

統合的・発展的に考える活動を重視した中学校数学科における図形指導

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-05-24 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 鈴木, 直, 加藤, 健二, 熊倉, 啓之 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00010138

統合的・発展的に考える活動を重視した中学校数学科における図形指導

鈴木直*・加藤健二*・熊倉 啓之**

Geometry Teaching to Emphasize Activities of Thinking Comprehensively and Expansively in Junior High School

Tadashi SUZUKI, Kenji KATO, Hiroyuki KUMAKURA

Abstract

The purpose of this study is to pursue the geometry teaching through activities of thinking comprehensively and expansively in junior high school. First, we considered useful materials for activities of thinking comprehensively and expansively. Second, we practiced lessons with our materials and pointed that activities of classifying methods of problem solving was important and so on. Third, we analyzed change of attitude about thinking comprehensively and expansively and found that students got attitude of thinking comprehensively and expansively through many activities. Finally, we gained three suggestions as follows;

- 1) Devising the materials that students appreciate generalization,
- 2) Doing activities of classifying methods of problem solving,
- 3) Teaching continuously through activities of thinking comprehensively and expansively.

キーワード：統合的・発展的に考える活動，多角形から多角形をくり抜く，一般化する

1. はじめに

次期学習指導要領の改訂に向けて設置された中央教育審議会の「算数・数学ワーキンググループ」において審議された内容が、2016年8月に「審議のとりまとめ」として発表された。この中で、小学校、中学校、高等学校における「数学的な見方・考え方」が、次のように規定された（下線部は、筆者ら）。

〈小学校〉事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えること。

〈中学校〉事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えること。

〈高等学校〉事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的、体系的に考えること。

共通して、「統合的・発展的に考える」という表現が使われていて、次期学習指導要領において重視されていることが読み取れる。

この表現は、今回が初めてではなく、過去の学習指導要領でも、次のように使われていたことがある（文部省、1968・1969・1970）。

【昭和43～45告示 算数科・数学科目標】

〈小学校〉日常の事象を数理的にとらえ、筋道を立てて考え、統合的、発展的に考察し、処理する能

力と態度を育てる。

〈中学校〉事象を数学的にとらえ、論理的に考え、統合的、発展的に考察し、処理する能力と態度を育成する。

〈高等学校〉事象を数学的にとらえ、論理的に考え、統合的、発展的に考察し、処理する能力と態度を育成し、また、社会において数学の果たす役割について認識させる。

この後の学習指導要領の目標では、この表現はなくなりましたが、次期学習指導要領改訂に向けて、数学科で育成すべき資質・能力の検討がされる中で、あらためて、統合的な考え方・発展的な考え方の重要性がクローズアップされるようになったといえよう。

本研究は、この「統合的・発展的に考える」ことに焦点を当て、中学校数学科における統合的・発展的に考える活動を重視した図形指導のあり方を追究することを目的とする。

2015年度は、以下の点を明らかにした（鈴木他、2016）。

ア 中学校の教科書を分析した結果、発展的な考え方を育成するような問題設定は、教科書では扱いが少なく、教科書の通りに問題を扱っているだけでは、発展的な考え方を育成する上で指導が十分ではないことがわかった。

イ 発展的な考え方に関する先行研究を分析した結果、発展的な考え方がいくつかのタイプに分類することができること（片桐、1988；菊池、1997；橋本、2001）、各タイプに適する指導法がそれぞれ工

*静岡大学教育学部附属島田中学校

**静岡大学大学院教育学領域

夫され(能田, 1983; 竹内他, 1984; 古藤, 1992), 実践されていること, ただし, 片桐(1988)による「思考の観点を変える」タイプの実践(高畑, 2006)は比較的多く研究されている一方で, 「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践(福田, 2009; 寺田, 2010; 箕輪, 2010)は, 必ずしも多く実践されていないこと等が明らかになった。

ウ 「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践を, 中1「図形の移動」と中3「相似な図形の面積比」で行い, 「発展させることで数学の理解が深まる設定を工夫する」, 「難易度が高くなり過ぎないようにする配慮する」, 「発展的な考え方を重視した授業を継続的に実施する」という3つの示唆を得た。

2015年度の研究成果を踏まえて, 2016年度は, 次の2つのことを中心に研究を進める。

① 中2の図形指導の内容について, 適切な教材を検討して, 「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践を行い, 授業での生徒の反応を分析する。

② 統合的・発展的に考える活動を, 年間を通して継続的に実践し, 学年の進行に伴って, 特に発展的に考える態度がどのように変容するかを分析する。

なお, 本研究では, 「統合的に考える活動」「発展的に考える活動」を, 片桐(1988)を参考にしつつ, 次のように規定するものとする。

＜統合的に考える活動＞

複数の事柄を, 概念を拡張したり, 一般化したりすることで, 1つに統合する活動

＜発展的に考える活動＞

元の問題の条件の一部を変更して, 新たな問題を作って解決する活動

2. 本稿の目的

本稿の目的は, 中学校数学科における統合的・発展的に考える活動を重視した図形の指導について, 特に中2での指導のあり方と, 中3の統合的・発展的に考えようとする態度の変容について分析し, 統合的・発展的に考える活動を重視した指導のあり方について検討を加えて, 示唆を得ることである。

3. 研究の方法

以下の手順にしたがって, 研究を進める。

- (1) 中2の図形指導の内容について, 統合的・発展的に考える活動ができる効果的な教材について検討する。
- (2) (1)で検討した教材を用いて実践を行い, 授業時の生徒の反応等を分析して, 統合的・発展的に考える活動を重視した指導のあり方について, 検討を加える。

(3) 中3を対象に, 年間を通して統合的・発展的に考える活動を重視した実践を行い, 昨年度と同じ意識調査を実施して結果を比較することで, 統合的・発展的に考えようとする態度の変容を分析する。

