SURE 静岡大学学術リポジトリ
Shizuoka University REpository

文字式の計算順序に関する指導：「かけ算記号省略優先」規則に焦点を当てて

メタデータ	言語: jpn
	出版者:
	公開日: 2016-06-03
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 熊倉, 啓之
	メールアドレス:
	所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00009429

静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要 No.25 p.33～42（2016）

〈論文〉

文字式の計算順序に関する指導

－「かけ算記号省略優先」規則に焦点を当てて－

熊倉　啓之*

Teaching of Calculation Order in the Formula

- Focus on the Rule of Priority by Omission of Multiplication Symbols -

Hiroyuki KUMAKURA

Abstract

The purpose of this paper is to investigate teaching the rule of "priority by omission of multiplication symbols" (POMS rule) in the past, present and in the foreign countries, and to consider the meaning of using POMS rule, and to get some suggestions about teaching of calculation order in the formula. First, it was cleared that there are 2 rules except 4 rules in the Japanese textbook and the students don't understand sufficiently about POMS rule. Second, it was cleared that POMS rule is used from Meiji era in Japan, but it isn't used in some countries. Finally, the author summarized usefulness of using POMS rule and got 3 suggestions about teaching of calculation order in the formula as follows;

1) To teach POMS rule exactly,
2) To explain the meaning of formula in words,
3) To confirm other rules through concrete example.

キーワード：文字式，計算順序，かけ算記号省略

1．問題の所在と研究の目的

中学校第2学年では，例えば，12ab÷3bのような単項式同士の除法の計算の指導が行われる．ここで，この式をかけ算記号を省略せずに表すと，次のように3×bの部分は，カッコを付ける必要がある．

$$12ab \div 3b = (12\times a\times b)\div(3\times b)$$
$$= 12\times a\times b\div(3\times b)$$

つまり，この計算を実行するには「かけ算記号×を省略した部分については，優先して計算を行う」という規則（以下「かけ算記号省略優先」規則と呼ぶ）を適用して，「3×b」の部分を先に計算する必要がある，ということである．

しかし，この規則は，いずれの現行の教科書にも記述されていないため，いわば，暗黙の規則として使用されている．その影響もあって，単項式の除法の計算は正しくできる一方で，式の意味を必ずしも正しく把握していない生徒が少なくないという実態が報告されている（熊倉，2006）．

では，なぜこの規則は教科書に記述されていないのか．過去の指導ではその扱いはどうであったのか，また海外での扱いはどうであるのか．そもそも，この規則を適用することの意義はどこにあるのか．これらの疑問について調査・検討することは大きな価値があると考える．

そこで，本研究では，「かけ算記号省略優先」規則の扱いを含めた文字式の計算順序の指導について，現在および過去，海外における実態を調査した上で，この規則を使用することの意義を考察し，文字式の計算順序に関する指導への示唆を得ることを目的とする．

なお，「かけ算記号省略優先」規則の適用の是非について，数学的には正解があるわけではない．規則は約束事であり，矛盾が生じない限り，是非は決められないものであるからである．したがって，本論文は，あくまでも教育的な観点から，考察を進めるものである．

2．研究の方法

以下の手順にしたがって，研究を進める．

(1) 式の計算順序に関する現行の指導について，小学校・中学校・高等学校の教科書[1)]及び先行研究の分析を通して，その実態を明らかにする．
(2) 特に「かけ算記号省略優先」規則に関わって，過

*静岡大学学術院教育学領域

去の日本の中学校，高等学校[2]，および海外の教科書[3]を分析する．

(3) (1)，(2)の分析結果を踏まえて，「かけ算記号省略優先」規則について考察する．

(4) (3)の考察結果から，文字式の計算順序に関する指導への示唆を得る．

3．式の計算順序に関する指導と子どもの実態

(1) 小学校での指導

小学校での式の計算順序に関する内容については，各学年で次のような指導が行われている．

表1　式の計算順序に関する内容

学年	内容
1	(3つの整数の加減混合計算)
2	整数の加法の交換・結合法則 (　)が付いた式
3	整数の乗法の交換・結合法則 分配法則の考え
4	式の計算順序の規則 整数の分配法則
5	小数の乗法の交換・結合・分配法則
6	分数の乗法の交換・結合・分配法則

1学年では，11−3+4のような3つの整数の計算を扱うが，この場合は，左から順に計算することを指導する．

2学年では，(32+7)+3=32+(7+3)などのような加法の結合法則を扱い，加える順序を変えてもよいことを指導する．

3学年では，2学年と同様な内容を乗法について扱う．

4学年では，整数の四則混合計算を扱う中で，計算順序に関する次の3つの規則を指導する．

> 規則ｉ　ふつうは，左から順に計算する．
> 規則ii　(　)があるときは，(　)の中を先に計算する．
> 規則iii　+，−，×，÷が混じっているときは，×，÷を先に計算する．

