高等学校における「数学的な活用力」の育成を重視した学習指導

高等学校における「数学的な活用力」の育成を重視した学習指導

Teaching Mathematics to Develop Ability of Applying Mathematics in High School

熊倉　啓之[1]　國宗　　進[2]　松元新一郎[1]　梅田　英之[3]
須藤　雄生[4]　冨田　真永[5]　山本　達也[6]　横澤　克彦[7]
Hiroyuki KUMAKURA, Susumu KUNIMUNE, Shinichiro MATSUMOTO, Hideyuki UMEDA,
Yu SUDO, Masato TOMITA, Tatsuya YAMAMOTO and Katsuhiko YOKOZAWA

（平成 28 年 10 月 3 日受理）

要　約

The purpose of this study is to pursue desirable teaching mathematics to develop ability of applying mathematics in high school. First, we defined "Ability of applying mathematics" in this study and cleared it's features. Second, we consider teaching about mathematics to develop abilities of applying mathematics through two problems in high school. Third, we point out 6 mathematical activities and 8 teaching supports: Forecasting activity, Mathematizing activity, Extracting necessary information activity, Using ICT activity, Looking back activity and Expanding activity; Setting unfamiliar problem situation, Setting problems that are forecasted easily, Presenting too much or too little information, Not designating over strategies, Giving enough time to think, Preparing Computer et al, Discussing between everyone, and Making new problems by students.

キーワード：数学的な活用力，数学的活動，教師の手立て

1．問題の所在と研究目的

Michael A. Osborneら（2013）は，アメリカ労働省が定めた702の職業について，人工知能やロボット等への代替可能性を評価した結果，「約47％の職業が，10～20年後に70％以上の確率で代替可能である」と指摘した。また，日本でも野村総合研究所（2015）が同様の調査を行い，「国内601種類の職業のうちの約49％が，10～20年後にロボット等で代替可能である」と指摘した。さらに，人工知能等による代替可能性が低い業務として，「創造性，協調性が必要な業務，非定型な業務」を挙げている。

このように将来を予測することが困難な時代において，これからの学校教育では，特に「予測できない未来に対応する力」を育成することが重要であると考える。では，予測できない未来に対応するためには，どのような力を身に付けるべきであろうか。少なくとも，知識や技能

[1] 数学教育系列　[2] 静岡大学名誉教授　[3] 静岡県立科学技術高等学校
[4] 筑波大学附属駒場中・高等学校　[5] 静岡県立川根高等学校　[6] 静岡県立三島北高等学校
[7] 長野県屋代高等学校・附属中学校

を多く有していても，また型にはまった考え方を身に付けていても，それだけでは十分とはいえないであろう。むしろ，出会ったことのない問題に直面したときに，知っている知識や技能，考え方を活用して問題をよりよく解決する力が重要となってくるのではないだろうか。

このことを，数学の学習場面で考えてみよう。例えば，三角比の学習を通して，余弦定理や正弦定理等の定理・公式を知っていることだけでなく，またこれらの定理・公式を使った適用問題を解くことができるというだけでもなく，一見すると何を活用すればよいかわからない問題に対して，試行錯誤の末に，適切な定理・公式を活用して問題を解決する力，すなわち三角比の定理・公式を活用する力を育成することが重要であると考える。

「活用」ということに関わって，平成20，21年告示の学習指導要領の教科の目標には，次のように記述されている。

「～，進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる。」（小学校算数科） 「～，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。」（中学校数学科） 「～，それらを積極的に活用して，数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。」（高等学校数学科）

また，特に高等学校には，「数学活用」という科目も設置され，その目標には「～，数学を積極的に活用する態度を育てる。」と記述されている。

さらには，次期学習指導要領に向けての議論の中で，特に各学校段階の算数・数学で育成すべき資質・能力の1つとして，「算数の学習を生活や学習に活用する態度」「数学を活用して粘り強く考え，生活や学習に生かしたり，問題解決の過程を振り返って評価・改善したりする態度」「数学を活用して粘り強く考え，数学的論拠に基づき判断したり，問題解決の過程を振り返って評価・改善したりする態度」を挙げている（文部科学省，2016）。

これらの記述から，児童・生徒の発達とともに，算数・数学を活用する態度を育成し，強化していこうとするねらいが読み取れる。

一方，「活用する態度」に関わって，平成27年度全国学力・学習状況調査の質問紙調査の結果は，表1の通りである（国立教育政策研究所，2015a）。

表1　H27全国学力学習状況調査・活用する態度の肯定的な回答（%）

	小学校	中学校
算数（数学）の授業で学習したことを普段の生活の中で活用できないか考えますか。	67.6	40.8
算数（数学）の授業で学習したことは，将来，社会に出たときに役に立つと思いますか。	90.4	72.3

高校生を対象とした同様の調査はないが，PISA2012調査に類似の調査があり，その結果は表2の通りである（国立教育政策研究所，2013a）。

表2　PISA2012・活用する態度の肯定的な回答（%）

	日本	OECD 平均
自分にとって数学が重要な科目なのは，これから勉強したいことに必要だからである。	47.9	66.3
これから数学でたくさんのことを学んで，仕事につくときに役立てたい。	53.5	70.5