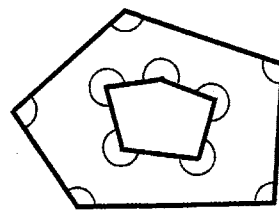
(4) (2), (3)を踏まえ, 統合的・発展的に考える活動を重視した指導のあり方についての示唆を得る。

4. 統合的・発展的に考える活動を重視した教材の検討

(1) 本稿で取り上げる教材

ここでは, 中2の図形指導の中から, 統合的・発展的に考える活動を重視した教材について検討する。中2の図形の指導内容としては, 平行線の性質, 多角形の角, 三角形や四角形の性質があるが, 図形の性質を統合的・発展的に考える実践としては, 凹四角形の角の性質(太田, 1991; 石川他, 2007), 星形多角形の性質(井上, 1995)などがある。本稿では, 多角形の内部を多角形でくりぬいてできる図形の性質を, 教材として取り上げる。具体的な課題は, 次の通りである。

【課題 1】図のように, 五角形の内部から五角形をくり抜いた図形にできる10個の角の和を求めてみよう。



この教材の特徴として, 次の4点を挙げるができる。

ア この課題は, 中学校2年生用の教科書(赤他, 2016, p.132)に掲載されている問題であることから, 生徒にとって適度な難易度である。

イ 先行実践(熊倉, 2011)による生徒の反応例から読み取れるように, 1つの課題で多様な方法が考えられるため, 生徒が意欲をもって取り組むことが期待できる。

ウ (2)で述べるように, 課題1をもとに発展させる活動が豊富にある。また, それらを統合して一般化することが比較的容易であり, しかも, 一般化した式は簡単な式で表される。

(2) 課題を発展させる活動

【課題1】を発展させる方法として, 大きく分類すると, ①内側と外側の五角形を別の多角形に変える, ②内側のくり抜く多角形の個数を変える, の2つが考えられるが, それぞれについて, さらに次のような様々なバリエーションが考えられる。

① 内側と外側の五角形を別の形に変える

ア 五角形を別の多角形に変えて, 四角形の内部を四角形でくり抜いたり, 六角形の内部を六角形でくり

抜いたりしたときの、角の和を求めよう。

- イ 外側の多角形のみを別の多角形に変えて、四角形の内部を五角形でくり抜いたり、六角形の内部を五角形でくり抜いたりしたときの、角の和を求めよう。
- ウ 内側の多角形のみを別の多角形に変えて、五角形の内部を四角形でくり抜いたり、五角形の内部を六角形でくり抜いたりしたときの、角の和を求めよう。
- エ 外側も内側もバラバラに別の多角形に変えて、四角形の内部を六角形でくり抜いたり、六角形の内部を四角形でくり抜いたりしたときの、角の和を求めよう。

② くり抜く多角形の個数を変える

- オ 五角形2個をくり抜くときの角の和を求めよう。
- カ 四角形と六角形をくり抜くときの角の和を求めよう。

なお、オ、カの場合は、図1のように、くり抜く多角形の辺や頂点が重なっていないものとする。

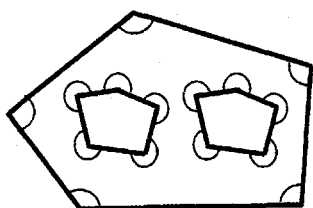


図1 重なりがない場合

もし、図2のように、くり抜く多角形の頂点が重なっている場合は、角の和が変わる。

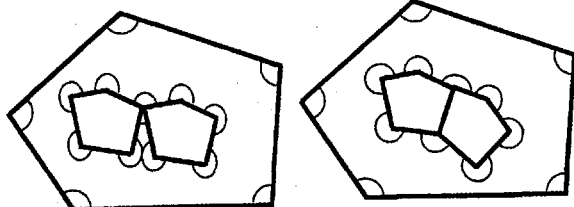


図2 頂点が重なっている場合 図3 辺が重なっている場合

また、図3のように、辺が重なっている場合は、2つの多角形を合成した1つの多角形とみなせば、ウの場合に帰着される。

このように、発展の方法が多様であるため、発展的に考える活動を重視した指導を行う上で、この教材は有効であることがわかるであろう。

(3) 課題の一般化

(2)で挙げた様々な発展のうち、ア～エをそれぞれ一般化すると、次の通りである。

- ア 外側 n 角形、内側 n 角形の場合 $\sim 360n^\circ$
- イ 外側 m 角形、内側五角形の場合 $\sim 180(m+5)^\circ$
- ウ 外側五角形、内側 n 角形の場合 $\sim 180(n+5)^\circ$
- エ 外側 m 角形、内側 n 角形の場合 $\sim 180(m+n)^\circ$

エで、 $m=n$ とした場合がア、 $n=5$ とした場合がイ、 $m=5$ とした場合がウであることから、エは、ア～ウをさらに一般化したものである。

一般化したエを証明するのに、いろいろな方法があるが、以下に3つの方法を示す。

<証明1>

外側の m 角形の内角の和は、 $180(m-2)^\circ \dots$ ①

内側の n 角形の外側の角の和は、
 $360n - 180(n-2) = 180(n+2)^\circ \dots$ ②

求める角の和は、①、②の和だから、
 $180(m-2) + 180(n+2) = 180(m+n)^\circ$ ▲

<証明2>

右図のように、三角形に分割すると、各三角形の1辺は、必ず外側の辺、あるいは内側の辺のいずれかになる。したがって、分割した三角形の個数は、 $m+n$ 個になるので、角の和は、 $180(m+n)^\circ$ ▲

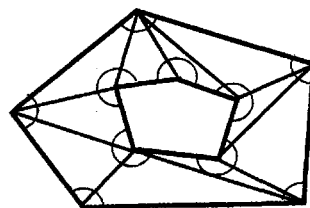


図4 三角形に分割

<証明3>

右図のように外側の m 角形と内側の n 角形を1本の線分で結ぶと、頂点が $A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1}, B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}$ の凹($m+n+2$)角形とみるこ

