Galor and Tsiddon (1997) と 2 期間モデル

メタデータ	言語: ja 出版者: 静岡大学人文社会科学部 公開日: 2017-09-11 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 村田, 慶 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00010401

論　説

Galor and Tsiddon (1997) と２期間モデル

村　田　　　慶

Ⅰ．はじめに

本稿では，世代間重複モデルによる人的資本と経済成長に関する一考察として，Galor and Tsiddon (1997) モデルの再検討を行う．Galor and Tsiddon (1997) では，小国開放経済を設定し，各個人は若年期，壮年期，および老年期の３期間生存するとし，若年期において教育を受け，壮年期において労働収入を得て，貯蓄を行い，さらに老年期において，壮年期における貯蓄を財源として消費を行うとしている．さらに，Galor and Tsiddon (1997) では，人的資本の分布について，各個人の人的資本水準についての確率密度関数で表し，人的資本分布と経済成長の関係についての理論的考察を行っている．Galor and Tsiddon (1997) モデルの大きな特徴として，各個人の生涯効用は各期における消費水準のみによって決定付けられ，所得移転を一切行わず，世代間を通じての移転要素としては，親世代の人的資本水準のみとなっている点が挙げられる．人的資本に関する先行研究では，各個人は利他性を持ち，親は子どもに対して教育投資を行うという設定が一般的であるが，Galor and Tsiddon (1997) モデルでは，各個人の利他性が考慮されておらず，親は子どもに対する所得移転を行わない．Galor and Tsiddon (1997) では，若年期における消費と教育投資は子ども自身が国際借り入れによって行うとしている．しかしながら，このような仮定を一応ながら受け入れるとしても，Galor and Tsiddon (1997) モデルには，ある疑問が生じる．それは，壮年期における貯蓄と，それを財源とする老年期における消費を考慮しているものの，人的資本分布と経済成長に関する分析において，これらが積極的な役割を果たしていないという点である．

上記の問題意識に基づき，本稿では，Galor and Tsiddon (1997) モデルについて，その基本構造を変更することなく，２期間モデルへの読み替えを行う．それによって，Galor and Tsiddon (1997) における人的資本と経済成長に関する分析は２期間モデルでも何ら支障がないことを示す．

本稿における構成として，まずⅡ節において，Galor and Tsiddon (1997) モデルを２期間モデルに読み替えた基本モデルを概観する．その上で，Ⅲ節において，Galor and Tsiddon (1997) モデルに基づき，人的資本と経済成長について捉える．

Ⅱ．モデル設定

完全競争下の小国開放経済において，各個人の経済活動は２期間にわたって行われるとする．２期については，t期と$t+1$期を基準とし，各期に生まれた個人をそれぞれ，t世代，$t+1$世代と呼ぶこととする．各世代の子どもは第２期に誕生するとする．

Ⅱ．1　人的資本への投資

各世代の個々人は壮年期において，自身の人的資本を形成するとする．t世代の個人iの$t+1$期における人的資本水準は⑴のようになる．

$$h_{t+1}^{i}=\phi\left(h_{t}^{i},x_{t}^{i}\right) \tag{1}$$

⑴において，iは個々人のタイプを表しており，h_t^iとx_t^iはそれぞれ，$t-1$世代の個人iのt期における人的資本水準およびt世代の個人iがt期において自身に対して行う教育投資水準である．本稿では，個々人を表す変数について，右下に期，右上にタイプ（i）を添え字で表記するものとする．また，⑴は３階連続微分可能な関数であり，以下の性質を持つと仮定する．

$$\frac{\partial\phi\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial h_t^i}\equiv\phi_1\left(h_t^i,x_t^i\right)>0,\quad\frac{\partial\phi\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial x_t^i}\equiv\phi_2\left(h_t^i,x_t^i\right)>0,\quad\frac{\partial^2\phi\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial h_t^i\partial x_t^i}\equiv\phi_{12}\left(h_t^i,x_t^i\right)>0$$

$$\frac{\partial^2\phi\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial\left(h_t^i\right)^2}\equiv\phi_{11}\left(h_t^i,x_t^i\right)<0,\quad\frac{\partial^2\phi\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial\left(x_t^i\right)^2}\equiv\phi_{22}\left(h_t^i,x_t^i\right)<0$$