特に，次の分配法則が成り立つことを確認する指導の中で，左辺では(　)の中を先に計算することを，また右辺では乗法を先に計算することを強調することができる．

$$(○+□)×△=○×△+□×△$$

5，6学年では，小数，分数について，それぞれ交換・結合・分配法則が成り立つことを扱う．特に，分配法則を扱う中で，整数の場合と同様に，規則ii，iiiを振り返る指導が可能である．

また，小数，分数，および小数と分数の混じった式のそれぞれについて，乗除混合計算を扱っているが，その扱い方は教科書によってまちまちであり，しかも部分的である．実際，小数の乗除混合計算を扱っているのは2社のみであり，小数と分数の混じった乗除混合計算を扱っているのは3社のみである．例えば，次のような計算問題が扱われている．

ア　$2.5\times1.5\div7.5$　　(啓林館・6年上 p.39)

イ　$\frac{3}{4}\div\frac{6}{5}\times\frac{1}{5}$　　(東京書籍・6年上 p.62)

ウ　$1.6\div0.25\times\frac{5}{8}$　　(学校図書・6年上 p.62)

これらの計算を扱う中で，規則ｉを振り返る指導が可能である．しかし，これらは児童には難しいからか，概して問題数は少ない．

(2) 中学校での指導

中学校での文字式の計算順序に関する内容については，次のような指導が行われている．

表2　式の計算順序に関する内容

学年	内容
1	正負の数の結合法則 式の計算順序の規則
2	(単項式の乗除混合計算)
3	(平方根の乗除混合計算)

① 1学年の指導

1学年では，正負の数の四則混合計算を扱う中で，各教科書で，計算順序に関する次の3つの規則を扱っている．ただし，1社のみは規則ivに触れていない．

> 規則ii　かっこがある場合は，かっこの中を先に計算する．
> 規則iii　加減と乗除が混じっている場合は，乗除を先に計算する．
> 規則iv　累乗がある場合は，累乗を先に計算する．

小学校4学年の規則と比較すると，ｉに代わってivが加わっている．規則ｉがないのは，中学校段階では定着しているので改めて記述する必要がないと判断したためと考えられる．また規則ivが加わっているのは，累乗について中学校で新たに学習することにより必要性が生じたためと考えられる．

また，文字式で表現するときの約束事項として，次の4点を扱う．

- かけ算記号×は省略できる．
- 数と文字の積は，数を先に書く．
- 同じ文字の積は，累乗の指数で表す．
- わり算記号÷は分数の形で表せる．

この約束を理解し定着させる問題の中に，式の計算順序に関わって，次のような問題がある．

ア　$6 \times a + b \div 3 = 6a + \dfrac{b}{3}$　（啓林館・1年 p.53）

イ　$2 \div x \times y = \dfrac{2y}{x}$　（数研出版・1年 p.55）

アの問題解決を通して規則iiiを，イの問題解決を通して規則iを確認することができる．

一方で，文字式の計算の場合は，カッコがあっても，カッコの中がこれ以上計算できないために，ウのように分配法則を使って式を変形することが多い．

ウ　$2 \times (x+1) = 2x+2$

そのため，文字式の計算においては，規則iiを意識する場面はあまりないといえる．

上記の規則とは別に，次の問題も，分数の形の式の計算順序を理解する上で重要である．

エ　$\dfrac{x+y}{3} = (x+y) \div 3$　（学校図書・1年 p.60）

オ　$\dfrac{6}{5x} = 6 \div (5 \times x)$　（日本文教出版・1年 p.59）

これらの式の計算順序は，次の規則を用いていると考えることができる．

> 規則v　分数は，分子，分母の部分を先に計算する．

分子や分母に加減乗除を含むタイプの式は，数のみの式ではほとんど登場しないため，生徒は初めて出会う式と言ってよい．それだけに，分数の形をした文字式の計算順序を理解する上で重要な内容である．しかし，現行の教科書では，エのタイプは3社のみ，オのタイプは2社のみしか扱っていない．しかも，扱っている教科書には，規則vに関わる記述は一切ない．

② 2，3学年の指導

2学年では，単項式の乗除混合計算を扱う中で，小学校で学習した規則iについて振り返る指導が可能である．

カ　$6a^2 \div \dfrac{2}{5}a \times b$　（大日本図書・2年 p.19）

また，$12ab \div 4b$ のような単項式の除法を扱う際に，1で述べたように，次の「かけ算記号省略優先」規則を使用している．

> 規則vi　かけ算記号が省略されている場合は，その部分を先に計算する．

しかし，この規則viに関わる記述がある教科書は1社もない[4]．

3学年では，平方根の計算を扱うが，すべて文字式の計算の場合と同様である．また，一部の教科書では，例えば次のキのような平方根の除法の計算を扱っている．

キ　$6\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = (6 \times \sqrt{15}) \div (2 \times \sqrt{3}) = 3\sqrt{5}$

（学校図書・3年 p.51）

ここでも規則viを使用しているが，2学年と同様に，そのことについて教科書に一切の記述はない．

(3) 高等学校での指導

高等学校では，式の計算手順に関する指導は直接行われていない．そこで，「かけ算記号省略優先」規則（規則vi）に関わる式の除法の指導において，どのように式を表現しているかについて，現行の教科書を調査した．

