教育資金の調達方法と経済成長 : Galor and Tsiddon (1997) モデル再考

論　説

教育資金の調達方法と経済成長
―Galor and Tsiddon (1997) モデル再考―

村　田　　　慶

Ⅰ．はじめに

本稿では，世代間重複モデルによる教育資金の調達方法と経済成長に関する一考察として，Galor and Tsiddon (1997) モデルの再考を行う．Galor and Tsiddon (1997) では，小国開放経済を設定し，各個人は若年期，壮年期，および老年期の３期間生存するとし，若年期において教育を受け，壮年期において労働収入を得て，貯蓄を行い，さらに老年期において，壮年期における貯蓄を財源として消費を行うとしている．さらに，Galor and Tsiddon (1997) では，人的資本の分布を各個人の人的資本水準についての確率密度関数で表し，人的資本分布と経済成長の関係についての理論的考察を行っている．Galor and Tsiddon (1997) モデルの大きな特徴として，各個人の生涯効用は各期における消費水準のみによって決定付けられ，所得移転を一切行わず，世代間を通じての移転要素としては，親世代の人的資本水準のみとなっている点が挙げられる．人的資本に関する先行研究では，各個人は利他性を持ち，親は子どもに対して教育投資を行うという設定が一般的であるが，Galor and Tsiddon (1997) モデルでは，各個人の利他性が考慮されておらず，親は子どもに対する教育投資を行わない．さらに，Galor and Tsiddon (1997) では，遺産贈与なども考慮しないことから，教育投資は子ども自身が国際借り入れによって行うとしている．しかしながら，このモデル設定は明らかに現実的とは言えない．

本稿では，Galor and Tsiddon (1997) モデルについて，各個人が利己的であるという基本設定を変更することなく，所得移転を組み入れることによって，若干ではあるが，現実的な拡張・修正を行う．本稿では，Galor and Tsiddon (1997) と同様，教育投資は子ども自身が行うとするものの，その財源は国際借り入れではなく，親からの借り入れによって行うとする．その上で，このようなモデルの修正を行ったとしても，Galor and Tsiddon (1997) モデルにおける分析には何ら支障がないことを示す．

本稿における構成として，まずⅡ節において，Galor and Tsiddon (1997) モデルを修正した基本モデルを概観する．その上で，Ⅲ節において，Galor and Tsiddon (1997) モデルに基づき，人的資本と経済成長について捉える．

Ⅱ．モデル設定

完全競争下の小国開放経済において，各個人の経済活動は３期間にわたって行われるとする．３期間とは，ある世代における若年層，壮年期，および老年期を意味する．３期については，t 期，$t+1$ 期，および $t+2$ 期を基準とし，各期に生まれた個人をそれぞれ，t 世代，$t+1$ 世代，および $t+2$ 世代と呼ぶこととする．各世代の子どもは壮年期に誕生するとする．

Ⅱ．1　財市場

各期における財の生産は，物的資本ストックおよび効率的労働力に関する収穫一定性[(1)]を持つと仮定する．t 期における生産は(1)のようになる．

$$Y_t = F\left(K_t, \lambda_t H_t\right) \tag{1}$$

(1)において，Y_t は t 期における総生産量，K_t は t 期の期首における物的資本ストック，H_t は t 期における効率的労働力，λ_t は t 期における技術水準である．生産者の一人当たり生産量を $f(k_t)$ とおくと，(2)のように定義される．$f(k_t)$ は強い単調増加，強い意味での凹関数であり，新古典派の性質を持つとする．

$$f\left(k_t\right) \equiv \frac{Y_t}{\lambda_t H_t};\ k_t \equiv \frac{K_t}{\lambda_t H_t} \tag{2}$$

(2)において，k_t は t 期における資本・労働比率である．t 期における賃金率と資本賃料率をそれぞれ，w_t，r_t とおくと，生産者の利潤関数は，次式のようになる．

$$\Pi\left(K_t, \lambda_t H_t\right) = F\left(K_t, \lambda_t H_t\right) - w_t H_t - r_t K_t = \lambda_t H_t f\left(k_t\right) - w_t H_t - r_t \lambda_t H_t k_t$$

