。ここでいう，「問題の発展的な扱いによる指導」とは，上述のような学習活動を中心とする指導のことをさしてい

る。
この「問題の発展的な扱いによる指導」を詳述すると次のようになる。始めに与えられた1つの問題Po（ここでは，この問題のことを原題と呼ぶことにする）を解決し〔第1段階〕，つぎに，原題Poから新しい問題P_i（$i \geqq 1$）をつくり出す〔第2段階〕，この段階で一般化や類推などの考えが働く。さらに，P_iを解決する〔第3段階〕。

筆者は，このような学習活動が，実際の指導において，どのようにすれば適切なものになるのかを，特に原題および原題から新しい問題をつくるきっかけを与える発問のしかたなどに焦点をあてて事例的に考察する。

なお，「問題の発展的な扱いによる指導」の流れについては，すでにまとめられている④ので，本論ではふれない。

私達のこのような研究は，本研究所・数学教育研究室が中心となって3つの地区一東京・山形・福岡一で共同して行われており，それと同時に，各地区で独自の課題を設定して研究を進めている。

また，それらは，昭和53・54年度の科学研究費（一般研究C）補助金の交付を受けて行われており，ここに発表するものはそれらの研究成果の一部で，しかも中間的な報告である。

Ⅲ　「問題の発展的な扱いによる指導」の事例

「問題の発展的な扱いによる指導」の事例としては，数多くのものが計画・実践されており，実際に，次のようにして行われている。なお，以下，本論で扱う事例は，註であげた文献②によっている。

「軌跡の問題」は，小学校6年生を対象としたものである。文献②においては，事前の授業計画，実際の指導，事後の指導，考察の4つの節にわかれているが，ここでは，事前の授業計画，実際の指導の2つだけをあげておく。

<軌跡の問題>

1. 事前の授業計画

(1) 対象児童　6年（世田谷区立S小学校），(2) 授業者　Y・N

(3) ねらいと展開

① ねらい

正方形の辺上を円がころがるときの円の中心の軌跡の長さをもとめる問題をもとにして，その条件の部分をかえることによって，さまざまな問題をつくらせ，その解法を考えさせていく中で，きまりに気づかせていく。

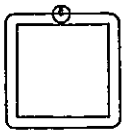
② 展開（図1）

2．実際の指導

(1) 第1段階一原題を解決する段階一

まずOHP上で図をかいて見せ，各自で作図させた後に，原題を提示した。作図にかなり手間どり，うまくかけない児童も10名ほどいた。その子には補助シート（略）を渡した。

図 1

学　習　活　動	主な発問と予想される反応	指導上の留意点
1. 原題を把握させる。 	1 1辺の長さが5cmの正方形の外がわを，半径1cmの円がころがりながら1まわりします。このとき円の中心Aが通る道の長さは何cmですか。 ○どんな問題かわかりましたか，Aさん説明してください。 ○Aが通る道は，どんな線になるか，頭の中で描けますか。 ○OHPの上でかきますからよく見ていてください。	OHPで問題提示をする。 問題場面をしっかり把握させる。
2 点Aの通る道を書く。	2 みなさんも，これと同じ線をかいてごらん。	ワークシートを配布し，それに書かせる。
3 めいめい問題を解く。	3 では，道の長さをもとめましょう。なるべく簡単に求める工夫をしましょう。 ① $5\times4=20$　$1\times2\times3.14\div4=1.57$　$1.57\times4=6.28$ $20+6.28=26.28$ ② $5\times4+1\times2\times3.14\div4\times4=26.28$ ③ $5\times4+1\times2\times3.14\times\frac{90}{360}\times4=26.28$ ④ $5\times4+1\times2\times3.14=26.28$	机間巡視をし，個別に助言をする。
4 考えを発表し合い解決の確認をする。	4. 発表してください。 ①～④	曲線の部分の長さを求める考え方をしっかり押える。
5 原題をもとにして，新しい問題をつくる。	5 始めの問題をもとにして，その一部分をかえて，別の問題をつくってみましょう。 ①1辺の長さ5cm→1辺の長さ$a$cm ②正方形→正三角形，正五角形，正六角形，正n角形 ③半径1cm→半径$x$cm ④外がわ→内がわ ⑤円の中心が通る道の長さ→円は何回転するでしょうか →円が通ったあとの面積	ワークシートに書かせる。 自分で解けそうだと考える問題には○，とけそうにないと考える問題には△をつけさせる。
6. つくった問題を発表する。	6 では，できた問題のいくつかを発表してもらいます。 ①～⑤	どこが変えられたかを確認し，分類する。
7. つくられた問題のうちの1つを全員で解く。	7 つくられた問題のうち，つぎの問題を解いてみましょう。 1辺の長さが5cmの正三角形の外がわを半径1cmの円がころがりながら1まわりします。このとき，円の中心Aが通る道の長さは，何cmですか。 ① $5\times3=15$　$1\times2\times3.14\times\frac{120}{360}\times3=6.28$ $15+6.28=21.28$ ② $5\times3+1\times2\times3.14=21.28$	
8 考えを発表し合い，解決の確認をする。	8 発表してください。 ①～②	かどの扇形をあわせると円になることをしっかりおさえる。
9 2つの問題の解法をくらべてきまりを考える。	9 2つの問題を解いてみて，何か気がついたことはありませんか。 ①かどの弧をあわせると，円になる。 ②扇形の中心角は，正多角形の中心ととなりあう2つの頂点を結んでできる角と等しい。	気づいたことは何でも自由に言わせる。 一般化の考えへ方向づける手だてとして扱う。

