高等学校数学科における「数学的な活用力」の育成を重視した指数・対数関数の学習指導

静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要　No.26 p.35～44（2017）

〈論文〉

高等学校数学科における「数学的な活用力」の育成を重視した指数・対数関数の学習指導

梅田英之*・熊倉啓之**

Teaching Exponential and Logarithmic Function to Develop Ability of Applying Mathematics in High School

Hideyuki UMEDA　Hiroyuki KUMAKURA

Abstract

The purpose of this study is to pursuit desirable teaching to develop ability of applying mathematics in high school through practice, focus on teaching exponential and logarithmic function. First, the authors researched textbooks and previous studies about teaching exponential and logarithmic function, and clarified that it isn't sufficient teaching to develop ability of applying exponential and logarithmic function. Second, the authors researched textbooks in Finland and clarified that there are many problems to develop ability of applying mathematics in the textbooks. Third, the first author practiced a lesson to develop ability of applying exponential and logarithmic function, and got three suggestions on basis findings as follows;

1) it is important to present students with unfamiliar problems that they feel the need to solve,
2) it is important to use the calculator in the mathematics lessons on daily basis,
3) it is useful to make a report of making problem by oneself and solving it.

キーワード：数学的な活用力，指数・対数関数，レポート課題，電卓の使用

1．はじめに

現行の学習指導要領（平成20・21年告示）の算数・数学科の目標には，「活用」に関わって，次のような記述がある（文部科学省，2008・2009）.

> 「～，進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる.」（小学校算数科）
> 「～，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる.」（中学校数学科）
> 「～，それらを積極的に活用して，数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる.」　（高等学校数学科）

いずれの学校段階においても，算数・数学を活用する態度や能力の育成を重視していることがわかる．特に高等学校には，「数学活用」という科目が設置され，その科目の目標にも「～，数学を積極的に活用する態度を育てる.」という記述がある.

さらには，次期学習指導要領に向けての議論において，各学校段階の算数・数学で育成すべき資質・能力の１つとして，「算数の学習を生活や学習に活用したり，学習を振り返ってよりよく問題解決したりする態度」「数学を活用して粘り強く考え，生活や学習に生かしたり，問題解決の過程を振り返って評価・改善したりする態度」「数学を活用して粘り強く考え，数学的論拠に基づき判断したり，問題解決の過程を振り返って評価・改善したりする態度」を挙げている（文部科学省，2016）.

一方で，PISA2012の生徒質問紙調査における高校１年生の「数学の道具的動機付け」に関する指標は，OECD平均0.00に対して，日本は−0.50で，参加国中で下から２番目に低い値であった（国立教育政策研究所，2013）．また，TIMSS2015における生徒質問紙調査において，質問項目「数学を勉強すると，日常生活に役立つ」に対する中学２年生の肯定的な回答の割合は74.1％で，３／４近い割合であるものの，国際平均84.4％に比べると低い．また「将来，自分が望む仕事につくために，数学で良い成績をとる必要がある」に対する肯定的な回答の割合は65.4％で，やはり国際平均81.1％に比べて低い（国立教育政策研究所，2016）.

以上の調査結果から，日本の中学生・高校生は，他国に比べて「数学を活用する態度」に課題があるといえよう.

この要因として，特に高等学校数学科の授業は，試験で点数を取らせることを主な目的としていて，そのために，「問題パターンの把握と，その解法の習得」という形式的な操作の習熟に終始した授業が，多く行

*静岡県立科学技術高等学校
**静岡大学学術院教育学領域

われていることが挙げられよう．高等学校数学科の場合，内容も抽象的になり，現実事象との関連も一見すると薄くなってきているため，試験のための問題演習を繰り返すばかりでは，到底，数学的な活用力は育成されないし，活用する態度も身に付かないであろう．

以上のような問題意識のもと，本研究は，高等学校数学科における「数学的な活用力」の育成を重視した指導のあり方を追究する．特に，本稿では，数学Ⅱの単元「指数・対数関数」の指導に焦点を当てる．この単元に焦点を当てるのは，以下の学習指導要領解説の記述（文部科学省，2009）に見られるように，他の単元と比べて現実事象との関連が深いにも関わらず，後述するように，教科書では，現実事象と関連する記述や問題が僅かしか見られないからである．

「バクテリアの増殖や放射性物質の崩壊など自然現象の中に見られる生成や発展，減衰の様子は指数関数で表されることが多く，このような具体的な事象と関連させることを通して指数関数の有用性を認識させることも大切である．」(p.32)

「常用対数を活用して桁数を調べたり，音の強さの単位（デシベル）や星の明るさ（等星），地震の規模を表す尺度（マグニチュード）など，人間の感じ方の尺度に対数が活用されている事例を挙げたりして，対数関数の有用性を認識させることも大切である．」(pp.32-33)

2．研究目的

本研究は，高等学校数学科における単元「指数・対数関数」に焦点を当て，「数学的な活用力」の育成を重視した望ましい学習指導のあり方を，実践を通して追究することを目的とする．

なお，本研究における「数学的な活用力」とは，先行研究をもとに，次の通り規定するものとする（熊倉他，2016）．

> 解決する必要のある初めて出会うような問題に対して，数学的に解決しようとする態度を持ち，既習の数学の知識・技能や数学的な考え方を使ってその問題を解決するための方法を構想し，必要に応じて文献や ICT 等も使用しながら数学的に処理して結論を導く力．また，導いた結論を振り返って，さらによりよい方法や結論を導こうとしたり，最初の問題をより一般化して問題を発展させようとしたりする態度．