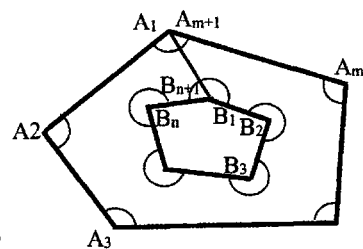


図5 凹多角形とみなす

とができるので、求める角の和は、
 $180^\circ \times \{(m+n+2)-2\} = 180(m+n)^\circ$ ▲

次に、(2)で挙げた様々な発展のうち、オ、カをそれぞれ一般化すると、次の通りである。

- オ 五角形から五角形 a 個をくり抜く場合 $\sim 180(7a+3)^\circ$
- カ 五角形から p 角形と q 角形をくり抜く場合 $\sim 180(p+q+7)^\circ$

オ、カは、さらに次のように一般化される。

- オ' 外側 m 角形から、 p 角形を a 個くり抜く場合 $\sim 180(m+ap+2a-2)^\circ$
 - カ' 外側 m 角形から、 a 個の p 角形、 q 角形、 r 角形、 \dots をくり抜く場合 $\sim 180(m+p+q+r+\dots+2a-2)^\circ$
- 特に、カ'で、 $p=q=r=\dots$ とした場合が、オ'である。一般化したカ'の証明については、エの場合と同様に示すことができる。例えば、次のように示される。

<証明>

外側の m 角形の内角の和は、 $180(m-2)^\circ \dots$ ①

内側の p 角形、 q 角形、 r 角形、 \dots の角の和は、
 $\{360p - 180(p-2)\} + \{360q - 180(q-2)\} + \dots$
 $= 180(p+q+r+\dots+2a) \dots$ ②

求める角の和は、①、②の和だから、
 $180(m-2) + 180(p+q+r+\dots+2a)$
 $= 180(m+p+q+r+\dots+2a-2)^\circ$ ▲

さらに、図2のように、くり抜く多角形の頂点が重なっている場合は、重なっている頂点1個につき、不必要になった分の 360° を引けばよい(図6)。

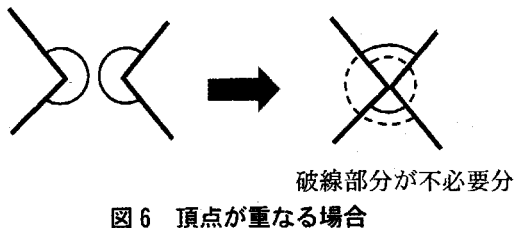


図6 頂点が重なる場合

例えば、オの場合で1個の頂点が重なってれば、オ1、オ'の場合でx個の頂点が重なってれば、オ'1のように示される。

$$\text{オ1} \quad 180(7a+3)-360=180(7a+1)^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{オ'1} \quad & 180(m+ap+2a-2)-360x \\ & =180(m+ap+2a-2x-2) \end{aligned}$$

5. 統合的・発展的に考える活動を重視した実践

(1) 授業の概要

中2の単元「平行線と多角形」について、対頂角や平行線の性質、多角形の内角の和・外角の和を一通り学習した後に、「10個の角の和を求めよう」というテーマで、前述した【課題1】を2時間扱いで行った。

なお、授業の分析は、授業を撮影したビデオ映像、個人追究時に記述したワークシート(追究用紙)、授業後に行ったアンケート調査をもとに行った。

① 単元計画

単元計画は、次の13時間であり、本時は第12時、13時である。

表1 単元計画

時間	学習内容
1	【対頂角、平行線の錯角・同位角】
2	①対頂角、錯角、同位角の意味を理解する。 ②2直線が交わってできる対頂角は等しいことを理解する。 ③平行線に1直線が交わってできる同位角、及び錯角が等しいことを理解する。 ④同位角または錯角が等しければ、2直線が平行であることを理解する。
3	【三角形の内角の和】
4	①三角形の内角の和が 180° になることを理解する。 ②三角形の外角は、これと隣り合わない2つの内角の和に等しいことを理解する。
5	【角度を求める問題】
6	平行線と角、三角形の角の性質を用いて図形の角度を求めることができる。
7	課題学習I【4点を一筆で結んでできる図形

8	の角の性質を探ろう】 四角形の内角・外角の和は、 360° になることを理解する。
9	課題学習II【5点を一筆で結んでできる図形
10	の角の性質を探ろう】
11	①n角形の内角の和は $180^\circ \times (n-2)$ で表されることを理解する。 ②n角形の外角の和は 360° になることを理解する。 ③星形五角形の先端の角の和は 180° になることを理解する。
12	課題学習III【五角形の内部から五角形をくり抜
13	いた図形にできる角の和】
本時	①五角形の内部から五角形をくり抜いた図形にできる10個の角の和を求める。 ②五角形を別の多角形に変えたり、くり抜く個数を変えたりしたときの角の和を求める。

② 本時の実施時期：2016年11月

③ 対象生徒：国立大学附属中学校2年生40名

④ 授業のねらい：

五角形の内部から五角形をくり抜いた図形の内側にできる10個の角の和を、様々な方法で解くことができる。また、多角形の形やくり抜く多角形の個数を変えて、統合的・発展的に考えて、問題を解決することができる。

