SURE 静岡大学学術リポジトリ
Shizuoka University REpository

誤差論：平均値の平均誤差の実際的有効性

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2015-05-18 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 久世, 宏明 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00008492

誤差論
―平均値の平均誤差の実際的有効性―

The Theory of Errors
—The Practical Applicability of the Mean Square Error of Mean—

久 世 宏 明
Hiroaki KUZE

(Received Oct. 14, 1985)

Although the mean square error of mean is well defined in the statistical theory, its practical applicability is often disputed in the error theory. The point of assertion is that the actual distribution of errors is not always a normal distribution and that the statistical theory cannot be applied for small number of samples. In the present paper it is shown that the probability indicated by the mean square error of mean is nearly constant even for non-normal distributions and for small samples, as long as the sample size is appropriate. The statistical theory is reviewed, the probability is simulated for non-normal distributions, the error in using a mean for a distributed physical quantity is considered, and a practical procedure treating the reading errors and instrumental errors is proposed.

I. はじめに

この小文においては，同一の物理量を反復して測定する場合の平均値の誤差について論ずる。この問題は通常，初歩的な物理実験の教程の一環として扱われることが多く，一定の処方が確立しているように見受けられる。[1] しかし，以下に見るように，この処方では実際の測定値の扱いにおいて有効に適用し得るか否かが明らかとは言えない。そのため，これを一定の約束事とみなして無批判に適用する傾向が少なからず見られる。一方，これと対照的に，この処方に対する懐疑から平均値の誤差に実際的価値を認めないという立場も少なくない。ここでは，確率論の立場から平均値の誤差の意味を明確にし，さらに実際の測定において平均値の誤差の適用が可能となる条件について調べる。

はじめに，ここで扱う平均値の誤差をめぐる問題点について，その概略を述べておく。以下の議論では，しばらく機械誤差や理論誤差等の系統誤差については考えない。物理量xの測定において偶然誤差のみが問題となる場合，測定を数回繰り返して平均値（算術平均値）

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i \tag{1}$$

を計算する。ここで，nは測定回数，$x_i(i=1,2,\cdots,n)$は測定値，和の記号は添字について1からnまでの和である。$\bar{x}$の誤差を考えるとき，各測定値と平均値との差(残差)$v_i=x_i-\bar{x}$から，

量

$$\sigma_{\mathrm{m}}=\left[\frac{\sum v_i^2}{n(n-1)}\right]^{1/2} \tag{2}$$

を計算し，結果を$\bar{x}\pm\sigma_{\mathrm{m}}$のように書くのが最も普通である。$\sigma_{\mathrm{m}}$は平均値の平均誤差，または単に平均値の誤差と呼ばれる（添字mは平均値meanの頭文字)。

従来の初歩的教程では，誤差分布として正規分布（ガウス分布）を仮定し，かつ測定数nが十分に大きいとして(2)式を導く（Ⅱ節)。正規分布は，誤差の三公理

(i)正負の誤差は同じ確率で起こる

(ii)大きな誤差の起こる確率ほど小さい

(iii)誤差の大きさには限界がある

に基づいて導出される。しかし，実際の誤差がこの三公理を満たすかどうかについては多くの議論があり，経験に根ざす反対論も多い。[2] 通常の物理測定においては，同一の物理量を何百回も測定することは稀であって，3～5回，多くとも10回程度であることが普通である。この程度の測定回数では，各々の場合について誤差分布が正規分布であるか否かについて明確な判断を下すことは難しい。したがって，(2)式を導くにあたって正規分布と十分な測定回数を仮定する限り，実際の場合に(2)式を適用して意味があるかどうか疑問とせざるを得ない。以上がσ_{m}を用いる上での第一の問題点である。これに対しては，Ⅱ節において，確率・統計論的方法によるσ_{m}の導出法を示し，σ_{m}が誤差の分布形，測定回数の多寡によらない統計的意味を持つことを明らかにする。

Ⅲ節では，真の値Xが$\bar{x}-\sigma_{\mathrm{m}}\leqq X\leqq\bar{x}+\sigma_{\mathrm{m}}$の範囲に存在する確率に関し，正規分布の場合および他の形の分布の場合について検討する。中心極限定理を利用して，測定回数nを増やすときに平均値$\bar{x}$の分布が正規分布に近づく様子を調べることにより，必要なnの大きさの目安が得られる。あわせて，計算機シミュレーションにより，上記の確率の値の誤差分布による違いを検討する。平均値の誤差が分布によらず一定の確率的意味をもつためには，ある程度の測定回数が必要とされるが，それは一般に考えられるほど大きな値ではないことが明らかとなる。

Ⅳ節では，針金の直径や板の厚さのように，分布が存在する物理量の測定を行なって平均値を求め，その値から形状によらない物質固有の定数（弾性定数など）を計算する場合の誤差について考える。この場合，直接測定しようとする物理量についていわば真の値が存在しないと見ることができるが，その際でも$\bar{x}$を精度良く求めることに意味があるかどうか，という問題である。