3．研究の方法

次の手順により研究を進める．

(1) 指数・対数関数の指導に関する先行研究を分析する．

(2) フィンランドにおける指数・対数関数についての教科書の記述を分析する．

(3) (1)，(2)の分析結果をもとに，「数学的な活用力」の育成を重視した指数・対数関数の授業を構想して実践し，生徒の反応を分析する．

(4) (3)での考察を踏まえて，「数学的な活用力」の育成を重視した指数・対数関数の望ましい指導のあり方を追究する．

4．活用力に関わる指数・対数関数の指導の先行研究

(1) 活用力に関わる指数・対数関数の教科書の扱い

熊倉（2012）は，単元「指数・対数関数」での教科書（平成 23 年検定）の扱いを分析して，「活用力」に関連する指摘事項として，次の点を挙げている．

ア　対数の利用では，ほとんどの教科書が，「2^{30} の桁数をもとめよ．」といった，計算結果が大きな数になる場合の桁数を，常用対数を利用して求める問題を扱っている．2^{30} の桁数を，簡単な電卓で計算することは困難であるが，関数電卓やパソコン（Excel 等）を使えば，この程度の計算は容易にできる．対数の原理を深める上では価値があるが，学ぶ意義を実感させるという観点からは、必ずしも十分とはいえない．

イ　対数関数の利用として，以下の場面を扱った問題が見られた．

・バクテリアの分裂　・ガラスの通過率

・浄水器の濾過　等

これらの問題は，いずれも指数関数になる事象において，特定の y の値になる x の値や x の範囲を求めるために，対数を利用している．「緩やかな変化」をする対数関数については，コラムの記事として，次の話題を扱っていた．

・星の明るさ　・地震の規模の大きさ

しかし，上記話題を題材とした対数関数を利用した問題は，どこにも見当たらなかった．

以上の分析結果から，「活用力の育成」という観点から見たときに，教科書での扱いは必ずしも十分でないことがわかった．

(2) 活用力の育成に関わる実践研究

ここでは，CINII で「指数」「対数」「利用」「活用」をキーワードにして検索した実践研究について挙げる．

荒川他（2010）は，乗法九九を題材にして，対数方眼紙を使い，数値の規則性を視覚的に確かめる活動を通して，対数の便利さを直観的に理解する教材を提案した．

岡部（1998）は，まず片対数方眼紙を作成させた上で，その方眼紙に，指数関数（等比数列）に近似できるような年次別データをもとにグラフをかかせて，式化する一連の活動を提案した．さらに岡部（1999）は，玉ねぎやジャガ

イモの切り口曲線を，両対数方眼紙を利用して，式化する一連の活動を提案した．

対数方眼紙は，指数関数 $y=a^x$ や，ベキ関数 $y=x^m$ の関数関係を見つける上で，大変有用な手段であり，対数方眼紙を利用した指導は，対数の活用力育成という観点から評価できる実践である．しかし，これらは，対数の利用の1つ「対数方眼紙」に焦点を当てたものであり，関数としての活用の問題とは言えない．

他には，学習指導要領解説に記述されている「バクテリア」「放射性物質」「音」「地震」「星の明るさ」等を教材とした実践研究は見られなかった．以上の結果から，指数・対数関数における「数学的な活用力」の育成を重視した指導が，十分に行われていない実態が推測される．

5. フィンランドの教科書における指数・対数関数の扱い

ここでは，フィンランドの教科書の扱いについて分析する．フィンランドの教科書を対象とする理由は，筆者らが数回にわたってフィンランドを訪問し，フィンランドの数学教育の特徴を調査した際に，教科書の中に，日本の教科書には見られない「活用力」に関わる問題を見いだしたからである．対象とした教科書は，次の1冊で，いわゆる文系用（短い数学）の教科書8冊の中の1冊「数学的モデルⅠ」の項目「指数モデル」に掲載されている問題である（熊倉，2017）．

LUKIOLAISEN MATEMATIIKKA

3 Matemaattisia malleja Ⅰ, WSOY 2005

以下に掲載する問題は，例題として扱われている問題の中から，活用力に関わるものを抽出した．

(1) 生物の個体数に関する問題

A ハタネズミが増加することは，庭園や森林を破壊する要因となる．研究団体は，ハタネズミの増加の様子を調べることにした．最初に，ハタネズミは約350匹いた．ある場所で観測したところ，1年間でおよそ12%増加していることがわかった．この割合で増加し続けるとすると，ハタネズミの個数はどのように変化していくだろうか．変化の様子をグラフに表せ．(p.64)

