鏡を活用したテーマ性のある図形学習に関する研究

静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要　№10 p.23〜40 (2004)

鏡を活用したテーマ性のある図形学習に関する研究

A Study on Learning Geometry with Mirror from the Viewpoint of Figure, Symmetry, Pattern

両角達男*・鈴木裕之**・内藤栄二***
Tatsuo MOROZUMI, Hiroyuki SUZUKI, Eiji NAITO

1．はじめに

図形をとらえる見方を豊かに持つことにより、図形のもつ様々な性質が明らかになってくる。

例えば、正三角形、正方形、正五角形、正六角形に共通する性質として「辺がみな等しく、角もみな等しい凸多角形であること」(正多角形の定義) が挙げられる。この性質は、定規で辺の長さを測る、分度器で角度を測るといった計量的な見方、辺や角がぴったり重なるように折り曲げるといった操作や対称性に着目した見方などにより、実感をもって明らかになる。さらに、ぴったり重なるように折るという操作を繰り返せば「正多角形の対称軸は1点で交わりそうだ」「対称軸が交わった点は正多角形の中心となりそうだ」などの性質を導き出せる。

実際、正多角形には次のような性質がある。

ア．正多角形の対称軸、特に頂点同士を結ぶ対称軸はすべて1点で交わる。

イ．正多角形のすべての頂点は同一円周上に並ぶ。

ウ．頂点同士を結ぶ対称軸の交点は、イの円の中心となり正多角形の中心と呼ばれる。
　　さらに、頂点同士を結ぶ対称軸のうち、正多角形の対角線にあたる線分がその円の直径となる。

エ．正多角形の中心と正多角形の隣り合う2つの頂点を結ぶと、二等辺三角形ができる。
　　一方、二等辺三角形を3つ繰り返し連結すれば正三角形、4つ繰り返し連結すれば正方形、5つ繰り返し連結すれば正五角形をつくることができる。

折る操作活動から、真実感を持って上記のア〜エの性質を見いだすためには「全体をいくつかの合同な図形に分解する見方」「全体を構成する部分に着目する見方」「全体の中にみられる規則性に着目する見方」「部分（単位）を繰り返すことにより全体を構成する見方」「規則性に基づいて部分から全体を構成する見方」などが必要となる。全体から部分への分解、部分から全体への構成、全体と部分を関連づける規則性の着目、こうした視点で図形をとらえることにより、図形の性質に対する感性も高まる。例えば、エの見方を踏まえると、「360°（一回転）を3等分した120°を頂角にもつ二等辺三角形を基にして」正三角形が、「90°を頂角にもつ直角二等辺三角形を基にして」正方形が形作られることがわかる。このことを拡げれば、「360°／nを頂角にもつ二等辺三角形を基にして」正n角形がつくれること、できあがった正n角形

*数学教育教授　**附属浜松小学校教諭　***附属静岡中学校教諭

の辺は「基にした二等辺三角形の底辺」として、正n角形の内角は「基にした二等辺三角形の底角の２倍」としてみれることにつながる。後者の図形のとらえは、改めて正多角形の定義のもつ意味を深く意識することにもつながる。

「図形を分解と構成、全体と部分とを関連づける規則性に着目してとらえること」は、図形の性質や性質間の関係を深くとらえることにつながっていく。

２．研究の目的と方法

本研究では、二面鏡を用いた図形を構成し想像する活動が「図形を分解と構成、全体と部分とを関連づける規則性に着目してとらえること」を強く促すと考え、二面鏡を用いた一連の授業を小学校と中学校双方で実施し、その学習効果を特徴的な生徒の動きから考察することを目的とする。その方法として、次の３つのステップを踏んで考察を進める。

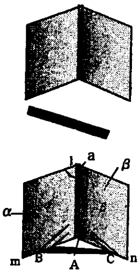
① 鏡を用いた図形学習に関して、その可能性と効果を強調するセネシャル、NCTM Standardの記述を分析し、小学校中学年から中学校初学年までの鏡を用いた図形学習のねらいを示す。

② 小学校と中学校での発達段階の違いを踏まえて、二面鏡を用いた図形の授業を計画し、授業実践する。

③ ②を通して得られた生徒の筆記物に着目し、二面鏡を用いた特徴的な生徒の思考活動について考察する。さらに、小学生と中学生の特徴的な動きに基づき、二面鏡を用いた図形学習の可能性と課題を提示する。

３．二面鏡に直線を映し出すこと

二面鏡とは、２つの長方形の形をした鏡どうしの縁を下図のように張り合わせたものである。同一の鏡をビニールテープなどで貼り合わせることにより、容易に作ることができる。その二面鏡を用いて、自分自身の顔を写すと、自分の顔がただ１つに見える場合から、複数に連なってみえる状態まで様々である。ただ１つにみえる場合は、二面鏡を開く角度が平角になる場合であり、顔が３つ見える場合は二面鏡を開く角度が直角の場合などである。また、平角を超える場合、顔をうまく映すことができなくなる。



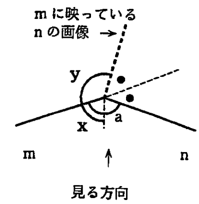
この二面鏡に直線を映し出すとどのような図形が構成されるだろうか。二面鏡の開き具合により直線がどのようにみえるか、直線に対する二面鏡の位置により構成される図形はどのように変わっていくか、それぞれ筆者が行った実験や思考実験を踏まえると、次のような結果を得ることができる。なお、二面鏡の開き具合を∠ａで、二面鏡の交線をｌ、二面鏡の下辺をそれぞれm，ｎ、その交点をＡ、直線とmおよびｎとの交点をそれぞれＢ，Ｃとする。(右図)

① 120°を超えると、お互いの鏡に映る像が背中合わせのようになる（死角の存在）

右上の図のように、二面鏡を２つの下辺内にある直線ＢＣは、正面からみて鏡に反対側の鏡像が、交線ｌ上から映る。この鏡像は180°未満であればいつも映りそうな感じがするが、実際は120°を境にして状況が一変する。120°のときには、お互いの鏡に映っている鏡像が背中合わせのような状態で映り出す。120°を超えると、視線を正面から左右に移さなければうま

くみることができない。その理由は次のようにして、説明できる。

右図は、120°以上の場合の、鏡αにはmを対称の軸として、鏡βの直線nが線対称に映ったときの平面図である。二面鏡の開きぐあい∠aを120°以上にすると、正面からみたときこの鏡像は、みる方向から∠xが60°以上、∠yが120°以上となる。つまり、できた鏡像が鏡βの裏になり死角に入る。映っているが、見る角度を変えないと見ることができなくなるのである。



② 120°以下のときの鏡同士の写像のみえ方

鏡α、βの角度を120°とする、すなわち∠a＝120°のときには見ている方向の反対側に、図１のように鏡同士のお互いの鏡像が背中合わせで現れてくる。

続いて、∠aの大きさを小さくしていくと、鏡同士のお互いの鏡像が徐々に開いた状態でみえてくる。(図２)

さらに、∠aの大きさを小さくしていくと、新たな鏡の鏡像が背中合わせの状態となって現れてくる。図３は、∠a＝72°の場合であり背中合わせの鏡像が２回繰り返されて「鏡の新たな背中合わせの鏡像」が生じた場合である。

図１

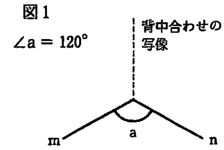


図２

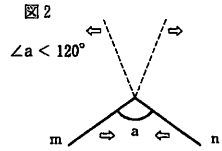
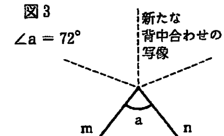