数学IIの「いろいろな式」の中で，整式の除法を扱っているが，÷記号を用いた式表現は，次のように一部の教科書に見られるにとどまる．

ア　$(2x^2 - 5x^2 + 0x - 1) \div (x-3)$

（啓林館・数II 308，p.51）

イ　$(4x^3 + 3x - 1) \div (2x+1)$

（東京書籍・数II 303，p.24）

ウ　$(3x^3 - x^2 + 5) \div (x^2 + 2x - 1)$

（実教出版・数II 306，p.18）

多くの教科書では，「整式Aを整式Bで割る」という日本語の表現と筆算形式の表現，および A＝BQ＋R の乗法の形に書き直した表現をしている．

一方で，分数式の除法では，多くの教科書が次のように÷記号を用いている．

エ　$\dfrac{x^2+x}{x+2} \div \dfrac{x+1}{x^2-4}$　（数研出版・数II 310，p.17）

多くの教科書が，÷記号を，整式の除法で用いずに分数式の除法で用いているのは，整式の範囲での除法と有理式の範囲での除法を区別しているのかもしれない．

また，除数が多項式の積の形になっているオのような式は，規則viを使用しているが，このような式表現は一切見られない．

オ　$(x^3 + x^2 + x + 1) \div (x+1)(x-1)$

(4) 計算順序についての子どもの理解の実態

次に，式の計算順序について，子どもがどの程度理解しているかの実態に関する先行研究を分析した．

例えば，安藤（1977）は，中学校1年生を対象に，小学校の四則混合の計算問題の理解を調査して，ア，イのような誤答が顕著に見られることを指摘した．

ア　$\dfrac{5}{3} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{3+1}{4} = \dfrac{5}{3} - 1 = \dfrac{2}{3}$

イ　$\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{4+1}{3} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{3}$

これらの誤りは，計算しやすい部分から先に計算することによるものであり，計算順序の規則iやiiiを理解していないといえる．安藤は，誤りの要因として，計算のしやすさ，能率化という心理的要因を挙げている．

梶（2003）は，小学校6学年を対象に同様な調査を実施し，次のウ，エのような誤答が顕著に見られることを指摘した．

ウ　110−7+3=110−10=100

エ　240÷5×2=240÷10=24

これらの誤りは，後ろの2項を先に計算することによるもので，安藤の調査結果と同様なものである．梶は，誤答の要因として，加法のみあるいは乗法のみの式に適用される結合法則を，ウ，エのような混合計算の場合にも勝手に適用してしまっていると分析している．

小原（2005）は，四則混合式の計算順序に関する理解の状態を分析するために，小学校4〜6学年を対象に調査を行った．例えば，次のような調査問題である．

問1　次の式はどんな順番で計算すればいいのでしょうか。○の中に番号を付けてください。

2×8+5　3+6×4　5×8−2　8−3×2

○ ○　○ ○　○ ○　○ ○

8÷2+2　4+6÷3　4÷4−1　6−4÷2

○ ○　○ ○　○ ○　○ ○

この問題の結果について，いずれの問題も正答率は7割以上で高いといえる一方で，4学年よりも5学年の方が正答率が低く，必ずしも学年進行に伴って理解が向上していないことを指摘した．

熊倉（2006）は，中学生を対象に実施した調査結果において，次の誤答が目立つことから，規則ⅴおよびⅵに関わって，式の意味を十分に理解できていない生徒が少なくないことを指摘した．

オ　$\dfrac{x-y}{3}=x-y\div 3$

〔中1・21%，中2・28%，中3・7%〕

カ　y÷3x=y÷3×x

〔中1・45%，中2・49%，中3・39%〕

さらに，過去の教育課程実施状況調査の次の正答率（長崎他，2003）からは，特に規則ⅰの理解が十分でないことを指摘することができる．

キ　a÷b×c　〔中1・52.5%〕（2002）

ク　24÷6×2　〔小6・68.7%〕（1959）

ケ　(−14)÷(+6)×(−3)　〔中2・47.3%〕（1961）

以上の分析結果から，式の計算順序に関わる指導と子どもの理解の実態について，次のようにまとめることができる．

1）小学校では，第4学年で，規則ⅰ〜ⅲをまとめて指導する．中学校では，正負の数の指導の中で新たに規則ⅳを指導し，さらに，文字式および平方根の指導の中で，規則ⅴおよびⅵを説明なしに使用する．特に，規則ⅴ，ⅵは×や÷記号省略に伴う固有の規則といえる．高等学校では，特に規則ⅰ〜ⅳを確認したり，規則ⅴ，ⅵを意識させたりする指導場面はない．

2）先行研究から，特に規則ⅰ，ⅲの子どもの理解が十分でないことが指摘され，その要因として，「結合法則の誤用」「計算のしやすさという心理的要因」を挙げている．また，規則ⅴ，ⅵに関わって，除法や分数の形の式の意味の理解が十分でないという実態が指摘された．