<ワークシート>

原題	問題づくり		共通問題	

原題の解決で発表されたものとワークシートの集計結果は次の通りであった。（図2）

(2) 第2段階―原題を発展的に扱う段階―

発問は，ワークシートに書いてあるように，「はじめの問題をもとにして，その一部分をかえて，別の問題をつくってみましょう」とした。児童の「たとえば形を変えてもいいんですか」という質問に対しては，「なんでもいいです。自由に考えてつくってごらん」とこたえた。児童がつくった問題で，授業中に発表されたものと，ワークシートの集計結果は，次の通りである。

（図3）

図2

原題の解決

発表されたもの

A：$1\times2\times3.14\div4\times4=6.28$

$6.28+5\times4=26.28$

B：$5\times4+1\times2\times3.14\times\frac{90}{360}\times4=26.28$

C：$5\times4+1\times2\times3.14=26.28$

D：$5\times4+2\times3.14=26.28$

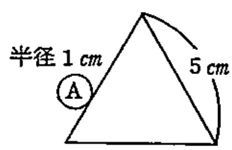
ワークシートの集計結果(授業後に集計したもの)

内容	A	B	C•D	誤答•無答
人数	8	4	18	10

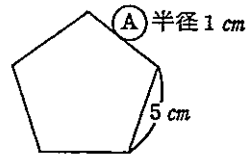
図3－1

授業中に発表されたもの

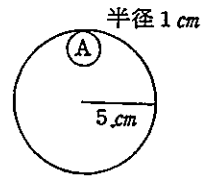
ア．図形をかえたもの



（正三角形）

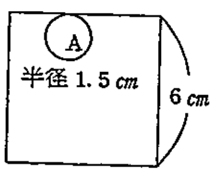


（正五角形）

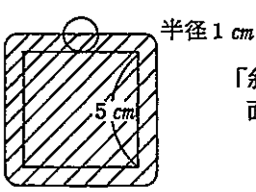


（円）

イ．外がわを内がわにかえたもの

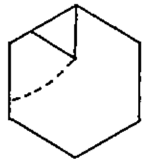


ウ．求めるものをかえたもの



「斜線の部分の面積は何cm²か」

エ．その他



「1辺の長さが3cmの正六角形の内がわを1辺2cmの正三角形がころがりながら1まわりします。最初においた時に，六角形にふれなかった点の（動いた道の長さは）何cmでしょうか」