Ⅴ節では，平均値の誤差σ_{m}の大きさが，測定回数nの増大とともに$1/\sqrt{n}$の割合で減少することによって生じる問題の実際的処理方法について検討する。前のⅣ節では平均値を用いることによる理論誤差が問題となり，このⅤ節では測定における読み取り誤差，測定器の器差・公差が問題となる。これらの偶然誤差以外の原因により，測定回数を増やすことによる精度の改善には自ら限界があることが明らかとなる。

Ⅱ．σ_{m}の導出法について

この節では，従来普通に行なわれているσ_{m}の導出法の難点について調べ，それに代わるものとして確率・統計論的方法[3]について述べる。

II-1．従来の方法（大標本的方法）

物理量xの出現頻度に対し，正規分布の確率密度関数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \tag{3}$$

を仮定する。σ_xは標準偏差であり，分布の広がりを表わす。mは分布の期待値であるが，系統誤差を考えなければ，これは真の値Xに一致する。

平均値については

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i=m+\frac{1}{n}\sum(x_i-m) \tag{4}$$

が成り立つ。各測定値の誤差(真の値とのずれ)は誤差の三公理の(i)により正負が同じ割合で生じるから，(4)式の右辺の第2項は$n\to\infty$のとき0となる。よって$\bar{x}=m$が成り立つ。

n個の測定値$x_1, x_2, \cdots, x_n$があるとき，各測定値の平均誤差は

$$\sigma=\left[\frac{\sum(x_i-m)^2}{n}\right]^{1/2} \tag{5}$$

で定義される。また，平均値の平均誤差は

$$\sigma_{\mathrm{m}}=[(\bar{x}-m)^2]^{1/2} \tag{6}$$

で定義される。(6)式に$\bar{x}=\sum x_i/n$を代入すれば

$$\sigma_{\mathrm{m}}^2=\frac{1}{n^2}\left[\sum(x_i-m)^2+\sum_{i\neq j}\sum(x_i-m)(x_j-m)\right] \tag{7}$$

となるが，nが十分大きければ括弧内の第2項は誤差の正負の相殺により0となる。よって

$$\sigma_{\mathrm{m}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{8}$$

が得られる。

(5)式において，真の値mは実際は末知である。そこで，残差$v_i=x_i-\bar{x}$を用いて

$$x_i-m=v_i+(\bar{x}-m)$$

とすれば，(7)式の場合と同様の議論により，十分大きなnに対して$\sigma=[\sum v_i^2/(n-1)]^{1/2}$が得られる。よって，(8)式と合わせ，実際に$\sigma_{\mathrm{m}}$を計算するのに用いられる式

$$\sigma_{\mathrm{m}}=\left[\frac{\sum v_i^2}{n(n-1)}\right]^{1/2} \tag{9}$$

が得られる。

この議論の要点は，測定回数nが十分に大きいとき，誤差の正負の相殺から$\sum(x_i-m)$，$\sum_{i\neq j}\sum(x_i-m)(x_j-m)$がともに0になるとするところにある。しかし，$n$がどの程度大きければよいのか，また3～5回，多くとも10回程度の測定でσ_{m}を用いてよいのかどうかは明らかでない。この点が大標本的方法の難点であり，σ_{m}を用いる誤差評価の一般性に疑念が生じる原因となっている。

II-2．確率・統計論的方法

物理量xの出現頻度分布の確率密度関数を$f(x)$で表わし，

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1\\&E[x]\equiv\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=m\\&V[x]\equiv\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)dx=\sigma_x^2\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

とする。ここで，誤差分布は正規分布に限定せず，任意の分布でよい。$E[x]$, $V[x]$, σ_x はそれぞれ期待値，分散，標準偏差と呼ばれる。

n 回の測定の結果得られる測定値 x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$は各々，確率密度が$f(x_i)$で与えられる確率変数となり，

$$E[x_i]=m, \qquad V[x_i]=\sigma_x^2 \qquad (11)$$

である。演算子Eの線型性を利用すると，平均値（統計学的には標本平均）$\bar{x}$ について

$$E[\bar{x}]=\frac{1}{n}\sum E[x_i]=m \qquad (12)$$

となるから，この意味で $\bar{x}$ により m（母平均）を推定することができる。大標本的方法の(4)式の場合と異なり，測定回数（標本数）n が大きい必要はない。