図３



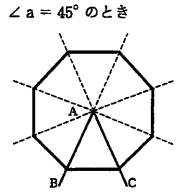
③ 直線と二面鏡から特殊な図形をつくることができる（多角形を内側からつくる）

鏡α、鏡β、直線ＢＣによりつくられる三角形の形状により、正多角形ができたり、ひし形や星形、対称な図形をつくることができる。

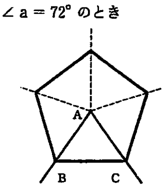
最初に、鏡α、鏡β、直線ＢＣによりつくられる△ＡＢＣが∠Ｂ＝∠Ｃの二等辺三角形で、頂角∠ａの大きさが360°の約数であるときに正多角形がつくられる。

正八角形の場合には∠ａ×８＝360°であり、正五角形の場合には∠ａ×５＝360°である。

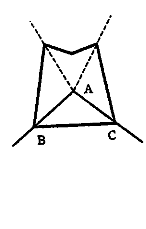
∠a＝45°のとき



∠a＝72°のとき



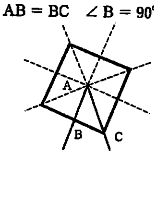
また、∠Ｂ＝∠Ｃという条件は、鏡を通してもとの直線と鏡像とが同じ間隔を保っていることを表す。別の見方をすれば、鏡α、鏡βが正多角形の内角の二等分線になっていることであり、∠Ｂや∠Ｃの補角（正多角形全体からみれば外角）を一定にしたまま次々に図形をつくり出すことと同じである。



また、正多角形になる場合は、②における図１や図３の場合となる。図２では、背中合わせにできた鏡像の開き具合がちょうどａ°となるとき（例えば90°の場合の正方形）のみに限定される。

この場合以外は、右図のように辺の長さが等しくならない

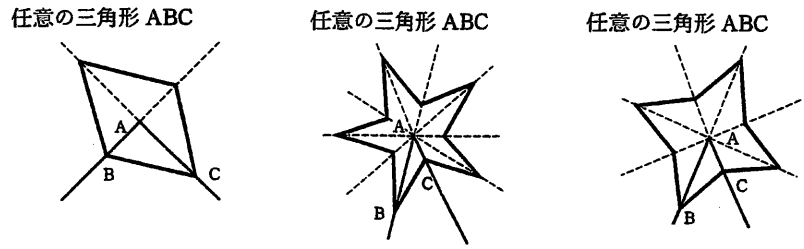
∠a＝45°で
AB＝BC　∠B＝90°



ものが出てくる。

△ＡＢＣが∠Ｂ＝∠Ｃの二等辺三角形でなく、∠Ａの大きさが360°の約数の場合であっても、正多角形がつくれる場合がある。前ページ右下の図は、∠ａの大きさが45°でＡＢ＝ＢＣ，∠Ｂ＝90°の場合である。鏡や双対する鏡によりつくられた鏡像が、正方形のすべての線対称軸を構成するようにつくられた場合といえる。

この他、∠ａが360°の約数であり、△ＡＢＣが二等辺三角形にならない場合であっても、次のようなひし形、星形、線対称であり点対称な図形をつくることができる。



以上まとめると、二面鏡に直線を映し出すことにより、次の４つのことがいえる。

① 二面鏡により凸型や凹型の多角形がつくり出される。その形状は、二面鏡の開きぐあい、二面鏡と直線との位置関係の２つにより、表すことができる。

② 二面鏡により凸型、凹型の多角形がつくり出されることは、二面鏡により映し出された鏡像の位置、すなわちみえる位置にあるか、背中合わせになるか、死角に入り込むかにより説明できる。

③ 二面鏡と直線によりつくられる図形が二等辺三角形で、頂角が360°の約数である場合には正多角形ができる。頂角が360°／ｎ（ｎは自然数）の二等辺三角形を基に、等しい長さの辺を次々と張り合わせて正ｎ角形をつくるという「部分から全体を構成する見方」と、正ｎ角形の対称軸かつ対角線である直線によって合同な図形に分けるという「全体から部分を分解する見方」とが、互いに関連しあう。

④ 二面鏡に対して、ずらした形（③ではない場合）で直線をおいても対称な図形を構成することができる。その際、鏡はできあがった図形の線対称軸の一部となっている。

③の見方は、正多角形の作図の仕方とその理由づけとの関連を図る。例えば、正六角形の作図方法は「ある一定の長さをコンパスでとり、その長さを半径にもつ円をつくり、さらに円周上に半径の長さを弦にもつような点を次々ととっていく」である。この方法に対して「二面鏡と直線とがちょうど正三角形をなすような状態で、正面から二面鏡をみる」活動は、正六角形の作図は結局「正三角形を次々と６つつくっていることに他ならない」という意味を構成する上で有効に働く。

４．鏡を活用した図形学習の可能性

小学校中学年から中学校１年にかけての図形学習では、おおまかにみて次の①から②へのような変遷がみられる。

① 正方形や三角形などの形が、どのような性質を持つのかを明らかにしていく。

② 図形の性質どうしにどのような関係があるのかを明らかにしていく。図形の関係どうし

の考察を踏まえて、改めて形をとらえ直す。

二面鏡を用いるという場面では、①と②に相対峙して、次の変遷が考えられるのではなかろうか。

①' 二面鏡を用いてできた形が、どのような性質をもつのかを明らかにしていく。

②' 二面鏡を用いてできた形の性質や既知の図形の性質との間に、どのような関係があるのかを明らかにしていく。その考察を通し、改めて、二面鏡を用いてできた形をとらえ直す。

この①' や②' に関し、鏡を活用した図形学習の可能性について、児童・生徒の図形認識の深化、数学をつくる上での重要性などを踏まえた先行研究を参考に考察を行う。本稿では、二つの先行研究に焦点をあてる。一つは、形をテーマにした図形学習の重要性を、体系的な学校数学および数学をつくっていく過程の中で強調するマージョリー・セネシャルの言明である。いま一つは、幼稚園から高校段階までの体系的な数学教授・学習の指標を述べるNCTM Standard 2000にみられる図形学習に関わる言明である。

前者のセネシャル(2000)は、形の学習について次のように述べる。

「形はパターンである。」(pp.205)

「形が基本的に重要なのにもかかわらず、生徒が学校で学習するのは、形のほんのわずかな部分にすぎない。形の学習は、歴史的には幾何の中に含められてきた。そして、幾何は長い間ユークリッドの公準、公理、定理に支配されてきた。（中略）

形は、数学の肝心で不可欠であり、発展しつつある魅惑的なテーマであって、古典幾何学と深く結びついているが、内容や意味、方法においてそれをはるかに超えている。適切に発展させれば、形の学習は数学教育の中心的な構成要素となろう。それは、数学だけでなく、科学や芸術にも依存し、また貢献する要素である。」(pp.206)

「形の研究は学際的である。
形の研究は実験科目である。
形の研究はすべての人のためのものである。
形の研究はおもしろくて楽しい。
形の研究は無制限である。」　(pp.258-263の主たる項目)

セネシャルは、幾何の教授・学習が今まで幾何そのもの重要性というより、むしろ外的な目標に役立つこと　ー演繹的推論の教授，ユークリッドの諸定理の証明，問題解決の入門，視覚化の教授と微積分への準備ー　によって行われていないかという問題提起をする。そして、「ユークリッドがはっきり認識していたのは、形についての注意深い推論が、定義と仮定の注意深い叙述と、非常に注意深く議論を進めることを必要とすることだった。」(pp.256)と述べるように、形の学習が幾何において中核にあるべきではという強い指摘をする。