4．過去の教科書の分析

ここでは，特に規則ⅵ，すなわち「かけ算記号省略優先」規則に関わって，単項式や多項式の除法の問題について，中学校，高等学校用の過去の教科書を分析した．

(1)　戦前の教科書

明治17年の教科書（成美堂・代数3千題上，尾関正求撰）の「除法第1例(1)」に，単項式の除法に関する次の問題と解答が掲載されていた．

ア　$6abc\div 2ab=\dfrac{6abc}{2ab}=3c$

ここでは，規則ⅵが使用されている．しかし，特に規則ⅵに関わる記述はなかった．

また，昭和18年の検定教科書（中等学校教科書株式会社・中学校第一類）の1年「3.式の計算§1.単項式の乗除」には，次のように，分数式の約分や，分数式同士の除法は掲載されているが，÷単項式の問題は見当たらなかった．

イ　次の式を簡単にせよ．（p.35）

$\dfrac{xy}{x^2y}$　　$\dfrac{bc}{a}\div\dfrac{(-a)^2}{b^2c}$

また，3年「3.多項式§4.多項式のわり算」には，次のような問題が掲載されていた．

ウ　$(x^3-5x^2-2x+3)\div(x-2)$　（p.58）

エ　$(x^3-3x^2+x+2)\div(x^2-x-2)$　（p.59）

いずれにせよ，規則ⅵを使った問題は掲載されていなかった．

(2)　戦後の中学校・高等学校教科書

昭和26年の検定教科書（大日本図書・日常の数学）の2年下「8.式とそのやくめ1」には，例えば次のような単項式の除法の問題と解答が掲載されていた．（p.299）

ア　$15a^2b^5\div 3ab^2=\dfrac{15a^2b^5}{3ab^2}=\dfrac{15}{3}\times\dfrac{a^2}{a}\times\dfrac{b^5}{b^2}=5ab^2$

また，昭和22年の教科書（中等学校教科書株式会社・数学解析編Ⅰ）にも，同様に次のような問題が掲載されていた．

イ　$3ab^2c\div 12a^2b^3c^2$　（p.45）

ウ　$(2x^2+7x+9)\div(x+2)$　（p.45）

しかし，いずれの場合も，規則ⅵに関わる記述はなかった．

その後は，上記のような単項式や多項式の除法に関する問題が，中学校や高等学校の教科書のどこかに掲載されていて，現在に至っている．

5．海外の教科書の分析

ここでは，4と同様に，規則viに関わって，単項式や多項式の除法の問題について，海外の教科書を分析した．分析した教科書は，ヨーロッパ，アジア，アメリカの各地域からいくつか選んだ．具体的には，表3の通りである．

表3　分析した海外の教科書

国名	教科書（学年）年	出版社
イギリス	SMP Interact 9c 2003	Cambridge
	SMP Interact Higher1,2 2007	Cambridge
ドイツ	Mathematik 8 Schuljahr 1994	Cornelsen
フィンランド	MATEMATIIKKA Pii9　2008	Otava
	LUKION LYHT MATEMATIIKKA SIGMA1 2014	sanoma pro
ロシア	代数学　普通教育学校7　2003	ロシア連邦教育省
アメリカ	ALGEBRA ONE 1978	Addition-Wesley Publishing
中国	代数　第1冊（下）1993	人民教育出版社中学数学室
韓国	中学校数学　8－1 2001	블랙박스
台湾	数学 中学校2年 1989	PAN PACIFIC PUBLICATIONS LTD
シンガポール	中学数学 2A 1992	Curriculum Development Institute of Singapore

分析の結果，次の4つの扱い方に分類できた．

(1)　規則viを使用した式表現は一切ない

式の除法の計算の仕方を説明する本文や例，練習問題の中に，規則viを使用した式表現が一切見当たらない教科書は，以下の通りである．

①　ロシアの場合

式の乗法・除法の単元における練習問題には，図1のように乗除の混在した問題があるが，この中に規則viを使用した表現の問題は見当たらない．（p.147）

697. а) $a\cdot\frac{a}{b}$;　б) $\frac{a}{x}:a$;　в) $\frac{a}{7x}\cdot 5x$;
г) $ab:\frac{a}{b}$;　д) $8a:\frac{20a^2b}{3x}$;　е) $18p^3\cdot\frac{5x}{9p^2}$.