B とがった角を持つサイは，世界でも最も脅威の動物である．世界自然保護基金 WWF の統計によると，1980年における数は12750頭であったが，1993年においては，2475頭を超える程度の頭数である． (p.70)

a) サイの数が指数関数的に変化したとして，1年間の平均の減少率を求めよ．

b) 同じようにサイの数が変化したとして，1967年におけるサイの数を推測せよ．

C 保全地区では，10年間の鳥の数の変化を監視している．調査を始めてからt年後のおよその鳥の数は，次の式で表される．(p.87)

$$f(t)=5270\cdot e^{0.039t}$$

a) 調査を始めてから1年後と5年後の鳥の数を求めよ．

b) 鳥の数が7000を超えるのは，この式に基づいて計算すると，何年後か．

D フィンランドに生息するサイマーワモンアザラシ（サイマー湖に生息するワモンアザラシ）は，絶滅寸前の動物であり，現在，効果的な保護策が計画されている．森林委員会のデータによると，2004年のアザラシの数は，約270頭である．2020年までに，400頭まで増やすのが目標である．(p.91)

a) 2020年までに目標に到達するためには，1年間あたりの平均増加率は何%か．

b) この割合で増加するとして，350頭を超えるのは何年か．

c) 森林委員会によると，2004年以前は，年間で約2%ずつ増加していたという．これによれば，2000年は何頭いたことになるか．

E A町の人口は2004年に8000人で，その後毎年2%ずつ減少していくと推定されている．一方，B町の人口は，2004年に5000人で，その後毎年4%ずつ増加していくと推定されている．B町の人口がA町の人口に追いつくまでに何年かかるか．(p.92)

個体数の変化に関する問題だけで，豊富な問題群が掲載されていることがわかる．

(2) 物質の量の変化に関する問題

F 薬の有効成分量は，体内に入ると，1時間当たりおよそ1／4だけ減少していく．200㎎の薬を飲んだとして，飲み始めてから12時間後までの薬の有効成分量の変化をグラフに表せ．(p.66)

G ヨウ素の同位体131は放射性物質で，半減期は8日間である．32日間で，放射性物質は何%に減少するか．(p.96)

H リンの同位体32は，放射性物質である．60%の放射物質が崩壊するのに18.9日かかるとき，この物質の半減期を求めよ．(p.97)

I 化石に含まれている炭素の同位体14が，生きている生物に対して次の割合であるとき，この化石は何年前と推定できるか．(p.98)

a) 75%　　b) 10%

（炭素の同位体14の半減期は，5730年である.）

J　ベイコは，炎症を押さえるために抗生物質を飲むように指示された．この薬は，体内で1時間当たり37%減少する．ベイコは50㎎の錠剤をとったとき，体内に残る量が半分になるのはいつか．(p.99)

特に，G，H，Iは，学習指導要領解説にも記述されていた放射性物質に関する問題である．また，F，Jは，薬の体内残量に関する問題で，これも日本の教科書には見られない問題である．

(3)　経済に関する問題

K　ハイディは，46400€で家を購入し，その5年後に58000€で売却した．家の価格は，1年当たり平均して何%上昇したか．(p.67)

L　2000年における家の価格は，46000€で，2000−2006年の期間では平均して年間3.9%価格が上昇している．(p.77)
a) 期間中の家の価格を表す関数式を作れ．
b) 2003年と2006年の価格を求めよ．

M　お菓子の価格は，四半期ごとに3%上昇する．元の価格の2倍になるのに，どのくらいかかるか．(p.93)

N　カレは，5000€を預金していて，1年間で1.0%の利子がつく．1年後，2年後，3年後，10年後の預金総額はいくらか．(p.94)

O　資金には，純利子として，年間2.32%がつく．預金総額が25%増額するのに，何年かかるか．ただし，預金は年の初めに行い，年末に利子がつく．(p.95)

P　1995年における古いアパートの平均価格は880€／m²で，2004年においては1510€／m²であった．もし，次の各場合に，1994年より20年間は同じように価格が変化するとしたとき，両者の価格を比較せよ．(p.110)
a) 直線的変化　　b) 指数関数的変化

Q　カチとリスト兄弟は，それぞれ祖母の遺産の4200€を受け取った．2人は，そのお金を，2.3%の利子が付く定期預金として，銀行に預金することにした．利子には28%の税金がかかる．預金の条件として，この期間中に元金を引き出すことはできないが，利子については，毎年引き出すことが可能である．カチは，3年間は利子を引き出さずにそのまま預金することにした．一方，リストは，毎年利子を引き出したいと考えている．2人の方法による利益を比べよ．3年後に，それぞれの場合の利益はいくらになるか．(p.117)

預金やローンに関する問題は，日本の過去の教科書には見られた（熊倉，2012）が，現行の教科書には，問題としては載っていない．Pの問題は，1次関数と指数関数の変化の違いを理解させる問題である．また，Qは，預金の方法を比較した上で判断させる興味深い問題である．

(4)　地震に関する問題

R　サンフランシスコでは大きな地震があった．1906年4月18日に起きた地震の規模はマグニチュード8.2で，また1989年10月17日に起きた地震の規模はマグニチュード6.9であった．1909年の地震のエネルギーは，1989年の地震のエネルギーの何倍か？
（地震のエネルギーをE，マグニチュードをMとすると，$\log_{10}E=11.8+1.5M$）(p.83)

これは，学習指導要領解説に記述されていた「地震」の問題であり，対数を利用する．実際のデータを利用しているので，リアリティのある問題といえよう．

以上，4つの話題の問題A～Rを挙げたが，多くの問題は，生徒が興味・関心を持てるような問題設定となっている．また，特徴として，数値はきれいな値ではなく，電卓を利用することを前提としたものとなっていて，さらに，関数機能を利用して，指数や対数の値を求める問題も少なくない．例えば，問題Jの解答は，次の通りである．