同様の主張は、直観幾何と論証幾何との兼ね合いや融合、緑表紙の教科書にみられる全体的直覚的な把握能力を重視した図形指導に関わること、ユークリッド流の接近・変換群に基づく接近・線形代数的接近の混在による幾何教育の混迷の指摘、に代表される阿倍(1987)の主張にも見いだすことができる。図形学習における論証の扱いなど様々な立場があり、どのような状態が望ましいかに関しては別稿において述べたい。しかし、図形学習において「形」が中核的なものであるというセネシャルの指摘は、筆者の考えと同一である。

セネシャルは、形の学習として「対象の間の同じ点と相違点を見つけること」(分類)、「形の構成要素を分析すること」(分析)、「違った表現をしている形を認識すること」(表現)の3つを挙げる。この中で、鏡を活用した図形学習は「形の構成要素を分析すること」の中に、鏡の幾何として位置づけられている。その鏡の幾何の中には、二面鏡が登場してくる。セネシャルの主張を要約すれば、次のことが述べられている。(pp.218-232)

○ 万華鏡の原理は、二面鏡などを使って子どもが遊ぶことを通し、発見することができる。

○ 鏡の反射は有限個の部分単位をもつパターンをつくる。例えば、万華鏡を回転させてみると、回転と反射は一定のパターンをもって行われる。そのパターンは対称群であり、自然界にみられる多くの形のもつ性質と一致する。さらに、万華鏡を用いた活動により、対称群の原理を体感し、理解することができる。

○ 立方体型の万華鏡をつくってみるなど、対称性をみつけること、対称性を使うことを2次元から3次元に発展させると興味深い学習ができる。その学習で得られた事柄には、自然界の結晶の特徴をつかむ上で役立つ情報が込められていることが多い。

「形」を知り、「形」の特徴をつかむために、セネシャルは「鏡を活用した学習活動」を重要視している。二面鏡や万華鏡を使った活動が、形に対する感覚を高め、思考活動を豊かなものにしていくという。そして、形に対する統合的な見方を養うため、次のようなアプローチを提案する。形をテーマにした図形学習を豊かに進めていくための指標、ということもできる。(「同定と分類」,「分析」,「表現と視覚化」のうち、「分析」のみ引用, pp.251)

「分析

初級：鏡による対称性、回転対称、合同
折り紙、パターン、相似
多角形の構成と分解、長さ／体積の測定，キルトやモザイクの作成

中級：二つの鏡による万華鏡
有限な図形の対称性
切り分け、パズル、レプタイル、フラクタル、自然のパターン、
正多角形と準正多面体、角度の測定、平面の多角形での敷き詰め

上級：多面角による万華鏡
組織原理としての対称性、変換の幾何
フラクタルの探求、生物学におけるスケール、多面体のオイラーの公式、
平面・三次元の幾何の基本格子、敷き詰めの初等的理論」

「形の研究は学際的である」とセネシャルが述べるように、初級・中級・上級に挙げられたことをすべてこなすためには、数学のみならず形に関わる学習(理科や美術など)との連携が必要不可欠になる。実現可能にするためには、いくつかのステップを踏む必要がある。そのために鏡を用いた学習に段階を設け、形の分析において重要な役割を与えている様子を見いだすことができる。

NCTM Standard 2000においても「形」を知ること、「形」の特徴をつかむこと、そのための「鏡を活用した学習活動」の重要性に関わる記述を見いだすことができる。NCTM Standard 2000では、幼稚園から第12学年までの4つの段階で漸次的かつ着実に、次の4つ

のことがらを生徒が学習できることが求められる。

「①２次元と３次元の幾何的な形の特徴を分析し、幾何的関係について数学的議論を展開する
②座標幾何や他の表現システムを使って、位置を特定し、空間的関係を記述する
③数学的状況を分析するために、変換を応用し、対称性を使う
④問題を解決するために、視覚化、空間的推論、と幾何的モデル化を使う」 (pp.41-43)

ここで、形をテーマにする学習、鏡を活用した学習に強く関わるのは、①と③といえる。例えば、第３学年から５学年、第６学年から８学年では、それぞれ次のような記述がみられる。

【第３学年から５学年】

「第３学年から５学年では、彼らは、形の性質を同定し記述することに焦点化し、これらの形や性質に結びついた特殊な語彙を学習することで、形を記述するいっそう正確な仕方を開発すべきである。」 (pp.165)

「形を論ずるとき、第３学年から５学年の生徒は、文脈の中で繰り返して使われる用語を聞くことによって、彼らの数学的語彙を拡げるべきである。」 (pp.166)

「ある形を回転あるいは反射させるとき、何が起こるかを視覚化し、結果を予測できるべきである。」 (pp.168)

「第３学年から５学年の生徒は、２つ以上の線対称を探求できる。例えば、次のようである。正方形の上に鏡を置くのに、その鏡に元の正方形ときっちり同じ形がみえるようにしたい。そのような置き方は何通りあるか？　それは、すべての正方形に対して真か？　２つ以上の対称な直線を持つ四角形を作ることができるか？　１つの対称の線を持つのはどうか？　まったく対称の線をもたないものはどうか？　もし、そうなら、それぞれの場合、それはどんな種類の四角形か？」 (pp.168)

【第６学年から８学年】

「中学年の生徒は、さまざまな幾何的な形を探求し、それらの特徴を吟味するべきである。」

「生徒がいろいろの変換による形の像を形成するのを助けるために、彼らは物理的な対象、薄紙上にトレースした図形、鏡あるいは反射面、グラフ用紙にかかれた図形、動的な幾何ソフトウエアを使うことができる。彼らは、裏返し（線対称）、回転、ずらし（平行移動）の特徴を探求するべきであり、変換の合成の間の関係を調べるべきである。(中略) 例えば、彼らは変換の結果の像が、元の図形のそれとは違う位置、時には違う方向付けを持つ－像は元の図形と同じ辺の長さと角の大きさを持つけれども－ ことに気づくことができよう。」 (pp.233-237)

第３学年から５学年、第６学年から８学年の双方で、鏡を用いた学習活動に関わることを簡約すれば次のようにいえよう。

３－５：形を物語る用語を日常的なものから数学的なものに変換する。
　　　　形を回転、反射させるときに、何が起こるかを視覚化し予想できる。
　　　　具体的な活動によって対称であることを知ったり、表現できる。

６－８：形を物語る特徴を数学的な表現を用いて表す。
　　　　形を回転、反射させたときに、位置や向きが変われど、辺の長さ、角の大きさ、面積が変わらないことを経験的に知る。

対称であることを、裏返す、回す、ずらすという３つの変換により表現できる。

幼稚園入園前から第２学年では「形を感じる、形を知る、対称性を感じる」、第３学年から８学年までは「形を語る用語や特徴を表す、形をより知る、対称性を具体的な活動を通して表す」、第９学年から12学年では「形のもつ特徴を論理を用いて表す、形を語る数学の世界を拡げる、対称性や変換を多様な表現で示す」といえる。

これらの言明を参考にすると、小学校中学年（３－５）段階、中学校初学年（６－８）段階での「二面鏡を用いた図形学習」のねらいは次のようにいえる。

【二面鏡を用いた図形学習のねらい】

３－５：二面鏡を用いて具体的なものや形を映したときに、何が起こるのかを視覚化し予想できる。
二面鏡を用いてできた形やその特徴を、既知の図形やたとえを使って表現したり、長さや角度などを使って表現できる。
二面鏡を用いてできた形を、対称性に注目して説明しようと試みる。