Ⅱ．2　技術水準

t世代の$t+1$期における技術水準λ_{t+1}と$t-1$世代のt期における技術水準λ_tの関係は，⑵のように定義される．

$$\lambda_{t+1}=\max\left[\lambda\left(h_t\right),\lambda_t\right];\ h_t\equiv\frac{H_t}{N} \tag{2}$$

⑵において，h_tとH_tはそれぞれ，t期における平均的な人的資本水準および効率的労働力，Nは各世代の人口規模である．本稿では，各期における技術水準は平均的な人的資本水準によって決

定付けられ，さらに，少なくとも前の期よりも低下することはないと仮定する．また，人口規模は一定であるとする．

Ⅱ．3　労働収入および貯蓄

Galor and Tsiddon (1997) と同様，t世代の個人iはt期において，国際借り入れによって消費と教育投資を行うと仮定する．したがって，労働収入を得るのは$t+1$期である．

$$I_{t+1}^{i} = \lambda_{t+1} h_{t+1}^{i} \tag{3}$$

(3)において，I_{t+1}^{i}はt世代の個人iの$t+1$期における所得水準，h_{t+1}^{i}はt世代の個人iの$t+1$期における人的資本水準である．

Galor and Tsiddon (1997) と同様，本稿では，親からの遺産を考慮しないので，労働収入がそのまま所得となる．$t+1$期における労働によって得られた所得は，t期におけるローン返済に充てられ，その残りが$t+1$期における消費に充てられるとする．それは，次のようになる．

$$c_{t+1}^{t,i} = \lambda_{t+1} h_{t+1}^{i} - \left(1+\bar{r}\right)\left(c_{t}^{t,i} + x_{t}^{i}\right) \tag{4}$$

(4)において，$\bar{r}$は各期における世界利子率（一定）である．ここで，消費は２期いずれにおいても行われるので，世代の識別のため，本稿では，個々人の消費水準については，世代を右上に添え字で表記する．すなわち，$c_{t}^{t,i}$と$c_{t+1}^{t,i}$はそれぞれ，t世代の個人iのt期および$t+1$期における消費水準である．

消費者の２期間全体の効用Uは，(5)のように決定付けられるとする．

$$U = u\left(c_{t}^{t,i}\right) + u\left(c_{t+1}^{t,i}\right) \tag{5}$$

消費者は制約条件の下で，(5)を最大化するように行動するものとする．

$$\underset{c_{t}^{t,i},\, c_{t+1}^{t,i},\, x_{t}^{i}}{Maximize} \quad U = u\left(c_{t}^{t,i}\right) + u\left(c_{t+1}^{t,i}\right)$$

$$\begin{aligned} subject\ \ to \quad & c_{t+1}^{t,i} = \lambda_{t+1} h_{t+1}^{i} - \left(1+\bar{r}\right)\left(c_{t}^{t,i} + x_{t}^{i}\right) \\ & h_{t+1}^{i} = \phi\left(h_{t}^{i}, x_{t}^{i}\right), \quad \left(x_{t}^{i}, c_{t}^{t,i}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

一階条件から，次式が得られる．

$$\frac{u_1}{u_2}=1+\bar{r}\ ,\quad \phi_2\left(h_t^i,x_t^i\right)=\frac{1+\bar{r}}{\lambda_{t+1}}\ \ ;\ u'\left(c_t^{t,i}\right)\equiv u_1\ ,\quad u'\left(c_{t+1}^{t,i}\right)\equiv u_2$$