標本分散 σ を

$$\sigma^2=\frac{\sum v_i^2}{n-1} \qquad (13)$$

によって定義すれば，x_i と x_j $(i\neq j)$ の統計的独立性

$$E[(x_i-m)(x_j-m)]=0 \qquad (14)$$

の仮定の下に

$$E[\sigma^2]=\sigma_x^2 \qquad (15)$$

が得られる。[4] よって，標本分散σ^2によって母分散σ_x^2を推定することができる。

次に平均値の分散を考える。定義により

$$V[\bar{x}]=E[(\bar{x}-E[\bar{x}])^2]=E[(\bar{x}-m)^2]$$

である。これに $\bar{x}=\sum x_i/n$を代入し，(14)式に注意すると

$$V[\bar{x}]=\frac{1}{n^2}\sum_i E[(x_i-m)^2]=\frac{\sigma_x^2}{n} \qquad (16)$$

が得られる。母分散 σ_x^2 は未知であるから，これを標本分散σ^2で置き換え，

$$\sigma_{\mathrm{m}}^2=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\sum v_i^2}{n(n-1)} \qquad (17)$$

として σ_{m}を定義する。このとき，

$$E[\sigma_{\mathrm{m}}^2]=\frac{1}{n}E[\sigma^2]=\frac{\sigma_x^2}{n}=V[\bar{x}] \qquad (18)$$

となるから，σ_{m}^2の期待値は平均値$\bar{x}$の分散に一致する。平均値 $\bar{x}$ の誤差としては，その標準偏差（分散の正の平方根）を用いるのが適当であるから，$\bar{x}\pm\sigma_{\mathrm{m}}$ の表示が適当であるという結論に達する。

以上の確率・統計的議論では，誤差の分布形，測定回数の大きさについては特に制限を設け

ていない。要点は(14)式の $x_i, x_j\ (i \neq j)$ の統計的独立性にあり，これについては議論の余地はあるものの，各々の測定が他の測定に影響を受けないとすれば受け入れやすい仮定である。

従来の大標本的導出法では，n が十分大きいとして $\sum(x_i - m) \to 0$，$\sum\sum_{i \neq j}(x_i - m)(x_j - m) \to 0$ を仮定せねばならなかったが，このような厳しい条件によらなくとも，統計的独立性の仮定のみで平均値の平均誤差を導出できる[5]このことは，誤差に関する初歩的教程においても，もっと強調されてよいように思われる。

ここで，測定値の平均誤差（標本標準偏差）σ と，平均値の平均誤差 σ_m の違いについて述べておこう。σ_m の一般性に対する疑念から，σ を以て平均値の誤差に代え，$\bar{x} \pm \sigma$ なる表示を用いる場合があるが，これは次の二つの意味で好ましくないと考えられる。第一に，σ を誤差とした場合，測定回数を多くしたことにともなう精度の改善が，誤差の数値に反映されない。σ_m を用いれば，誤差の大きさは $1/\sqrt{n}$ の割合で減少する。n が大きい場合に σ_m が他の誤差の要因に比べて小さくなりすぎる問題については，別に解決を図るべきである（V節参照)。第二に，σ^2 は母分散の推定量であって，平均値の分散の推定量ではない。σ_m の場合は平均値 $\bar{x}$ と真の値 X（母平均 m）との差の大きさに対する確率的意味を持つが（III節参照)，σ の場合はそういうことは言えない。したがって，σ_m の実際的な適用可能性（一定の確率的意味をもつこと）が確かめられる限り，平均値の誤差としては σ_m（またはその定数倍）を用いることが好ましい。

III．σ_m の確率的意味

この節では，$\bar{x} - \sigma_m$ から $\bar{x} + \sigma_m$ の範囲に母平均 $E[x] = m$ が存在する確率について考える。誤差の分布形や測定回数によってこの確率が大きく変わるようであれば，σ_m を一律に適用することに問題が生じる。

III-1． 正規分布の場合

誤差分布が正規分布である場合は，平均値 $\bar{x}$ の分布は，よく知られたティ分布で議論できる[6]すなわち，測定回数を n とすれば，確率変数

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\sigma_m} \tag{19}$$

は自由度 $\phi = n - 1$ のティ分布 $f_\phi(t)$ に従うから，$|\bar{x} - m|$ が $t_\alpha \sigma_m$ を越えない確率は

$$P(|\bar{x} - m| < t_\alpha \sigma_m) = 1 - 2\int_{t_\alpha}^{\infty} f_\phi(t)\,dt \tag{20}$$

として計算できる。表1に，$n = 3, 5, \infty$ について $P(|\bar{x} - m| < \sigma_m)$ および $P(|\bar{x} - m| < 3\sigma_m)$ を示す。

表1 正規分布における σ_m の確率的意味

測定回数 n	$P(\lvert\bar{x} - m\rvert < \sigma_m)$	$P(\lvert\bar{x} - m\rvert < 3\,\sigma_m)$
3	57.6%	90.4%
5	62.6	96.0
∞	68.3	99.7

表1から，誤差σ_mの大きさを問題とせずに，確率のみを問題とするとき，測定回数は3～5回で十分であること，また，$\pm\sigma_m$の範囲の確率は約60%，$\pm 3\sigma_m$の範囲の確率は約90%と考えておけばよいことが知られる[7]。

