SURE 静岡大学学術リポジトリ
Shizuoka University REpository

発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形の指導

メタデータ	言語: jpn
	出版者:
	公開日: 2016-06-06
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 鈴木, 直, 加藤, 健二, 熊倉, 啓之
	メールアドレス:
	所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00009430

〈論文〉

発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形の指導

・鈴木直*・加藤健二*・熊倉　啓之**

Teaching Geometry to Emphasize Development Thinking in Junior High School

Tadashi SUZUKI, Kenji KATHO, Hiroyuki KUMAKURA

Abstract

The purpose of this study is to consider the desirable teaching geometry by emphasizing development thinking in junior high school. First, we clarified that there are little descriptions in the textbooks and preceding studies about changing a part conditions of primal problem. Second, we practiced lessons by emphasizing development thinking, and students could solve problems with development thinking. Third, we gained three suggestions as follows;

1) Setting the materials that students can understand deeply,
2) Setting the materials that the problems are not too difficult,
3) Teaching continuously by emphasizing development thinking in junior high school.

キーワード：発展的な考え方，図形の移動，相似な図形の面積比

1．はじめに

昭和44(1969)年4月に告示された中学校学習指導要領において，数学の目標に「発展」という表現が初めて登場する．この表現に関する説明として，中学校指導書数学編（文部省，1970）には，次の記述がある．

「発展的な考えとは，ものごとを固定的なもの，確定的なものと考えず，絶えず新たなものに創造し発展させようとする考えである．」（p.13）

その後，発展的な考えの重要性は，多くの研究者によって指摘されてきた（例えば，中島，1981，福田，2009など）．筆者らも，以下に挙げる理由から，「発展的な考え方」を育成する指導は極めて重要であると考えている．

それは，数学的な考え方の1つとして，生徒が身に付ける価値のある考え方であるという点である．数学に限らず，社会生活等における様々な問題を解決する上で，仮に1つの答えが得られたとしても，それで終わりにせずに，よりよい解決方法を見つけようとしたり，条件を変更した別の問題の解決に活かそうとしたりする態度を身に付けることは，これからの時代を生きる上で欠かせない資質能力といえる．

加えて，発展的な考え方を重視した指導を行うことで，結果として，数学の学習は「教師から与えられた問題を解けばよい」という生徒の数学の学習観を改善し，合わせて生徒が主体的に授業に参加する授業改善につながるという点も見逃せない．このことの持つ教育的意義は大変大きいものといえよう．

それにもかかわらず，実際の指導において，発展的な考え方を重視した指導が十分に行われているかどうかは疑問である．実際，山田ら（2005）は，片桐（1988）の指摘する方法に関係した11種類の数学的な考え方について，中学校教科書での扱いを分析したところ，演繹的な考え方等は学習する場面が多い一方で，発展的な考え方等は学習する場面が少ないことを指摘している．また，発展的な考え方の指導を行うと，時間がかかる，難易度が難しくなり過ぎて理解できない生徒が多く出てしまう，などの教員の声を耳にする．

以上の問題意識のもと，本研究では，発展的な考え方の育成を重視した指導のあり方を追究することとする．発展的な考え方の育成を重視した指導が，少しでも多く行われることを願って，研究を進めるものである．指導内容は，本稿では中学校数学科の図形指導に焦点を絞ることとする．

*静岡大学教育学部附属島田中学校
**静岡大学学術院教育学領域

2．研究の目的

本研究の目的は，中学校数学科における発展的な考え方の育成を重視した図形の指導について，望ましい学習指導のあり方を追究することである．

3．研究の方法

以下の手順にしたがって，研究を進める．

(1) 発展的な考え方に関わる活動について，教科書での扱いを分析する．

(2) 中学校数学科における発展的な考え方の育成を重視した指導に関する先行研究を分析する．

(3) (1)，(2)を踏まえて，発展的な考え方を重視した図形の指導を構想して実践し，そこでの生徒のあらわれを分析する．

(4) (3)の分析結果を踏まえ，望ましい指導のあり方についての示唆を得る．

4．発展的な考え方に関わる活動の教科書での扱い

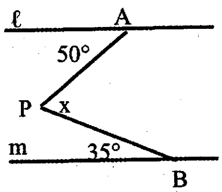
ここでは，具体的にどのような問題がどの程度取り上げられているかについて分析する．調査対象は，本稿のテーマに関連する図形分野とする．ただし，練習問題，章末問題等は除く．