図3－2

ワークシートの集計結果（授業後に集計したもの）

a．正方形を他の正多角形にかえたもの………20名

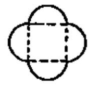
正三角形（13名），正五角形（5名），正六角形（2名）

b．正方形を他の一般多角形にかえたもの………９名

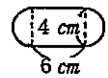
二等辺三角形（６名），平行四辺形（２名），台形（１名）

c．正方形を，曲線を含む図形にかえたもの………５名

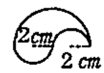
扇形（１名）



（１名）



（２名）

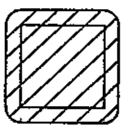


（１名）

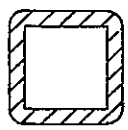
d．数値をかえたもの………２３名

e．求めるものをかえたもの………９名

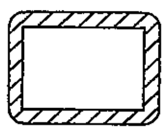
○面積（斜線部分）



（５名）



（１名）



（１名）

「五角柱の展開図の外がわの辺にそって，半径１cmの円がころがります。このとき，円が通ったあとの面積は何cm²ですか。」（１名）

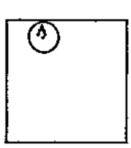
○回転　「１辺の長さ７cmの正六角形の外がわを１辺の長さが２cmの正六角形が１周ころがりながらまわります。何回転しますか。」

f．逆の問題にしたもの………２名

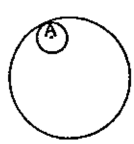
「正方形の外側を半径１cmの円がころがりながら１回りします。このとき，円の中心Aが通った道の長さが２６.２８cmでした。この正方形の１辺の長さは何cmですか。」（１名）

「１辺が５cmのひし形の外がわを１まわりするのに，７回ころがらなくてはならない円があります。その円の半径をもとめなさい。」（１名）

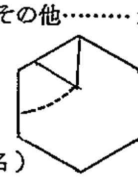
g．外がわを内側にかえたもの………５名　　h．その他………２名



（４名）



（１名）



（１名）

「まわりの長さが50cmの机の内側５cmの線をたどって，ロボットが１周します。ロボットが通る道の長さは。」（１名）

(3)　第３段階—共通問題の解決と発表—

児童がつくった問題の中から全員が共通に解く問題として，正五角形にかえた問題をとりあげ解決することにした。その結果のワークシートの集計結果は次の通りである。（図４）

図４

共通問題の解決のワークシートの集計結果（授業後に集計したもの）

内容	$5\times5+1\times2\times3.14=31.28$	$5\times5+2\times3.14=31.28$	$5\times5+1\times2\times3.14\times\frac{72}{360}\times5=31.28$	$2628+5=31.28$	誤　答
人数	１６名	９名	２名	１名	９名

最後に，原題，共通問題にみられるきまりを発表させた。それは次の2,点であった。

「扇形をあわせると円になる。」

「扇形の中心角と図形の中心と各頂点を結んでできる角とは等しい。」

Ⅳ 考察

1. 原題について

始めに，児童・生徒に与えられた問題を原題と呼び，この原題をもとにして，児童・生徒が一般化や類推などの考え方を用いて新しい問題をつくっていくことが，私達の研究の「問題の発展的な扱いによる指導」の中心であった。

原題は，すでにⅢの事例でみたように，ふつうの指導で扱う問題と同様に解決の対象にもなる。しかし，それだけではとどまらず，それをもとにして児童・生徒が発展的に問題をつくっていくのだから，この指導においては，原題は非常に大きな役割をもっており，児童・生徒の主体的，創造的な数学的活動の契機となるものである。

筆者は，そのような原題の2・3の側面について，考察を加えてみる。

(1) 原題の事例

今までに私達が原題として開発したものは数多くあるが，そのうちのいくつかをあげてみる。事例は，昭和54年度のものである。（図5）

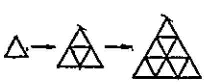
図5

原題の事例　　　　　　　　　　　　　　（ ）内は対象学年

① えんぴつが50本と30本あります。ぜんぶで何本でしょう。（小1）

② 四角形ＡＢＣＤの頂点Ａから各頂点に線をひいて，四角形の和が何度になるかを求めなさい。（小5）

③  半径が10㎝の四分円が重なった部分の面積を求めましょう。（小6）

④  図のように，正三角形の板をならべていきます。このようにして，7だんまで，ならべると，正三角形の板は何枚いりますか。（小6）

⑤ 弟が3㎞離れた駅に向かって，家を出てから，20分たって，兄が自転車で同じ道を追いかけた。弟の歩く速さは毎分80ｍ，兄の自転車の速さは毎分200ｍであるとすると，兄は出発後，何分で弟に追いつくか。（中1）