Ⅲ-2. 一般の分布の場合

誤差分布が正規分布以外の場合であっても，測定回数nの増加とともに，平均値$\bar{x}$の分布は平均値m，分散σ_m^2の正規分布に近づいていく（中心極限定理）[8]。したがってnが十分大きければ，任意の誤差分布に対して$P(|\bar{x}-m|<\sigma_m)=68.3\%$，$P(|\bar{x}-m|<3\sigma_m)=99.7\%$とみなすことができる。ここでは中心極限定理を利用して正規分布への近づき方を調べることにより，必要な測定回数を見積る方法を検討する。

いま，確率変数をx，確率密度関数を$f(x)$とする。簡単のため，xは規準化されているものとする。すなわち$E[x]=m=0$，$V[x]=\sigma_x^2=1$である。積率母関数は

$$M_x(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta x}f(x)dx \tag{21}$$

で定義される。$e^{\theta x}$をテイラー展開して

$$M_x(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\theta^k\nu_k \tag{22}$$

ただし

$$\nu_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^kf(x)dx \tag{23}$$

はk次の母積率である。xが規準化されている場合は

$$\nu_0=1,\quad \nu_1=0,\quad \nu_2=1 \tag{24}$$

が成り立つ。標本平均$\bar{x}$を規準化した変数

$$z=\frac{\bar{x}-m}{\sigma_x/\sqrt{n}}=\sqrt{n}\,\bar{x} \tag{25}$$

に対する積率母関数は

$$M_z(\theta)=\left[M_x\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \tag{26}$$

となるので，(22)式より

$$\log M_z(\theta)=n\log\left\{1+\frac{\theta^2}{2}\cdot\frac{1}{n}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!(\sqrt{n})^k}\nu_k\right\} \tag{27}$$

を得る。$\log(1+x)$の展開により次式を得る。

$$\log M_z(\theta)=\frac{\theta^2}{2}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!(\sqrt{n})^{k-2}}\lambda_k \tag{28}$$

λ_kはk次のキュムラントと呼ばれる。最初の数項を書いてみると

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_3=\nu_3,\qquad \lambda_4=\nu_4-3\\&\lambda_5=\nu_5-10\nu_3\\&\lambda_6=\nu_6-15\nu_4-10\nu_3^2+30\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

である。(28)式から

$$M_z(\theta)=\exp\left\{\frac{\theta^2}{2}+\frac{\nu_3}{6\sqrt{n}}\theta^3+\frac{\nu_4-3}{24n}\theta^4+\cdots\right\} \tag{30}$$

となるが，これは $n\to\infty$ のとき正規分布の積率母関数に一致する（中心極限定理)。

(30)式によれば，もとの分布形 $f(x)$ について母積率 ν_3（母歪度)，ν_4（母尖度)，‥の大きさが推定できれば，条件

$$\frac{|\nu_3|}{\sqrt{n}}\ll 1,\ \frac{|\nu_4-3|}{n}\ll 1,\ \cdots \tag{31}$$

によって，必要な n の大きさの目安を得ることができる[9]。表2に，正規分布，一様分布，および指数分布の母積率を示す。正規分布では $\lambda_k=0$ である。 ν_4 までとったとき，一様分布では $n\gg 1$，指数分布では $n\gg 6$ でなければ z は正規分布に従うとはみなせないことになる。

表 2　分布の確率密度関数と母積率

分　布	確率密度	ν_3 (母歪度)	ν_4 (母尖度)	ν_5	ν_6
正規分布	$e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$	0	3	0	15
一様分布	$1/\sqrt{12}\quad(\lvert x\rvert\leqq\sqrt{3})$ $0\quad(\lvert x\rvert>\sqrt{3})$	0	1.8	0	3.9
指数分布	$0\quad(x<-1)$ $e^{-x-1}\quad(x\geqq-1)$	2	9	44	265

III-3. いくつかの分布についてのシミュレーション

表2に示した3種類の分布および確率密度が次の(32)式で与えられる分布の計4種類の分布について，$P(|x-m|<\sigma_m)$ および $P(|x-m|<3\sigma_m)$ を計算機シミュレーションにより調べた。

$$f(x)=\begin{cases}6(x+1)^2 & -1\leqq x<-\frac{1}{2}\\ 6x^2 & -\frac{1}{2}\leqq x<\frac{1}{2}\\ 6(x-1)^2 & \frac{1}{2}\leqq x\leqq 1\end{cases} \tag{32}$$

一様乱数の変換により，各々の分布に従う乱数を1000回発生させたときの分布の様子を図1に示す。シミュレーションでは $n=3, 5, 10$ の各々の場合について，標本平均 $\bar{x}$ を100回計算し，$\bar{x}\pm\sigma_m$，$\bar{x}\pm3\sigma_m$ の範囲に母平均 m が入る回数を数えた。（したがって $n=3$ の場合のデータの総数は300，$n=10$ の場合は1000である。）試行は各々の分布について5回行なった。結果を表3に示す。