(1) 問題の条件の一部を変更する活動

次の例 1～例 4 のような問題が取り上げられていた．それぞれの例について，矢印の上側が原題で，下側が発展させる内容である．

(例 1)　中 2　多角形の角　学校図書（p.123）

ℓ∥m のとき，∠x を求める．



⬇

条件を少し変えて，図を変更する．

① 点 P を m の下に動かす．

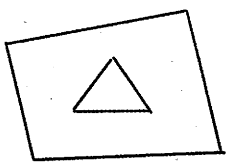
② ℓ，m の間に点 Q を加える．

③ ℓ，m が交わるようにする．

④ 他の場合（自由）

(例 2)　中 2　多角形の角　大日本図書（pp.136-137）

四角形の中に三角形の穴があいている紙があるとき，紙にできる 7 つの角の和を求める．



⬇

外側の形や穴の形をいろいろ変えて，角の和を求める．

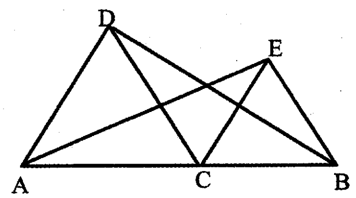
① 外側の形が五角形の場合

② 穴の形が四角形の場合

③ 他の場合（自由）

(例 3)　中 2　合同条件　教育出版（pp.172-173）

線分 AB 上に点 C をとり，正三角形 ACD，CBE をつくるとき，AE＝DB である．



⬇

条件の一部を変えたとき，AE＝DB が成り立つか調べる．

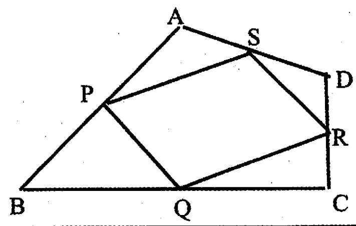
① A，C，B が 1 つの直線上にない場合

② 正三角形を正方形にした場合

③ 他の場合（自由）

(例 4)　中 3　中点連結定理　学校図書（pp.146-147）

四角形 ABCD で，各辺の中点を P，Q，R，S とするとき，四角形 PQRS は，平行四辺形になる．



⬇

四角形 ABCD の形を変えたとき，四角形 PQRS はどんな四角形になるかを調べる．

① 長方形の場合

② ひし形の場合

③ ブーメラン型（凹四角形）の場合

例 1～4 は，段階的に発展させていて，はじめはどのように条件を変更するかの指定があるが，最後は自由に変更する設定となっている．このようなステップを踏むことで，発展的な考え方を育成することが期待できるといえる．しかし，例 1，2 を扱っているのは 1 社ずつ，例 3 を扱っているのも 2 社のみであった．

例4と類似の問題を扱っているのは5社であった．この中には，元の四角形を変更するのではなく，次のように，ア．条件を付加した問い，イ．逆の命題を考えさせる問いが設定されているものもあった．

ア「AC＝BD のとき，四角形 PQRS はどのような四角形になるか．」

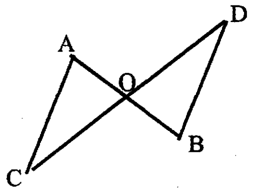
イ「四角形 PQRS が長方形，ひし形，正方形になるのは，元の図形の対角線にどのような条件がある場合か．」

(2) 1つの命題の証明から，他の命題を見いだす活動

次の例5～例8のような問題が取り上げられていた．それぞれの例について，矢印の上側が原題で，下側が発展させる内容である．

(例5) 中2 合同条件 日本文教出版（pp.116-117）

線分 AB,CD が点 O で交わり，OA＝OB，OC＝OD ならば，AB∥DC である．

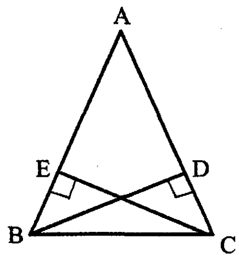


↓

他の性質を見つける．

(例6) 中2 直角三角形の合同条件 大日本図書 (p.155)

AB＝AC の二等辺三角形 ABC で垂線 BD と CE を引くとき，BD＝CE である．

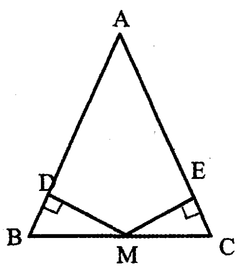


↓

他の性質を見つける．

(例7) 中2 直角三角形の合同条件 東京書籍(p.127)

△ABC の辺 BC の中点 M から垂線 MD，ME を引く．MD＝ME のとき，△ABC は二等辺三角形である．

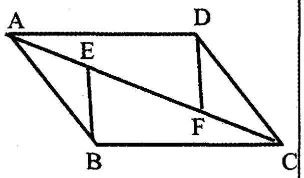


↓

D と E を結ぶとき，他の性質を見つける．

(例8) 中2 平行四辺形 学校図書 (p.140)

▱ABCD の対角線 AC 上に AE＝CF となるように E，F をとるとき，BE＝DF である．



↓

他の性質を見つける．

例5は，3社で扱っていたが，例6～8はそれぞれ1社ずつでしか扱っていなかった．いずれも，証明を振り返って，新たな性質を見つける設定である．このタイプの問題は，現行学習指導要領第2学年B図形(2)ウ「～図形の性質の証明を読んで新たな性質を見いだしたりすること」に基づいて設けられた問題といえる．しかし中3に，このタイプの問題は見当たらなかった．

全体を通して，発展的な考え方を育成するような問題設定は，教科書では扱いが少ないことがわかった．つまり，教科書の通りに問題を扱っているだけでは，発展的な考え方を育成する上で指導が十分ではないということができる．