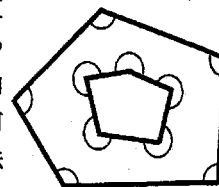
(2) 授業展開と生徒の反応

① 第12時：五角形の内部から五角形をくり抜く

1) 課題提示

はじめに、次の課題を提示した。

【課題1】右の図のような五角形の内部から五角形を1つくり抜いた図形について、内側にできる10個の角の和は何度になるか、いろいろな方法で求めてみよう。



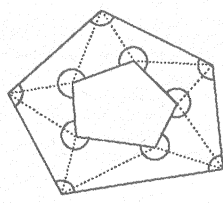
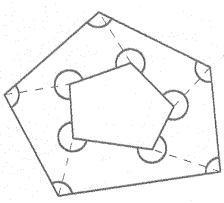
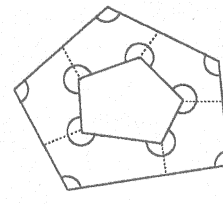
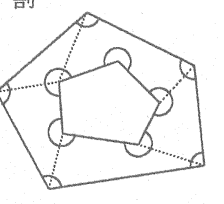
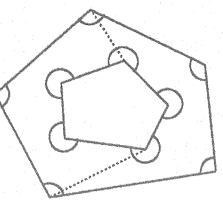
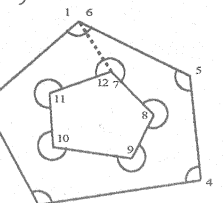
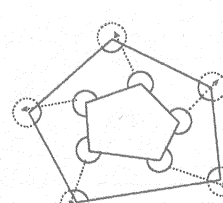
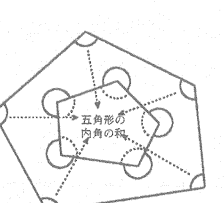
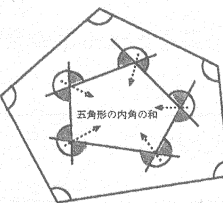
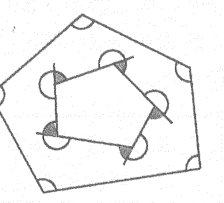
続いて、課題の内容について確認を行った。まず、図形で角の位置を示しながら「内側の10個の角」を説明した。次に、外側と内側の2つの五角形は、辺の長さや角度は異なることを確認した。最後に、くり抜く五角形の内部の位置について、外側の五角形の辺とは重ならないことを確認した。

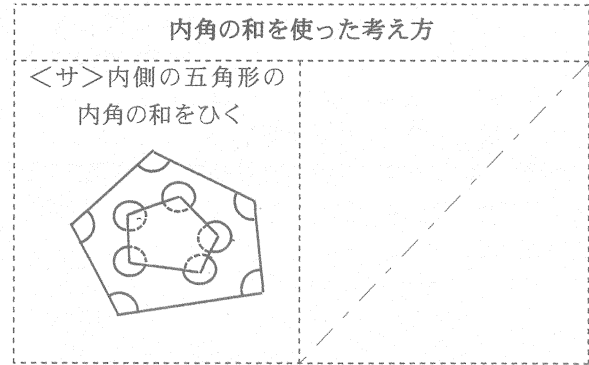
2) 課題1の追究(個人)

次に個人追究の時間をとった。これまで、様々な角度の問題(5時~11時)を解決してきたこともあって、多くの生徒が複数の方法に意欲的に取り組んでいた。

その際、複数の方法を場当たりの考えるのではなく、補助線を使う場合と使わない場合とに区別して考えたり、補助線の本数を意図的に減らそうと考えたりした生徒が複数見られた。また、補助線を図にきれいにかけ込み、式や文章で説明を付け足すなど、わかりやすく表現しようと工夫する姿も観察された。生徒が考えた主な方法は、次の11個である。

表2 生徒の考えた方法

補助線を使った考え方	
<p><ア>三角形に分割</p> 	<p><イ>四角形に分割</p> 
<p><ウ>五角形に分割</p> 	<p><エ>三~五角形に分割</p> 
<p><オ>七角形に分割</p> 	<p><カ>十二角形とみなす</p> 
角を移動する考え方	
<p><キ>外側に移動</p> 	<p><ク>内側に移動</p> 
外角の和を使った考え方	
<p><ケ>外角の和 2 個分の利用</p> 	<p><コ>外角の和 1 個分の利用</p> 



<ア>~<オ>は、補助線を使って、複数の多角形に分割する考え方、<カ>は、補助線を1本使って、十二角形とみなす考え方である。<キ><ク>は、角を移動して、「 360° が5個分」とする考え方である。<ケ><コ>は、外角の和が 360° であることを使う考え方で、内側5個の角の和を、<ケ>は(外角の和 $\times 2$) + (五角形の内角の和)として求める方法、<コ>は(外角の和) + $180^\circ \times 5$ として求める方法である。<サ>は、五角形の内角の和を使う考え方で、内側5個の角の和を、 $360^\circ \times 5 -$ (五角形の内角の和)として求める方法である。

3) 小グループでの追究

次に小グループでの追究の時間をとった。小グループでは、個人で出た多様な考えをできるだけ多く共有することや、個々の説明する力(表現力)を育成することも目的としたため、最低でも1人1種類は発表するように指示した。ある班では、補助線に注目して、「まず補助線ありのパターンから発表しよう」と言い、方法を分類しながら発表し合っていた。

特に議論となっていたのは、<カ>の十二角形とみなして求める考え方である。発表を聞いて「よく思いつくね!」などと、感動しながら全員が理解できていた班もある一方で、「本当に十二角形になるの?」どこかの辺だけ曲がらない?」などと、疑問を出し合っていた班もあった。しかし、最終的には議論の末に「理論的には十二角形になる」という説明で納得していた生徒の様子が観察された(写真1)。