６－８：二面鏡を用いてできる形やその特徴を、数学的な表現を用いて表そうとする。
（例：二面鏡によってはさまれた図形は、鏡によって次々と反射してできた形
基本となる図形の繰り返しによって、さらに鏡を線対称の軸としてできた形）
二面鏡を用いてできた図形ともとになる図形とを比べたとき、変わるものと変わらないものがあることを知る。
二面鏡を用いてできた形の原理を、もとになる図形とできあがった図形との関わりや鏡による対称性（変換）に着目して説明しようとする。

小学校中学年（３－５）段階から中学校初学年（６－８）段階への主たる違いは、形を「何で」物語るかであり、二面鏡を用いてできる形の特徴やそのわけを経験的に具体的に語るか、より数学的に語るかである。二面鏡に何を映すか、映ったものをどのように表現するのか、そしてその表現をどこまで洗練させたものにするのか（他者と共有できるものにするのか）、二面鏡に写った状態の理由をどこまで扱うのか、表現するのか等々、小学校中学年（３－５）段階と中学校初学年（６－８）段階では違いが生じてくる。

そこで、授業構想にあたり、次の点を重視することとした。

【小学校中学年段階】

・二面鏡に「身のまわりのもの」を映すことから導入する。
・二面鏡に「身のまわりのもの」が映った状態を、日常生活にみられることなどでたとえる表現を大切にする。
・二面鏡に「身のまわりのもの」を実際に映し、その様子を見る実験を十分行う。
・二面鏡に映った状態を表現する用語や表現の仕方を、教師の問いかけや一連の授業内で「核となる児童の表現や表現の仕方」を価値づけながら、徐々に洗練したもの、様々な他者に伝達可能なものに変容させていく。

【中学校初学年段階】

・二面鏡に「図形」を映し、数学的な表現を用いて二面鏡に映った状況を示す。
・具体的な実験と思考実験を交互に取り入れるようにする。

・二面鏡にはさまれた図形を部分として、二面鏡に映し出された図形を全体として、部分と全体とを常に意識した見方を行う。
・「なぜ」そのように二面鏡を通して映し出されるのかの理由について、既知の図形の性質を用いて解明しようとする姿勢を高める。

このような立場に立ち、附属浜松小学校では３－５の段階で、附属静岡中学校では６－８の段階で授業実践を計画し、授業実践を行った。

５．二面鏡を用いた算数・数学授業の構想

５．１．附属浜松小学校４年における二面鏡を用いた算数授業

小４の10月から11月にかけて10時間扱いの「角・不思議発見！」という授業を構想する。

この「角・不思議発見！」の単元目標、単元で扱う教材と内容、各授業で行ったことは次の通りである。

(1)「角・不思議発見！」の単元目標

角の概念について理解することで、角を今までとは異なった見方でとらえ、身の回りにある角を意識して探し、測ったり見当をつけることができる。

（情意面）○二面鏡のもたらす事象の不思議さに関心を持つ。さらに、身の回りにある事象に潜む様々な角度に関心をもち、角度に対する感覚を高める。

（認知面）○二面鏡に映る物の像の数は、二面鏡が開けば開くほど多くなることを知る。これより、角の大きさを二面鏡の開き具合、転じて回転の大きさとしてとらえる感覚を高める。

○二面鏡の開き具合は、２枚の鏡の間の距離では正確に他者に伝えることができない。二面鏡の開き具合を正確に伝える手だてとして、「角の大きさ」がある。その角の大きさを表す単位として「度」があり、単位量のいくつ分かで、すべての角の大きさを表すことができる。

○分度器を使えば、早く簡単に正確に身の回りの角の大きさを測ったり、角をかいたりできること

(2)「角・不思議発見！」で扱う教材と内容

○二面鏡の間に物をおいて鏡に映したとき、像の数が鏡の開き具合を変えることでどのように変化してみえるのかを扱う。その際、児童個々にハンディーな二面鏡を持たせ予測をさせたり、十分な実験を行わせる。

○身のまわりのものや事象にはどのような角が存在するのかを調べるために、「数学的探求学習」を設定する。例えば、テレビのリモコンが反応する角度を調べること、学校内外にみられる角の様子を多様な表現で表すことなどを行う。

(3)「角・不思議発見！」の各授業で行ったこと

１時間目：二面鏡により物はどのようにみえるだろうか。

２時間目：三角定規の角と同じ大きさだけ二面鏡が開いたときには、物はどのようにみえるだろうか。

３時間目：二面鏡に映る物の数は、どのように増えていくだろうか。

４時間目：二面鏡の開き具合は、２枚の鏡の間の長さによって正確に他者に伝えられるだろうか。

5時間目：分度器を使って角をはかる方法を学ぼう。
6時間目：分度器を使って角度を測ったり、角をかいてみよう。
7時間目：「私の分度器」を作って、いろいろな角度を測ってみよう。
8時間目～10時間目：身のまわりにはどのような角が存在するのだろうか。
私たちが便利だなと感じることと角との間には関係があるのだろうか。

なお、「角・不思議発見！」の授業に入る前に行った実態調査では、4割ほどの子どもが、角の大きさは角をつくる辺の長さに依存すると捉えていた。

5．2．附属静岡中学校1年における二面鏡を用いた数学授業

中1の9月から10月にかけて14時間扱いの「鏡に映った形から平面図形を探ろう」という授業を構想する。この「鏡に映った形から平面図形を探ろう」の単元目標、単元で扱う教材と内容、各授業で行ったことは次の通りである。

(1)「鏡に映った形から平面図形を探ろう」の単元目標

二面鏡に直線1本を映したときにできあがる様々な形に知的好奇心を抱き、その現象がなぜ生じるのかを追求しようとする。特に、二面鏡に直線1本を映したときにできる正多角形や線対称な図形に着目して、算数で学んだ正多角形や線対称な図形のもつ特徴と比較対照しながら、形を全体から部分へ、部分から全体への双方からとらえることの大切さを学ぶ。形を全体から部分へとらえることにより、辺や角に関わる正多角形の特徴を見いだし、部分から全体へのとらえにより、なぜそのような図形ができるのかの理由づけや作図への強い関心を抱かせる。

(2)「鏡に映った形から平面図形を探ろう」で扱う教材と内容

○ 二面鏡の間に物をおいて鏡に映したとき、像の数が鏡の開きぐあいを変えることでどのように変化してみえるのかを扱う。その際、生徒個々にハンディーな二面鏡を持たせ予測をさせたり、十分な実験を行わせる。
さらに、「～だったらどう映るだろうか」「～のように映る場合は、どのように二面鏡をおいた場合だろうか」のように、命題の仮定や結論を意識した問いかけを重視する。

○ 正方形の4つの線対称軸に沿って二面鏡をおけば、自己同型の様子がみれる。
しかし、今回の授業では線分を繰り返し鏡映させることにより、正多角形が構成されることに焦点をあてる。その理由は、正多角形の中心と隣り合う2つの頂点を結ぶ状態と二面鏡の開いた状態とを同一視させたいためである。

○ 二面鏡でのみえかたと連動させる形で、基本的な図形の作図の方法を確認する。

(3)「鏡に映った形から平面図形を探ろう」の各授業で行ったこと

1時間目～3時間目：二面鏡に正多角形を映し出すおもしろさを探ろう
二面鏡の世界に関連した作図のおもしろさを見いだそう
・二面鏡の世界を覗いてみよう ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2時間
・二面鏡の世界を覗いて気づいたことや考えたことを紹介しあおう ・・・ 1時間