5．発展的な考え方の育成の指導に関する先行研究

(1) 発展的な考え方の分類

片桐（1988）は，数学の方法に関係した数学的な考え方の1つとして「発展的な考え方」を挙げ，この発展的な考え方を2つの型に分類している．

Ⅰ型：広い意味での問題の条件を変えてみること．
- ① 条件の一部を他のものに置き換える，あるいは条件を緩める．
- ② 問題場面を変える．

Ⅱ型：思考の観点を変えること．

菊池は（1997）は，次のように，統合による発展と統合によらない発展に分類し，さらにそれぞれをいくつかの発展，統合に分類している．

Ⅰ 統合による発展
- ① 新しい着想による統合
- ② 一般化による統合
- ③ 図表示による統合

Ⅱ 統合によらない発展
- ④ 逆向きの考えによる発展
- ⑤ 類比による発展
- ⑥ 組合せによる発展
- ⑦ 変形による発展
- ⑧ 分解・合成による発展
- ⑨ 特殊化による発展

また橋本（2001）は，次の6つに分類している．

① 観点変更して考える
② 問題の構成要素を変更して考える
③ 一般化して考える
③ 拡張して考える
④ 統合して考える
⑤ 逆に考える

このように，発展的な考え方には，様々な分類があることがわかる．

(2)　発展的な考え方の指導方法

ここでは，片桐の分類に従い，それぞれの指導方法について検討する．

Ⅰ型①の指導法としては，What-If-Not ストラテジー（ブラウン／ワルター，1990）が考えられよう．例えば，寺田（2010）は，三平方の定理を3次元に拡張して考え，発展した問題設定を行った．教材開発を通して，このストラテジーが生徒の自ら考える力の育成に有効であることを指摘している．また，福田（2009）は，式を読む活動に焦点を当て，マッチ棒を正方形状に横にn個並べるときの必要なマッチ棒の本数の式を読んで，発展させる事例を挙げている．

Ⅰ型②の指導法としては，問題づくり（竹内ら，1984）が考えられよう．例えば，箕輪（2010）は，問題づくりの授業を6段階に分けて行い，中3の相似な図形の単元で，1つの問題をもとにして，問題づくりの実践を行った．この実践を通して，原問題を精選すること，発問の仕方を工夫することを指摘している．

Ⅱ型の指導法としては，オープンアプローチ（能田，1983）や多様な考えを生かした指導（古藤，1992）が考えられよう．例えば，高畑（2006）は，中2を対象に，ブーメラン型の図形の角の和の関係を見いだす授業を行い，オープンアプローチによる学びが，生徒の情意面によい影響を与えることを明らかにした．

以上より，それぞれの型によって適切な指導方法があることがわかった．さらに，それぞれの指導方法による実践研究も行われてきたことがわかった．特に，Ⅱ型の指導については，比較的多く研究されてきたといってよいであろう．実際，筆者らも，これまでに多くの実践研究を積み重ねてきている（例えば，熊倉，2011）．一方で，Ⅰ型の指導については，必ずしも多くの実践がなされてきたわけではない．

そこで，本研究は，Ⅰ型の指導のあり方を追究することとする．一定数の研究成果があるにもかかわらず，4で述べたように，教科書には，Ⅰ型の発展的な考え方に関わる活動は，決して多くはなかった．つまり，発展的な考え方を育成するような指導は，一般に広く普及していない，ということができるであろう．本研究はそこに焦点を当てるものである．

6．発展的な考え方の育成を重視した実践

(1)　図形の移動に関する実践

中1の単元「平面図形」の図形の移動について，平行移動，線対称移動，回転移動の3つの基本移動の意味や性質を指導した上で，それらを活用した実践を行った（巻末資料1参照）．実践の概要と考察は，次に述べる通りである．

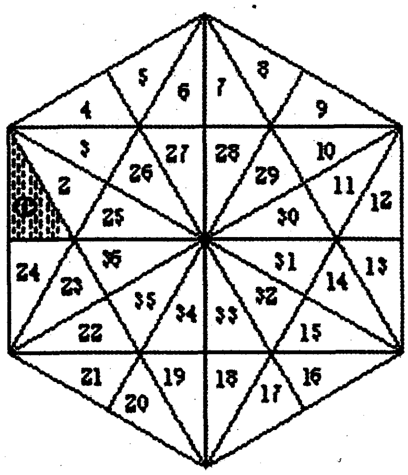
① 日時：2015年11月5日
② 対象生徒：国立大学附属中学1年生40名
③ 授業のねらい：

平行移動，回転移動，対称移動を適切に使い，図形を目標の場所に移動する活動を通して，できるだけ少ない回数で移動しようと発展させて考え，移動に関する理解を深めることができる．

④ 授業の展開と生徒の反応

初めに，次の課題を提示した．

課題　次の図で，①の直角三角形を 10 や 31 や 33 に移動する方法を考えてみよう．



まずは個人で追究させた．33 への移動については，1回の平行移動で可能であることはすぐに見つけていた．10，31 への移動については，多くの生徒が，はじめは次のような2回，3回での移動を考えていた．

＜生徒が考えた31への移動例＞

ア．① → 12　対称移動
　　12 → 30　回転移動
　　30 → 31　対称移動（3回）

イ．① → 25　回転移動
　　25 → 31　回転移動（2回）

＜生徒が考えた10への移動例＞

ウ．① → 25　回転移動
　　25 → 30　対称移動
　　30 → 10　回転移動（3回）

エ．① → 4　対称移動
　　4 → 9　対称移動
　　9 → 10　対称移動（3回）

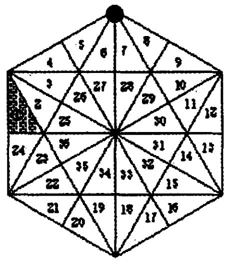
しばらく経過したところで，小集団で追究させた．その際，回転の中心や対称の軸がどこにあるのかについても確認するように促した．互いの考えを共有する中で，「できるだけ少ない手数で移動できないか？」ということに議論が向けられるようになってきた．そして，次のように，31 への移動については 1 回で，10 への移動については 2 回で，移動する方法を考える集団が出てきた．