表1からは，小学校から中学校へ学校段階が上がると，活用する態度は逆に消極的になって

いることが読み取れる。表2からは，国際的に見て，日本の高校生の「数学を活用する態度」に課題があることがわかる。

また，「数学を活用する力」に関わって，鈴川他（2008）は，PISA2003調査の数学的リテラシーの結果を用いて，多集団IRTにより，それぞれの国に所属する同一水準の学力の生徒の反応パターンの違いを分析した。その結果，日本は，特に日常の生活に数学の知識を活用する力が国際的に弱いことを指摘している。

これらの結果から，数学を活用する力を育成することの重要性とは逆に，生徒－特に高校生の数学を活用する力や態度に課題があることがわかる。この要因としては，特に高等学校での数学の授業展開や指導法が，必ずしも活用力の育成を意識したものとなっていない点を挙げることができるであろう。

そこで，本研究は，特に高等学校における「数学的な活用力」に焦点を当て，その育成を重視した望ましい学習指導のあり方を追究することを目的とする。

２．研究の方法

次の手順により研究を進める。

(1) 先行研究をもとに，本研究における「数学的な活用力」を規定して，その特徴を明らかにする。
(2) （1）の結果を踏まえ，高等学校数学科の具体的な問題の扱い方を検討して，「数学的な活用力」を育成するための指導のあり方について考察する。
(3) （2）の考察結果に基づき，「数学的な活用力」の育成を重視した望ましい学習指導のための数学的活動と教師の手立てについて指摘する。

３．本研究における「数学的な活用力」

(1)　数学的な活用力に関わる先行研究

①　PISA 調査における活用力

PISA 調査の目的については，次の記述がある。

「学校の教科で扱われているようなある一定範囲の知識の習得を超えた部分まで評価しようというものであり，生徒がそれぞれ持っている知識や経験をもとに，自らの将来の生活に関係する課題を積極的に考え，知識や技能を活用する能力があるかをみる」(国立教育政策研究所，2004)。

このことからわかるように，PISA 調査は，活用する能力を評価していることがわかる。特に，数学的リテラシーについては，次のように定義されている。

「数学が世界で果たす役割を見つけ，理解し，現在及び将来の個人の生活，職業生活，友人や家族や親族との社会生活，建設的で関心を持った思慮深い市民としての生活において確実な数学的根拠にもとづき判断を行い，数学に携わる能力」

この定義から，PISA 調査における数学的リテラシーは，特に「数学を生活に活かす能力」が重視されているということができるであろう。

また，数学的リテラシーの枠組みは，「数学的な内容」「数学的プロセス」「数学が用いられる状況」の3つの側面から特徴づけられている。これらを「活用」という文脈で解釈すれば，3つの側面は，それぞれ「何を」「どのように」「どこで」活用するかを表しているといえるであ

ろう。

② 特定の課題に関する調査における活用力

2004年度に実施された「特定の課題に関する調査（算数・数学）では，「数学的に考える力」と「計算に関する力」の2つの項目について調査した。このうち，中学校における「数学的に考える力」を，次の3つに分類している（国立教育政策研究所，2006）。

ア　日常事象の考察に算数・数学を生かすこと

イ　算数・数学の世界で事象を考察すること

ウ　論理的に考えること

特に，アについては，「日常事象を数学と結びつける」「情報を活用する」問題が，またイについては，「振り返って考える」「一般化する」「発展的に考える」問題が出題された。

これらの内容は，数学の活用力に関連していることがわかるであろう。中野（2009）も，数学の活用力の育成が「数学的に考える力」の育成につながるとしている。

③ 全国学力・学習状況調査における活用力

全国学力・学習状況調査の中学校数学科の調査問題の作成に関わり，「主として活用に関する問題作成の枠組み」が示されている（国立教育政策研究所，2007）。そこでは，活用する力を次の3つでとらえている。

α：知識・技能などを実生活の様々な場面で活用する力

α1：日常的な事象等を数学化すること

α2：情報を活用すること

α3：数学的に解釈することや表現すること

β：様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力

β1：問題解決のための構想を立て実践すること

β2：結果を評価し改善すること

γ：上記α，βの両方にかかわる力

γ1：他の事象との関係をとらえること

γ2：複数の事象を統合すること

γ3：多面的にものを見ること

αは，特定の課題に関する調査での「数学的に考える力」のアに，βはイに対応していることが読み取れる。

さらに，「数学的な知識・技能などが活用される文脈や状況」「活用される数学科の領域・内容」「用いられる数学的なプロセス」の3つの視点で整理している。これら3つの視点は，PISA調査の3つの側面を参考にしたものと推測される。