ここで，

$$g\left(h_t^i,x_t^i\right)=\phi_2\left(h_t^i,x_t^i\right)-\frac{1+\bar{r}}{\lambda_{t+1}}=0$$

と定義すると，次式が成り立つ．

$$\frac{\partial g\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial x_t^i}=\frac{\partial \phi_2\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial x_t^i}=\phi_{22}\left(h_t^i,x_t^i\right)<0$$

このとき，陰関数定理が適用可能となる条件が満たされ， $g\left(h_t^i,\xi\left(h_t^i;\lambda_{t+1}\right)\right)=0$ となるξが存在する．

$$\frac{\partial x_t^i}{dh_t^i}=-\frac{\partial\, g\left(h_t^i,x_t^i\right)/\partial h_t^i}{\partial\, g\left(h_t^i,x_t^i\right)/\partial x_t^i}=-\frac{g_1\left(h_t^i,x_t^i\right)}{g_2\left(h_t^i,x_t^i\right)}=-\frac{\phi_{21}\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\phi_{22}\left(h_t^i,x_t^i\right)}>0$$

$$;\ \ \frac{\partial g\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial h_t^i}=g_1\left(h_t^i,x_t^i\right),\quad \frac{\partial g\left(h_t^i,x_t^i\right)}{\partial x_t^i}=g_2\left(h_t^i,x_t^i\right)$$

また， $\xi\left(h_t^i;\lambda_{t+1}\right)$ についても，次の不等式が成立する．

$$\frac{dx_t^i}{d\lambda_{t+1}}=-\frac{\partial g\left(h_t^i,x_t^i\right)/\partial\lambda_{t+1}}{\partial g\left(h_t^i,x_t^i\right)/\partial x_t^i}=-\frac{1+\bar{r}}{\left(\lambda_{t+1}\right)^2\phi_{22}\left(h_t^i,x_t^i\right)}>0$$

上記の議論は，Galor and Tsiddon (1997) と同様のものである[(1)]．したがって，２期間モデルに

(1) 厳密に言えば，Galor and Tsiddon (1997) モデルでは貯蓄が存在することから，企業の利潤最大化行動が考慮されており，所得水準が賃金率による影響を受けるが，本稿モデルでは，賃金率による影響はない．しかしながら，Galor and Tsiddon (1997) モデルでは，小国開放経済を設定していることから，賃金率は一定となるため，本稿モデルとの実質的な違いはない．

読み替えても，効用最大化の一階条件について，Galor and Tsiddon (1997) と同様の議論が可能となることが分かる．

Ⅲ．人的資本と経済成長

人的資本の蓄積は，非線形の差分方程式によって決定付けられる．

$$h_{t+1}^{i}=\phi\left(h_{t}^{i},\xi\left(h_{t}^{i};\lambda_{t+1}\right)\right)\equiv\Psi\left(h_{t}^{i};\lambda_{t+1}\right)\ ;\ x_{t}^{i}\equiv\xi\left(h_{t}^{i};\lambda_{t+1}\right) \tag{6}$$

(6)において，h_{t+1}^{i} は h_{t}^{i} についての連続関数であるとする．Galor and Tsiddon (1997) でも明記されているが，λ をパラメータとするならば，x_{t}^{i} は h_{t}^{i} についての一変数関数となる．

$$\Psi(0;\lambda)=\mu\geq 0$$

このとき，以下の条件が成り立つとする．

$$\begin{aligned}
&\Psi(0;\lambda)=\mu\geq 0\\
&\Psi'\left(h_{t}^{i};\lambda\right)=\phi_{1}\left(h_{t}^{i},\xi\left(h_{t}^{i};\lambda\right)\right)+\phi_{2}\left(h_{t}^{i},\xi\left(h_{t}^{i};\lambda\right)\right)\xi'\left(h_{t}^{i};\lambda\right)>0,\forall h_{t}^{i}>0\\
&\Psi''\left(h_{t}^{i};\lambda\right)=\phi_{11}+\frac{\left(\phi_{12}\right)^{2}}{\phi_{22}}-\left[\frac{\phi_{2}}{\left(\phi_{22}\right)^{2}}\left\{\left(\phi_{211}-\phi_{212}\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}\right)\phi_{22}+\left(\phi_{221}+\phi_{222}\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}\right)\phi_{21}\right\}\right]
\end{aligned}$$