オ．① → 31 回転移動（1 回）

カ．① → 3 回転移動

3 → 10 対称移動（2 回）

一斉での追究では，31 への 1 回の移動について，1 人の生徒 P が，実物投影機を使って移動のようすを示し，回転の中心が A で反時計回りに 60°回転すればよいことを発表した．



授業者が，回転の中心がなぜ A の位置になるのか質問したところ，別の生徒 Q から，対応する頂点を結ぶ線分の垂直 2 等分線の交点になっているという意見が出された．

この意見に対して，多くの生徒が納得できたことが，次の授業後の生徒の記述からも読み取れる．

> 回転の中心について，「それぞれの対応する点を結んだ垂直 2 等分線が交わったところに回転の中心ができる」という Q さんの説明は，とてもわかり易かったです．

最終的には，次の時間も少し使い，次の 2 点を確認して移動の授業を終えた．

・平面においては，平行移動，回転移動，対称移動を組み合わせて用いることで，どのような位置にも動かすことができる．

・2 つの図形の関係が裏返っている場合は，最低 2 回の移動で，そうでない場合は，最低 1 回の移動で可能である．

授業後の次の生徒の感想からは，移動について理解を深めたことが読み取れる．

> ・どうやったら 1 回でも移動できるのか，図形の移動のしくみなどが授業を通してわかりました．移動の方法はとてもたくさんあり，3 つの移動方法を組み合わせて移動させたり，1 つの方法で何回も移動させたりしました．裏返っている図形に移動させるには，2 回は移動させないといけないということがわかりました．
>
> ・3 つの移動を使って，場所が遠いところでも移動できることがわかりました．また，個人追究や小集団追究で考えつかなかった「1 回の移動の法則」をみんなで考え，どんなときにどんな条件で 1 回で移動できるのかを話し合いました．1 人の意見から，いろいろな考えが出て，広がっていき，すごいと思いました．充実した授業になりました．

⑤ 発展的な考え方の育成に関する考察

本時の課題は，単に「移動する方法を考えよう」と投げかけた．そして，個人追究の段階では，回数に関係なく複数の方法を考えていた生徒が少なくなかった．ところが，小集団で互いの考えを発表しあう中で，より回数の少ない移動回数を追究するようになり，多くの小集団で自然に「できるだけ少ない回数で移動するには？」と，課題を発展させて考えるようになった．このような活動を積み重ねることが，発展的な考え方の育成につながるといえよう．

(2) 相似な図形の面積比に関する実践

中 3 の単元「相似な図形」の面積比について，実践を行った（巻末資料 2 参照）．実践の概要と考察は，次に述べる通りである．

① 日時：2015 年 11 月 5 日

② 対象生徒：国立大学附属中学 3 年生 40 名

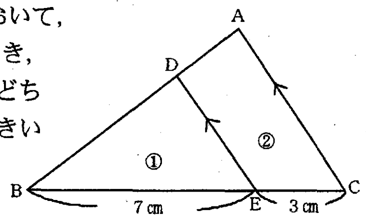
③ 授業のねらい：

相似な図形の面積比は，相似比の 2 乗に等しいことを理解した上で，面積の大小を比較する課題を，面積を 2 等分する課題に発展させて考え，面積比を活用して問題を解決することができる．

④ 授業の展開と生徒の反応

初めに，次の課題 I を提示した（第 1 時）．

> 課題 I　△ABCにおいて，AC // DEのとき，①と②とではどちらの面積が大きいだろうか．



一見すると，①の方が大きいように見えるが，実は②の方が大きくなるように設定した課題である．まずこの状況でわかることを発表し，解決までの道筋を全体で確認してから個人追究を行った．しばらく経過した後，2 人の生徒に全体の前で次の考えを発表させた．