図1　ロシアの問題

ロシアでは，わり算記号として÷ではなく：を用いている．乗法の問題では，乗数はB)のように，2つ以上の積の形の単項式（5x）があるが，除法の問題では，除数は1文字の単項式あるいは分数の形の式のいずれかであり，規則viを使用しないものとなっていることがわかる．

②　フィンランドの場合

中学校の教科書では，単元「多項式の除法」において，図2のように，例では除法の計算が分数の形で表現されている．（Pii9　p.244）

$$b)\ \frac{8x^4-2x^3+4x^2}{2x^2}$$
$$=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\,\cancel{x^2}(4x^2-x+2)}{\underset{1}{\cancel{2}}\,\cancel{x^2}}$$
$$=4x^2-x+2$$

図2　フィンランドの例

一方，練習問題の中には，図3のようにカッコを用いた表現が見られた．（Pii9　p.247）

141. Laske.
a) $(2x^4+4x^3-6x^2):(-2x^2)$
b) $(20a^3b^5-8a^4b^4):(4a^3b^4)$
c) $(5a^3b^2-10a^2b):(-5a^2b)$

図3　フィンランドの問題

なお，わり算記号はロシアと同様に：を用いている．

練習問題のa），c）は，マイナス記号があるので，カッコを用いる必要があるが，b）は，規則viを用いればカッコは不要であるにもかかわらず，カッコを用いている．

高校の教科書では，中学校のようなカッコを用いた式表現はなく，例や練習問題では，次のような分数の形の式で割る問題が見られる．

ア　$\frac{3x}{7}:\frac{4}{21x}$　　（SIGMA1　p.56 例）

イ　$\frac{x}{6}:\frac{x}{4}$　　（SIGMA1　p.58 練習）

これらは，規則viを使用しない式表現である．

(2) 練習問題の一部で規則viを使用している

式の除法の計算の仕方を説明する本文や例，例題では記載されていないが，練習問題の中に，一部規則viを使用している問題が見られる教科書は，以下の通りである．ただし，いずれの場合も，規則viに関わる記述はない．

① イギリスの場合

中学校（9 年生）の教科書には，式の除法の場面で，図 4 のように 12pq÷4p とは表現せずに，最初から分数の形で示している．（9c p.37）

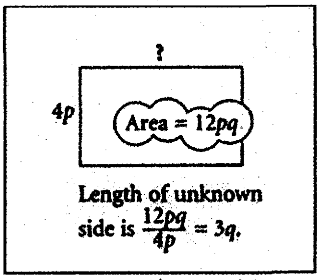

図 4 イギリスの例

高等学校（1，2 年生）の教科書においても，単元「累乗と指数」の式の除法の場面で，次のように最初から分数の形で示している．

ア $3p^2 \times \square = 12p^7$ に当てはまる□は，$\dfrac{12p^7}{3p^2}$

(Higher1 p.95)

一方で，単元「分数式と方程式」の除法の練習問題の中に次の 2 つの問題がある．しかし，このタイプの式表現は他に見られない．

イ $\dfrac{x^3}{5} \div 2x$ $\dfrac{b}{a} \div ab$ (Higher2 p.100)

② ドイツの場合

8 年生の教科書で，除法の例題は，次のように分数の形で示されている．

ウ $\dfrac{4y+12}{y^2-9} = \cdots = \dfrac{4}{y-3}$ (p.180)

また，除数が分数式であったり，多項式であったりするときは，次のようにわり算記号（：）を使っているが，ここでは規則viは必要ない．

エ $\dfrac{3}{x} : \dfrac{x-2}{4} = \cdots = \dfrac{12}{x(x-2)}$ (p.181)

オ $(x^2+6x+8):(x+4) = x+2$ (p.187)

一方で，練習問題の中に次の問題が見られた．

カ $(15m^2n^2 + 18m^3n^2):3m^2n^2$ (p.189)

しかし，この 1 問以外は，このタイプの問題は見当たらなかった．

③ アメリカの場合

単元「多項式の除法」において，例題では，図 5 のように最初から分数式で示されている．（p.352）

Divide $x^3 + 10x^2 + 8x$ by $2x$.

We write a fractional expression to show the division.

$$\frac{x^3 + 10x^2 + 8x}{2x}$$

図 5 アメリカの例

一方で，その後の練習問題の中に，規則viを使用した表現（キ，ク）と，そうでない表現（ケ，コ）が混在している．（p.355）

キ $(15t^3+24t^2-6t)\div 3t$

ク $(25t^3+15t^2-30t)\div 5t$

ケ $(24x^5-40x^4+6x^3)\div(4x^3)$

コ $(18x^6-27x^5-3x^3)\div(9x^3)$

この 4 問だけを見る限りは，次数 1 の単項式で割る場合は規則viを使用し，次数 2 以上の単項式で割る場合はカッコをつけている．

(3) 規則viに相当する説明がある

最初に規則viを使用する段階で，その式の意味を説明している教科書は，中国の教科書のみであり，具体的には図 6 の通りである．（p.161）

$12a^3b^2x^3 \div 3ab^2$. ❶

我们已经知道，上式中的运算，就是要求一个单项式（商式），使它与 $3ab^2$（除式）相乘的积等于 $12a^3b^2x^3$（被除式）.

∵ $4a^2x^3 \cdot 3ab^2 = 12a^3b^2x^3$,

∴ $12a^3b^2x^3 \div 3ab^2 = 4a^2x^3$.

---

❶ 这个式子就是 $(12a^3b^2x^3)\div(3ab^2)$ 的意思.