さらに，以下を仮定する．

$$\begin{gathered}
\lim_{h_{t}^{i}\to 0}\Psi'\left(h_{t}^{i};\lambda\right)=0\\
\lim_{h_{t}^{i}\to \infty}\Psi'\left(h_{t}^{i};\lambda\right)=0\\
\Psi\left(h_{t}^{i};\lambda\right)>h_{t}^{i}\ \text{となる部分が存在する}\ (\,h_{t}^{i}>0\,)
\end{gathered}$$

このケースでは，人的資本関数は一ケースとして，図 1 のような複数の定常状態均衡を持つ[(2)]．

(2) 村田 (2009) では，Galor and Tsiddon (1997) と同様の性質を満たす人的資本関数の形状について，判例を示している．しかしながら，労働市場における二極化について説明するにあたり，最もシンプルなケースと言える．

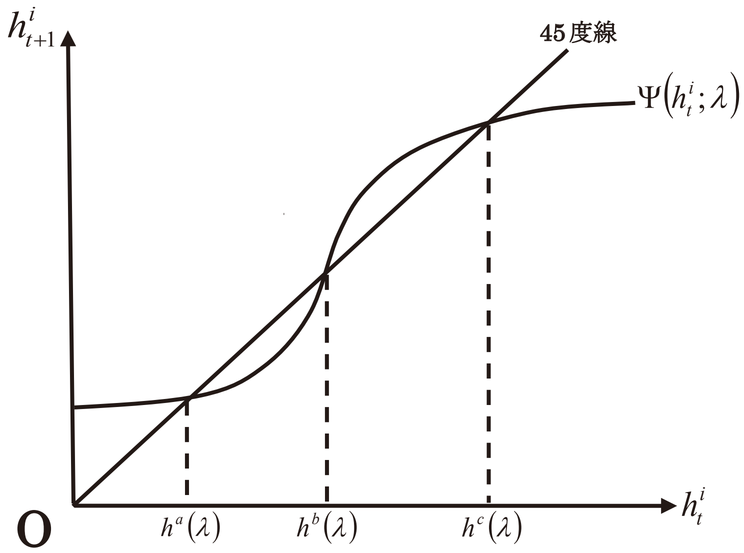

図1：人的資本関数

Galor and Tsiddon (1997) に倣い，定常状態均衡の人的資本水準を低い水準から$h^a(\lambda)$，$h^b(\lambda)$，および$h^c(\lambda)$と表記する．$\Psi\left(h_t^i;\lambda_{t+1}\right)$は連続関数と定義しているので，閉区間$\left[h^a(\lambda),h^c(\lambda)\right]$においても，もちろん連続である．さらに，$\Psi\left(h^a(\lambda);\lambda\right)$と$\Psi\left(h^c(\lambda);\lambda\right)$は異なる値をとるので，中間値の定理より，この２点の間の任意の値に対して，$h^a(\lambda)<h^b(\lambda)<h^c(\lambda)$となるような$\Psi\left(h^b(\lambda);\lambda\right)$が少なくとも一つは存在する．図１のケースでは，人的資本水準が$h^b(\lambda)$を上回れば，時間の経過とともに高い水準である$h^c(\lambda)$に収束するが，$h^b(\lambda)$を下回れば，時間の経過とともに低い水準である$h^a(\lambda)$に収束する[(3)]．