4時間目～11時間目：鏡の図形を追求しよう
・自分の追求を論文にしよう ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3時間
・論文を読んで、グループの仲間の考えを確かめてみよう ・・・・・・・ 3時間
・グループでの話し合いの内容を紹介しあい、問いを解決しよう ・・・・ 3時間

12時間目～14時間目：平面図形を振り返ろう

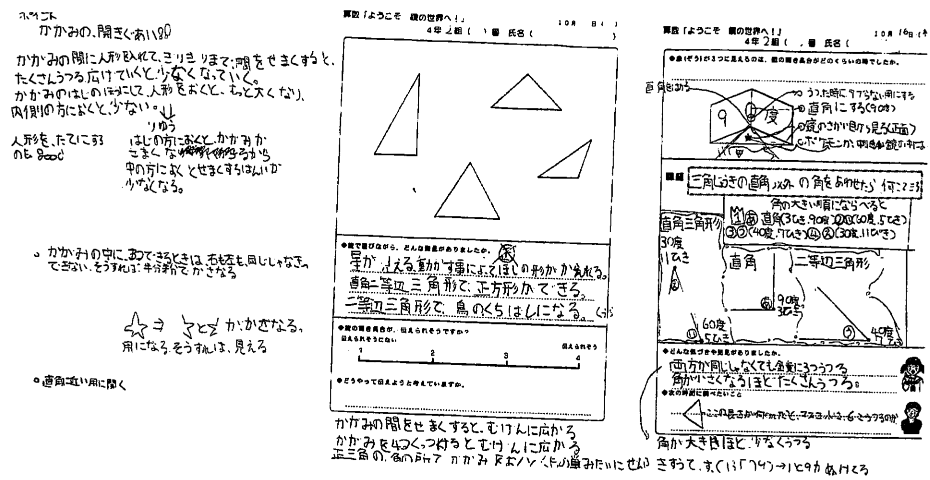
・平面図形について、確認されたことをまとめよう・・・・・・　・・・　2時間

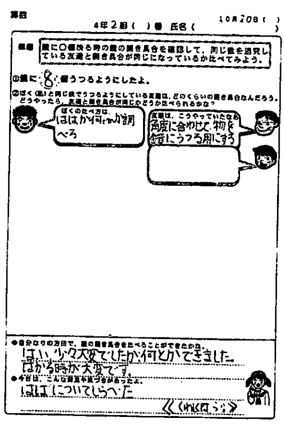
なお、4時間目に入った段階で生徒が抱いた「問い」を分類すると、二面鏡によって映る図形の同定とその原理に迫るものが最も多かった。二面鏡の開き具合により映る図形はどのように変わるのか、開き具合と鏡像には規則性があるのか、星型はどうやったら映せるのか、二面鏡を用いてつくれない図形があるのかなどである。また、二面鏡に映った正八角形や正六角形の様子と関連させながら、正八角形や正六角形の作図に強い関心を抱いたものもあった。

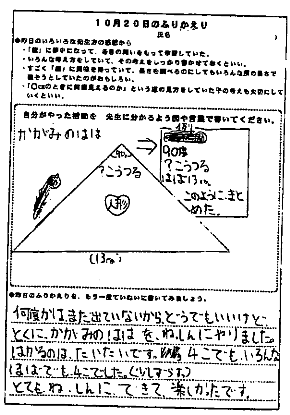
6．特徴的な生徒の筆記物からみた二面鏡を用いた算数・数学授業の実際

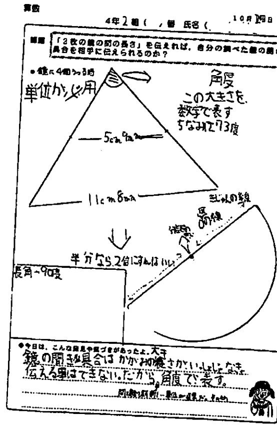
6．1．附属浜松小学校4年における二面鏡を用いた算数授業の実際

二面鏡を用いた一連の授業（10月14日～11月14日）において、児童Aが筆記したものは次の通りである。

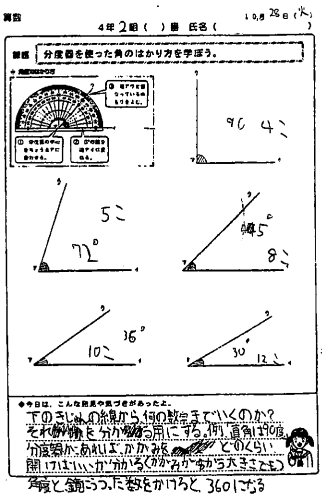


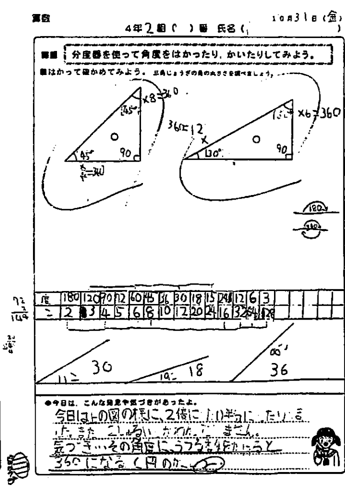


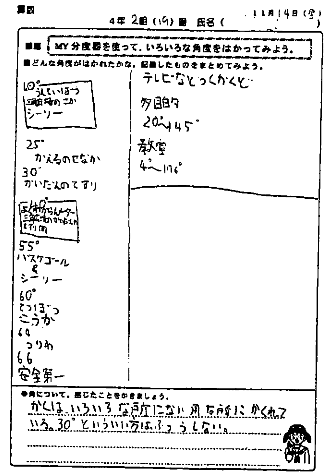




うつる数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
何度	180度	130度	90度	70度	65度	50度	45度	40度	35度	30度	25度
ははが何cm	✕	?	14cm	約12cm	約10cm	約9cm	約8cm	約7cm	約6cm5mm	約6cm	約5cm5mm







児童Aの筆記物を解釈すると、次のような思考の移り変わりがみられる。

1時間目：二面鏡により物はどうみえるだろうか

「かがみの間に人形を入れてぎりぎりまで間をせまくすると、たくさんうつる。広げていくと、少なくなっていく。」という言明より、二面鏡に映った像の数は二面鏡の開き具合によることを指摘している。続いて「かがみのはじのほうにして、人形をおくと、もっと大くなり、内側の方におくと、少ない」という言明より、二面鏡と物の位置によってもみえ方が異なることも指摘している。この指摘は、直角に開いた状態での物のみえ方、自己対称にするための鏡の置き方の指摘などに発展する。

さらに、三角形を二面鏡で映したときの様子を「鳥のくちばしになる」の喩えで述べている。また、「直角二等辺三角形で、正方形ができる」や「かがみの間をせまくすると、むげんに広がる」のように、より数学的な表現で示そうともしている。

2時間目：三角定規の角と同じ大きさだけ二面鏡が開いたときには、物はどのようにみえるだろうか

三角定規の角度によって、二面鏡に映った像の数が「3ひき，90度」「60度，5ひき」「40度，7ひき」「30度，11ひき」のように、角の大きさに応じて整理されている。ここに、二面鏡の開き具合を変えれば映る像の数も変わるという関数的な見方、二面鏡の開き具合を角度によって表現しようとする思考がみられる。

しかし、二面鏡の開き具合の表現の仕方は、「三角じょうぎの直角以外の角をあわせたら、何こできる」という授業の流れに沿ったものである。

3時間目：二面鏡に映る物の数は、どのように増えていくだろうか。

二面鏡の開き具合によって映る像の数が変わることを、映る数の変化に伴って調べる活動が行われている。二面鏡が開けば開くほど映る数が増える、という前時までのとらえから逆の見方をしていることになる。