図 6 中国の例

カッコを付けた式と同じ意味であることを説明した上で，その後は，単項式同士の除法に限らず，次のような多項式÷単項式においても，規則viを使用している．

ア $(28a^3-14a^2+7a)\div 7a$ (p.147)

(4) 規則viを説明なく使用している

日本と同様に，規則viに関わる説明の記述は特にないが，規則viを使用している教科書は，次の通りである．

① シンガポールの場合

はじめに言葉で「何を何で割るのか」を示した上で，図 7 のように規則viを用いた式表現をしている．（p.82）

> *Example 3.2.2*
> Divide
> (a) $\frac{5x}{7}$ by $2y$,
>
> *Solution:*
> (a) $\frac{5x}{7} \div 2y = \frac{5x}{7} \times \frac{1}{2y}$
> $= \frac{5x}{14y}$ (Ans)

図7　シンガポールの例

図7の(a)の言葉の説明を挿入することにより，少なくとも「÷2y」の意味が明確になるといえる．

② 韓国の場合

かけ算の式の□に当てはまる式を求めるために，図8のように規則viを用いた式を示している．(p.51)

> 앞쪽의 직육면체의 통에서 밑면의 넓이가 $6a^2$이므로 구하는 높이를 $\boxed{}$라 하면 $6a^2\times\boxed{}=12a^3$이다. 따라서
>
> $\boxed{}=12a^3\div 6a^2=\frac{12a^3}{6a^2}$
>
> $=\frac{12}{6}\times\frac{a\times a\times a}{a\times a}=2a$

図8　韓国の例

規則viに関わる記述はないが，「$6a^2$×□＝$12a^3$ の□に当てはまる式を求める」という文脈があることで，少なくとも「÷$6a^2$」の意味が明確になるといえる．

③ 台湾の場合

例題で，次の問題を扱い，練習で類似問題を多く扱っている．

ア　$6x\div 2x=\dfrac{6x}{2x}=\dfrac{6\times x}{2\times x}=3$　　(p.79)

以上の海外の教科書分析から，規則viの扱いは，国によって多様であることがわかった．多様性を具体的にまとめると次のようになる．

1) 東アジアや東南アジアの調査した教科書では，日本と同じように，規則viを頻繁に用いていて，ほとんどは規則viの説明もない．中国のみが，規則viに相当する説明を記載していた．

2) ロシアやフィンランドの調査した教科書には，規則viを用いた式表現は一切見当たらなかった．ロシアの場合は分数の形のみで示され，フィンランドの場合は，分数の形以外のわり算の式もあったが，カッコを用いて表現していた．

3) アメリカやフィンランド以外のヨーロッパの調査した教科書では，基本的には規則viをできるだけ用いずに，分数の形で表現しているが，練習問題の中にごく一部，規則viを用いた式表現が見られた．

6．「かけ算記号省略優先」規則に関する考察

3～5を踏まえて，ここでは「かけ算記号省略優先」規則（規則vi）に関して考察を加える．

(1) 規則viを使用しない理由

まず，「かけ算記号省略優先」規則を使用しない理由について考察する．実際，規則viを使用している教科書とそうでない教科書があったが，これは使う必要がないからである．すなわち，アメリカやヨーロッパの多くの教科書がそうであったように，分数の形で表したり，わり算記号を用いる場合でもフィンランドやアメリカの一部の問題に見られたように，カッコをつけたりすればよい．

ア　単項式 12ab を単項式 3a で割る場合

$$\frac{12ab}{3a} \qquad (12ab)\div(3a)$$

また，記号の省略には，かけ算記号の省略とわり算記号の省略があるが，一方のみではなく，エのように両方の省略を同時に行う方が，表現の統一という観点からは，すっきりしている．

イ　$(12\times a\times b)\div(3\times a)=(12ab)\div(3a)$　(×の省略)

ウ　$(12\times a\times b)\div(3\times a)=\dfrac{12\times a\times b}{3\times a}$　(÷の省略)

エ　$(12\times a\times b)\div(3\times a)=\dfrac{12ab}{3a}$　(×÷の省略)

(2) 規則viを使用する意義

次に，使用する必要のない規則viをなぜわざわざ使用するのか，この規則viを使用することの意義について考察する．

① 単項式同士の四則演算を簡潔に表現する

小学校では，整数や小数，分数の四則演算について，加法，減法，乗法，除法の順に，＋，－，×，÷記号を用いて学習する．また，中学校第1学年でも，正負の数の四則演算について記号を用いて順に学習する．これに倣えば，単項式同士の四則演算についても，次のように，四則演算の記号を用いて指導することが教育的であるといえる．

ア　単項式 3a と 2a の四則演算

(3a)＋(2a)，(3a)－(2a)，(3a)×(2a)，(3a)÷(2a)

このうち，次のように，加法，減法については規則iii（乗除優先）により，また乗法については結合法則により，それぞれカッコをはずすことができる．一方，除法の場合は，規則iにより前のカッコをはずすことはできるが，規則viを使用しなければ後ろのカッコをはずすことはできない．