⑥ 正三角形ＡＢＣでＡＢ，ＡＣの中点をそれぞれＰ，Ｑとすると，ＢＣとＰＱはどんな関係になりますか。（中2）

⑦ 四角形ＡＢＣＤの辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＤ，ＤＡの中点をそれぞれＰ，Ｑ，Ｒ，Ｓとする。このとき，四角形ＰＱＲＳはどんな四角形になるか。（高1）

⑧ 点Ｐ(x_0, y_0, z_0)を通り，ベクトル$\vec{a}=(a,b,c)$に垂直な平面がある。原点から，この平面におろした垂線の長さを内積を利用して求めよ。（高2）

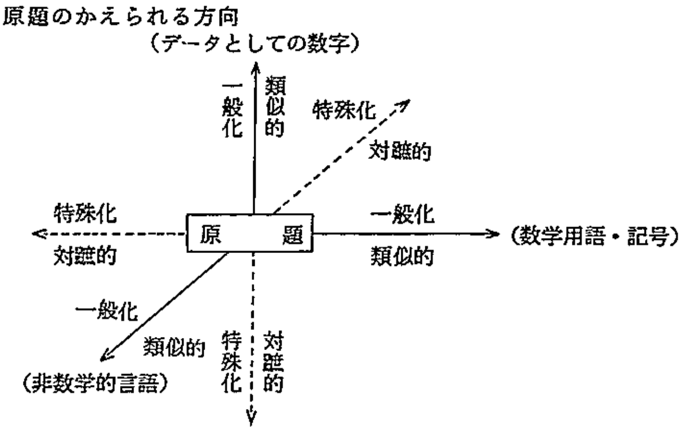
(2) 原題を開発した算数・数学の領域

原題の事例でみたように，私達の研究の初期の段階では，原題の多くが図形の領域で開発されている。

この授業を計画する立場に立つと，はじめのうちは，図形の要素を含んだ原題の方が発展的に扱いやすい面があるということである。

いま，原題を発展的に扱うことのうち原題の構成要素となっている部分を一般化，類推などの考え方でかえる場合を考えてみる。（問題の発展的な扱いはこれだけではなく，その問題の逆などを考えることも含んでいる。）そこで，原題の言語的構成要素を，数学用語・記号，非数学的言語，データとしての数字，の３つにわけてみる。原題は，この３つの要素のどれかをかえることによって，新しい問題につくりかえられる。（図６）

図６



例えば，Ⅲの事例で扱われている原題「１辺の長さが５㎝の正方形の外がわを，半径１㎝の円がころがりながら１まわりします。このとき円の中心Ａが通る道の長さは何㎝ですか。」を，３つの構成要素の立場からみてみると，次のようになる。

- 数学用語・記号：辺，長さ，㎝，正方形，外がわ，半径，円，中心
  （一線部分）
- 非数学的言語（主なもの）：ころがり，まわり，通る，道
  （線のない部分）
- データとしての数字：１，５
  （～線部分）

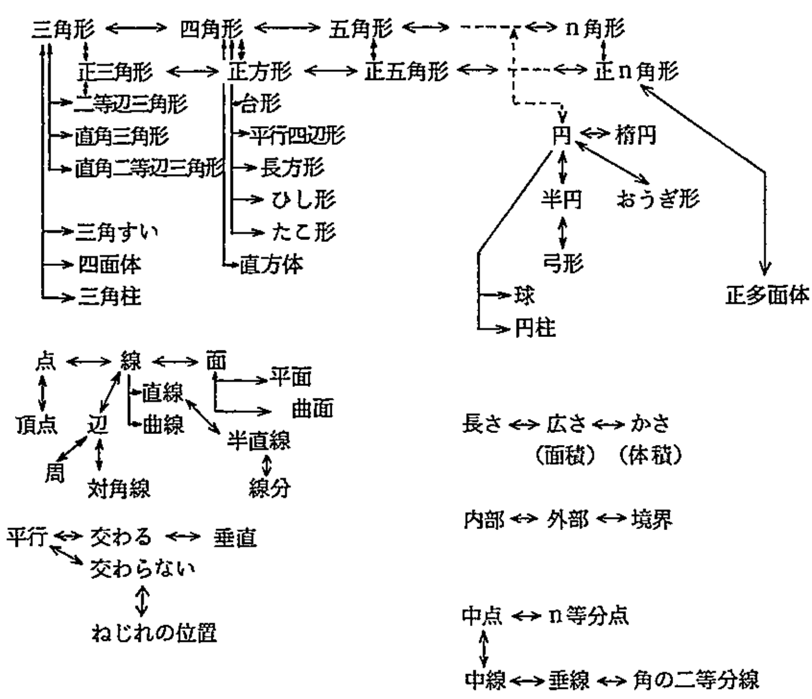
このうち，数学用語・記号の「中心」を「辺上の定点」とかえれば，その軌跡はサイクロイドになり，高等学校程度の数学的内容になってしまう。また，非数学的言語の「ころがり」を，「すべり」にかえれば，やはり新しい問題とはなるが，その数学的内容は原題と何らかわらない。原題の３つの言語的構成要素のどれかをかえることによって，このように新しい問題がつくられる。なお，このときつ