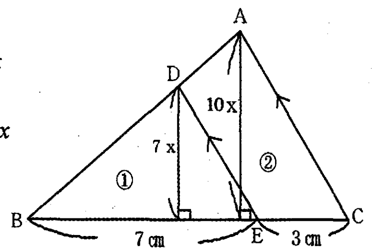
<生徒の考え 1>

図のように，三角形の高さを x を用いて表す．

① $7\times 7x\div 2=\dfrac{49}{2}x$

② $10\times 10x\div 2=\dfrac{100}{2}x$

$\dfrac{100}{2}x-\dfrac{49}{2}x=\dfrac{51}{2}x$



よって，②の方が大きい．

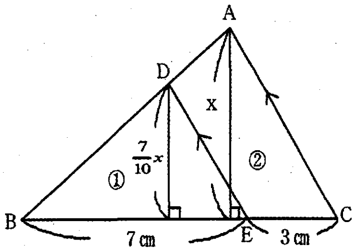
<生徒の考え 2>

図のように，三角形の高さを x を用いて表す．

① $\frac{7}{10}x \times 7 \div 2 = \frac{49}{20}x$

② $10 \times x \div 2 = \frac{100}{20}x$

$\frac{100}{20}x - \frac{49}{20}x = \frac{51}{20}x$



よって，②の方が大きい．

この課題 I の解決を通して，三角形の面積比が，相似比の 2 乗になっていることを全体で確認した．

(①の面積) : (①+②の面積) $=7^2:10^2$

次に，「他の図形でも相似比と面積比の関係が成り立つだろうか」と生徒に投げかけた．特に図形は指定しなかったが，生徒は，自分たちで，正方形・ひし形・長方形・平行四辺形など，特別な四角形について帰納的に調べていた．しばらく時間を取った後に，生徒に発表させたところ，ある生徒から「どんな多角形も三角形に分けて考えればいい」という意見が出されて，生徒は他の図形でも成り立つことを理解した．授業の最後には，「曲線で囲まれた図形でも調べてみたい」という意見が出た．

次に，課題 II を提示した（第 2 時）．

課題 II　課題 I で，問題を少し変えてみよう．

「DE と AC は平行である」という条件は変えないこととして，生徒に考えさせたところ，「①と②の面積が等しくなるときの BE の長さを考える」という意見が出て，この課題に取り組むこととした．これは，授業者の意図した課題であった．

まず個人追究を行った．BE＝x cm，EC＝10－x cm として，①と②の面積をそれぞれ求めようとして計算できない生徒がいたので，前時で学習した相似比と面積比の関係は相似な図形でしか使えないことや，①と②が等しいということは△DBE と△ABC がどのような比になるときかを全体で確認した．

しばらく時間を取った後，小集団での追究を行い，互いの考えを共有して，自分や他人の方法について理解を確かなものとした．

その後の一斉での追究では，次の 2 つの生徒の考えを発表させた．いずれも x は BE の長さを表している．

<相似比を利用した生徒の考え>

△ABC と△DBE の面積が 2 : 1 になればいい．

よって，相似比は $\sqrt{2}:1$ となる．

$10 : x = \sqrt{2} : 1$

$\sqrt{2}x = 10$

$x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

よって，BE$= 5\sqrt{2}$

<面積比を利用した生徒の考え>

相似比を 10 : x とすると，面積比は 100 : x^2 となる．

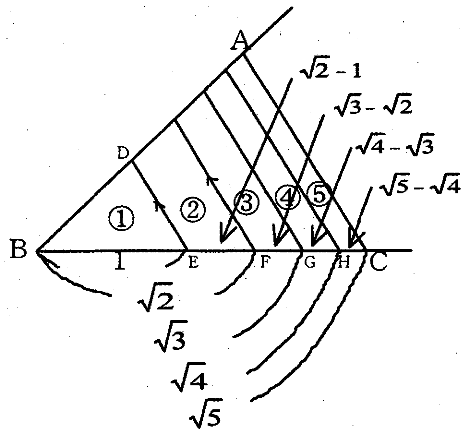
また，△ABC と△DBE の面積比は 2 : 1 になる．

よって，100 : x^2＝2 : 1

$2x^2=100$，$x^2=50$

$x>0$ より　BE$=5\sqrt{2}$

この後，ある小集団から「BC が 10 cmではなかったらどうなるのか」という疑問が出された．また，授業者が「2 等分できるなら…」とつぶやいたところ，「3 等分，4 等分もできるのでは？」という生徒の発言があり，近くの生徒と話し合いを始めた．その後，生徒とのやり取りを通して，辺の長さには規則性があることを全体で確認した．



授業全体を通して，特に 2 等分を発展させて，3 等分，4 等分，…させたときの規則性に面白さを感じた生徒が多かった．そのことは，授業後の次の生徒の感想からも読み取れる．

- あまり規則性はないと思っていたけど，2 等分，3 等分…と見ていくと規則が見えてきて驚きました．数学の世界はすごいなと思いました．
- ①，②の大きさだけでなく，三角形を n 等分するとどうなるかなどの規則性を見つけることができました．相似な図形にも規則性が出てくるのはびっくりでした．今回は線分の長さでしたが，立体などでもそのような規則性があると思うので，探してみたいです．
- 辺の長さには，$\sqrt{2}:1$ で余ったところが $\sqrt{2}-1$ など，だんだん規則性が生まれていて相似比でも求められるなんて，とてもおもしろいなと実感した．求めるまでのドキドキ，解けたときのスッキリが味わえてとても楽しかった．

⑤ 発展的な考え方の育成に関する考察

本時の課題Ⅰの解決を通して，相似な三角形の面積比が相似比の2乗になることを確認した後に，「他の図形の場合でも成り立つだろうか」と投げかけたところ，生徒は自ら，様々な図形の場合を調べていた．また，この後に「曲線図形の場合も調べてみたい」というつぶやきがあったことは，発展的に考えようという態度があるからこそといえよう．さらに，課題Ⅱに対して，「2 等分するにはどのように線を引けばよいか」という課題が生まれたり，「BC の長さが 10 ㎝でなかったら」「2 等分ではなく，3 等分，4 等分，…だったら」という問いが生まれて課題を発展させたり，授業後の生徒の感想の中に「立体でも規則性を探してみたい」という記述があったりするのは，発展的な考え方の育成につながる生徒のあらわれといえよう．なお，設定をケーキやピザ等の等分の話にすることで，もっと自然に発展させることができたかもしれない．