児童Aの「はばが何cmか調べる」というコメント（吹き出しへの記入）にみられるように、二面鏡の開き具合を2枚の鏡の先端同士の距離で表していることがわかる。なお、2枚の鏡の先端を紙に映して、その長さを実測している。

4時間目：二面鏡の開き具合は2枚の鏡の間の長さによって正確に他者に伝えられるだろうか

二面鏡に物の像が4個映るときに焦点をあて、クラス全体で討議された様子が記録されている。児童Aは3時間目に記した考えを踏まえ、2枚の鏡の先端同士の距離11cm 8mmを「鏡に4個映るとき」として示したと考えられる。

討議を通して、2枚の鏡の長さの取り方は様々なものがとれること、2枚の鏡のなす角度であれば一意であること、角度を測るための分度器のあて方などを学習している。

「鏡の開き具合はかがみの大きさがいっしょじゃなきゃ、伝えることはできない。だから、角度で表す」という児童Aのまとめに、3時間目からの変容がみられる。

5時間目：分度器を使って角をはかる方法を学ぼう

4時間目の後半部に続いて、分度器の使い方を確認する学習が行われている。

「90°　4こ」「72°　5こ」「10こ　36°」「30°　12こ」という表記と「かがみがちがう大きさでも、角度と鏡にうつった数をかけると、360になる」というまとめにみられるように、角度と二面鏡の開き具合、二面鏡の開き具合と映った像の個数（この場合にはもとの物も含めた個数）とを関連させている。

6時間目：分度器を使って角度を測ったり、角をかいてみよう

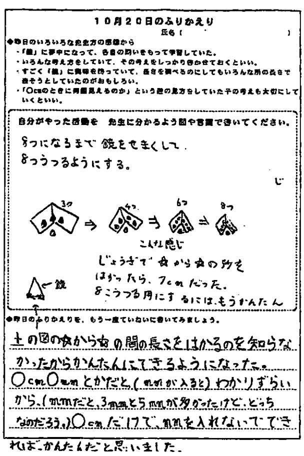
5時間目に行ったことを踏まえ、2枚の鏡のつくる角度と像の個数（自分自身を含めたもの）との関係について、実験しそのデータをまとめている様子がみられる。角度と個数の表があるが、この表は「調べた順序によるもの」（時間的経緯）であり、数値の増減を意識したものではない。

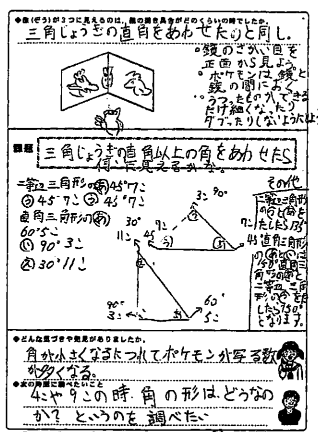
ただし、赤ペンを用いて数表から「15°の倍数」と「個数2の倍数」に共通する特徴をみつけようとしている。関数的な見方からデータのもつ特徴、特に共通点を見いだそうとしている。

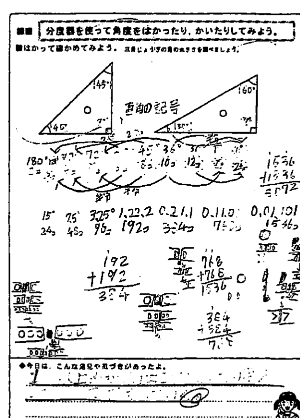
7時間目：「私の分度器」を使って、いろいろな角度を測ってみよう

三角広場から教室内へ、という順路を経て、身の回りにある関心のある角度を測っている様子がみられる。

児童Aの他に、二面鏡を用いた算数学習で特徴的な記録をしているものは次の通りである。なお、紙面の関係上、部分的な抜粋にとどめる。







6．2．附属静岡中学校１年における二面鏡を用いた数学授業の実際

二面鏡を用いた一連の数学授業のうち、「鏡の図形を追求しよう」の段階で作成された数学論文（レポート）に焦点をあてる。静岡中の授業では、各自の抱いた「問い」に対する数学論文が作成され、その数学論文を踏まえたグループでの協議、クラス全体での情報共有と協議、そしてさらなる「問い」の生成（さらに追求したいこと）が行われている。

１本の直線の上に二面鏡をおいたときに多角形をつくることができる、という現象を確認した後、次のようなテーマに基づく数学論文がつくられる。生徒によって挙げられたテーマをグループ分けし、取り組んだ生徒の多い順に挙げると次の①～④のようになる。

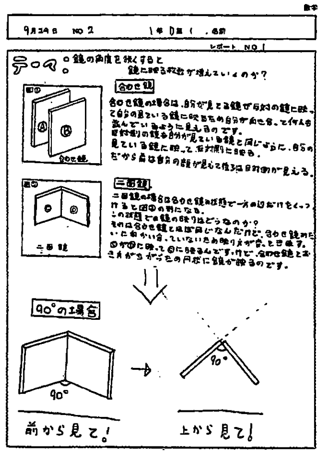
① ２枚の鏡のなす角度を変えたら、どのような多角形が生じるのか。また、それはなぜか。
② 二面鏡によってつくることができない図形はあるのか。
③ 二面鏡によってできる正多角形と作図にはどのような関係があるのか。
④ 二面鏡と直線によって星形がつくることができるのか。

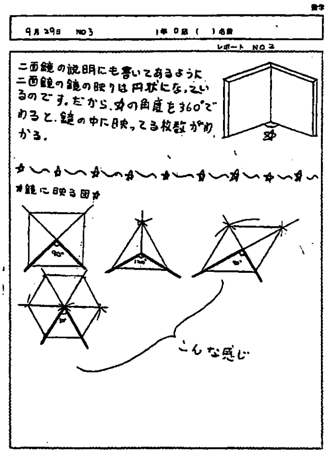
①に関する数学論文

右の生徒Bの数学論文では、鏡の角度を狭くすると鏡に映る枚数が増えていくのかについて論が進められている。合わせ鏡との比較を通して、二面鏡による反射の原理を示している。

また、真上からみた図を考えることにより、部分と二面鏡によりできる図形としての全体との関係を示している。

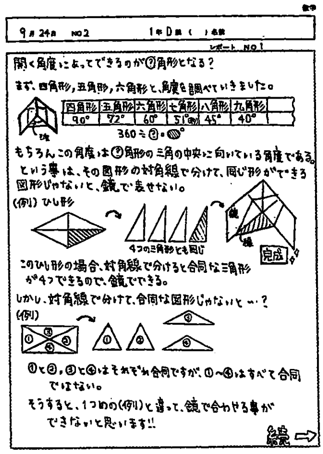
多角形の中心を通る対角線と二面鏡を対応させていることがわかる。

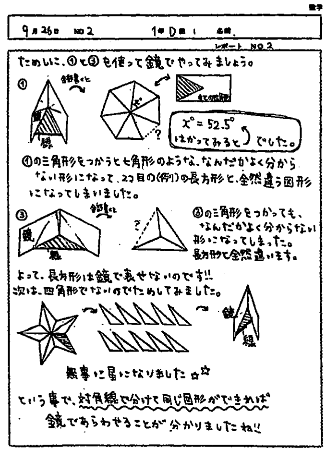




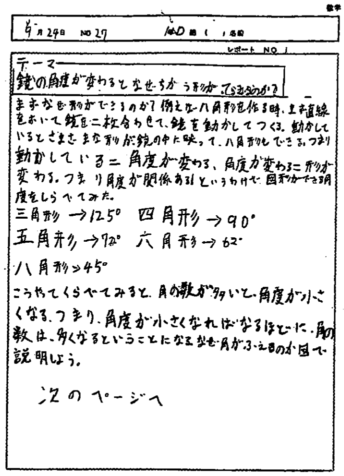
右の生徒Cの数学論文では、２枚の鏡のなす角とできる図形との関係を帰納的に調べると共に、２枚の鏡に対する直線の位置についても言及している。