くられる新しい問題と原題とをくらべると，数学的内容が同じ場合とかわってしまう場合とがある。

ところで，原題の一部分をかえることによって，問題を発展的に扱う場合，つくられる問題の多様性は，この3つの構成要素にかかわっていることがわかる。原題が図形的要素を含む場合と，そうでない場合をくらべてみると，データとしての数字は，どちらの場合でも同様にかえられるので，原題の数学の問題としての発展性の差異に大きく影響を与えない。また，実際の生活場面からとった原題であれば，それが図形的要素を含んでも含まなくても，非数学的言語は同様に，その発展性に影響を与える。一方，原題を実際の生活場面からとらなければ，非数学的言語は，どの領域の原題の発展性に対しても，そんなに影響を与えない。つまり，データとしての数字，非数学的言語は，どのような領域の原題に対しても，その発展性については，同じように影響を与えることになる。しかし，数学用語・記号はそうではない。図形的領域からの原題と非図形的領域からの原題は，少なくとも初等的な範囲においては，それらの領域における数学用語・記号によって，その発展性に差異を生ずる。例えば，図形的領域の用語は，一般化，類推などの考え方によって次のような用語の系列が可能であろう。（図7）

図7

図形的領域の用語の系列例（↔は一般化，類推などの方向）



ところが，非図形的領域の面での数学用語・記号の系列はそれ程多くはない。例えば，数の名称の系列，次元の数の系列，変数の数の系列，等式・不等式の系列，関数・関係の系列，演算・操作の

系列などであろう。

小・中学校ぐらいまでの初等的な範囲内では，図形的な用語の数の方が多く，さらに，それらが，一般化（特殊化），類似的（対蹠的）⑤のような形でいろいろに系列化されて学習されている。このようなことから，私達の研究の初期の段階においては，図形的領域から原題が多く開発された。

(3) 原題の題材

同じ数学的内容をもっている原題でも，その具体化のあらわれ方，つまり題材の違いによって，児童・生徒の問題づくりの方向に差異を生ずる。

次の２つの原題は，ともに，中学校１年生の１次方程式の応用問題として出されたものである。

① 弟が３㎞離れた駅に向かって，家を出てから20分たって，兄が自転車で同じ道を追いかけた。弟の歩く速さは毎分80ｍ，兄の自転車の速さは毎分200ｍであるとすると，兄は出発後何分で追いつくか。

② ３つの連続する奇数の和が177のとき，この３つの数を求めよ。

①，②の原題に対して生徒のつくった問題は，授業後，次のように授業者によって，それぞれ分類されている。（図８）

図８

生徒のつくった問題の分類

①の原題について

A．「旅人算」的なもの　（人間，事物に関するもの）
B．ループ状の道で考えるもの
C．乗物以外の動くもの（時計の針など）
D．積立金に関するもの
E．買物の代金
F．その他の比例するものを含む題材