(3) 発展的な考え方に対する意識調査

上記で述べた授業を終えた後に，中1生徒119名，中3生徒119名に対して，2つの意識調査を行った．以下に，2つの調査結果と考察について述べる．

① 発展的な考え方の態度に関する調査

この調査問題は，長崎（1994）の作成したものを参考に作成した．

下にあげたのは，ある月のカレンダーです．

【カレンダー】

日	月	火	水	木	金	土
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

このとき，上記の図のように縦3横3の長方形で9つの数を囲みます．このとき9つの数の和は，中央の数の9倍になりました．このあと，あなたならどうしたいですか．1つ選びなさい．

1. 本当かなと思い，もっと多くの例を調べる．
2. なぜなのか，その理由を知りたい．
3. 囲み方を変えて他にもいろいろ調べてみたい．
4. 同じことがいえるときの共通な条件を考えたい．
5. ほかにしたいとは思わない．

調査結果は，次の通りである．

表1 発展的な考え方の態度・中1（%）

1 本当かなと思い，もっと多くの例を調べる．	21
2 なぜなのか，その理由を知りたい．	49
3 囲み方を変えて他にもいろいろ調べてみたい．	10
4 同じことがいえるときの，共通な条件を考えたい．	19
5 ほかにしたいとは思わない．	1

表2 発展的な考え方の態度・中3（%）

1 本当かなと思い，もっと多くの例を調べる．	8
2 なぜなのか，その理由を知りたい．	42
3 囲み方を変えて他にもいろいろ調べてみたい．	26
4 同じことがいえるときの，共通な条件を考えたい．	21
5 ほかにしたいとは思わない．	3

表1，表2から，次の点を指摘することができる．

ア．1から4を選択した生徒の割合は，中1で99%，中3で97%であった．この結果から，ほとんどの生徒が，もっと知りたい，もっと深く追究したいという思いをもっていることが読み取れる．

イ．特に3，4を選択した生徒の割合は，中1で29%，中3で47%であった．この結果から，中1よりも中3の方が，発展的に考えようという態度が身についていることが読み取れる．学年進行とともに，発展的な考え方が高まっていくことが予想される．

ウ．5を選択した生徒は，中1，中3ともごく少数であったが，わずかに中3の方が多かった．数学に対する苦手意識が増したり，受験，テストなどの影響があって，発展的に考えることの価値に疑問を持っていたりすることが推測される．

② 発展的な考え方を重視した授業への意識調査

中1，中3とも，上記で述べた実践以外にも，年間を通じて，いくつかの単元で，同じ生徒に対して発展的な考え方の育成を重視した指導を行ってきた．それは例えば，次のような内容である．

（例1）カレンダーに潜む数の性質（中1・文字と式）

【原題】カレンダーの中の，3×3で囲んだ9つの数の間に成り立つ関係式を見つけよう．

【発展】囲み方を変えていろいろな性質を見つけよう．

（例2）マッチ棒を並べる（中1・文字と式）

【原題】マッチ棒を正方形上に横に並べていくとき，正方形をn個作るときの必要なマッチ棒の本数を求めよう．

【発展】マッチ棒の並べ方を，正方形以外にも考えてみよう．

（例3）連続する2整数の平方の差（中3・式の計算）

【原題】差が1の2整数の平方の差は，もとの2数とどんな関係があるだろうか．

【発展】差が2，3，…だったら，平方の差はもとの2数とどんな関係があるか調べてみよう．

（例 4）長方形から直方体を作る（中 3・2 次方程式）

【原題】横が縦より 6 cm長い長方形の厚紙の 4 隅から正方形を切り取って直方体を作ったら，体積が 200 cm ^{2} になったとき，はじめの厚紙の縦と横の長さを求めよう．

【発展】問題の条件を変えて，オリジナルの問題をつくろう．

これらの学習経験が，生徒にどのような影響を与えているかを知るために，次の内容を自由に書かせた．

1 つの単元の中で，課題を発展させていく授業を行ってきました．あなたは，課題を発展させていくような授業をどう思いますか．

生徒の記述を分析した結果，否定的な記述のみを書いた生徒は，中 1，中 3 いずれも 2〜3 人であった．肯定的な記述については，関心・意欲に関わるもの，理解や思考力に関わるもの，技能に関わるもの，その他に分類することができた．その割合と具体的な記述内容は，表 3，表 4 の通りである．

表 3　発展的な考え方の授業・肯定的記述（中 1）

関心意欲（49%）	・1 つのことから大きく広げていくことで，さらに楽しめるようになった． ・課題を発展させることで，より難しい問題にチャレンジしたいという気持ちになってきた． ・悩んだ結果，すっきりしてさらに深めたいと思うようになった． ・その問題がわかったときの喜びや達成感を味わえる． ・難しいとすぐにあきらめていた自分が，最後まであきらめないように考えられるようになった．
理解や思考力（40%）	・発展させることにより，より深く理解でき，いろいろな問題にも対応できる力が身に付いた． ・自分のはじめに考えた解き方と違う見方ができるようになる． ・ただ解くだけではなく，その問題に隠されている意味を学ぶことができた．
技能（9%）	・深く追究することで，計算力が高まった．
その他（2%）	・この学校で追究ができてよかった．