表3を見ると，一様分布の場合は，$n=5$ で既に正規分布とほとんど変らない結果が得られている。また，指数分布や(32)式の二山形の分布のように，通常ではあまり起こりそうもない条件の悪い（すなわち正規分布から遠い）分布の場合であっても，$n=5$ であれば，正規分布の場合とあまり違わない確率の値が得られている。参考のため，指数分布からとった標本平均の分布形を $n=3$，10の場合について示す（図2）。(31)式からは $n\gg 6$ であったが，$n=10$ では やや非対称が残っているものの，正規分布にかなり近づいていると言える。

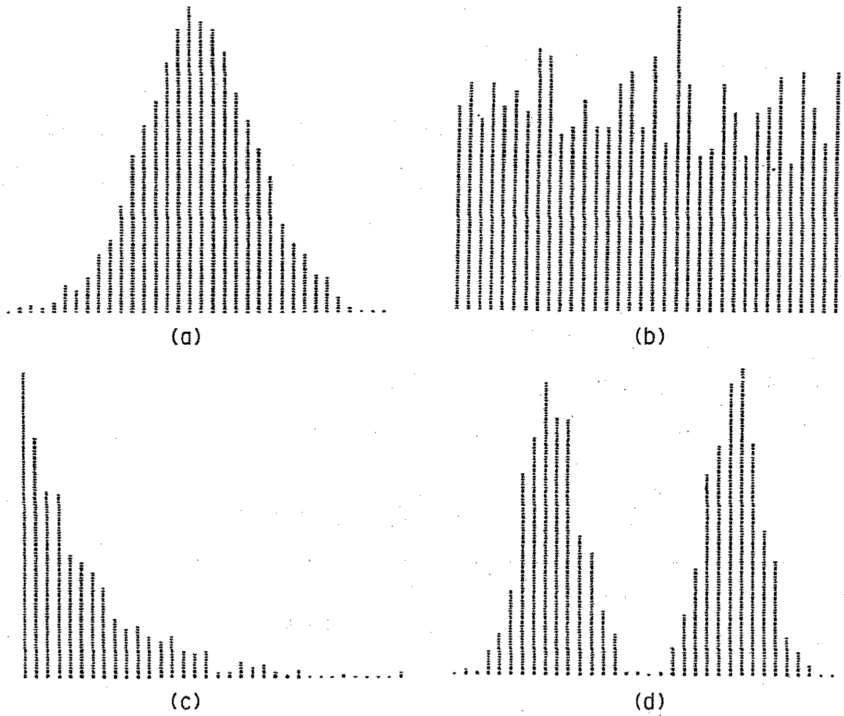

図1 (a)正規分布，(b)一様分布，(c)指数分布，(d)本文(32)式の確率密度をもつ分布。計算機の一様乱数をもとに，1000回の乱数を発生させ，ヒストグラム化してある。

表3 $\bar{x}\pm\sigma_m$，$\bar{x}\pm3\sigma_m$に母平均の含まれる回数（100回の試行中）

分布	測定回数	$\bar{x}\pm\sigma_m$					$\bar{x}\pm3\sigma_m$				
	n	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
正規分布[a]	3	56	58	62	56	54	96	89	92	94	92
	5	64	66	75	65	68	97	97	100	98	96
	10	63	62	68	60	64	100	98	100	100	98
一様分布	3	57	61	62	58	57	90	87	89	91	89
	5	61	67	76	69	69	94	96	97	96	90
	10	63	70	74	64	65	99	98	100	100	98
指数分布	3	49	49	53	42	51	88	83	86	80	83
	5	56	63	61	65	64	83	86	92	86	85
	10	55	67	60	60	63	93	97	98	93	92
(32)式の分布	3	76	71	77	72	70	86	77	83	81	77
	5	63	65	77	72	63	93	93	96	94	90
	10	67	69	72	64	66	97	97	99	100	98

[a] 理論から期待される回数は表1を参照。

表３の結果から見る限り，通常の場合においては誤差分布の形をあまり気にせずに，測定回数 $n \gtrsim 5$ であれば $P(|\bar{x}-m|<\sigma_m)\sim 60\%$, $P(|\bar{x}-m|<3\sigma_m)\sim 90\%$ と考えて、それほど誤りはなさそうである。すなわち，この確率のみに注目すれば，中心極限定理から予想される必要測定回数よりも少ない測定回数でよい。また，この確率の値が誤差分布の形や測定回数（$\gtrsim 5$）によって大きく変らないことが，σ_m を一般的に用いてよい理由となっている。[10)]