この枠組みの特徴について，山口（2008）は，次の2点を挙げている。

・他教科での活用や，新たな数学を創りだすための活用が含まれている点

・情報選択力，数学的表現力などといった数学的プロセスに関する能力が活用力の重要な構成要素として位置づけられている点

また，金本（2013）は，この枠組みをもとに，活用力を次の4点で捉えるとしている。

・物事を数や図形などに着目して捉えていく。

・情報を分類・整理したり，必要なものを適切に選択したり，あるいは既習のものと関連させて見出す。

・筋道を立てて考えたり振り返って考えたりする。
・数学的に解釈したり，自分の考えを数学的に表現したりする。

一方，宮崎（2014）は，βの数学的なプロセスは，「日常事象」と「数学的事象」の両方を含めているが，不十分な部分もあり，両方の事象を区別して，数学的プロセスを示した方がよいと提案している。

また，岩田（2015）は，この枠組みには表現に関わる数学的活動に対応する観点がないとして，γの数学的なプロセスに，次の2点を追加することを提案している。

・他者が解釈（評価）することを前提に，表現を構成（操作）すること
・他者が構成（操作）した表現を解釈（評価）したり，その解釈（評価）に基づいて表現を構成（操作）したりすること

これらは，「他者を意識した表現」という点で，金本の4点目の特徴とは異なるものである。

④　その他の先行研究における活用力

吉田（2013）は，活用力を次の3点で捉えている。

・学んだ知識や技能をどのように活用して問題解決を図るかを考えること。
・問題解決を図る上で，生徒の考えた方法が適切であるかどうかを判断すること。
・問題の本質や解決方法を相手に理解させること。

特に3点目は，数学的な表現に関わるものであり，岩田の提案とも符合するものである。

また，栗原（2013）は，「数学的な知識・技能というものを，直接には関係がないと思える場面で，活用する方法を考えられる能力」を活用力としている。さらに栗原は，実際に活用できるかどうかよりも，活用する方法が考えられることが重要であるとしている。栗原の言う「直接には関係ないと思える場面」という指摘は，活用力を捉える上で，重要な視点といえるであろう。

(2)　本研究における「数学的な活用力」の規定

以上の先行研究を踏まえて，本研究における「数学的な活用力」について考察する。

①　数学的に解決しようとする態度

人は，様々な場面で解決する必要のある問題と出会う。このような問題と出会ったときに，まず必要となるのは，「数学的に解決しようとする態度」であろう。いくら数学の知識や技能があったとしても，これらを使おうとはせずに，この問題の答えを「勘」や経験だけで出して解決しようとするならば，数学的な活用力があるとは到底言えない。たとえ，これまでに出会ったことがないような問題であったとしても，既習の数学の知識や技能・考え方を使って何とか解決しようとする態度が重要である。すなわち，「数学的に解決しようとする態度」は，数学的な活用力を捉える上で，欠かせない要素であると考える。

なお，ここでいう「問題」の場面としては，「実生活や身の回りの事象」「他教科などの学習」だけではなく，全国学力・学習状況調査のように「算数・数学の世界」も含めるものとする。

②　解決の方法を数学的に構想する力

次に，問題を解決する上で必要となるのが，「解決の方法を数学的に構想する力」であろう。例えば，余弦定理の例題の解法について学習した直後に解く問題は，余弦定理を使うことが明白であるので，単なる余弦定理の適用問題である。このように，問題を解決するのに，どんな数学の知識・技能をどのような方法で使えばよいかが，最初から指示されている，あるいは明白であるような場合，このような問題を解決できたとしても，活用力があるとはいえない。栗

原の指摘にも通ずるが，むしろ，初めて出会う問題に対して，どんな数学の知識・技能や数学的な考え方を使うのか，それらをどのような方法で使うのか，解決の方法を構想する力が重要であると考える。また，問題の場面が実生活や身の回りの事象の場合に，問題解決に必要な情報や条件を選択したり，数学的な表現や処理が可能であるように，ある仮定をおいて数学的な問題に翻訳したりする力も，解決の方法を構想する上で欠かせない。これらは，全国学力・学習状況調査の枠組みの数学的なプロセスα，および$\beta 1$に関わる力といえる。

③　数学的に処理して結論を導く力

解決の方法を構想したら，次はそれを「数学的に処理して結論を導く力」が必要である。例えば，解法を構想して1つの2次方程式を作ったとして，次に，実際に方程式の解を求めて問題に適する結論を導く力が重要である。ただし，このとき2次方程式の解の公式を必ずしも覚えている必要はない。むしろ，文献やインターネットで解の公式を調べたり，コンピュータソフトを使って解を求めたりすることができればよいと考える。このように，結論を導くに際しては，必要があればコンピュータの力を借りたり，文献等の情報を利用したりすることも重要である。すなわち，紙とペンしか使えない試験問題を解くという狭い状況ではなく，様々な道具が利用できる日常の環境の中でそれらを適宜利用して，構想した方法を数学的に処理して結論を導く力が重要であると考える。このことに関連して，Chevallard（2015）は，研究者の態度とされている探究の態度を目指す「世界探求パラダイム」という考えを提唱した上で，その学習過程においては「資料を調べ必要な情報を自ら見つけ出すという過程」を重視している。この考えと過程を踏まえて，インターネットを用いて問題を解決した実践もある（宮川他, 2016)。