表 4　発展的な考え方の授業・肯定的記述（中 3）

関心意欲（39%）	・仲間の意見も発展していき面白い． ・数学の真相に迫るようで興味深いし楽しい． ・難しいけど納得するとスッキリして楽しい． ・数学に対する興味が深まる． ・考えることが好きになる．
理解や思考力（34%）	・多面的に見ることができるようになった． ・理解が深まった． ・隠れた深い意味や共通点に気づけるようになった． ・考え方の幅が広がってきた．
技能（18%）	・基本的な問題の確認になった． ・基本的な考え方を身につけてから発展した問題を考えると解きやすい． ・文字の使い方が上達した．
その他（9%）	・こういう学習をしたくて附属に入学した． ・授業の印象が残る．

表 3，表 4 から，中 1，中 3 のいずれも，発展させる活動を前向きにとらえ，授業を楽しんでいる生徒が多いことがわかる．解決した課題をさらに別の見方・考え方をすることで，新たな発見があったり，数学のおもしろさや美しさに出会ったりすることにより，達成感を味わうことができるという思いをもった生徒が少なくないといえよう．また特に中 3 には，発展的に考えることが，技能の向上につながると考えている生徒が 2 割弱いることもわかる．

一方で，肯定的な記述と並行して否定的な記述を書いている生徒も含めて，否定的な記述を書いた生徒が中 1 で 5 人程度，中 3 で 10 人程度いた．これらの記述内容は，表 5 の通りある．

表 5　発展的な考え方の授業・否定的記述

中 1	・広めたり，深めたりしていくことはとてもいいが，最終的にどういう考えが一番いいのかを知れない． ・どの問題も難しく感じた． ・もっと基本となることを身に付けてから発展に入ったほうが，より身に付くものが多いと思う． ・方程式が得意じゃなく，全く手も足もでない問題もあった．そこが辛かった．
中 3	・難しい課題なのでもう少し考える時間がほしい． ・難しい． ・おもしろいけど，テストに出るような問題をやってほしい． ・面倒． ・将来役に立つのかわからない．

	・できる人だけの授業になりやすい. ・そんなに深くまでやらなくてもいい.

表5から，発展させることに意味を持てない生徒や，難易度が上がることで苦痛に感じる生徒も，少数ではあるがいることがわかった．

7．発展的な考え方の育成を重視した望ましい指導

6で分析したことから，発展的な考え方の育成を重視した望ましい指導のあり方として，次の示唆を得た．

(1) 発展させることで数学の理解が深まる設定の工夫

6 (1) で述べたように，中 1 の実践では，「移動の回数をできるだけ少なくする」と発展させることで，移動回数についての理解を深めることができた．また，6 (2) で述べたように，中 3 の実践では，「三角形以外の図形でも成り立つか」と発展させることで，相似な図形の面積比について一般図形に拡張することができ，また「2 等分ではなく，3 等分，4 等分，…したらどうなるか」と発展させることで，規則性がわかり理解を深めることができた．

このように，ただやみくもに問題の条件を変えて発展させるのではなく，発展させた結果，理解が深まるような設定を工夫することが重要であると考える．

(2) 難易度が高くなり過ぎないようにする配慮

6 (3) で述べたように，少数ではあるが，発展的な考え方を重視した授業に対する否定的な記述内容の中に，「難しい」「手も足も出ない問題もあった」「できる人だけの授業になりやすい」等の意見があった．1 つの問題の条件を変えて発展させる場合，どうしても元の問題よりも難しくなる傾向がある．今回の場合，そのように感じた生徒は少数ではあったが，十分に留意すべき点であると考える．例えば，はじめに提示するスタートの問題を易しくすることで，難易度を低くしたり，全体で取り上げるものについては，難易度が高すぎないものを選択したりするなどの工夫が重要であると考える．

(3) 発展的な考え方を重視した授業の継続的な実施

今回は，6 (3) で述べたように，本時に限らず，別の単元でも，発展的な考え方の育成を重視した指導を実施した．この結果が，表 1～表 4 の結果に表れていると考えることができるであろう．毎時間このような授業を実践することは，時間的に難しいが，少なくとも 1 つの単元で 1～2 時間程度は，発展的な考え方を重視した授業を行いたい．継続して行うことで，6 (1)，(2) で述べた中 1 や中 3 での実践のように，生徒自らが，授業者の指示がなくても主体的に発展させるような姿が見られるようになると考えられる．

8．今後の課題

今後の課題として，次の点を挙げることができる．

(1) 今回は，中 1 と中 3 の図形の指導について，実践を通して指導のあり方を追究したが，中 2 の図形についても実践を行い，図形分野における指導のあり方をさらに追究する．