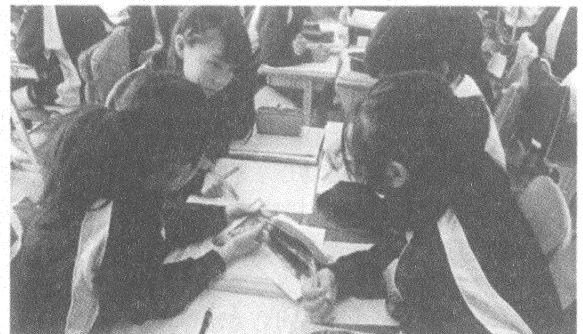


写真1 小グループで議論する生徒の様子

② 第13時：もとの形やくり抜く個数を変える

第13時は、一斉→個人→小集団→一斉→個人の流れで展開した。具体的には、次の通りである。

1) 課題1の発表と発展課題1の提示（一斉）

まず始めに、前時に考えた多様な考え方を発表させた。発表は表2にある次の6つの考え方で、この順に発表させた。

<ア>,<イ>,<カ>,<キ>,<ケ>,<サ>

この6つの考え方は、補助線を使った考え方<ア><イ><カ>と、そうでない考え方<キ><ケ><サ>の両方が含まれている。また、<ア>→<イ>→<カ>の順に、補助線の数が減っていることを確認した。

<カ>の発表者は、その場で実際に紙を使って、補助線の箇所をハサミで切り、十二角形とみなすことができることを説明した。この説明を聞いて、多くの生徒のうなずく様子が観察され、あらためてこの方法の理解を深めることができたと考えられる。

6つの発表が終了した段階で、この時間の1つ目の課題である次の発展課題1を提示した。

【発展課題1】もとの課題を、五角形以外の形に変えて、角の和を求めてみよう。

生徒から、例えばどんな場合を調べたいか聞いたところ、次の意見が出たので、これは共通課題とした。

- A 六角形の内部から六角形をくり抜く。
- B 六角形の内部から七角形をくり抜く。

2) 発展課題1の追究（個人）

発展課題1について、個人の追究の時間をとった。共通課題を解決したら、さらに形を変えて考えるよう指示したところ、生徒は様々な場合を考えていた。例えば、次のような課題である。

- C 四角形の内部から四角形をくり抜く。
- D 四角形の内部から六角形をくり抜く。
- E n角形の内部から五角形をくり抜く。
- F 五角形の内部からm角形をくり抜く。
- G n角形の内部からn角形をくり抜く。
- H n角形の内部からm角形をくり抜く。

「五角形の形を変えて」という指示であったが、何人かの生徒は、E~Hのようにこの段階で一般的に考えていた。

3) 発展課題1の考えの交流（小集団）

小集団では、次のように様々な活動が見られた。

- ・いくつかの多角形の場合を帰納的に調べて、「外側と内側の角の数の和の180倍になる」という共通の規則を見つけ出し、そのことを証明しようと試みた。
- ・一般化した生徒がいて、その方法を班員で共有するとともに、一般化する別の方法を考えた。
- ・互いに自分の考えた場合を伝え合った後に、さらに別の多角形の場合を調べ続けた。

また、角の和を求める方法は、生徒によって様々で

あった。本時の最初に発表された6つの方法を参考に、自分なりに考えやすい方法で求めたものと考えられる。

4) 発展課題1の発表と発展課題2の提示（一斉）

まずは、共通の課題A、Bについてそれぞれ生徒に発表させた後に、一般化した課題G、Hを取り上げ、別の生徒に発表させた。発表の際には、小集団での説明で書き込んだホワイトボードを使った（写真2）。

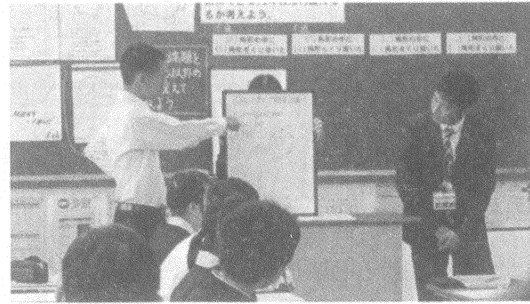


写真2 生徒の発表

生徒の発表（ホワイトボードの記述）内容は、次の通りであった。

【生徒Pの発表】n角形の内部からn角形をくり抜く

五角形から五角形をくり抜く場合

$$360^\circ \times 5 = 1800^\circ$$

六角形から六角形をくり抜く場合

$$360^\circ \times 6 = 2160^\circ$$

七角形から七角形をくり抜く場合

$$360^\circ \times 7 = 2520^\circ$$

...

n角形からn角形をくり抜く場合

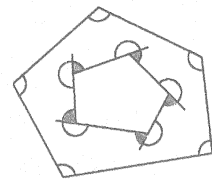
$$360 \times n = 360n^\circ$$

【生徒Qの発表】x角形の内部からy角形をくり抜く

$$180(x-2) + 360 + 180y$$

$$= 180x + 180y$$

$$= 180(x+y)$$



生徒Pは、一般化した式を帰納的に導いている。五角形、六角形、七角形の各場合をどの考え方で求めたかは特に説明がなかった。一方、生徒Qは、表1の<コ>の考え方をもとに、五角形から五角形をくり抜く場合の図を使って説明した。

2人の発表後に、2つの結果を比べる次の発問を行った。

Pさん、Qさんの結果の式を比べて、何か気づいたことはないか。

この発問に対して、個人で考える時間を少しとった

後に、ペアで交流する時間もとった。交流活動を通して、多くの生徒が、生徒Qの式で $x=y=n$ とした場合が生徒Pの式になっていることに気付いたようであった。その後、生徒を指名して、気付いたことを発表させた。

〔生徒Rの発表〕

$$\begin{aligned} \text{Qさんの式で、} & x=y=n \text{ とすると、} \\ 180(x+y) &= 180(n+n) \\ &= 180 \times 2n \\ &= 360n \end{aligned}$$

そして、生徒Pの式が生徒Qの式の特例な場合になっていることを全体で確認した。

続いて、「元の問題で、形を変える以外に何が考えられるかな」と聞いたところ、すぐに「くり抜く多角形の個数」という発言があったので、それを受けて、次の発展課題2を提示した。