生産者は利潤関数を最大化するような k_t の水準を選ぶ．これは次のように表される．

$$\underset{k_t}{Maximize} \quad \Pi\left(K_t, \lambda_t H_t\right) = F\left(K_t, \lambda_t H_t\right) - w_t H_t - r_t K_t = \lambda_t H_t f\left(k_t\right) - w_t H_t - r_t \lambda_t H_t k_t$$

---

(1) 生産関数は規模に関する収穫一定性を持つことから，次の性質を持つ．

$$F\left(zK_t, z\lambda_t H_t\right) = zF\left(K_t, \lambda_t H_t\right);\ z > 0$$

ここで，k_tは一階条件である $\partial\Pi/\partial k_t = 0$ およびゼロ利潤条件を満たすように需要される．それは次のようになる．

$$\begin{aligned} f'(k_t) &= r_t \\ w_t &= \lambda_t\{f(k_t) - f'(k_t)k_t\} \end{aligned} \qquad (3)$$

(3)において， $f(k_t) - f'(k_t)k_t$ は実質賃金を表している．また，本稿では，小国開放経済を仮定しているので，利子率は $r_t \equiv \bar{r}$ と定義される．したがって，一人当たり賃金率w_tについては，次式が成立する．

$$w_t = \lambda_t w(\bar{k}) \equiv \lambda_t \bar{w} \qquad (4)$$

Ⅱ．2　技術水準

t世代の$t+1$期における技術水準λ_{t+1}と$t-1$世代のt期における技術水準λ_tの関係は，(5)のように定義される．

$$\lambda_{t+1} = \max[\lambda(h_t), \lambda_t];\ h_t \equiv \frac{H_t}{N} \qquad (5)$$

(5)において，h_tはt期における平均的な人的資本水準，Nは各世代の人口規模である．本稿では，各期における技術水準は平均的な人的資本水準によって決定付けられ，さらに，少なくとも前の期よりも低下することはないと仮定する．また，人口規模は一定であるとする．

Ⅱ．3　人的資本への投資

各世代の個々人は壮年期において，自身の人的資本を形成するとする．t世代の個人iの$t+1$期における人的資本水準は，次のようになる．

$$h_{t+1}^i = \phi(h_t^i, x_t^i) \qquad (6)$$

(6)において，iは個々人のタイプを表しており，h_t^iとx_t^iはそれぞれ，$t-1$世代の個人iのt期における人的資本水準およびt世代の個人iがt期において自身に対して行う教育投資水準である．本

稿では，個々人を表す変数について，右下に期，右上にタイプ(i)を添え字で表記するものとする．また，(6)は3階連続微分可能な関数であり，以下の性質を持つと仮定する．

$$\frac{\partial\phi\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial h_t^i}\equiv\phi_1\left(h_t^i,x_t^i\right)>0\ ,\quad \frac{\partial\phi\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial x_t^i}\equiv\phi_2\left(h_t^i,x_t^i\right)>0\ ,\quad \frac{\partial^2\phi\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial h_t^i\partial x_t^i}\equiv\phi_{12}\left(h_t^i,x_t^i\right)>0$$
$$\frac{\partial^2\phi\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial\left(h_t^i\right)^2}\equiv\phi_{11}\left(h_t^i,x_t^i\right)<0\ ,\quad \frac{\partial^2\phi\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial\left(x_t^i\right)^2}\equiv\phi_{22}\left(h_t^i,x_t^i\right)<0$$