④　振り返って発展させる態度

1つの問題を解決して結論を導いたら，それで終わりにするのではなく，さらによりよい方法や結論を導き出そうとしたり，より一般的に問題を設定してそれを解決しようとしたりすることも，活用力の重要な要素であると考える。これは，全国学力・学習状況調査の枠組みの数学的なプロセス$\beta 2$に関わる力といえる。振り返りの態度に関わって，吉村（2009）も，「それまでに身に付けたものを活用すること」を「これまでの活用」とした上で，それとは別に「これからの活用」として，活用した後に活用の過程を振り返って議論することの重要性を指摘している。

また，自身で発展させた新たな問題は，生徒にとって解決したい価値ある問題となり，解決しようとする態度の形成につながるであろう。

以上の考察に基づき，本研究における「数学的な活用力」を，次の通り規定することとする。

解決する必要のある初めて出会うような問題に対して，数学的に解決しようとする態度を持ち，既習の数学の知識・技能や数学的な考え方を使ってその問題を解決するための方法を構想し，必要に応じて文献やICT等も使用しながら数学的に処理して結論を導く力。また，導いた結論を振り返って，さらによりよい方法や結論を導こうとしたり，最初の問題をより一般化して問題を発展させようとしたりする態度。

簡略化して言えば，数学的に解決しようとする態度，解決の方法を数学的に構想する力，数学的に処理して結論を導く力，振り返って発展させる態度，の4つの力・態度の総体としてと

らえようとするものである。この規定を図式化すると，図1の通りである。

この規定こそが，本研究で育成をめざす「数学的な活用力」であり，全国学力・学習状況調査における活用力とも，また，吉田や栗原の捉える活用力とも異なるものである。特に，1つの問題を解くだけではなく，その問題をもとに発展させる態度まで含めている点に特色があるといえよう。

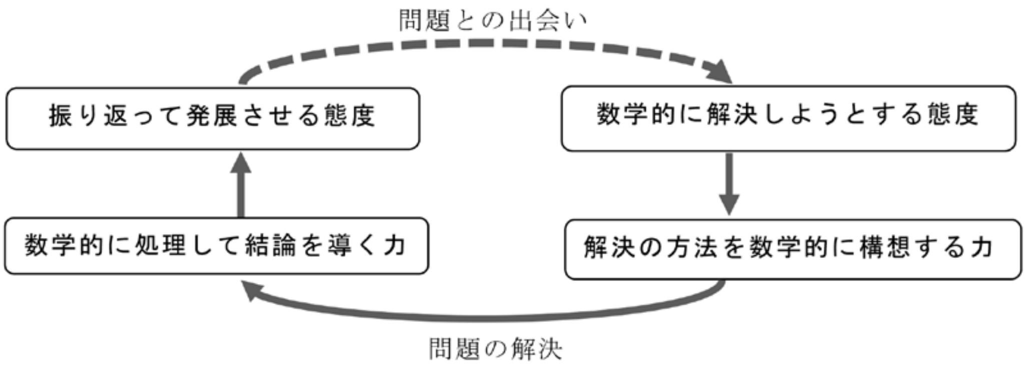


図1 「数学的な活用力」の規定

(3) 「数学的な活用力」の特徴

数学的な活用力を特徴づけるのに，全国学力・学習状況調査の「主として活用に関する問題作成の枠組み」を参考にして，「どこで」「何を」「どのように」活用するか，という活用の文脈・対象・方法の3つの観点から分類することとする。

① どんな場面で活用するか（活用の文脈）

活用の場面とは，問題場面のことであり，大きくは次の2つの場面に分類することができる。

ア　数学の世界での場面

イ　現実事象での場面

全国学力・学習状況調査では，これ以外に「他教科などの学習場面」があるが，これは他教科の学習のすべての内容というわけではなく，ほとんどが理科の自然現象や社会科の社会現象などの現実事象を対象にしている。そこで本研究では，広い意味でこれをイに含めて考えることとする。

② 何を活用するか（活用の対象）

活用の対象とは，数学の内容のことであり，大きくは次の2つに分類できる。

ア　数学の各単元における知識・技能

イ　数学的な考え方

アは，問題を扱う科目・単元によって異なる内容と，中学までに学習してきた共通した内容とがある。また，イは，帰納的に考えたり，一般化・特殊化して考えたり等の数学的な考え方を指す。