【発展課題2】くり抜く多角形の個数を変えて、角の和を求めてみよう。

5) 発展課題2の追究（個人）

個人での追究を開始したが、あまり考える時間はとれずに授業を終えた。短時間ではあったが、生徒は、「五角形2つをくり抜く場合」や、さらに個数を一般化した場合にどうなるかについて、懸命に取り組んでいた。なお、この発展課題2については、レポート課題として、後日提出させた。

(3) 統合的・発展的に考える活動に関する考察

2時間扱いの授業全体を通して、「統合的・発展的に考える」という視点から検討するとき、次の点を指摘することができる。

- ① 第12時において、個人での追究の場面で、複数の方法をいくつかに分類して考えようとしたり、小集団での追究の場面で、「まず補助線ありのパターンから発表しよう」という発言から読み取れるように、多様な考え方を整理して、似たような方法をまとめて発表し合い、さらに他の方法を考えようとしたりする活動が見られた。これは「統合的に考える活動」と言ってよいであろう。しかし、これらの活動は、必ずしも生徒全員が行ったわけではなかった。それゆえに、授業者が複数の方法を分類することについて、一斉の場面で取り上げれば、「統合的に考える活動」をより一層充実させることができたであろう。
- ② 第13時で、「五角形を別の形に変えてみよう」という発展課題1に対して、生徒はいろいろな場合を意欲的に考えていた。また、数人の生徒は、特に指示された訳ではなく、GやHなどの一般化した場合を考えていた。そして、小集団での追究や一斉での発表を通して、一般化した考え方がクラス全体に

広まっていったといえる。生徒が多角形の形を自由に考えるという活動は、「発展的に考える活動」であり、様々な場合を一般化して考える活動は、「統合的に考える活動」といえるであろう。

- ③ 第12時で扱った課題は、一般化するのが容易であり、しかも一般化した式が単純な形で表されるという特徴を持っている。一般化した結果について、授業後の生徒の感想の中に、次のような記述があった。

- ・外側と内側の頂点の数を足して 180° をかけるだけで角度の和が出るのがわかった。公式のすごさみたいなものがわかりました。
- ・文字を使って公式の形にすることで、 $(n+m)$ という所に注目すると、外側と内側の角の数になっており、規則性がよりわかりやすくなった。
- ・形を変えることで、新たなことにつながっており、深く学べたように思いました。

これらの生徒の記述から、一般化することのよさを感じていることが読み取れる。このように、一般化することのよさを感じることを積み重ねることで、生徒が自ら一般化しようとする態度、すなわち「統合的に考えようとする態度」の育成につながるものと考えられる。

- ④ 発展課題2の提示場面で、授業者の「元の問題で、形を変える以外に何が考えられるかな」という問いかけに、生徒から自然に出た「くり抜く多角形の個数」という発言は、「発展的に考えようとする態度」につながるものといえよう。発展的に考える活動を進めていく上で、発展課題を授業者からすぐに示してしまうのではなく、本時のように生徒自身に考えさせていくことも重要であると考えられる。
- ⑤ 発展課題2に対する生徒のレポートを見ると、「くり抜く個数を変える」と指示しただけであるが、様々な場合を考えていた。中には、一般化して「 m 角形の内部から n 角形を a 個くり抜いた場合」について詳細に考察しているものもあり、統合的・発展的に考える活動が活発に行われたといえるであろう。

6. 統合的・発展的に考えようとする態度の変容

ここでは、統合的・発展的に考えようとする態度の変容について分析する。そのために、年間を通して、どのような統合的・発展的に考える活動経験があるのかを明らかにした上で、昨年度と同じ意識調査を実施してその結果を比較する。なお、調査対象生徒は2016年度の3年生120人である。

- (1) 中3時に経験した統合的・発展的に考える活動
調査対象生徒が、2016年度に経験した「統合的・発展的に考える」主な活動は、次に挙げる通りである。

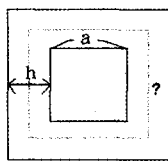
① 式と計算 (整数の性質)

連続する2つの整数の平方の差は2数の和に等しいことを証明しよう。

この問題を解決した後に、「この問題の一部を変えて新しい問題をつくろう」と発問して、発展的に考える活動を行った。生徒からは、「差→和」「2つ→3つ」「連続→連続しない」などの意見が出たので、その中で、「連続しない」ということを取り上げた。生徒は、2とび(1, 3)や3とび(2, 5)だったらどうなるか、最終的には x とびだったらどうなるかを追究し、一般化することを通して「統合的に考える活動」を行った。また、一般化することで、2数の和と差の積になることがわかり、次の因数分解の指導へとつなげることができた。

② 式と計算 (図形の面積の性質)

右図のような正方形で囲まれた道の面積を求めよう。



この問題を、いろいろな方法で求めさせた後に、結果の式 $h(4a+4h)$ は「中央を通る線の長さ×道路の幅」であることを読み取らせた。さらにその後、「正方形以外の図形でも、(道の面積)=(中央線の長さ×道幅)がいえるかどうか考えてみよう」と発問して、統合的・発展的に考える活動を行った。例えば、次のような場合を追究して、どの場合も成り立っていることを確認した。

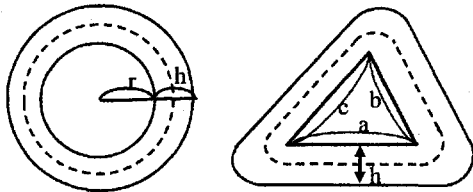
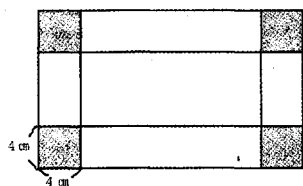


図7 生徒が追究した図形

③ 2次方程式 (活用)

横が縦より6cm長い長方形の厚紙がある。この4すみから1辺が4cmの正方形を切り取って直方体をつくと、その体積が 200 cm^3 になった。はじめの厚紙の縦と横の長さを求めよう。