（Jの解答）
37%減少するので63%になるから，x時間後に半減するとして，

$$50\cdot 0.63^x=25$$
$$0.63^x=0.5$$
$$x=\frac{\log 0.5}{\log 0.63}=1.5002$$

よって，1時間30分後

これらのことから，フィンランドの教科書には，「数学的な活用力」の育成を促進するような指数・対数関数の問題が多く掲載されていることがわかるであろう．

6．「数学的な活用力」の育成を重視した指数・対数関数の指導の実践

4，5での調査・分析を踏まえた上で，指数・対数関数の活用として，授業を構想し実践した．

(1)　授業の概要

① 日時・対象　平成27年12月17日（木）
3限(10:35〜11:25)　50分間
静岡県立高等学校　2年生42名（男37，女5）

② 授業者　梅田英之　（観察者15名）

③ 授業のねらい

指数・対数関数を活用する問題の解決を通して，数学的な活用力，および活用しようとする態度を育成する．

④ 授業で扱う問題と解答例

授業では，次の問題1，問題2を扱う．これらの問題は，フィンランドの教科書問題K〜Qを参考に，現在の日本の実情に合わせて設定した経済に関する問題である．教科書には載っていないので，生徒にとって初めて出会うような問題といえる。

> **問題1**
> イケメンの○田先生は、ポルシェを買いたいと思っています．そこで頭金の200万円を用意しなくてはならないのですが，今100万円しかありません．そこで，梅○先生は，その100万円をAKB銀行に預けることを検討しています．さて何年後に200万円になるでしょうか？　ただし，AKB銀行の金利は，年利4%です．
>
> **問題2**
> その後，超イケメンの○田先生は，3ヶ月複利1%のSKE銀行があることに気がつきました．梅○先生は100万円を，年利4%のAKB銀行か，3ヶ月複利1%のSKE銀行のどちらの銀行に預けると得か迷っています．どちらの銀行に預ける方が，どのくらい得でしょうか．

解決の必要性を持たせるために，問題1では，車購入の頭金を貯める設定とし，問題2では，2つの預金方法のどちらがよいかを判断させる設定とした．

それぞれの問題の解答例は，次の通りである．

<問題1の解答例>

1年後 100×1.04
2年後 100×1.04^2
3年後 100×1.04^3
…
n年後 100×1.04^n

だから，$100 \times 1.04^n = 200$　より，$1.04^n = 2$

$$n = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1.04} = \frac{0.3010}{0.0170} = 17.70\cdots$$

よって，18年後　◢

<問題2の解答例>

SKE銀行の場合を調べる．

3ヶ月後 100×1.01
6ヶ月後 100×1.01^2
9ヶ月後 100×1.01^3
1年後　100×1.01^4
…
3nヶ月後 100×1.01^n

だから，$100 \times 1.01^n = 200$　より　$1.01^n = 2$

$$n = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1.01} = \frac{0.3010}{0.0043} = 69.6\cdots$$

$69.6\cdots \div 4 = 17.4\cdots$

よって，17年6ヶ月

ゆえに，AKB銀行は18年かかるが，SKE銀行は17年6ヶ月で目標の200万円に達するので，SKE銀行の方が得である．　◢

解答例の計算では，電卓と対数表の使用を前提とした．本来は，指数や対数の値を求めることができる関数電卓の使用が望ましいが，生徒が日常的に使用していないために，不慣れな関数電卓の使用は避けた．

⑤ レポート課題

授業後に，以下のレポート課題を提示する．

> **レポート課題**
> 次の例を参考にして，問題を作成し，解答も作ってみましょう．
> 例1)　静岡銀行の預金金利は年利0.3%です．100万円預けると，110万円になるのは何年後でしょうか？
> 例2)　初めてのア○ムでお金を借りたとき，ローン金利は年利18%です．100万円借りると，倍の200万円になるのは何年後でしょうか？

レポート課題のねらいは，授業の結論を振り返って，問題を発展させようとする態度の育成にある。

⑥ 授業を行う上での留意点

授業を行う上で，次の点に留意した．

ア．活動しながら考える時間を十分に確保すること．
イ．生徒同士のやりとりを活発にして，思考をより深めるために，グループ討論の時間を設けること．
ウ．授業者が，説明しすぎないようにすること．

特に，ウについては，数学の授業において生徒が理由を言葉で説明する経験が少ないといわれていることが，授業者の問題意識として背景にある．

(2)　授業の流れ

授業は，以下の①から⑨の流れで計画した．

①　問題1の提示　　②　個人追究
③　手がかり(ヒント)の提示　④　グループ討論
⑤　全体発表　⑥　問題2の提示　⑦　個人追究
⑧　グループ討論　⑨　全体発表

手がかり(ヒント)では，複利計算を知らない生徒のために，1 年後，2 年後の元利合計がいくらになるかを説明する．

なお，授業後には事後アンケートを実施する．質問項目は，以下の通りである．

ア．本日の数学の授業に積極的に参加していましたか．
イ．本日の数学の授業の内容に興味・関心をもてましたか．
ウ．本日の数学の授業の内容が理解できましたか．
エ．対数を活用することのよさを実感することができましたか．