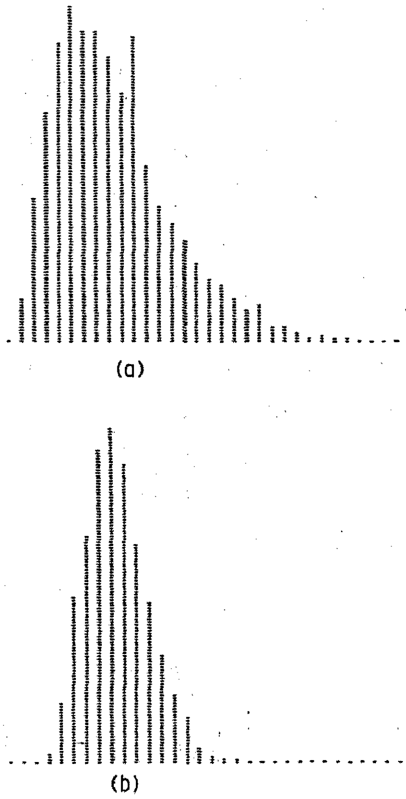

図２ 指数分布の母集団からとった標本平均の分布。(a)標本数３の場合，(b)標本数10の場合。プロットのための平均値の算出回数は(a)が10000回，(b)が2000回である。(a)の分布はかなり非対称であるが、(b)は正規分布に近づいている。

Ⅳ．分布のある物理量

弾性定数などの測定においては，解析に用いる理論は一様な太さの針金や一様な厚さの板などを仮定して組み立てられていることが多い。実験に際しては，針金の太さや板の厚さを数ヶ所において測り，その平均値を以て，理論に仮定した太さや厚さとみなす。この場合，分布のある物理量を平均値で代用することによって，後述のように一種の理論誤差が生じていると考えられる。したがって，平均値の信頼度は測定回数を増やすことにより無制限に改善できるわけではなく，この理論誤差の大きさがその限界を定める。（読み取りにともなう誤差や，測定器具の器差・公差は今は無視する。）

議論をあまり一般化すると分かりにくいので，針金を用いて荷重に対する伸びの関係からヤング率を求める場合を例にとる。この場合，針金の半径が長さ方向に分布していることが問題となる。長さ ℓ，断面積 S の針金に質量 M のおもりを吊したときの針金の伸びを $\Delta\ell$ とすれば

$$E\frac{\Delta\ell}{\ell}=\frac{Mg}{S} \tag{33}$$

の関係がある。E はヤング率（針金を作る金属の種類によって決まる），g は重力加速度である。

針金の半径 r が長さ x（$0\leqq x\leqq \ell$）の方向に

$$r(x)=r_0\{1+\varepsilon(x)\} \tag{34}$$

のように分布しているものとする。$\varepsilon(x)$ は絶対値が１に比べて十分に小さい関数である。平均半径 $\bar{r}$ は

$$\bar{r}=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell r(x)dx=r_0+\frac{r_0}{\ell}\int_0^\ell \varepsilon(x)dx \tag{35}$$

で与えられる。r_0 を平均半径に等しいように選んでおけば

$$\langle\varepsilon\rangle\equiv\frac{1}{\ell}\int_0^\ell \varepsilon(x)dx=0 \tag{36}$$

となり，$\bar{r}=r_0$ である。半径について，予め平均操作を行なって得られるヤング率の値を E_{approx}

と書けば

$$E_{\mathrm{approx}}=\frac{Mg}{\Delta\ell/\ell}\cdot\frac{1}{\pi r_0^2} \tag{37}$$

である。通常の解析はこの式に基づいて行われる。

次に，平均操作を行わずに半径の分布を考慮した場合について，ヤング率を求めてみる。針金の長さdxの微小部分について

$$E\frac{\Delta(dx)}{dx}=\frac{Mg}{\pi r(x)^2} \tag{38}$$

が成り立つ。ただし，針金の自重の影響は荷重に比べて小さいとし，無視する。両辺にdx/Eをかけて積分すれば

$$\Delta\ell=\frac{Mg}{\pi E}\int_0^\ell\frac{dx}{r(x)^2} \tag{39}$$

こうして求められるヤング率をE_{true}と書けば

$$E_{\mathrm{true}}=\frac{Mg}{\Delta\ell/\ell}\cdot\frac{1}{\pi r_0^2}\cdot\frac{1}{\ell}\int_0^\ell\frac{dx}{\{1+\varepsilon(x)\}^2} \tag{40}$$

である。ここで $|\varepsilon(x)|$ が1より十分小さいとすれば，最後の積分は

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ell}\int_0^\ell\frac{dx}{(1+\varepsilon)^2}&=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell(1-2\varepsilon+3\varepsilon^2-4\varepsilon^3+\cdots)dx\\&=1+3\langle\varepsilon^2\rangle-4\langle\varepsilon^3\rangle+\cdots\end{aligned} \tag{41}$$

となる。ただし

$$\langle\varepsilon^2\rangle=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell\varepsilon(x)^2dx \tag{42}$$

などである。よって(40)式より

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{true}}&=\frac{Mg}{\Delta\ell/\ell}\cdot\frac{1}{\pi r_0^2}(1+3\langle\varepsilon^2\rangle-4\langle\varepsilon^3\rangle+\cdots)\\&=E_{\mathrm{approx}}(1+3\langle\varepsilon^2\rangle-4\langle\varepsilon^3\rangle+\cdots)\end{aligned} \tag{43}$$