③ どのように活用するか（活用の方法）

活用の方法とは，「主として活用に関する問題作成の枠組み」の中の「数学的なプロセス」に相当するものであり，例えば次のようなものが挙げられる。

ア　現実事象を数学化する。

イ　過不足のある情報から，必要な情報を選択する。

ウ　解法を構想する。

エ　問題の結論を振り返って評価する。

オ　新たに問題を発展させる。　等

これらア～オの方法は，数学的活動につながるものであり，活用力の育成を重視した学習指導のあり方を考える上で，いずれも重要な事項である。

4．「数学的な活用力」の育成を重視した指導

次に，高等学校数学科の具体的な2つの問題についてその扱い方を検討し,「数学的な活用力」の育成を重視した指導のあり方について考察する。

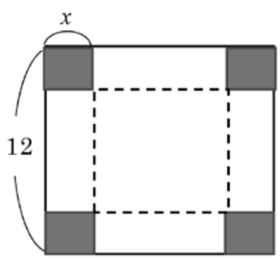
(1)　数学Ⅱ「微分・積分の考え」の活用問題例

微分の応用問題として，次のような問題（高橋 他, 2001）がほとんどの教科書に掲載されている。

【問題 1】

1 辺が 12cm の正方形の厚紙がある。4 すみから合同な正方形を切りとって，右の図の点線にそって折り曲げ，ふたのない箱を作る。箱の容積の最大値と，そのときの切りとる正方形の 1 辺の長さを求めよ。

（啓林館・数Ⅱ307，p.210　例題 8）



この教科書の問題の特徴を挙げると，活用の文脈は，どちらかと言えば数学の世界での場面であり，活用の対象は，容積をxの関数式で表すこと，3次関数の導関数を求めて増減表やグラフをもとに最大値や最大となるxの値を求めること等に関する知識や技能である。活用の方法としては，解法を構想する（増減表やグラフをかく）以外には特にないといえる。

①　解決しようとする態度

この問題は，生徒にとって「解決したい問題」といえるだろうか。数学に対して日頃から興味・関心の高い生徒は，解決したいと思うかもしれないが，一方で「箱の容積の最大値と，そのときの切りとる正方形の1辺の長さ」を求めたい，とは思わない生徒も少なくないであろう。

そこで例えば，問題の結論を，次のように予想が立てやすいものに変えることが考えられる。

「箱の容積を最大にしたい。どのような形状の箱にすればよいだろうか。」

その上で，次のように予想する活動を取り入れる（熊倉，2009）。

「容積が最大になる箱の形状はどの場合か？」

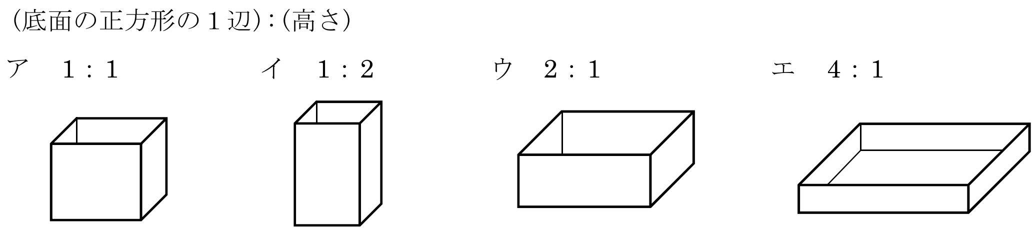


図2　容積最大となる箱の形状は？

このように予想する活動を取り入れることで，この問題が生徒にとってより「解決したい問題」となり，結果として，解決しようとする態度を育成することにつながるといえよう。

さらには，次のような文脈に再設定することで，活用の文脈が現実事象での場面に近くなる。

「ある国では，箱を持っていくと，ちょうど1杯分の砂金がもらえるという。ただし，その箱は1辺が12cmの正方形の4すみを切り取って作った箱でなければならない。できるだけたくさんの砂金をもらうためには，どのような箱を作ればよいだろうか。」（梅田他，2010を参考）

この文脈にすることで，箱の容積を最大にする必然性が生ずると同時に，生徒にとっては初めて出会う新鮮な問題となり，興味・関心を持たせることが期待できるであろう。

②　解決の方法を構想する力

この問題は，「導関数の応用」の節の例題として，教科書に掲載されているため，導関数を使うことは明らかであるが，どのように活用するかについては，問題文からだけでは読み取れない。その意味では，生徒が解決の方法を構想する活動が可能である。一方で，どの部分をxとするかについて問題文では記述されていないものの，問題文の横の図にxが記入されているため，半ば指定されているといってよい。しかし，例えば底面の正方形の1辺の長さをxとしてもよいので，どの部分をxとするかも含めて生徒に構想させる方が，活用力の育成という観点からは望ましいといえよう。すなわち，必要以上に，解決の方法を生徒に指定しないことが重要であると考える。

③　数学的に処理して結論を導く力

この問題は例題であるため，教科書には，模範解答が記述されている。指導の中で，もし授業者が一方的に解法を説明して答えを導くような指導を行うならば，それは数学的に処理して結論を導く力にはつながらないであろう。必要に応じて，既習内容を振り返る活動を取り入れた上で，そこから先は生徒自身に考えさせる時間を確保することが，活用力の育成という観点からは重要であると考える。どの程度の時間を確保するのか，個人だけではなく，グループで考える活動を取り入れるのか等については，生徒の実態に応じた工夫が必要となるであろう。