最後に，授業の感想を自由記述形式で書かせる．

(3)　授業の実際

授業の実際の流れは，以下の通りである．（S は生徒，T は授業者の発言を表す．）なお，授業の様子は，ビデオで撮影し記録した．

①　問題 1 の提示

問題 1 の印刷してあるワークシートを配布して，まず 1 人の生徒に読ませて，授業者が解説しながら問題を理解させた．生徒との次のやりとりから，問題 1 に対して，生徒が興味・関心を持った様子が読み取れる（下線部は筆者ら）．

T1:問題を解説させて下さい．ポルシエっていくら位かわかる？
S1(複数):<u>3000 万．1000 万．</u>
T2:自分もインターネットで調べたら，安いのでも千何百万．
S2:<u>200 万じゃ買えないじゃん．</u>
T3:そうそうそう，だからローンを組んで支払おうと思います．分割払いで最初に払うお金のことを頭金と言います．頭金の 200 万円を用意しないとポルシェを買えないのでそれを貯めようということです．それで，自分は楽をして 200 万円にしたいので，銀行に預けて 200 万円にしようという作戦です．

②　個人追究

まずは，各自でじっくり考えさせた．解決に際して，必要があれば電卓を使用してよいと指示した．一部の生徒はすぐに答えにたどり着いた一方で，問題の意味を理解できないで悩んでいる生徒も複数いた．

③ 手がかりの提示

しばらく個人追究の時間をとった後に，解決できていない生徒がまだ多数いたので，途中で次の手がかりを提示した（図 1）．

（万円）　　金利 4%
元金　　　　（年後）
100 → 104　(1)
104 → 108.16 (2)　　104 の 4%

$$104\times\frac{4}{100}=4.16$$

④　グループ討論

まだ，個人で解決できていない生徒も少なくなかったが，解決できている生徒もいたので，4 人班を作ってグループ討論の時間をとり，教え合いや相談する活動を行った（写真 1）．この際，机の配置は風車型にした．

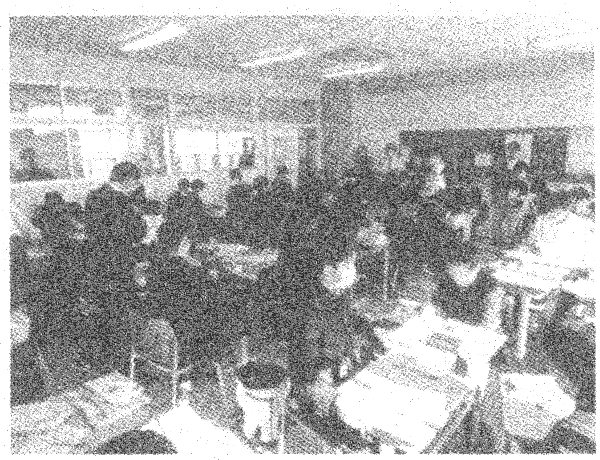

写真 1　グループ討論の様子

グループ討論では，積極的に生徒同士で交流する活動が観察された．グループ討論の途中で，手がかりの説明についてまだ十分に理解していない生徒が複数いたので，さらに補足の説明を行った（図 2）．

元金　利息　　　元利合計

$100+100\times0.04=100+4=104$

$100(1+0.04)=100\times1.04=104$

$104+104\times0.04=104+4.16=108.16$

$104(1+0.04)=104\times1.04$

$\quad=(100\times1.04)\times1.04$

$\quad=100\times1.04^2$

図 2　手がかりの説明の補足の板書

⑤　全体発表

生徒とのやり取りを通して，解答を全体に対して次の通り説明し，全体で共有した．

T4:$100\times1.04^x=200$ の両辺 100 で割るとどうなる？
S3:$1.04^x=2$
T5:これ解ける？
S4:常用対数.
T6:常用対数って何？
S5:両辺に $\log_{10}$ をつける.
T7:これでいい？　それで？
S6:$\log_{10}1.04^x=\log_{10}2$
T8:それでどうするの？
S7:x を前に飛ばす. $x\log_{10}1.04=\log_{10}2$
T9:それで？
S8:常用対数表を使う.
T10:常用対数表ってどこにあった？
S9:教科書の後ろ.
T11:$\log_{10}1.04$ ってどこをみればよかった？
S10:左が 1.0，そして 4 番目で，0.0170.
T12:$\log_{10}2$ は？
S11:0.3010
T13:この後どうする？
S12:$x=0.3010\div0.0170=17.7\ldots$
　　だから，18 年後.

⑥　問題 2 の提示

次に，問題 2 が印刷してあるワークシートを配布して，まず 1 人の生徒に読ませて，授業者が解説しながら問題を理解させた.

⑦　個人追究

ほとんどの生徒は，問題 1 の解法を参考にして，対数を用いて解決することができていた．そのため，当初予定していたグループ討論による活動は割愛した.

⑧　全体発表

1 人の生徒を指名し，黒板に板書・説明させた．板書した内容は，次の通りである（図 3）.

　　　3 ヶ月　　6 ヶ月
100 → 103 → 104.03 → …
$100\times1.01^x=200$
$1.01^x=2$
$x=\log_{1.01}2$
$=\dfrac{\log_{10}2}{\log_{10}1.01}=\dfrac{0.3010}{0.0043}=70$
70÷4=17　あまり　2
よって，17 年 6 ヶ月

図 3　問題 2 の解答の板書

この結果から，SKE 銀行の方が早く 200 万円に到達して，得であることを全体で確認した。

なお，授業後に，事後アンケートを実施するとともに，提出した場合にのみ加点するレポート課題を提示した.