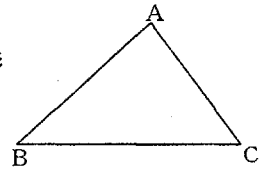


この問題を解決した後に、①の場合と同じように、「問題の一部を変えて新しい問題をつくろう」と発

問して、発展的に考える活動を行った。活動の中で、問題の解として成り立たない場合が話題となり、問題を作成する場合には、文字の変域にも留意する必要があることの理解を深めることができた。

④ 相似な図形 (証明)

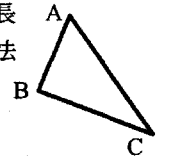
三角形ABCに補助線を1本引いて、相似な三角形をつくってみよう。



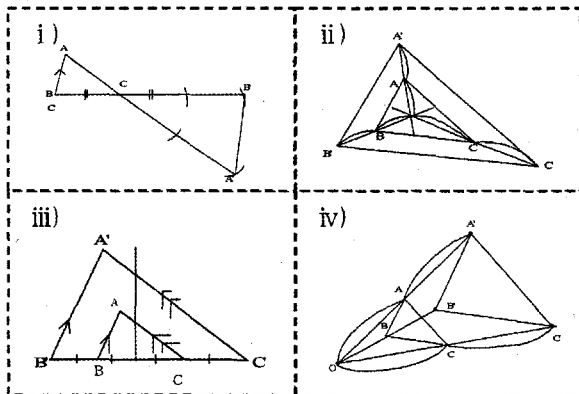
この問題を解決した後に、「補助線の数を1本ではなく2本で考えてみよう」と発問して、発展的に考える活動を行った。1本の場合に平行線を引く以外のアイデアが出なかった生徒が、2本の場合には既習事項を利用して多くの方法を考えることができていた。この活動を通して、相似条件と補助線の引き方を結びつけて考えることができるようになり、この後の証明問題の学習に良い影響を与えることができた。

⑤ 相似な図形 (拡大図・相似の中心)

三角形ABCと相似な三角形(辺の長さを2倍に拡大)を、いろいろな方法で作図しよう。



この問題に対して、生徒からは、次のi)~iv)のような方法が出された。

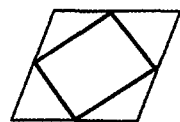


次にiv)の図を使って、相似の中心を指導し、相似の中心を使って作図されていることを確認した。

その後、「他の作図は、相似の中心を使っているといえるだろうか」と発問して、統合的に考える活動を行った。その結果、i)は三角形の頂点、ii)は三角形の内部の1点、iii)は三角形の边上の1点を相似の中心として作図していることが理解できた。

⑥ 相似な図形 (中点連結定理の利用)

平行四辺形の4つの辺の中点をとり、直線で結んで四角形をつくると、平行四辺形になることを証明しよう。



この問題を、中点連結定理を利用して証明させた後に、「元の四角形を変えると、中にできる四角形はどんな四角形になるか予想し、自分なりの根拠をもって証明しよう」と発問して、発展的に考える活動を行った。さらに、「中にできる四角形がひし形、長方形、正方形になるのは、元の図形がどうの場合か」と発問して、統合的に考える活動を行った。この活動を通して、次の性質を全体で確認することができた。

<元の図形の対角線>	<中にできる四角形>
・長さが等しい	→ 長方形
・垂直に交わる	→ ひし形
・両方	→ 正方形
・どれでもない	→ 平行四辺形

以上の活動内容を概観するとき、様々な単元について、統合的・発展的に考える活動を経験していることが明らかとなった。

(2) 意識調査およびその結果と考察

① 調査方法

対象生徒の中2時(2015年度)、および中3時(2016年度)のいずれも11月下旬に実施した。ただし、調査時に欠席者がいたため、人数に違いがある。

② 調査問題

長崎(1994)の作成したものを参考に次の表3の調査問題を作成し、実施した。

表3 調査問題

[1] 下にあげたのは、ある月のカレンダーです。

【カレンダー】						
日	月	火	水	木	金	土
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

このとき、上記の図のように縦3横3の長方形で9つの数を囲みます。このとき9つの数の和は、中央の数の9倍になりました。このあと、あなたならどうしたいですか。1つ選びなさい。

1. 本当かなと思ひ、もっと多くの例を調べる。
2. なぜなのか、その理由を知りたい。
3. 囲み方を変えて他にもいろいろ調べてみたい。
4. 同じことがいえるときの共通な条件を考えたい。
5. ほかにしたいとは思わない。

[2] 1つの単元の中で、課題を発展させていく授業を行ってきました。あなたは、課題を発展させていくような授業をどう思いますか。

③ 調査結果と考察

調査問題[1]の結果は、次の表4の通りである。

表4 統合的・発展的に考えようとする態度

[1]の選択肢	中2時 118人	中3時 119人
1 本当かなと思ひ、もっと多くの例を調べる	12%	18%
2 なぜなのか、その理由を知りたい	58%	34%
3 囲み方を変えて他にもいろいろ調べてみたい	11%	22%
4 同じことがいえるときの共通な条件を考えたい。	19%	21%
5 ほかにしたいとは思わない	0%	4%

表4から、次の点を指摘することができる。

- ア 調査問題[1]で1~4を選択した生徒の割合は、中2時で100%、中3時で96%であった。この結果から、ほとんどの生徒が、もっと知りたい、もっと深く追究したいという思いをもっていることが読み取れる。
- イ 調査問題[1]で特に3、4を選択した生徒の割合は、中2時で30%、中3時で43%であった。中2時よりも中3時の方が選択した生徒の割合が高くなっていることから、統合的・発展的に考えようという態度が、学年進行とともに身に付いていることが読み取れる。
- ウ 調査問題[1]で5を選択した生徒は、中2時ではいなかったが、中3時でごく少数いた。数学に対する苦手意識が増したり、受験、テストなどの影響があつて、統合的・発展的に考えることの価値に疑問を持っていたりすることが推測される。
- エ 調査問題[2]で、例えば次のような記述があつた。