Ⅱ.4　労働収入および貯蓄

t世代の個々人は，t期においては幼年期にあるので労働を行わず，消費と教育投資は親世代からの借り入れによって行うと仮定する[(2)]．労働収入を得るのは$t+1$期である．

$$I_{t+1}^i=w_{t+1}h_{t+1}^i=\overline{w}\lambda_{t+1}h_{t+1}^i \tag{7}$$

(7)において，I_{t+1}^iはt世代の個人iの$t+1$期における所得水準，h_{t+1}^iはt世代の個人iの$t+1$期における人的資本水準である．

本稿では，親からの遺産を考慮しないので，労働収入がそのまま所得となる．$t+1$期における労働によって得られた所得は，t期におけるローン返済，$t+1$期における消費，および$t+1$世代への貸し出しに充てられ，$t+2$期における消費には，$t+1$世代からの返済が充てられるとする．$t+1$期における貯蓄および$t+2$期における消費はそれぞれ，次のようになる．

$$s_{t+1}^i=\overline{w}\lambda_{t+1}h_{t+1}^i-\left(1+\overline{r}\right)\left(c_t^{t,i}+x_t^i\right)-c_{t+1}^{t,i}-\left(c_{t+1}^{t+1,i}+x_{t+1}^i\right)$$
$$c_{t+2}^{t,i}=\left(1+\overline{r}\right)\left(c_{t+1}^{t+1,i}+x_{t+1}^i\right)$$

ここで，消費は3期いずれにおいて行われるので，世代の識別のため，本稿では，個々人の消費水準については，世代を右上に添え字で表記する．すなわち，$c_t^{t,i}$，$c_{t+1}^{t,i}$，および$c_{t+2}^{t,i}$はそれぞれ，t世代の個人iのt期，$t+1$期，および$t+2$期における消費水準である．また，$c_{t+1}^{t+1,i}$とx_{t+1}^iはそれぞれ，$t+1$世代の個人iの$t+1$期における消費および教育投資水準である．

消費者の3期間全体の効用Uは，以下のように決定付けられるとする．

(2) Galor and Zeira (1993) およびGalor and Moav (2004) で考察されているが，借り入れ制約がある場合，子どもへの教育投資が全く行われなくなるというケースも考えられ，この設定はそれを避けることを目的としている．

$$U=u\left(c_t^{t,i}\right)+u\left(c_{t+1}^{t,i}\right)+u\left(c_{t+2}^{t,i}\right) \tag{8}$$

消費者は制約条件の下で，⑻を最大化するように行動する．

$$\underset{c_t^{t,i},c_{t+1}^{t,i},c_{t+2}^{t,i},x_t^i}{Maximize} \quad U=u\left(c_t^{t,i}\right)+u\left(c_{t+1}^{t,i}\right)+u\left(c_{t+2}^{t,i}\right)$$

$$\begin{aligned} subject\ to\ \ & c_{t+1}^{t,i}=\overline{w}\lambda_{t+1}h_{t+1}^i-\left(1+\overline{r}\right)\left(c_t^{t,i}+x_t^i\right)-\left(c_{t+1}^{t+1,i}+x_{t+1}^i\right)-s_{t+1}^i \\ & c_{t+2}^{t,i}=\left(1+\overline{r}\right)\left(c_{t+1}^{t+1,i}+x_{t+1}^i\right),\quad h_{t+1}^i=\phi\left(h_t^i,x_t^i\right),\quad \left(x_t^i,c_t^{t,i},s_{t+1}^i\right)\geq 0 \end{aligned}$$

一階条件から，次式が得られる．

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{u_2}{u_3}=1+\overline{r}\ ,\quad \phi_2\left(h_t^i,x_t^i\right)=\frac{1+\overline{r}}{\overline{w}\lambda_{t+1}}$$
$$;\ \ u'\left(c_t^{t,i}\right)\equiv u_1\ ,\quad u'\left(c_{t+1}^{t,i}\right)\equiv u_2\ ,\quad u'\left(c_{t+2}^{t,i}\right)\equiv u_3$$

ここで，

$$g\left(h_t^i,x_t^i\right)=\phi_2\left(h_t^i,x_t^i\right)-\frac{1+\overline{r}}{\overline{w}\lambda_{t+1}}=0$$