7．授業の考察

授業時に生徒が記述したワークシート，事後アンケートの結果，および提出されたレポート課題を分析・考察し，「数学的な活用力」の育成を重視した指数・対数関数の望ましい指導のあり方を追究する.

(1)　ワークシートの分析

①　問題 1 のワークシート

まず問題 1 に対する生徒のワークシートの記述を分析すると，解決の方法を次のア～エに分類することができた.

ア　対数を用いた方法（板書で説明した方法）9 人
イ　電卓を用いた方法　9 人
ウ　筆算を用いた方法　21 人
エ　その他（白紙等）3 人

アの方法は，授業者が期待する方法であったが，9 人（21%）しかいなかった．このことから，個人追究の段階では，対数関数を活用しようとした生徒は約 2 割しかいないことがわかる.

一方，イ，ウの方法は，手がかりで示した 1 年後，2 年後に続けて，3 年後，4 年後，…の元利合計を順に計算して求め，200 万円に達する年を調べようとする方法である．計算するのに，イは電卓を用いたと推測できる方法（図 4），ウは筆算を用いた方法（図 5）である.

元金 100万円

1年後　100 → 104
2年後　104 → 108.16
3年後　108.16 → 112.4864
4年後　112.4864 → 116.985856
5年後　116.985856 → 121.66529084
6年後　121.66529084 → 126.5329024736
7年後　126.5329024736 → 131.594218572544
8年後　136.85
9年後　142.33
10年後　148.02
11年後　153.94
12年後　160.10
13年後　166.50
14年後　173.16
15年後　180.09
16年後　187.29
17年後　194.79
18年後　202.58

図 4　電卓を用いた方法イ

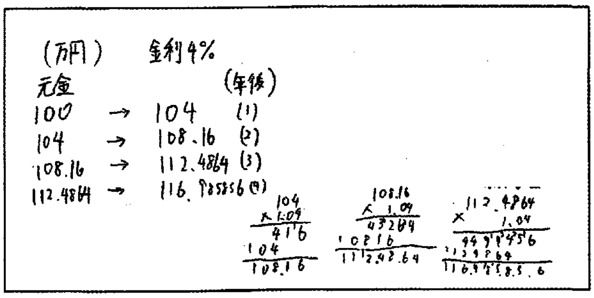

図5　筆算を用いた方法ウ

イ，ウの方法は，確かに効率的な方法とは言えないが，問題の答えを求めることは可能であり，地道に18回計算を行って答えを求めている生徒は，問題に取り組む意欲や粘り強く追究する姿勢という点で，むしろ大いに評価されるべきであろう．授業中の生徒の様子からも，意欲的に取り組む姿が観察された．この要因として，扱った問題が教科書には載っていないもので，生徒にとっては初めて出会う問題であったこと，現実事象と関連付けた設定で，生徒にとって解決の必要性の感じられる問題であったことが挙げられるであろう．

一方で，授業者は，電卓を使用してよいことを指示したにもかかわらず，21人（50%）の生徒が，ウの方法，すなわち筆算で求めていたのは予想外であった．これは，数学の授業で日常的に電卓を使うことが少ないこともあり，「数学の問題を解くときは，電卓を使用しない」という暗黙のルールを，生徒が作ってしまっているからかもしれない．このような生徒の考えを改めるには，もっと日常的に電卓を使用する機会を増やすことが重要であると考える．

② 問題2のワークシート

次に，問題2に対する生徒のワークシートの記述を分析すると，授業時に観察されていたように，37人の生徒（88%）が，SKE銀行の場合の200万円に到達する期間を，対数を活用して求めることができていた（図6）．

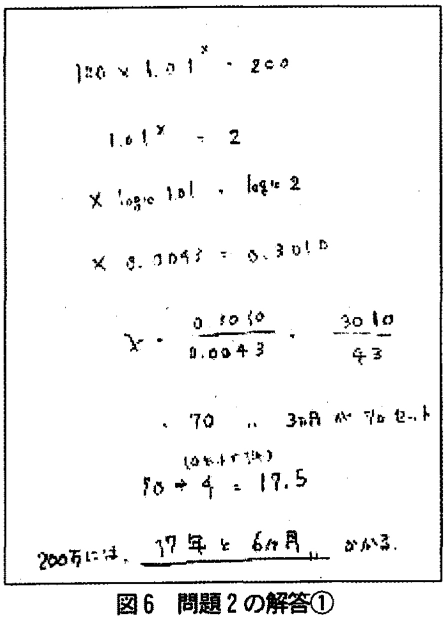

図6　問題2の解答①

一方，「どちらの銀行がどのくらい得か」についてまで，きちんと記述しているものは11人（26%）であった．その中で特に「どのくらい得か」については，授業でもきちんと扱わなかったが，次のような計算をしている生徒がいた（図7）．

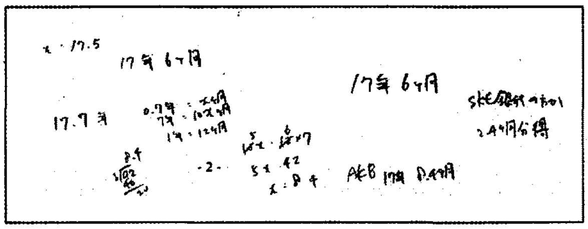

図7　問題2の解答②（一部抜粋）

この生徒は，問題1の解答に戻って，AKB銀行の場合を四捨五入する前の「17.7年＝17年8.4ケ月」とした上で，SKE銀行の方が「2.4ケ月分得」としている．このような解答を全体で取り上げて，実際に銀行で預金した場合の利息の付き方について議論してもおもしろかったであろう。