- ・「なぜそうなるのか」「他にも考え方はないだろうか」と考えることにより、知識が活用できたり、深く考えることで発想力がつく。
- ・いろいろな見方で考えたことに、共通点がありびっくりした。
- ・問題をつくることがおもしろかったが、自分のねらいどおりの解にするのは難しかった。
- ・偶然ではなく、しっかり理由があるのがわかって、数学のおもしろさが実感できた。
- ・新しい解法をみつけて共有し合うのが楽しい。

これらの記述から、統合的・発展的に考える活動が、数学の理解を深め、思考力を高めることにつながると実感していることが読み取れる。また、活動自身を、楽しいと感じていることもわかるであろう。

7. 研究を通して得られた示唆

5で述べた実践での生徒の反応、および6で述べた調査の結果について、分析・考察した結果から、統合的・発展的に考える活動を重視した望ましい指導のあり方として、2015年度に得られた示唆に加えて、さらに次の示唆を得ることができた。

(1) 一般化することのよさを感じられる教材の工夫

5(3)で述べたように、中2の実践で扱った教材は、一般化が容易で式が簡単な形で表されるため、生徒は一般化することのよさを感じることができた。そのことが、統合的に考えようとする態度につながったものと考えられる。このことから、統合的に考える活動を重視する指導を考える上では、一般化することのよさを感じられるような教材を工夫することが重要であると考えられる。

(2) 多様な方法を分類する活動を取り入れること

5(3)で述べたように、中2の実践で、元の課題の解決で出た多くの考え方を、生徒は分類して追究していた。この活動は、統合的に考える力を育成することにつながるといえる。このことから、生徒から解決の方法が多様に出るような場合には、それらを分類する活動を取り入れることが、統合的に考える活動を重視する指導において、効果的であると考えられる。

(3) 各単元での統合的・発展的に考える活動の重視

6(2)で述べたように、学年進行とともに、統合的・発展的に考えようとする態度が身に付いていることが読み取れた。このことは、特に中3時の各単元において、統合的・発展的に考える活動を、継続して取り入れたことが大きく影響しているものと推測される。さらに、生徒の自由記述から、態度の育成だけでなく、統合的・発展的に考える力の育成にもつながることが推測される。以上の点から、各単元での統合的・発展的に考える活動を、年間を通して継続的に実施することが有効であると考えられる。なお、2015年度の研究においても、単年度の調査結果をもとに「継続的な実践が態度の育成に有効」という推測的な示唆を得ている。2016年度は、2015年度の結果を踏まえ実際に各単元において実践を行い、2年間にわたる調査結果の比較から態度の変容が認められ、その有効性が検証されたことから、あらためて同様の示唆を挙げた。

8. 今後の課題

今後の課題として、次の2点を挙げることができる。

- (1) 2年間を通して、中1～中3の図形の指導について、実践を通して指導のあり方を追究したが、図形以外の領域についても、統合的・発展的に考える活動を重視した指導のあり方について追究する。
- (2) 3年間を見通して、統合的・発展的に考える活動をどのように行っていくかについて検討する。

<引用・参考文献>

- 福田允(2009)「学校数学における発展的な考え方の指導に関する一考察-「式を読む」ことに着目して-」第42回数学教育論文発表会論文集, pp.181-186
- 橋本吉貴(2001)「算数・数学科における「発展的な考え方」に関する考察」日本数学教育学会誌, 83巻9号, pp.10-17
- 井上正允(1995)『本日オープン!数学美術館』国土社
- 石川 佳広・井ノ口順一・木村寛(2007)「多角形の角における発展的・統合的な見方・考え方の指導」宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要30, pp.443-452.
- 片桐重男(1988)『数学的な考え方の具体化』明治図書.
- 菊池平一(1997)「統合的, 発展的に考察する」新しい算数研究, No.313, 東洋館, pp.6-9.
- 古藤恰(1992)『算数科多様な考えの生かし方まとめ方』東洋館.
- 熊倉啓之(2011)『数学的な思考力・表現力を鍛える授業24』明治図書, pp.90-95.
- 箕輪郁哉(2010)「図形問題を発展させるための指導法」第43回数学教育論文発表会論文集, pp.49-54.
- 文部省(1968)「昭和43年告示小学校学習指導要領」.
- 文部省(1969)「昭和44年告示中学校学習指導要領」.
- 文部省(1970)「昭和45年告示高等学校学習指導要領」.
- 長崎栄三(1994)「児童・生徒の基礎学力の形成と指導方法との関連に関する総合的研究:算数・数学」国立教育研究所紀要, 123集, pp.53-104.
- 能田伸彦(1983)『オープン・アプローチによる指導の研究』東洋館.
- 太田伸也(1991)「生徒が幾何の世界を構成すること」をめぐす中学校の幾何教育」第24回数学教育論文発表会論文集, pp.121-126.
- 赤攝也他(2016)「新版数学の世界2」大日本図書, p.132.
- 鈴木直・加藤健二・熊倉啓之(2016)「発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形の指導」静岡大学教育実践総合センター紀要, No.25, pp.43-52.
- 高畑宏之(2006)「オープンアプローチの学びによる数学授業の質の改善-中学校数学科における新たな授業カリキュラムの開発と研究-」岡山大学算数・数学教育学会誌『パピルス』, pp.73-82.
- 竹内芳男・沢田利夫(1984)『問題から問題へ』東洋館.
- 寺田聡子(2010)「数学科における生徒の理解を促す問題設定の研究」第43回数学教育論文発表会論文集, pp.61-66.
- 中央教育審議会(2016)「算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ」http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/sonota/_icsFiles/afieldfile/2016/09/12/1376993.pdf.