イ　(3a)＋(2a)＝3a＋2a　∵規則iii

ウ　(3a)－(2a)＝3a－2a　∵規則iii

エ　(3a)×(2a)＝3a×2a　∵結合法則

オ　(3a)÷(2a)＝3a÷(2a)　∵規則i

逆に言えば，規則viを使用することで，四則演算の4つの式について，すべてカッコを省略して簡潔に表現することができるといえる．なお，上記のことは，平方根の加減乗除の式表現についても同様である．

② わり算記号省略の場合と統一する

わり算記号を省略して分数の形にした場合，分数の部分は，その商を先に計算する [5]ので，次のカのようにカッコをはずすことができる．

これと同様にして，かけ算記号を省略する場合も，キのようにわり算記号省略の場合と同様な規則として規則viを使用すれば，統一的に表現することができる．

カ $a\div(b\div c)=a\div\left(\dfrac{b}{c}\right)=a\div\dfrac{b}{c}$

キ $a\div(b\times c)=a\div(bc)=a\div bc$

③ 式を計算結果とみる捉え方を促進する

文字式の捉え方には，計算の過程（process）とみる捉え方と，計算した結果(product)とみる捉え方があり，「2つの捉え方をすることが困難であること」，「process とみる捉え方が product とみる捉え方に先行すること」が指摘されている（A.Sfard & L.Linchevski, 1994：清水，1998：小岩，2005 等）．例えば，単項式 3a を単項式 2a で割る場合は，規則viを使用することで，除数の 2a は，除法の計算をする段階では，あらかじめ計算した結果である product としての捉え方をすることになる．すなわち，規則viを使用することにより，product としての捉え方が促進されることが期待できる．

④ 除数が分数の形の式の場合に統一する

例えば，単項式 3a を単項式 $\dfrac{a}{2}$ で割る場合と $\dfrac{1}{2}a$ で割る場合の2つの式を，規則viを使用せずに表現すると，次のようになる．

ク $3a\div\dfrac{a}{2}$　　$3a\div\left(\dfrac{1}{2}a\right)$

一方はカッコが不要で，他方はカッコが必要である．類似の式でありながら，カッコの必要の有無が異なるのは，子どもの理解に混乱を生じさせる要因となりかねない．しかし，規則viを使用することで，両方ともカッコが不要になって簡潔に表現できる．少なくともこのような分数倍の単項式で割る場合に，子どもが表現方法について混乱することはなくなるであろう．

以上，「かけ算記号省略優先」規則を使用しない理由と使用する意義について考察してきた．それでは，この規則は使用する方がよいのか，それとも使用しない方がよいのか．教育的な観点から考えると，筆者はこの規則を使用することがよいと考える．なぜならば，上で述べた意義①～④は，規則を積極的に使用する理由に値すると考えるからである．

7．式の計算順序に関する指導への示唆

6の考察結果を踏まえると，「かけ算記号省略優先」規則の使用を前提とした文字式の計算順序に関する指導への示唆として，次の3点を挙げることができる．

(1) 規則viについてきちんと指導する

「かけ算記号省略優先」規則（規則vi）を理解するためには，中国の教科書のようにカッコのついた式を示してもとの式の意味をはっきりさせる，あるいは明確に「かけ算記号を省略している部分は優先して計算する」ことを説明することが重要であると考える．例えば，次のアあるいはイのように示すことが考えられる．

ア $\underline{12ab\div 3b}=\dfrac{12ab}{3b}$

(12ab)÷(3b)のこと

イ $\underline{12ab\div 3b}=\dfrac{12ab}{3b}$

12×a×b，3×b を先に計算してから，12ab を 3b で割る．

(2) 式の意味を言葉で説明する

現行の中学校教科書では，タイトルが「単項式の除法」とあるだけで，次にいきなり式が示されているものが少なくない．しかし，これでは，式の意味を必ずしも正しく理解しない可能性がある．例えばアメリカやシンガポールの教科書のように，「式 12ab を式 3b で割る」など，はじめに式の意味を言葉で説明した上で，12ab÷3b という式を示すことが重要であると考える．さらには，イギリスや韓国のように，「かけ算の式の□に当てはまる式を求める」という文脈の中で，除法の式を示すことが望ましいといえよう．例えば，除法の導入の場面で，次のように示すことが考えられる．

例）3b×□＝12ab の□に当てはまる式を求めるには，12ab を 3b で割ればよい．

□＝12ab÷3b

＝ …

(3) 規則ｉ～ｖを具体例を通して確認する

先行研究から，規則ｉやiiiの理解が必ずしも十分でないことが指摘されている．そこで，文字式の計算においても，これらの規則についてていねいに確認しながら進めるようにしたい．また，規則viの理解に関わって，規則ｖを理解させることも重要である．例えば，次のア～カのような式を取り上げて，それぞれの場合に計算順序の規則を確認することが考えられる．