(2) 事後アンケートの分析

① 質問項目の分析

授業後に実施した事後アンケートの各質問項目の選択肢は，以下の通りである．

A. そう思う
B. どちらかといえば思う
C. どちらかといえばそう思わない
D. そう思わない

調査結果は，表1の通りであった．

表1　事後アンケートの結果　（数値は%）

質問項目	A	B	C	D
授業に積極的に参加したか	45	45	7	3
授業の内容に興味・関心を持てたか	50	43	7	0
授業の内容が理解できたか	47	47	6	0
対数を活用することのよさを実感できたか	43	51	6	0

表1の結果から次の点が指摘できる．

ア　「授業に積極的に参加したか」および「授業の内容に興味・関心を持てたか」という質問に対しては，いずれも90%以上の生徒が肯定的に回答している．すなわち，問題に対して意欲的に取り組んだ生徒の実態が，アンケート結果からも読み取れることがわかる．

イ　「授業の内容が理解できたか」という質問に対

して，94％の生徒が肯定的に回答している．問題自身は，生徒にとって初めて出会う見慣れない問題であったにもかかわらず，理解できた生徒が多かったことは，生徒にとって適度な難易度であったといえる．

ウ　「対数を活用することのよさを実感できたか」という質問に対しても，94％の生徒が肯定的に回答している．この結果から，この授業を通して対数関数を活用しようとする態度が育成されたことが推測される．なお，アンケートの質問では「対数」のみを強調したが，問題解決においては，1.04^xなど，指数関数の考えも活用している．その意味では，指数・対数関数の活用力や活用する態度の育成にもつながったと考える．

② 自由記述の分析

次に，授業の感想を分析したところ，次のような記述があった．

- 問題文がおもしろく工夫してあって，文章題がきらいなぼくも楽しくできた．
- 対数を用いることで面倒くさい計算も容易に行うことができる場合があることが実感できました．
- 数学ってやっぱよくつかうのかなと思った．
- 最初は何をしているかさっぱり理解できませんでしたが，板書や自分で考えることで理解できたのでよかったです．グループにすることで話し合いもしやすく様々な考え方あることがわかりました．
- 年利でもうけようという考えよりも，普通に月１万ずつ預金した方が早いとわかった．

これらの記述からも，問題に興味・関心を持って取り組んだ様子や，対数（一般に数学）を活用することのよさを感じた様子が読み取れる．さらには，個人で考える活動やグループで交流する活動を評価する記述も見られた．また，問題の結果を自分なりに評価する記述も見られた．

(3)　レポート課題の分析

授業後のレポート課題は，提出が義務でないこともあり，42人中12人（29％）の生徒が提出した．提出した生徒の多くは，数学を得意としている．その中で，特徴的な生徒のレポートを以下に挙げる．

① Y·Mさんのレポート

【問題】ジャニーズで国民的アイドルの梅〇君は，その優しい性格と甘いマスクを武器にお金を金利無しで借りようとしています．しかし，世の中，彼の顔ほど甘くはありません．その話を聞いた相手は怒り狂い10分で利息10%にすると言ってきたのです．今現在借りたお金が100万円とすると，彼の借金が1000万円を超すのは何分後でしょうか．

（解答）　$1.1^x=10$

$x\log_{10}1.1=\log_{10}10$

$$x=\frac{\log_{10}10}{\log_{10}1.1}=\frac{1}{0.0411}\approx 24.15$$

答　10分×25＝250分（4時間10分後）

この生徒は，普段宿題を出さないことが多いが，この課題には興味を持ったようで誇らしげに提出した．作った問題の特徴は「10分で10%の金利」という非現実的な設定で，授業で扱った「年4%」「3ヶ月1%」の部分を発展させている．

② K·Mさんのレポート

【問題】僕からお金を借りると，金利は年利30%です．10万円借りると，100万円になるのは何年後でしょうか．

（解答）　$10\times1.3^x=100$

$1.3^x=10$

$x\log_{10}1.1=\log_{10}10$

$$x=\frac{\log_{10}10}{\log_{10}1.1}=8.7762$$

答　9年後

この生徒は数学が好きで，数学の授業には積極的に取り組んでいる．作った問題の特徴は，預金ではなく借金の問題に変形し，「金利30%」としている点である．僅か9年で返済額が10倍になるという結果に対して，レポート提出時に驚きの感想を述べていた．自分でこの問題を作って解く活動を通して，金利が高いことが借金の増大につながることを，実感できたと考えられる．このような経験が，数学的に活用する態度の育成につながるものと考える．

③ S·Mさんのレポート

【問題】あなたは千円札を1枚××銀行に預けました．××銀行の年利は2.5％です．預金が1億円になるには何年後か．

（解答）　$1000\times1.025^n=10^8$

$n\log_{10}1.025=\log_{10}10^5$

$$n=\frac{5}{\log_{10}1.025}$$

n＝466.2497912　　答　467年後

この生徒も数学が得意で，数学の授業には積極的に取り組んでいる．作った問題の特徴は「1000円→1億円」になる年数を問う点で，授業で扱った「1万円ずつ→200万円」よりも大きな数値に変形している．恐らくは，自分が実際に知りたいと感じた問題であったのであろう．この生徒も，レポート提出時に，497年もかかるという結果を見て，現実的ではないと感想を述べていた．