最後に，人的資本の分布について捉えてみよう．Galor and Tsiddon (1997) では，人口規模を人的資本の分布で，さらに，人的資本の分布を確率密度関数で定義している．人的資本の初期分布は，(7)のように定義される．

$$\int_0^\infty g_0\left(h_0^i\right)dh_0^i=N \tag{7}$$

(7)において，$g_0(h_0^i)$は初期における個人iのh_0^iについての確率密度関数である．Galor and Tsiddon (1997) では，人口規模を一定としており，図１を踏まえると，t期における人的資本分布は(8)のようになる．

(3) 複数の定常状態均衡の存在と収束状況については，Galor and Ryder (1989)，Azariadis (1996)，およびGalor (1996) などにおいても検討されている．

$$\int_0^{\infty} g_t\left(h_t^i\right)dh_t^i = \int_0^{h^a(\lambda)} g_t\left(h_t^i\right)dh_t^i + \int_{h^a(\lambda)}^{h^b(\lambda)} g_t\left(h_t^i\right)dh_t^i + \int_{h^b(\lambda)}^{h^c(\lambda)} g_t\left(h_t^i\right)dh_t^i + \int_{h^c(\lambda)}^{\infty} g_t\left(h_t^i\right)dh_t^i \tag{8}$$

(8)において，$g_t(h_t^i)$はt期における個人iのh_t^iについての確率密度関数である．平均的な人的資本水準は(8)のように定義される．

$$\int_0^{\infty} h_t^i \cdot g_t\left(h_t^i\right)dh_t^i = h_t = \frac{H_t}{N} \tag{9}$$

本稿では，小国開放経済を仮定しており，また，生産者の存在は考慮されていない．さらに，人口規模を一定としているため，Galor and Tsiddon (1997) と同様，経済成長パターンは実質的に，各個人の人的資本水準によって決定付けられる．図１との関連で捉えると，$h^a(\lambda)$に収束する人口割合が大きく (小さく) なるほど，経済成長にとってマイナス (プラス) に働き，$h^c(\lambda)$に収束する人口割合が大きく (小さく) なるほど，経済成長にとってプラス (マイナス) に働くことが分かる．

Ⅳ．結語

本稿では，Galor and Tsiddon (1997) について，２期間モデルへの読み替えを行った．具体的には，Galor and Tsiddon (1997) において積極的な役割を果たしていない，壮年期における貯蓄および老年期における消費を捨象することによって再考を行った．本稿モデルでは，Galor and Tsiddon (1997) モデルについて，３期間から２期間への読み替えを行っても，人的資本と経済成長に関する分析に何ら支障がないことを示した．

最後に，本稿における分析内容について，今後の展望を述べる．本稿では，Galor and Tsiddon (1997) モデルにおいて積極的な役割を果たしていない，壮年期における貯蓄および老年期における消費をカットすることによって，２期間モデルへの読み替えを行ったが，Galor and Tsiddon (1997) と異なり，財の生産に関する議論が捨象されている．そこで，貯蓄および財の生産が積極的な役割を果たすようなモデル設定も考えられる．しかしながら，そのようなモデル設定を行う場合，経済成長パターンは物的資本と人的資本，両方の蓄積による影響を受けるため，議論が複雑化する恐れがある．この点については，稿を改めて論じたい．

参考文献

［1］ Azariadis, C. (1996) “The Economics of Development Trap,” *Journal of Economic Growth*, Vol.1, pp.449-485.

［2］ Galor, O. (1996) “Convergence? Inferences from Theoretical Models,” *The Economic Journal*, Vol.106, pp.1056-1069.

［3］ Galor, O. and D. Tsiddon (1997) “The Distribution of Human Capital and Economic Growth,” *Journal of Economic Growth*, Vol.2, pp.93-124.

［4］ Galor, O., and H. E. Ryder (1989) “Existence, Uniquess, and Stability of Equilibrium in an Overlapping-Generations Model with Productive Capital,” *Journal of Economic Theory*, Vol.49, pp.360-375.

［5］ 村田 慶 (2009)「家計の動態的システムに関する一考察―人的資本および教育投資の効果についての検討―」,『経済論究 (九州大学大学院)』第133号，pp.123-131.