ア $x\div 2\times y=(x\div 2)\times y=\dfrac{x}{2}\times y=\dfrac{xy}{2}$　（規則ｉ）

イ　$x \div (2 \times y) = x \div (2y) = \dfrac{x}{2y}$　（規則ii）

ウ　$a \times 2 - b \div 3 = (a \times 2) - (b \div 3) = 2a - \dfrac{b}{3}$　（規則iii）

エ　$18 \times a \div 3^2 = (18 \times a) \div (3 \times 3) = 2a$　（規則iv）

オ　$\dfrac{a+2b}{3} = (a+2b) \div 3 = (a + 2 \times b) \div 3$　（規則v）

カ　$\dfrac{a}{3b} = a \div (3b) = a \div (3 \times b)$　（規則v）

指導の際には，計算順序を確認するために，カッコのついた式を挿入する等，ていねいに扱いたい．

8．今後の課題

今後の課題として，次の2点を挙げることができる．

(1)　規則vおよび規則viについての子どもの理解の実態を明らかにする．

(2)　本研究で得られた示唆をもとに指導を実践し，その有効性を実証的に明らかにする．

9．おわりに

筆者が以前に執筆した論文（熊倉，2006）に対して，論文を読んだ方から，そこで述べた規則viに相当する内容について質問を頂いたことが，本論文執筆の発端である．結果として，規則viは世界的には必ずしも一般的に使用されていないこと，他にも規則vについての指導の重要性を明らかにすることができた．これからの学校教育の中で，規則vおよび規則viについて，意識して指導されることを期待したい．

＜註＞

1)　調査した現行の小学校算数，中学校数学，高等学校数学の教科書は，次の通りである．

＜小学校＞全学年・2010年検定済
東京書籍，大日本図書，学校図書，教育出版，啓林館，日本文教出版

＜中学校＞全学年・2011年検定済
東京書籍，大日本図書，学校図書，教育出版，啓林館，数研出版，日本文教出版

＜高等学校＞数学Ⅱ・2011年検定済
東京書籍301～303，実教出版304～306，
啓林館307,308，数研出版309～313，
第一学習社314,315

2)　調査した過去の教科書は，次の通りである．
代数3千題上・成美堂（尾関正求撰），1884
中学校第1類・中等学校教科書株式会社，1943
日常の数学・大日本図書，1951
数学解析編Ⅰ・中等学校教科書株式会社，1947

3)　調査した海外の教科書は，教科書研究センター附属教科書図書館（東京都江東区）に保存されているもの，および筆者の手元にあるものから選択したものであり，必ずしも最新の教科書というわけではない．

4)　教科書以外の文献に，次のような規則viと同じ記述があった．
「乗法記号を省略して書いた積は，他の演算記号に優先する．たとえばa÷bcは$\dfrac{a}{bc}$であって，a÷b×cの省略ではない．」（島田茂，1990）

5)　次の規則を，7番目の規則として追加することも考えられる．

vii　割り算記号を省略して分数の形で表されている場合は，その部分を先に計算する．

この規則に関わって，次のように，小5で割り算を分数の形で表すことを学んだ後に，小6で分数で割る計算について学習するが，このとき特に，規則viiを意識する必要はない．

小5：$2 \div 3 = \dfrac{2}{3}$，小6：$5 \div \dfrac{2}{3} = 5 \times \dfrac{3}{2}$

これは，分数で表された式を，すでに計算した結果ととらえているからである．したがって，規則viiを意識しないことにより，計算でつまずいたりして不都合が生じることはないと考えられるため，本文では規則として取り上げなかった．

＜引用・参考文献＞

安藤一郎（1977）「四則混合演算における計算過程の考察」日本数学教育学会誌，59巻12号，pp.226-231

梶孝行（2003）「数式の計算の順序に関する考察（Ⅲ）-小学校教科書の分析を通して-」第36回数学教育論文発表会論文集，pp.169-174

小岩大（2004）「文字式の理解を捉えるための調査問題の開発-process-product に焦点を当てて-」第37回数学教育論文発表会論文集，pp.259-264

熊倉啓之（2006）「乗除混合演算式についての理解と指導に関する研究」静岡大学教育実践総合センター紀要第12号，pp.47-56

長崎栄三他（2003）「算数・数学の内容とその配列に関する基礎的・実証的研究」文部省科学研究費補助金特定領域研究報告書

小原豊（2005）「小学校算数科における四則混合式に関する計算順序の理解」筑波数学教育研究，24巻，pp.11-20

坂本雄士（2007）「中学校1年生の「文字式に関する規則」の理解に関する一考察-記号的表現の縮約性を視点にして-」第40回数学教育論文発表会論文集，pp.349-354

Sfard & Linchevski（1994）,'THE GAINS AND THE

PITFALLS OF REIFICATION -THE CASE OF ALGEBRA', Educational studies in mathematics,Volume26(2,3), pp.87-124.
島田茂（1990）『教職数学シリーズ実践編 10・教師のための問題集』共立出版，p.18
清水宏幸（1997）「中学校数学における文字式の理解に関する研究-文字式をひとまとまりと見ることの困難性に焦点を当てて-」第 30 回数学教育論文発表会論文集，pp.247-252