②の原題について

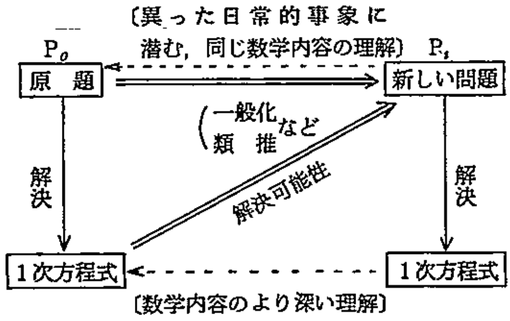
A．「奇数」を保存
B．「奇数，偶数」　C．「偶数」　D．「数」（整数）　E．「その他の倍数」　F．「３ｍ＋ｎ」
「連続した」「和」を保存　（A～F）
G．「素数」　H．「分数」　I．「負の数」
J．「数，連続していない和」
K．「数，連続していない和，積」　L．「連続する数の積」　M．「２乗」「３乗」の和
N．「数列の２次元化」　O．具体的な文章題(数式)　P．具体的な文章題(計量)　Q．その他

これらのことから筆者は原題の題材について，次のように考えた。

①の原題に対して，生徒は，１次方程式という数学的内容をできるだけ保存しようとしたうえで，原題をかえようとしているのがうかがえる。②の原題に対しては，生徒は，問題をつくるということの意識が強くなって，数学的内容を保存しようということは意識下に沈んでしまい，１次方程式ではない問題をいくつかつくっている。（図８，②の原題について，G，H，K，L，Mなど）もちろん，１次方程式という数学的内容を保存しようとしている生徒もいる。

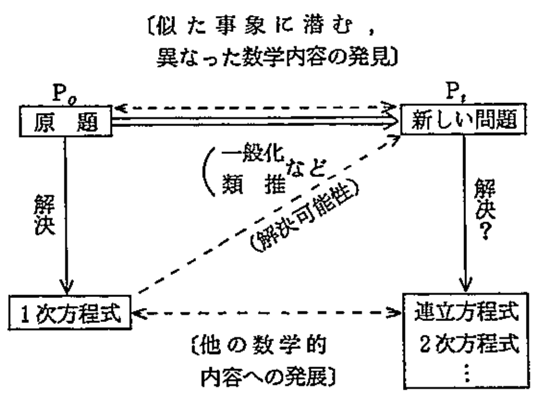
①の原題のように題材が日常生活の問題からとられている場合，児童・生徒がその数学的内容を保存しておいて，違う場面の日常生活の問題をつくるということは，児童・生徒がその数学的内容のより深い理解を得ることになる。（図９）

図9



一方，②の原題のような非日常的な問題においては，児童・生徒は新しくつくられる問題の解決可能性や，数学的内容がかわってしまうことを，あまり意識せずに，問題をかえてしまうことによって，未知・解決不可能（多くは，その児童・生徒にとって）な問題をつくる。かえられる構成要素が数学言語が多いためである。しかし，それだけで終ってしまえば，その生徒にとって単に言葉をかえて，解決不可能な問題をつくっただけに終ってしまうが，新しい問題と原題との関係や，新しい問題の将来の展望などをはっきりさせてやることにより，一般化・類推などの考え方にとどまらず，数学の構造，数学の発展性などにも生徒の目を向けさせることができる。（図 10）

図10



そこで，授業における問題の発展的な取り扱いを，どのような位置付けで行うのかを，明確にしたうえで，対象となる児童・生徒に適した原題の開発をする必要がある。もちろん，原題の題材による問題づくりの方向は，これら２つにはっきりと類別できるものではないが，指導計画の段階で，ある程度の予測は可能であろう。

なお，(2)で図形的領域の原題の発展性にふれたが，(3)のこれらの事例で明らかなように，非図形的

領域の原題も豊かな発展性をもっているといえる。

(4) その他

原題について考察すべきことは，さらに，いくつか残されているが，ここでは，原題の形式，原題の条件の2点について，今後の課題となる面について，簡単にふれておく。

原題の形式としては，私達の研究では，クローズドな問題（正しい答がただ1通りに決まっている問題）とオープンな問題（正答がいく通りにも可能になるように条件づけられた問題）の2通りがある。オープンな問題を原題とした授業者たちからは，その原題が，問題づくりをしたときの児童・生徒の反応数などによい影響を与えるのではないかという指摘がなされている。オープンエンド　アプローチによる指導が，私達の研究と同じような高次目標をめざしていたことを考えると，オープンな原題の解決過程が，児童・生徒の主体性，創造性などに多くのよい刺激を与えることは考えられうることであり，それによって，その後の発展的な扱いをより効果的にすることも十分考えられる。なお，ここでは，2通りの形式についてだけふれたが，私達は，さらに異なる形式の可能性も，探究している。