④　振り返って発展させる態度

教科書には，例題である【問題1】の直後に，次のような問がある。

2辺が16cm，10cmの長方形の厚紙がある。4すみから～（以下同じ）（p.210　問21）

この問は，例題において元の厚紙の形を「正方形」→「長方形」とした発展問題といえる。しかし，この問を解くだけならば，それは生徒にとって例題の類似問題を解くことであり，この種の問題の解法の理解を確かなものとし，定着を測るための問題としての意味はあっても，活用力の育成にはつながらない。

活用力の育成という視点からは，最初の予想が当たっていたかどうかを全体で確認した上で，生徒自身から，次のような問いを出させたい。

ア　厚紙の正方形の1辺の長さを変えても，同じ結果が得られるであろうか？

イ　厚紙の正方形を別の形にしたら，どうか？

実際，この例題（【問題1】）の場合，生徒の予想に反して，図2のエの場合に容積が最大となる。そこで，生徒は，「長さを変えても同じ結論になるか」「形を変えるとどうなるのか」に関

心が向き，元の例題を発展させて考えようとするであろう。その段階で，例題の直後の問に取り組ませれば，活用力の育成につなげることができると考える。

(2)　数学Ⅰ「図形と計量」の活用問題例

三角比について一通り学習した後に扱う応用問題として，次のような問題が考えられる。

【問題2】東京スカイツリーは東京タワーよりも高いが，見る場所によって東京タワーの方が高く見えることがある。では，東京都庁展望室からはどちらが高く見えるだろうか。

この問題は，特定の課題に関する調査問題ⅡＢ ③（国立教育政策研究所，2013b）を参考に作成した。この問題の特徴を挙げると，活用の文脈は，現実事象での場面であり，活用の対象は，三角比（タンジェント）の値を求めること等に関する知識や技能である。活用の方法としては，解法を構想する以外に，現実事象を数学化する，必要な情報を選択する（後述）等が挙げられる。

①　解決しようとする態度

この問題は，「東京都庁展望室からはどちらが高く見えるか」という設定であり，生徒にとって解決したい問題設定といえるであろう。

【問題1】と同様に，はじめに予想する活動を行うとよい。このとき，生徒から「3地点のおよその位置関係が知りたい」という要望が出れば，大きな地図を全体に示して，それを見ながら予想させてもよいであろう。例えば，次のような生徒の予想が出てくることが考えられる。

ア　都庁からは，東京タワーの方が近いので，東京タワーの方が高く見えるのではないか。

イ　都庁からは東京タワーの方が近いが，もとの高さは東京スカイツリーの方が高いので，同じくらいの高さに見えるのではないか。

このような予想をする活動は，解決しようという態度の育成につながるだけではなく，東京都庁展望室から目標地点をみる仰角が問題の解法の手がかりになることに気づくことも期待できる。

②　解決の方法を構想する力

この問題では，解決に必要な情報を意図的に何も提示していない。解決に必要な情報を選択することも含めて解法を構想することが，活用力の育成には重要であると考えるからである。そこで，「問題を解決する上でどんな情報が必要かも合わせて，解決の方法を考えてみよう。」と投げかけるとよいであろう。

この問題を解決するには，まず「どちらが高く見えるか」をどのように数学的に表現するかを考える必要がある。そのために，例えば次のような図をかくとする。

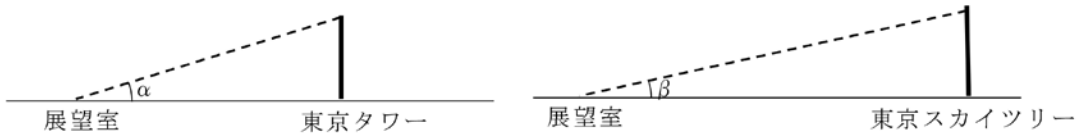


図3　展望室から見える高さ

図3から，「どちらか高く見えるか」を判断するには，「仰角 α， β の大小」を比較すればよ

いことがわかる。このことは，現実事象を数学的に表現する「数学化する」活動に相当する。このような数学化する活動も，活用力育成の観点からは，重要であると考える。

次に，α，βを求めるのにどうすればよいかを考える。現地で直接に測定できればよいが，それができない場合に，代わりにどのような情報が必要であるかを考えると，都庁展望室から東京タワー，スカイツリーまでのそれぞれの距離と，展望室と東京タワー，スカイツリーとの高低差がわかれば，$\tan\alpha$，$\tan\beta$が求められ，それをもとにα，βが求められる。したがって，必要な情報は，都庁展望室からの距離と，3つの施設の高さであることがこの段階でわかる。

さらに考察を進めると，α，βを求めなくても，$0<\alpha$，$\beta<90°$であることから，α，βの大小は，$\tan\alpha$，$\tan\beta$の大小と一致するので，$\tan\alpha$，$\tan\beta$が求まればよいことがわかる。