(2) 図形領域以外の他の領域についても，発展的な考え方の育成を重視した教材を開発して実践する．

<引用・参考文献>

福田允(2009)「学校数学における発展的な考え方の指導に関する一考察-「式を読む」ことに着目して-」第 42 回数学教育論文発表会論文集，pp.181-186

橋本吉貴(2001)「算数・数学科における「発展的な考え方」に関する考察」日本数学教育学会誌，83 巻 9 号，pp.10-17

片桐重男(1988)『数学的な考え方の具体化』明治図書，pp.159-169

菊池平一(1997)「統合的，発展的に考察する」新しい算数研究，No.313，東洋館，pp.6-9

古藤怜（1992）『算数科多様な考えの生かし方まとめ方』東洋館

熊倉啓之（2011）『数学的な思考力・表現力を鍛える授業 24』明治図書

箕輪郁哉（2010）「図形問題を発展させるための指導法」第 43 回数学教育論文発表会論文集，pp.49-54

文部省（1970）『中学校指導書数学編』大阪書籍，pp.9-18

長崎栄三(1994)「児童・生徒の基礎学力の形成と指導方法との関連に関する総合的研究：算数・数学」国立教育研究所紀要，123 集，pp.53-104

中島健三(1981)『算数・数学教育と数学的な考え方』金子書房，p.127

能田伸彦(1983)『オープン・アプローチによる指導の研究』東洋館

S.I.ブラウン，M.I.ワルター著，平林一栄訳(1990)『いかにして問題をつくるか　問題設定の技術』東洋館

高畑宏之（2006）「オープンアプローチの学びによる数学授業の質の改善－中学校数学科における新たな授業カリキュラムの開発と研究－」岡山大学算数・数学教育学会誌『パピルス』，pp.73-82

竹内芳男・沢田利夫(1984)『問題から問題へ』東洋館

寺田聡子（2010）「数学科における生徒の理解を促す問題設定の研究」第 43 回数学教育論文発表会論文集，pp.61-66

山田真也・安西一夫（2005）「中学校数学における考え方に関する考察」香川大学教育実践総合研究，11，pp.39-50

＜巻末資料 1＞

	学　習　内　容
1 2	【線対称・点対称】 ・線対称・点対称の意味を理解し，図形の対称性の観点から見る目を養う． ・距離の意味及び 2 点間，点と直線，平行な 2 直線間の距離について確認する．
3 4	【平行線の作図】 ・作図の意味，定規とコンパスの役割を確認する． ・直線の平行線を作図する．
5 6	【垂線の作図・円の接線】 ・直線の垂線を作図する． ・円の接線はこの接点を通る半径（直径）に垂直であることを確認する．
7 8	【角の二等分線】 ・角の二等分線の意味を確認する． ・角の二等分線の作図の方法を理解し，作図する． ・角の二等分線上の点はその角をつくる．2辺から等距離にあることを確認する．
9 10	【線分の垂直二等分線】 ・線分の垂直二等分線の意味を確認する． ・線分の垂直二等分線の作図の方法を理解し作図する． ・線分の垂直二等分線上の点はその線分の両端から等距離にあることを知る
11	【角の作図】 ・学習してきた３種類の作図を利用し，様々な角度を作図する．
12 13 14	【図形の移動】 ・平行移動，回転移動，対称移動の意味を知り，平面図形の移動は3種類の移動がもとになっていることを確認する． ・平行移動，回転移動，対称移動の作図の方法を知る． ・同じ平面上の2つの合同な図形は，3種類の移動を組み合わせると，2回以内で重ね合わせられることを発見する．
15 16 17	【作図の利用】 ・2点を通る円や3点を通る円を作図する． ・これまで学んだことを利用して，様々なものを作図することができる．
18	【単元のまとめ】

＜巻末資料 2＞

	学　習　内　容
1	【相似な図形】 ・拡大図をかく操作を通して，相似な図形の意味および相似な図形の性質を確認する．
2 3	【三角形の相似条件】 ・相似な三角形の作図を通して，三角形の相似条件を考える． ・相似の位置，相似の中心の意味を確認する．
4 5 6	【三角形の相似条件の利用】 ・三角形に補助線を引いてできる三角形が相似になることを相似条件を利用して証明する． ・三角形の相似条件を利用して，辺や線分の長さを求める．
7	【相似の利用Ⅰ】 ・三角形の相似条件を利用して，建物の高さを求める．
8 9	【平行線と比】 ・三角形の 1 辺に平行な直線が他の 2 辺と交わるとき，その 2 を等しい比に分けることを，既習事項を利用し証明する． ・平行線と比の定理を利用して，線分の長さなどを求める．
10 11	【相似の利用Ⅱ】 ・平行線と比の定理を利用して，線分ABを3等分する点を作図する方法を考察する． ・3 等分点の作図方法を説明する学習を通して相似な図形に対する見方・考え方を深める．
12 13 14	【比と平行線・中点連結定理】 ・三角形の2辺を等しい比に分ける点を結ぶ線分は他の1辺に平行であることを理解する． ・比と平行線の定理をもとに中点連結定理を導き出し，それを活用する． ・中点を結んでできる四角形が平行四辺形になることを根拠を持って証明し相手に伝える． ・もとの四角形の対角線の特徴によって特別な平行四辺形になることを知り，図形に対する見方や考え方を深める．
15 16	【相似の利用Ⅲ】 ・三角形の角の二等分線における辺の比の性質を理解し，それまでに学習してきた様々な図形の性質を用いて証明する．
17 18 19	【相似な図形の面積比・体積比】 ・相似な図形の面積比は，相似比の2乗に等しいことを理解する． ・相似な立体の表面積比は相似比の 2 乗，体積比は相似比の 3 乗に等しいことを理解する． ・相似比を使って図形の面積や体積を求める．
20	【単元のまとめ】