と定義すると，次式が成り立つ．

$$\frac{\partial g\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial x_t^i}=\frac{\partial \phi_2\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial x_t^i}=\phi_{22}\left(h_t^i,x_t^i\right)<0$$

このとき，陰関数定理が適用可能となる条件が満たされ，$g\left(h_t^i,\xi\left(h_t^i;\lambda_{t+1}\right)\right)=0$ となるξが存在する．

$$\frac{\partial x_t^i}{dh_t^i}=-\frac{\partial g\left(h_t^i,x_t^i\right)/\partial h_t^i}{\partial g\left(h_t^i,x_t^i\right)/\partial x_t^i}=-\frac{g_1\left(h_t^i,x_t^i\right)}{g_2\left(h_t^i,x_t^i\right)}=-\frac{\phi_{21}\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\phi_{22}\left(h_t^i,x_t^i\right)}>0$$

$$;\ \frac{\partial g\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial h_t^i}=g_1\left(h_t^i,x_t^i\right),\quad \frac{\partial g\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial x_t^i}=g_2\left(h_t^i,x_t^i\right)$$

また，$\xi\left(h_t^i;\lambda_{t+1}\right)$ についても，次の不等式が成立する．

$$\frac{dx_t^i}{d\lambda_{t+1}}=-\frac{\partial g\left(h_t^i,x_t^i\right)/\partial\lambda_{t+1}}{\partial g\left(h_t^i,x_t^i\right)/\partial x_t^i}=-\frac{1+\bar{r}}{\overline{w}\left(\lambda_{t+1}\right)^2\phi_{22}\left(h_t^i,x_t^i\right)}>0$$

上記の議論は，Galor and Tsiddon (1997) と同じものである．したがって，教育投資について，国際借り入れではなく，親からの借り入れとしても，効用最大化の一階条件について，Galor and Tsiddon (1997) と同様の議論が可能となることが分かる．

Ⅲ．人的資本と経済成長

人的資本の蓄積は，非線形の差分方程式によって決定付けられる．

$$h_{t+1}^i=\phi\left(h_t^i,\xi\left(h_t^i;\lambda_{t+1}\right)\right)\equiv\Psi\left(h_t^i;\lambda_{t+1}\right)\ ;\ x_t^i\equiv\xi\left(h_t^i;\lambda_{t+1}\right) \qquad (9)$$

(9)において，h_{t+1}^iはh_t^iについての連続関数であるとする．Galor and Tsiddon (1997) でも明記されているが，λをパラメータとするならば，x_t^iはh_t^iについての一変数関数となる．また，Ⅱ．1節より，利子率を一定 (小国開放経済) とし，その影響を受け，(4)のように賃金率が一定となっていることから，(1)との関連性を見ると，財の生産を決定する要因もh_t^iのみとなる．すなわち，経済成長パターンはh_t^iのみによって決定付けられる．また，次式の成立を仮定する．

$$\Psi\left(0;\lambda\right)=\mu\geq 0$$

このとき，以下の条件が成り立つとする．

$$\Psi(0;\lambda)=\mu\geq 0$$
$$\Psi'(h_t^i;\lambda)=\phi_1\left(h_t^i,\xi(h_t^i;\lambda)\right)+\phi_2\left(h_t^i,\xi(h_t^i;\lambda)\right)\xi'(h_t^i;\lambda)>0,\forall h_t^i>0$$
$$\Psi''(h_t^i;\lambda)=\phi_{11}+\frac{(\phi_{12})^2}{\phi_{22}}-\left[\frac{\phi_2}{(\phi_{22})^2}\left\{\left(\phi_{211}-\phi_{212}\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}\right)\phi_{22}+\left(\phi_{221}+\phi_{222}\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}\right)\phi_{21}\right\}\right]$$