以上の考察を，できるだけ生徒自身で行うことが，活用力の育成という観点から重要であろう。

③　数学的に処理して結論を導く力

問題を解決するのに必要な距離や高さに関する情報は，インターネットを使えば容易に調べることができる。実際には，次の通りである。

展望室から東京タワーまでの距離　5929m

展望室から東京スカイツリーまでの距離　10892m

東京タワーの高さ　333m

東京スカイツリーの高さ　634m

東京都庁展望室の高さ　202m

これらの情報を用いて，実際にタンジェントを計算すると，次のようになる。

$$\tan\alpha = \frac{333-202}{5929} = 0.02209\cdots \qquad \tan\beta = \frac{634-202}{10892} = 0.03966\cdots$$

よって，$\tan\alpha<\tan\beta$　より$\alpha<\beta$

したがって，スカイツリーの方が高く見えると結論付けることができる。

なお，タンジェントの計算は，電卓やコンピュータを用いてもよいであろう。インターネットの利用を含め，ICTを活用して問題を解決することも活用力の育成には重要であると考える。

④　振り返って発展させる態度

この問題では，東京都庁展望室の場合を調べたが，結論を振り返って全体で共有した上で，次のように発問することが考えられる。

「他に自分で調べたいことを探して，問題を解決しよう。」

これに対して，例えば次のような問題を考える生徒が出てくるであろう。

ア　どの程度，東京スカイツリーの方が高く見えるのか？

イ　展望室ではなく，東京都庁の地表1階部分から見た場合，結果は同じになるだろうか？

ウ　両方が同じ高さに見える場所はどのあたりか？

エ　東京タワーの方が高く見える領域，東京スカイツリーの方が高く見える領域，両方が同じ高さに見える境界線は，どこになるだろうか？

アについては，様々な方法が考えられるが，例えば1つの考えとして，仮に東京タワーと同じ位置に東京スカイツリーがあったとした場合に，東京スカイツリーの見かけの高さを計算すると，

$$5929 \times \tan\beta = 235.15\cdots \fallingdotseq 235\mathrm{m}$$

となり，東京タワーの見かけの高さ131mの約1.80倍の高さに見えることがわかる（図4)。

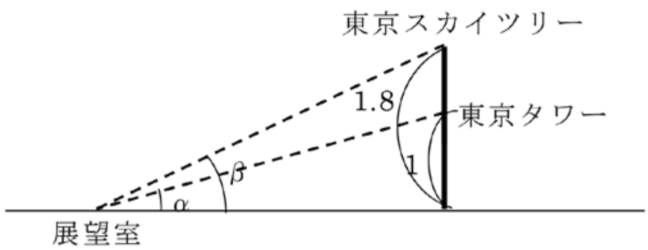


図4　見かけの高さの比較

また，イについては，仰角をα'，β'とすると，

$$\tan\alpha' = \frac{333}{5929} = 0.0561\cdots \qquad \tan\beta' = \frac{634}{10892} = 0.0582\cdots$$

となり，$\tan\alpha' < \tan\beta'$であるので，東京スカイツリーの方が高く見えるが，その差はわずかである。実際，アと同様に，仮に東京タワーと同じ位置に東京スカイツリーがあったとした場合に，東京スカイツリーの見かけの高さを計算すると，

$$5929 \times \tan\beta' = 345.11\cdots \fallingdotseq 345\mathrm{m}$$

となり，東京タワーの高さ333mの約1.04倍の高さに見えることがわかる。

また，ウ，エについて，特に両方が同じに高さに見える境界線は，東京タワーと東京スカイツリーからの距離の比が，高低差の比に等しい点の軌跡，すなわちアポロニウスの円になる。例えば地面から見る場合は，2点からの距離の比が333：634となる点の軌跡となる。軌跡については，正式には数学Ⅱの「図形と方程式」の内容であるが，ここで軽く触れることも可能である。

これらの問題を生徒自身が設定し探究する活動を通して，活用力を高めることが期待できるであろう。

(3)　数学的活動と教師の手立て

(1)，(2) の2つの問題例の扱い方について考察したことを，「数学的な活用力」を育成するための「数学的活動」とそのために必要な「教師の手立て」として整理すると表3の通りである。

表3　数学的活動と教師の手立て

活用力	数学的活動	教師の手立て
数学的に解決しようとする態度	・結論を予想する活動	・初めて出会うような問題場面の設定 ・結論が予想しやすい問題の設定
解決の方法を数学的に構想する力	・現実事象を数学化する活動 ・必要な情報を選択する活動	・過不足のある情報の提示 ・必要以上に解法を指定しない ・生徒自身が考える時間の確保
数学的に処理して結論を導く力	・ICTを活用する活動	・コンピュータ等の道具の準備

振り返って発展させる態度	・結論を振り返る活動 ・問題を発展させる活動	・全体で議論・共有する時間の確保 ・生徒自身による問題の設定

表3において，6つの数学的活動と8つの教師の手立てを挙げた。いずれの指導においても，これらすべての数学的活動と手立てがないと不十分であることを意味するわけではないが，「数学的な活用力」の育成を重視した指導においては，これらを意識して授業を構想し実践することが重要であると考える。