よい原題のもつ条件とは何であろうか。オープンエンド　アプローチの指導における問題として適切なものとして，次の3点があげられている。

① 内在している数学的内容が豊富で価値がある。

② 内容の程度が，当面する児童・生徒に対して適当なものである。

③ 発展性がある。

これらは，そのままよい原題のもつ条件にもあてはまる。しかし，さらに，オープンエンド　アプローチの指導における問題の条件とは異なる面を明確にする必要があり，それとともに，よい原題を多く開発していくことも必要である。

2. 発問について

「問題の発展的な扱い」を指示するような発問のしかたは，既存の研究の中には，あまり見あたらず，私達の研究の過程で，事例的に開発され，洗練されてきたものである。

例えば，東京教育大学附属中学校数学教育研究会が，中学校の教育課程についてまとめた中⑥で，中学校3学年用の全問題244題の発問のしかたを分類している。そこでは，25のカテゴリーに分類されているが，「発展的な扱い」を指示するような発問のしかたは，含まれていない。

(1) 発問のしかたの事例

「問題の発展的な扱いによる指導」における発問のしかたは，それに対する児童・生徒の反応に応じて，初年度から工夫が重ねられている。次に昭和54年度の発問のしかたの事例をいくつかあげてみる。（図11）

図11

発問のしかたの事例

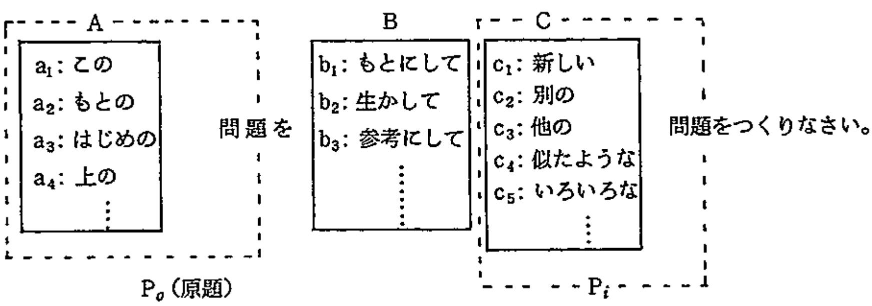
① この問題をもとにして，新しい問題をつくってみましょう。 (小1)
② この問題の一部をかえて，別の問題をつくってみよう。 (小5)
③ この問題でかえられるところをかえて，新しい問題をつくるとき，どこがかえられますか。 (小6)
④ これから新しい問題をつくりたいのですが，どこをかえればよいと思いますか。 (小6)
⑤ この問題をもとにして，似たような問題をつくってください。(中1)
⑥ 上の問題の一部をかえて，問題をつくりなさい。 (中2)
⑦ 上の問題をもとにして，新しい問題をつくりたい。どんな問題ができるか，いろいろ考えてつくってみよ。 (高2)

(2) 発問のしかたの分類

問題の発展的な扱いによる指導における発問のしかたを，筆者は次の3つに分類した。第1の型は，原題の「かえられる部分」を，児童・生徒に指摘させる発問のしかた。((1)の③，④)，第2の型は，原題の一部をかえることが新しい問題をつくることになるという示唆を含み，問題をつくらせる発問のしかた((1)の②⑥)，第3の型は，第2の型のような示唆を与えないで，問題をつくらせる発問のしかた((1)の①⑤⑦)。このうちの，第2，第3の型をまとめると，次のような発問のしかたが有効であることがわかる。(図12)

図12

発問のしかた



A，B，Cから，それぞれ1つずつ選択して発問をつくることができる。例えば，Aからa_1，Bからb_1，Cからc_1を選択すると，「$\underbrace{\text{この}}_{a_1}$問題を$\underbrace{\text{もとにして}}_{b_1}\underbrace{\text{新しい}}_{c_1}$問題をつくりなさい。」となる。