④ J·Tさんのレポート

【問題】あなたは友人に年利x%で100万円貸しまし

た．友人は約束を守ったので5年後に150万円で返してきました．あなたは何%の年利をつけたのでしょうか．（小数第2位まで求めましょう．）

（解答）　$100 \times x^5 = 150$

$$x^5 = 1.5$$

$$\log_x x^5 = \log_x 1.5$$

$$5 = \log_x 1.5 = \frac{\log_{10} 1.5}{\log_{10} x}$$

$$\log_{10} x = \frac{\log_{10} 1.5}{5} = \frac{0.1760}{5} = 0.03521$$

常用対数表より　x=1.08　　答．1.08

この生徒も数学ができる生徒で，どの教科の授業にも積極的に取り組んでいる．作った問題の特徴は，「金利を求める」という設定にしていた点で，このような問題を作ったのはこの生徒だけであった．

以上，提出されたレポート課題の内容を概観すると，金利を変形するのに，現実に近い金利と，非現実的な金利とが見られた．どちらの場合も，「もし～だったらどうなるのか」という知的好奇心から，問題を作ったものと考えられる．このように，自分が知りたいことを数学を活用して調べる活動は，まさに「数学的な活用力の育成」につながるものであるといえるであろう．

8．本研究のまとめと今後の課題

(1)　本研究のまとめ

7で考察した結果をまとめると，「数学的な活用力」の育成を重視した望ましい指導のあり方として，次の3点を挙げることができる．

① 生徒に提示する問題を，生徒が初めて出会うようなもので，かつ解決の必要性の感じられる問題設定とすることは，生徒が意欲的に問題に取り組む上で重要である．

② 生徒は「数学の問題解決では電卓等を使用しない」という意識を持っている傾向があるため，数学の授業の中で，必要に応じて電卓等の道具の使用を日常化することが，「数学的な活用力」を育成する上で重要である．

③ 「問題作り」のレポート課題を出すことは，授業で扱った問題を発展させて，自分で解決したい問題を作って考える活動が実現でき，「数学的な活用力」および活用する態度を育成する上で効果的である．

(2)　今後の課題

今後の課題として，次の点を挙げることができる．

① 本実践では，レポート課題の提出者が12人しかいなかったが，提出数をもっと増やす方策を検討する必要がある．

② 指数・対数関数には，他にも多くの現実事象と関連した題材があるので，これらを教材化して実践し，「数学的な活用力」の指導のあり方をさらに追究する．

③ 指数・対数関数以外の単元においても，「数学的な活用力」の育成を重視した指導のあり方を，実践を通して追究する．

なお，本研究は，科学研究費基盤研究(C)「高等学校数学科における活用力育成をめざした教材の開発と指導に関する研究」（研究代表者：熊倉啓之，課題番号 26381193）の成果の一部である．

引用・参考文献

荒川悦雄・相澤則行・鴨川仁(2010)「乗法九九を題材にした対数の視覚教材」日本数学教育学会誌数学教育，第92巻7号．pp.69-70.

熊倉啓之(2012)「学ぶ意義を実感させる対数および対数関数の指導に関する研究」，第45回数学教育論文発表会論文集(第2巻)，pp.689-694.

国立教育政策研究所(2013)『OECD 生徒の学習到達度調査～2012年調査分析資料集～』pp.37-52.

国立教育政策研究所(2016)『TIMSS2015 算数・数学教育の国際比較』pp.98-122.

熊倉啓之・國宗進・柗元新一郎・梅田英之・須藤雄生・富田真永・山本達也・横澤克彦(2017)「高等学校における「数学的な活用力」の育成を重視した学習指導」静岡大学教育学部研究報告教科教育学篇，第48号，(印刷中)．

熊倉啓之・國宗進・柗元新一郎・梅田英之・須藤雄生・富田真永・山本達也・横澤克彦(2017)『フィンランドの活用力育成に関わる高等学校数学教科書の問題』，pp.9-18.

Maarit Peräsalo / Ritta Solo / SaijaIsotalo / Hilkka Wuolijoki (2005), MAB 3 LUKIOLAISEN MATEMATIIKKA, Matemaattisia malleja Ⅰ, WSOY, pp.64-130.

文部科学省(2008)「平成20年告示中学校学習指導要領」

文部科学省(2008)「平成20年告示小学校学習指導要領」

文部科学省(2009)「平成21年告示高等学校学習指導要領」

文部科学省(2009)「高等学校学習指導要領解説数学編　理数編」実教出版.p.32-33.

文部科学省(2016)「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」中央教育審議会.

岡部進(1998)「社会現象の教材化-年次別データ，数列，片対数方眼紙，関数電卓を活用して-」日本数学教育学会誌数学教育，第80巻1号．pp.15-22.

岡部進(1999)「ベキ関数の日常性と有用性について-玉ねぎやジャガイモの切り口曲線の式化を通して-」日本数学教育学会誌数学教育，第81巻11号．pp.10-16.