４　おわりに

全国学力・学習状況調査の数学のＢ問題には，教科書にはあまり見られないような問題が毎年工夫して出題され，数学的な活用力を育成する上で，一定の成果を上げているといえる。一方で，最近は，Ｂ問題に対応するような問題が教科書にも徐々に掲載されるようになってきたり，Ｂ問題に対応する問題集が出版されたり，さらには，各学校で過去問を積極的に生徒に練習させたりするようになってきた。このことに関連して，吉村（2009）が「演習的にPISA型問題や「算数B」「数学B」的問題を授業で取り扱っていては場合によっては柔軟性のない，融通のきかない思考力・判断力・表現力を育成しているかもしれない」と指摘するように，最近の動きは，真の「数学的な活用力」を育成することにはつながらないと考える。すなわち，活用力を評価する問題で良い点を取ることばかりに関心が向くと，活用力の育成にはつながらない，という点に留意する必要があるであろう。

今後の課題としては，本研究で指摘した数学的活動と教師の手立てを意識した授業を実践して，その有効性を検証することである。

なお，本研究は，科学研究費基盤研究（C)「高等学校数学科における活用力育成をめざした教材の開発と指導に関する研究」（研究代表者：熊倉啓之，課題番号26381193）の成果の一部である。

引用・参考文献

Carl Benedikt Frey and Michael A. Osborne（2013）. THE FUTURE OF EMPLOYMENT: HOW SUSCEPTIBLE ARE JOBS TO COMPUTERISATION?. Oxford Martin School Working Paper.

Chevallard, Y.（2015）. Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counterparadigm. In S. J. Cho（Ed.）*The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education*, pp. 173-187.

岩田耕司（2015）「数学的な表現を通して他者と関わる活動とその評価に関する一考察」日本数学教育学会第3回春期研究大会論文集，pp.135-142.

金本良通（2013）第8回算数・数学教育を考える会（福島）シンポジウム，「活用力を高める算数・数学の授業づくり」日本数学教育学会，第95巻3号，pp.44-52.

国立教育政策研究所（2004）『生きるための知識と技能』ぎょうせい，pp.93-124.

国立教育政策研究所（2006）「特定の課題に関する調査（算数・数学）調査結果（小学校・中学校」pp.1-5.

国立教育政策研究所（2007）「平成19年度全国学力・学習状況調査解説資料中学校数学」pp.7-13.

国立教育政策研究所（2013a）「OECD生徒の学習到達度調査～2012年調査分析資料集～」pp.37-52.

国立教育政策研究所（2013b）「特定の課題に関する調査（論理的思考）調査結果～21世紀グローバル社会における論理的に思考する力の育成を目指して」pp.69-73.

国立教育政策研究所（2015a）「平成27年度全国学力・学習状況調査報告書質問紙」pp.15-20.

国立教育政策研究所（2015b）「平成27年度全国学力・学習状況調査報告書小学校算数/中学校数学」pp.10-13/pp.10-13.

熊倉啓之（2009）「学習意欲の向上を図り，生きる力をはぐくむ数学の学習指導」中等教育資料NO.877，ぎょうせい，pp.34-39.

栗原秀幸（2013）　金本（2013）に同じ.

宮川健・濱中裕明（2016）「インターネットを用いた探究を通した論証指導－問いを始点にした単元間をつなぐ数学的活動の事例－」日本数学教育学会第4回春期研究大会論文集，pp.147-154.

宮崎樹夫（2014）「数学的事象に関する課題探究を実現する学力とその可能性－「活用する力」βへの提言－」日本数学教育学会第2回春期研究大会論文集，pp.27-34.

文部科学省（2016）「算数・数学ワーキンググループにおけるこれまでの議論のとりまとめ（案）」中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会（第8回）配布資料

中野博之（2009）「「活用力の育成」の視点からの問題解決型の授業の考察と改善～小学校1年生「繰り下がりのある引き算」の授業を通して～」第42回数学教育論文発表会論文集，pp.127-132.

野村総合研究所未来創発センター（2015）「“2030年”から日本を考える、“今”から2030年の日本に備える.」https://www.nri.com/~/media/PDF/jp/news/2015/151202_1.pdf

鈴川由美・豊田秀樹・川端一光（2008）「わが国の数学教育は数学を日常の中で活用する能力を重視しているか-PISA2003調査のDIFによる分析-」教育心理学研究，第56巻2号，pp.206-217.

高橋源一郎他（2011）『詳説数学Ⅱ』啓林館，p.210.

梅田英之・逸見幸弘（2010）「微分の応用に着目して／表・式・グラフをもとに関数の変化を調べること～ICTを活用して～」吉田明史研究代表「わかる授業を構築するための基礎研究～小中高接続の重点化を通して～」科学研究費補助金研究成果報告書（Ⅲ），pp.234-266.

山口武志（2008）「知識基盤社会において求められる学力と新教育課程-新しい数学科学習指導要領の検討-」日本数学教育学会誌，第90巻5号，pp.29-36.

吉田浩美（2013）　金本（2013）に同じ.

吉村直道（2009）「学習意欲の向上を目指した活用力の育成について」日本数学教育学会誌，第91巻6号，pp.8-15.