さらに，以下を仮定する．

$$\lim_{h_t^i\to 0}\Psi'(h_t^i;\lambda)=0$$
$$\lim_{h_t^i\to\infty}\Psi'(h_t^i;\lambda)=0$$
$\Psi(h_t^i;\lambda)>h_t^i$ となる部分が存在する（$h_t^i>0$）

このケースでは，人的資本関数は一ケースとして，図１のような複数の定常状態均衡を持つ(3)．

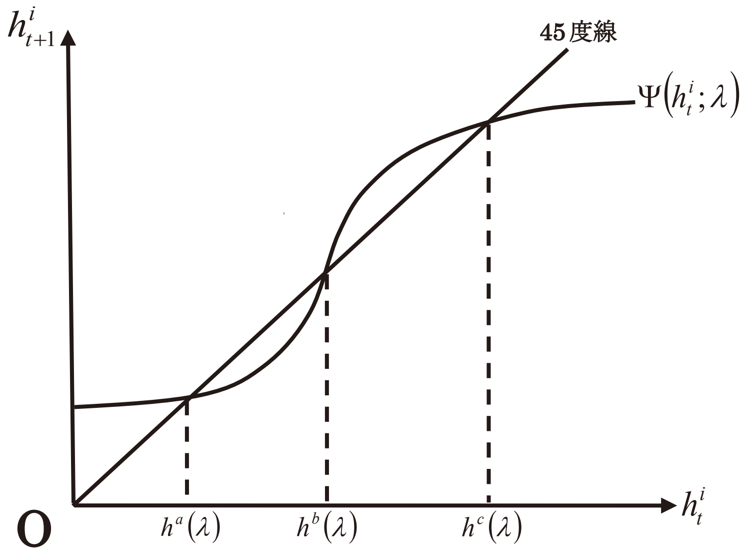

図１：人的資本関数

Galor and Tsiddon (1997) に倣い，定常状態均衡の人的資本水準を低い水準から $h^a(\lambda)$，$h^b(\lambda)$，および $h^c(\lambda)$ と表記する． $\Psi(h_t^i;\lambda_{t+1})$ は連続関数と定義しているので，閉区間 $[h^a(\lambda),h^c(\lambda)]$ にお

(3) 村田 (2009) では，Galor and Tsiddon (1997) と同様の性質を満たす人的資本関数の形状について，判例を示している．しかしながら，労働市場における二極化について説明するにあたり，最もシンプルなケースと言える．

いても，もちろん連続である．さらに，$\Psi\left(h^{a}(\lambda);\lambda\right)$ と $\Psi\left(h^{c}(\lambda);\lambda\right)$ は異なる値をとるので，中間値の定理より，この２点の間の任意の値に対して，$h^{a}(\lambda)<h^{b}(\lambda)<h^{c}(\lambda)$ となるような $\Psi\left(h^{b}(\lambda);\lambda\right)$ が少なくとも一つは存在する．図１のケースでは，人的資本水準が $h^{b}(\lambda)$ を上回れば，時間の経過とともに高い水準である $h^{c}(\lambda)$ に収束するが，$h^{b}(\lambda)$ を下回れば，時間の経過とともに低い水準である $h^{a}(\lambda)$ に収束する[4]．

最後に，人的資本の分布について捉えてみよう．Galor and Tsiddon (1997) では，人口規模を人的資本の分布で，さらに，人的資本の分布を確率密度関数で定義している．人的資本の初期分布は，(10)のように定義される．

$$\int_{0}^{\infty} g_{0}\left(h_{0}^{i}\right)dh_{0}^{i}=N \tag{10}$$

(10)において，$g_{0}(h_{0}^{i})$ は初期における個人 i の h_{0}^{i} についての確率密度関数である．Galor and Tsiddon (1997) では，人口規模を一定としており，図１を踏まえると，t 期における人的資本分布は(11)のようになる．

$$\int_{0}^{\infty} g_{t}\left(h_{t}^{i}\right)dh_{t}^{i}=\int_{0}^{h^{a}(\lambda)} g_{t}\left(h_{t}^{i}\right)dh_{t}^{i}+\int_{h^{a}(\lambda)}^{h^{b}(\lambda)} g_{t}\left(h_{t}^{i}\right)dh_{t}^{i}+\int_{h^{b}(\lambda)}^{h^{c}(\lambda)} g_{t}\left(h_{t}^{i}\right)dh_{t}^{i}+\int_{h^{c}(\lambda)}^{\infty} g_{t}\left(h_{t}^{i}\right)dh_{t}^{i} \tag{11}$$