発展的な取り扱いによる授業における問題づくりの際の発問のしかたが，「新しい」「別の」「他の」「似たような」「いろいろな」等の言葉によって構成されている所に，この指導の大きな特色がある。これらの言葉は明確に対象を規定する言葉ではない。つまり，児童・生徒は，自分の生活体験，数学観などによって，自分自身にとって「新しい」「似たような」問題をつくっていくことになる。

数学的価値からみれば大きな差異が生ずるであろうが，ひとりひとりの児童・生徒が自分に応じた問題をつくれることになる。そこで，児童・生徒の数学的活動が活発になり，また，つくった問題を発表しあうことによって，驚きをもって視野を広げることができるようになる。もちろん，実際の指導においては，教師もまた，教師自身の数学観，教育観などによって，児童・生徒のつくった問題を，一般化，類推，逆などの考えを念頭において，整理し，統合・発展させていくことが必要となる。

なお，第２・第３の型の発問の場合は，殆んど必ず，児童・生徒から「どこをかえてもいいの」「数をかえてもいいの」「三角形を四角形にしてもいい」などという質問がでてくる。それに対して，授業者の「いいですよ」「自由にやってよいです」というような肯定的な応答が必要になる。一方，第１の型は，かえられる部分を指摘させたのち，第２・第３の型によって，問題をつくりはじめる。ここに至って，３つの型は，本質的に同じ働きをすることになる。

(3) その他

小学校低学年に指導する時，児童・生徒がこの授業をはじめて経験する時，原題をどのようにかえたらよいかとまどっている時などは，(2)の第２・第３の型の発問だけでは，児童・生徒が活動しないときがある。

このようなとき，どのような発問をしたらよいのかということは，今後の課題である。補助の発問だけではなく，つくった問題の例を示すことなども含めて，児童・生徒のとまどいに対する手立てが必要である。

なお，この指導による授業を１回でも経験していると，その次からは発問のしかたが簡略化される傾向がある。発問のしかたと，学習方法をしっかりと結びつけておくことが重要である。

この発問のしかたにおける「新しい」「似たような」「別の」…という言葉が個人の種々の経験に依存することは，前にふれたが，さらに，発達段階による児童・生徒のそれらに対する反応の傾向（問題間の類似性を規定する要因の年令による変化など）が，私達のいくつかの調査・授業によって認められている。一般化，類推などの考え方に基づいたこれらの言葉についての実験的研究も必要である。また，問題をつくるということから，算術教育史のうえでの作問主義についても調べる必要がある。

V.　おわりに

「問題の発展的な扱いによる指導」は，今後にいくつかの課題を残しつつも，授業者，観察者は，児童・生徒の主体的，創造的な数学活動にあらためて驚き，そこに，この指導の可能性を読みとっている。

私達は，この指導において残された課題の解決をめざすとともに，今後の研究方向を，「問題の発展的な扱いによる指導の評価方法」に定めている。

註

① 橋本吉彦：数学教育における「高次目標」について，国立教育研究所研究集録第１号 PP101－107，1980

② 島田茂他：算数・数学科の問題の発展的な扱いによる評価方法のケース・スタディー

国立教育研究所資料 1979

沢田利夫他：算数・数学科の授業における発問のストラテジーの研究 国立教育研究所資料 1980

（本研究における事例は，上記２つの資料をもとにしている。）

③ 島田茂編：算数・数学科のオープンエンド アプローチ みずうみ書房 1977

④ 沢田利夫ほか４名：算数の問題の発展的な扱いによる指導法について

石山弘ほか１名：日常の授業における問題の発展的な扱いによる授業のあり方

山下昭ほか３名：問題の発展的な取扱いによる算数指導について，

日本数学教育学会誌 算数教育 29－5，PP8－24，1980

長崎栄三ほか２名：算数・数学科の問題の発展的な扱いによる指導法の一つのパターンの探究，日本科学教育学会年会論文集４号，PP71－72，1980

⑤ 平林一栄：算数・数学教育のシツエーション 広島大学出版研究会 P28，1975

⑥ 宮崎・熊沢・岡本・吉田：中学校数学・現代化の実践・第３学年 近代新書 PP233－234，1972