が得られる。したがって，半径について予め平均操作を行なうことによって，ヤング率に$3\langle\varepsilon^2\rangle$程度の理論誤差が生じることになる。

この理論誤差の大きさと，(35)式の平均半径の誤差に基づくヤング率の誤差の大きさとを比較する。平均半径の測定における測定値の平均誤差をσとすれば，σ^2は次式により見積られる。

$$\sigma^2=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell\{r(x)-\bar{r}\}^2dx=r_0^2\langle\varepsilon^2\rangle \tag{44}$$

平均を求めるためにn回の測定を行なったとすれば，平均値の平均誤差σ_{m}は$\sigma/\sqrt{n}$で与えられるから

$$\sigma_{\mathrm{m}}=r_0\sqrt{\frac{\langle\varepsilon^2\rangle}{n}} \tag{45}$$

となる。したがって，相対誤差は $\sqrt{\langle\varepsilon^2\rangle/n}$ の程度になる。ヤング率の表式では半径は2乗の形で入っているから，誤差伝播を考えると，ヤング率の相対誤差への寄与は$2\sqrt{\langle\varepsilon^2\rangle/n}$となる。この誤差は測定回数$n$の増大とともに減少する。しかし，(43)式における理論誤差 $3\langle\varepsilon^2\rangle$ を下回っ

て小さくしても意味はないと考えられる。その意味で，針金の半径の測定回数nには上限があり，それは次式により定まる。

$$2\sqrt{\frac{\langle\varepsilon^2\rangle}{n}}>3\langle\varepsilon^2\rangle \tag{46}$$

これを解いて

$$n<\frac{4}{9\langle\varepsilon^2\rangle} \tag{47}$$

を得る。すなわち，nの上限は半径のばらつき$\langle\varepsilon^2\rangle$に左右される。$\langle\varepsilon^2\rangle$が小さければ測定回数$n$を増やすことにより精度の向上が期待されるが，$\langle\varepsilon^2\rangle$が大きいときは，ヤング率の誤差は平均値を用いることによる理論誤差$3\langle\varepsilon^2\rangle$によって決まってしまうため，$n$を徒らに増やしても意味はない。

例えば，半径rの値が10%ばらついているとすれば(44)式より$\langle\varepsilon^2\rangle=(0.1)^2$であるから，(47)式によって$n<44$となる。したがって，実際の測定において$n\lesssim10$であるとき，半径のばらつきがかなり大きくても(10%以下の程度であれば)理論誤差の影響は小さく，測定回数を増やすことによる精度改善の意味はあると考えてよい。

一般に，最終的に求めたい物理量が，平均値で近似する物理量のk乗に比例(または反比例)するとき，(47)式に対応する式として

$$n<\frac{4}{(k+1)^2\langle\varepsilon^2\rangle} \tag{48}$$

が得られる。kが大きくなるほど理論誤差の影響が大きく，意味のある測定回数は減少する。[11]

V．精度向上の実際的限界

平均値の平均誤差σ_mに対して，誤差の分布形にかかわらず確率的に一定の意味を持たせるためには，測定回数nが5回程度以上であればよいことがIII節の結果から分かった。これが，測定回数の下限に対する制約である。一方，nの増加にともない，σ_mは$1/\sqrt{n}$の割合で小さくなっていくが，こうして改善されるのは偶然誤差のみであることに注意する必要がある。測定機器の調整不足による機械誤差や，理論が不十分であるための理論誤差は除くとしても，実際の測定に際しては以下述べるような原因により測定精度の向上に限界が存在する。すなわち，前節の議論をも含めて，一般に測定回数には上限が存在している。

限界を定める第一の要因は，測定器の目盛の粗さである。アナログの計器では，最小の目盛の刻みの数分の1から10分の1位まで読み取るのが普通であり，それ以下は読み取れない。それにもかかわらず，nを増やすことにより誤差σ_mが最小目盛の1/100，1/1000と小さくなることが原理的には起こり得るが，[12]これは明らかに具合が悪い。デジタルの計器の場合も，最小表示桁以下で同じようなことが起こる。

限界の第二の要因は，上と密接に関係することであるが，測定器には器差（正しい値からのずれ）が存在することである。器差は，正しいことが知られている測定器との比較等により較正を行なえば取り除けるが，一般に較正は大変な労力を要する作業であるから，実際には計器に表示してある目盛をそのまま使用することが多い。この場合，器差に基づく誤差の限界は，JIS（日本工業規格）等により定まっている公差により評価することになる。すなわち，較正を行なっていない計器は，最悪の場合，公差程度の誤差を覚悟せねばならない。

限界の第三の要因は，分布のある物理量を平均値で近似することによる誤差（Ⅳ節）である。これによって，(48)式のように測定回数 n の上限が定まってくる。しかし，分布の程度があまり大きくない限り，$n=10$ 程度であればこの誤差は無視してよい。