(11)において，$g_{t}(h_{t}^{i})$ は t 期における個人 i の h_{t}^{i} についての確率密度関数である．平均的な人的資本水準は(11)のように定義される．

$$\int_{0}^{\infty} h_{t}^{i}\cdot g_{t}\left(h_{t}^{i}\right)dh_{t}^{i}=h_{t}=\frac{H_{t}}{N} \tag{12}$$

本稿およびGalor and Tsiddon (1997) では，小国開放経済を仮定しており，資本・労働比率が一定となる．さらに，人口規模を一定としているため，経済成長パターンは実質的に，各個人の人的資本水準によって決定付けられる．図１との関連で捉えると，$h^{a}(\lambda)$ に収束する人口割合が大きく (小さく) なるほど，経済成長にとってマイナス (プラス) に働き，$h^{c}(\lambda)$ に収束する人口割合が大きく (小さく) なるほど，経済成長にとってプラス (マイナス) に働くことが分かる．

[4] 複数の定常状態均衡の存在と収束状況については，Galor and Ryder (1989)，Azariadis (1996)，およびGalor (1996) などにおいても検討されている．

Ⅳ．結語

本稿では，Galor and Tsiddon (1997) における教育資金の調達方法について，より現実的な拡張・修正を試みた．具体的には，Galor and Tsiddon (1997) では，教育投資は各個人が自身で決定付け，その財源を国際借り入れによって調達するとしているのに対し，本稿では，親からの借り入れとして再考した．本稿モデルでは，教育投資を親からの借り入れとしても，Galor and Tsiddon (1997) モデルの議論を崩すことなく，同様の議論が可能となることを示した．

最後に，本稿における分析内容について，今後の展望を述べる．Galor and Tsiddon (1997) は人的資本の分布についての議論が主であり，それにあたり，本稿モデルの図１のように，S字型の人的資本関数を捉えていることが大きな特徴として挙げられるが，本稿では，家計の動態システムに関する議論のみであり，人的資本分布に関する議論は行っていない．Galor and Tsiddon (1997) におけるS字型の人的資本関数は，労働市場における二極化問題を捉える意味で興味深いものであり，この点については，稿を改めて論じたい．

参考文献

［１］ Azariadis, C. (1996) “The Economics of Development Trap,” *Journal of Economic Growth*, Vol.1, pp.449-485.

［２］ Galor, O. (1996) “Convergence? Inferences from Theoretical Models,” *The Economic Journal*, Vol.106, pp.1056-1069.

［３］ Galor, O. and D. Tsiddon (1997) “The Distribution of Human Capital and Economic Growth,” *Journal of Economic Growth*, Vol.2, pp.93-124.

［４］ Galor, O., and H. E. Ryder (1989) “Existence, Uniquess, and Stability of Equilibrium in an Overlapping-Generations Model with Productive Capital,” *Journal of Economic Theory*, Vol.49, pp.360-375.

［５］ Galor, O. and J. Zeira (1993) “Income Distribution and Macroeconomics,” *The Review of Economic Studies*, Vol.60, pp.35-52.

［６］ Galor, O. and O. Moav (2004) “From Physical to Human Capital Accumulation: Inequality and the Process of Development,” *The Review of Economic Studies*, Vol.71, pp.1001-1026.

［７］ 村田 慶 (2009)「家計の動態的システムに関する一考察―人的資本および教育投資の効果についての検討―」,『経済論究 (九州大学大学院)』第133号，pp.13-131.