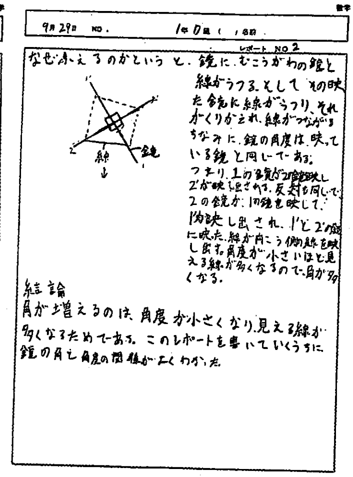
「対角線で分けて同じ図形ができれば鏡であらわせることがわかりましたね」というまとめに代表されるように、内側から構成する見方と外側から分解する見方との関連について述べている。





右の生徒Dの数学論文では、２枚の鏡のなす角度の変化に対する図形のみえ方の変化のみならず、鏡による反射の原理を用いてそのわけを示している。「２の鏡が１の鏡を通して、1'が映し出され、1'と２'に映った線が向こう側の線を映し出す。」という言明にみられるように、記号を用いて理由をできる限り説明しようとしている。



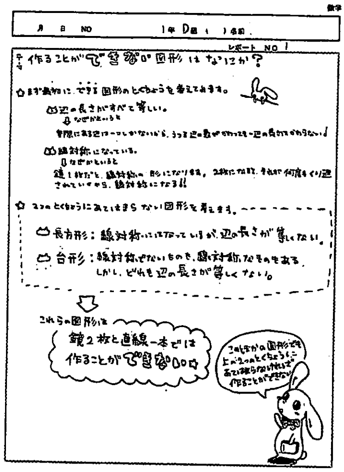


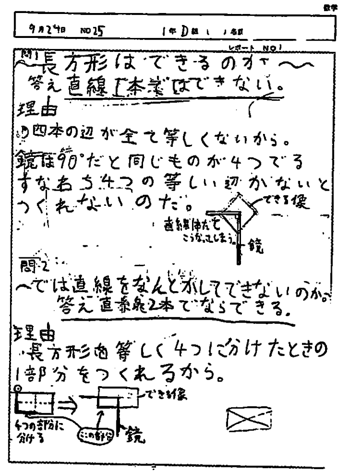
②に関する数学論文

右の生徒E，生徒Fの数学論文では、長方形を映し出せないことが共通に語られている。例えば、生徒Eは二面鏡によって映し出すことができる図形の特徴を、「辺の長さがすべて等しい」「線対称になっている」としてとらえ、その否定形として長方形、台形をあげる。

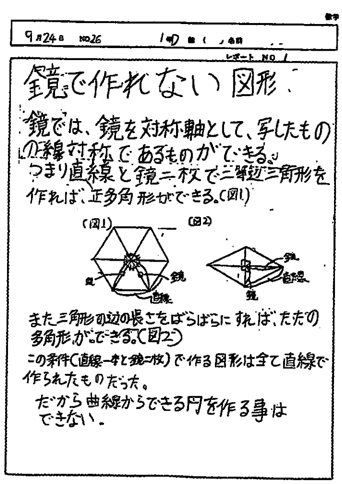
同様の論法を生徒Fも用い、「鏡は90° だと同じものが4つでる。すなわち４つの等しい辺がないとつくれないのだ。」と述べ、否定の論理を用いて長方形を示す。

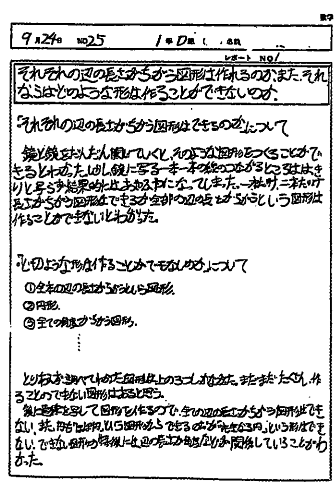
できない場合を示すために、できる場合の特徴を明確にする点は、小学生にはみられない活動である。





この他、右の生徒Gや生徒Hのように「円がつくれない」ことを指摘するものもある。



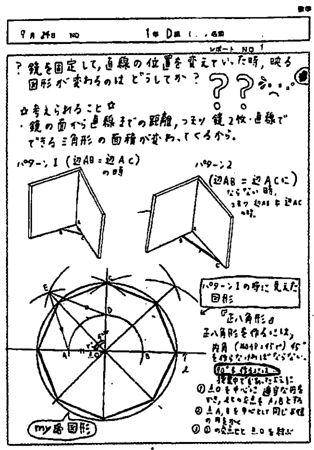


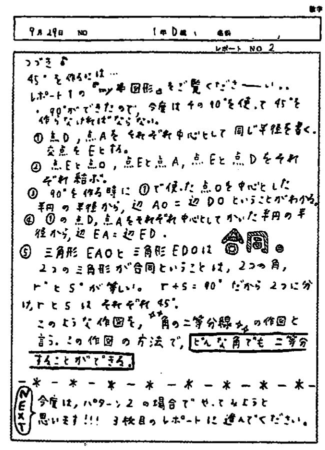
③に関する数学論文

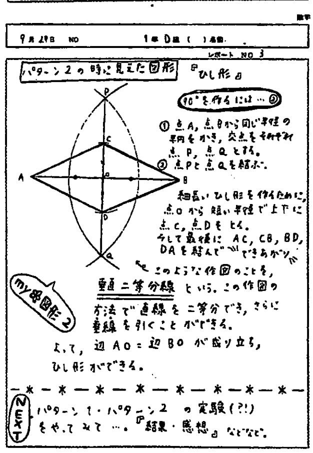
右の生徒Ｉは「鏡を固定して直線の位置を変えていったとき映る図形が変わるのはどうしてか」というテーマに基づいて、数学論文を書き始めている。「鏡２枚と直線でできる三角形の面積が変わってくるから」という理由と共に、鏡と直線によってできる三角形が二等辺三角形であるときと、そうでないときを指摘する。さらに、二等辺三角形の場合と正八角形の作図二等辺三角形でない場合とひし形の作図を対応させていく。

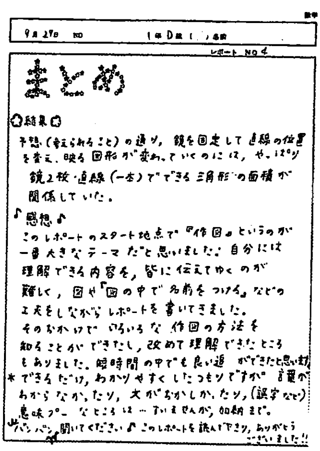
「正八角形を作るには、内角（360÷８＝45°で）45°をつくらなければならない」と述べるが、この内角は正八角形の内角の意味ではなく、対角線の交わりによりできる角であり二面鏡のなす角を表す。