上の第一，第二の要因により，実際の誤差処理にあたっては読み取り誤差 σ_r および公差に基づく誤差 σ_t を考慮する必要が生じる。（r，t は reading，toleranceの頭文字。）σ_r，σ_t の大きさは，測定に使用した機器，測定の状況（物理量の変化の遅速や読み取りの粗さ）によって推定できる。これらと σ_m を比較する場合は，$n \geqq 5$ で $P(|x-m|<\sigma_m)\sim 60\%$（表３）であることを考慮して，$\sigma_r$，$\sigma_t$ の大きさを約60％程度信頼できる大きさにとればよい。（$3\sigma_m$ の場合は，この数値は約90％となる。）そうした上で，実際的な処理法としては σ_r，σ_t と σ_m（または $3\sigma_m$）のうち最も大きいものを平均値の誤差として用いればよいであろう。このようにすれば，確率的意味をあまり損わずに妥当な平均値の誤差を定めることができて，相対誤差の大きさの比較や誤差伝播の計算を統一的に行なえる。σ_r，σ_t との比較を行なうことを前提とすれば，必要な測定回数の上限を予め見積ることもできる。すなわち，数回の予備的測定から測定値のばらつき σ の程度を知り，条件

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > \sigma_r,\ \sigma_t \tag{49}$$

によって n を決めればよい。

Ⅵ．おわりに

この小文では，平均値の誤差の実際的有効性をめぐる問題点について検討を行なった。通常の場合，測定回数がそれほど大きくなくても（$n \gtrsim 5$），また，誤差分布が正規分布でなくても，σ_m には一定の確率的意味

$$P(|x-m|<\sigma_m)\sim 60\%,\quad P(|x-m|<3\sigma_m)\sim 90\% \tag{50}$$

がある。また，分布のある物理量で，いわば真の値が存在しないような場合であっても，(48)式の条件の下で平均値を真の値とみなし，誤差に σ_m を用いることができる。測定回数 n の増大とともに σ_m が小さくなりすぎる懸念については，読み取り誤差や公差に基づく誤差との比較を行なえばよい。以上の理由から，平均値の標準偏差という統計学的意味をもつ σ_m は，測定論における平均値の誤差として（一定の注意の下に）有効に用いることができる。

最後に誤差の教程に関して一言しておこう。Ⅱ節に述べたような大標本論的な σ_m の導出法は σ_m の有効性に関して非常に制限された印象を与える。それにもかかわらず，学生実験等における初歩的誤差理論は，ほとんどの場合この方法で説明がなされてきている。平均値の誤差の正しい理解のためには，数学上の難しさはあるものの，確率・統計論的な導出法が好ましいと考える。[13]

この小文の内容は，物理教室のメンバーとの討論に負うところが多い。原稿を精読して下さった北原隆教授をはじめとする物理教室のメンバーと，資料を提供して下さり，有益な議論をして頂いた統計学の馬場良和教授に感謝します。

文献と補注

1）一瀬正巳，「誤差論」培風館(1953)．影山誠三郎，沢田正三，「基礎物理実験」朝倉書店(1968)．下村健次，他「基礎物理学実験」(増訂版)共立出版(1977)．東京大学教養学部物理学教室編，「物理実験」(七訂新版)学術図書(1983)．など。

2）森村正直，計測と制御，9，489 (1970)．兵藤申一，「物理実験者のための13章」東京大学出版会(1976)，p.102.

3）林周二，「統計学講義」丸善(1973)．白尾恒吉，「確率・統計」朝倉書店(1979)．など。

4）静岡大学教養部物理教室編，「物理実験指導書」(13訂版)(1985)別冊「確率・統計学にもとづく誤差論」．

5）誤差の伝播についても，同様に確率・統計的議論ができる。文献4参照。

6）文献3のほか，W.E.Deming and R.T.Birge, Rev, Mod. Phys. 6, 119 (1934).

7）$3\sigma_m$の3という数字は，統計学でしばしば用いられる3シグマ法による。物理計測論では，このほか，$2\sigma_m$，$2.5\sigma_m$などを用いる場合もある。また，$0.6745\sigma_m$を平均値の確率誤差と呼ぶ。

8）文献3のほか，清水良一，「中心極限定理」教育出版(1976).

9）分布が特殊な形をしていて高次のキュムラントが大きい場合は，更に高次の項を考える必要があるが，通常の誤差分布に現われるような分布に対しては(31)式で十分であろう。図2も参照。

10）このことは，ティ分布による母平均の検定が非正規母集団に対しても経験的に有効であることに対応している。文献3の白尾p.123参照。

11）べき乗以外の場合も(41)式と同様にして平均値のまわりで展開すればよい。

12）測定精度を100倍上げるためには10000倍の測定回数が必要であるから，あまり現実的とは言えない。

13）文献4は，その一つの試みである。