二面鏡でみた現象を、作図の方法に関連づけようとする動きがみられる。



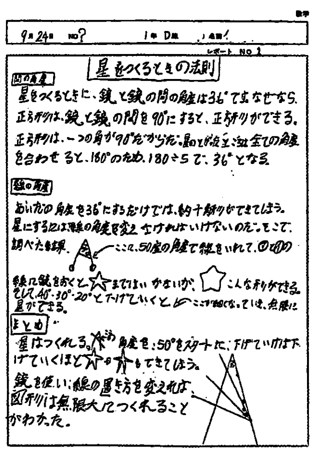


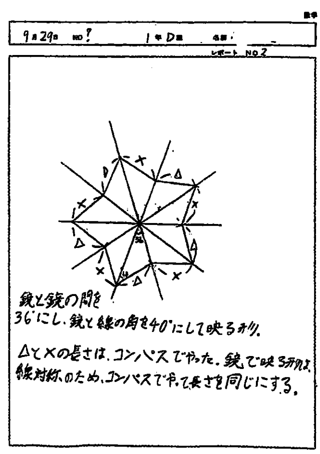




④に関する論文

生徒Ｊは「星をつくるときの法則」と称して、二面鏡のなす角が36°の場合に星がつくれると述べる。「あいだの角を36°にするだけでは約十角形ができてしまう。星にするには線の角度を変えなければいけないのだ」と述べる。さらに、まとめで指摘するように線の角度の変化によりできあがる星の形状の変化を述べる。この背景には、度重なる二面鏡を用いた実験があったと思われる。





6．3．特徴的な生徒の筆記物からみた浜松小と静岡中における算数・数学授業での特徴

浜松小の算数授業においては児童Aの継続的な筆記物を通して、静岡中の数学授業においては生徒B～生徒Jの数学論文を通して、二面鏡を用いた算数・数学授業における児童・生徒の思考を追っていった。二面鏡を用いた授業における小4と中1の児童・生徒の思考の特徴は、次のように表すことができる。

○二面鏡の開き具合により、物の映り方が変わることや、直線からつくれる図形の形が変わることについて、小4、中1とも二面鏡を用いた実験を通して感覚的に理解できる。また、二面鏡の開き具合に対して、どのように物の映り方や図形が変化するのかについて、小4、中1とも関数的な見方により（帰納的な方法）調べようとしている。ただし、数値の増減など組織的に調べる点や、授業における教師の助言や方向付けの影響など、小4と中1では違いがみられる。

○小4においては二面鏡を用いた現象により、驚きや強い関心を抱いて、2枚の鏡の開き具合、そして角度の学習へ移行していった。角度の概念を知るきっかけとして、二面鏡を用いた現象が機能していた。

一方、中1においては二面鏡を用いた現象を通して、算数で学んだ図形の知識を想起し二面鏡により生じる現象の原理を解明しようとしていた。小4での動機付けとしての二面鏡の扱いよりも、より深いレベルで二面鏡により構成される「形」に着目をしている。

○二面鏡を用いた学習において、図形を全体と部分との関わり、その関わりを導く規則性に着目してとらえていくことについて、小4段階では感覚的に、中1段階ではやや論理的に扱っている。中1段階では、二面鏡による生じる現象の原理を解明する場面において、多角形を全体から部分へ、部分から全体への双方の視点からとらえること、それぞれの視点で捉えたことの関連づけを図ることがみられる。ただし、そのとらえや関連づけには個人差がみられる。

○二面鏡を用いた学習において、みえる現象をどのように物語るかについて、小4では身の回りのものへの喩え、中1では数学用語を用いての表現などの顕著な違いがみられた。

7．おわりに

本研究では、二面鏡を用いた図形学習について、小学校中学年から中学校初学年に焦点をあてて考察をしてきた。現在、この段階では、中2以降の論証幾何の学習に向けて、2次元や3次元の様々な図形学習が行われている。算数の中核的な部分であり、算数から数学への移行が徐々に行われるところでもある。岡崎・岩崎(2003)は「算数での図形の学習と、中学校数学における論証の学習の間に、図形の関係を捉える段階を設定する必要がある。」「移行段階に必要な認識や活動として、次のことが挙げられる。T1：かたちや性質を道具として用いる，T2：性質を組み合わせ、図形を決定する　T3:性質を序列化し、仮定の本性を知る」など、算数と数学を橋渡しする図形学習として「作図」を高く位置づけている。岡崎・岩崎に代表されるように、算数と数学の橋渡しに関しても、様々な課題が生じる段階である。

本研究では、二面鏡を用いた学習活動が「図形を分解と構成、全体と部分とを関連づける規則性に着目してとらえること」を強く促し、図形学習において効果的であるという立場をとっていた。また、セネシャルやNCTM　Standardの主張を理論的な論拠に、二面鏡を用いた図形授業のねらいを提示し、小中学校での一連の授業を構想し、その学習の実態を考察した。小

4、中１の特徴的な児童・生徒の動きや思考活動は、前述の通りである。
今後の研究の推進に向けて、次の３点を研究の課題としたい。

① 二面鏡や鏡を用いた図形学習の学習効果について、改めて理論的視座、実践的視座から考察を加えていく。特に「算数から数学へ」の移行期に焦点をあてる。

② 二面鏡を用いた図形学習では「形」が主たるテーマになる。「形」に焦点をあてた算数・数学学習について、範例的教授・学習や範疇的陶冶などの立場からさらに追求を深める。

③ 附属学校園と大学との連携を通して、阿部(1987)の主張する幾何の混迷およびその打開策について、具体的に考察を深めていく。

【附記】本研究は、平成14～16年度　科学教育研究費補助金　若手研究Ｂ「範例的教授・学習理論に基づく数学授業と数学的活動に関する研究」(課題番号14780098，研究代表者　両角達男)、平成15年度　静岡総合研究機構　学術教育研究推進補助金「子どもの「問い」を軸とした算数学習に関する研究」(研究代表者　両角達男）の交付を受けて行われた研究成果の一部である。

本稿執筆にあたり、静岡大学教育学部附属浜松小学校および附属静岡中学校における教育研究協議会等々での諸資料や研究紀要における記述を参考にしている。

【引用・参考文献】

Lyn Arthur Steen編，三輪辰郎訳(2000).「世界は数理でできている」．丸善
(マージョリー・セネシャル著，「形」，pp.205-264所収)

NCTM，筑波大学数学教育学研究室訳(2001).「新世紀をひらく学校数学　－学校数学のための原則とスタンダードー」．筑波大学数学教育学研究室

阿部浩一著(1987).「阿部浩一教授　数学教育著作集」．大阪教育大学阿部浩一教授退官記念会　大阪プリント

岡崎正和・岩崎秀樹(2003).「算数から数学への移行教材としての作図　－経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践－」．日本数学教育学会誌・数学教育学論究 Vol.80，pp.3-27

日本数学教育学会(2003).「第36回数学教育論文発表会　「課題別分科会」発表収録　－今後の我が国の数学教育研究－」．北海道教育大学

日本数学教育学会(2002).「第36回数学教育論文発表会　「課題別分科会」発表収録　－今後の我が国の数学教育研究－」．鳥取大学

H．ヴァルサー著，蟹江幸博訳(2003).「シンメトリー」．日本評論社

黒須康之介著(1991).「平面立体幾何学」．培風館　(初版21刷，第１刷は1957)

伏見康治・安野光雅・中村義作著(1979).「美の幾何学　－天のたくらみ，人のたくらみ－」．中公新書

両角達男編(2003).「数学学習における内省的な記述の効果に関する実証的研究」．研究成果報告書

両角達男(2003).「範例的教授・学習における価値の追求と数学授業への活用」．静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第34号．pp．45-63.

訂　正

P．２３脚注　　数学教育教授⇒数学教育助教授