最適所得税率と教育選択に関する一考察

論　説

最適所得税率と教育選択に関する一考察

村　田　　慶

Ⅰ．はじめに

本稿では，政府による最適所得税率の決定と公的・私的教育の選択について，世代間重複モデルによる一考察を行う．世代間重複モデルによる公的・私的教育と人的資本蓄積に関する先行研究では，公的教育の下では政府による所得比例課税，私的教育の下では親からの所得移転を財源としている点が共通している．一方，公的・私的教育の選択については，二種類のアプローチが存在する．一つは，例えば，Glomm and Ravikumar (1992)，Gradstein and Justman (1997)，およびSaint Paul and Verdier (1993) で見られるように，両教育について，あくまで比較検討のみに留め，両教育の人的資本関数について，教育選択問題の発生余地のない形式で議論するというものである．Benabou (1996)，Eckstein and Zilcha (1994)，およびKaganovich and Zilcha (1999) でも，両教育間の相互補完性についての議論はなされているものの，基本的には，上記の先行研究と同様の分析手法がとられている．もう一つは，Cardak (2004) で見られるように，両教育の人的資本関数を選択可能な形式で捉えるというものである．Cardak (2004) では，両教育の選択は親世代による効用比較に基づいて決定付けられるという設定が特徴として挙げられる．しかしながら，Cardak (2004) では，公的教育の人的資本関数は凹関数となり，安定的な定常状態均衡を持つのに対し，私的教育の人的資本関数は線形であり，安定的な定常状態均衡を持たず，私的教育の下では人的資本水準が無限に向上していくという設定になっている．村田 (2011b) では，このCardak (2004) モデルの問題点について，Glomm and Ravikumar (1992) に倣い，人的資本関数に学習時間を新たに導入することによって，公的教育と同様，私的教育の人的資本関数も凹関数となり，安定的な定常状態均衡を持つような設定がなされており，現実的な拡張・修正を行っている．

本稿では，村田 (2011b) について，さらなる拡張・修正を行う．村田 (2011b) では，所得税率をパラメータとしており，その決定メカニズムについては議論されていない．しかしながら，所得税率は政府が決定付けるものであり，政府によるその決定メカニズムを組み入れることが望ましい．本稿では，政府の効用関数を組み入れることによって，最低所得税率の導出についての議論を組み入れる．政府の効用最大化による最適所得税率の決定は，Glomm and Ravikumar (1992)

で行われており，政府の効用は各個人の可処分所得と税収総額によって決定付けられるとしている．しかしながら，Glomm and Ravikumar (1992) では，政府の効用の決定要素にパラメータが付加されていない影響から，最適所得税率が1 / 2という極端な帰結が得られている．それに対し，村田（2011a) では，効用の決定要素それぞれに，選好度を表すパラメータを新たに組み入れることによって，最適所得税率の決定をより現実的なものとしている．本稿では，村田 (2011b) における公的・私的教育の選択に関する議論において，村田 (2011a) における所得税率の最適決定に関する議論を導入することによって，村田 (2011b) モデルにおける議論のさらなる拡張・修正を行う．

本稿の構成として，まずⅡ節において，基本モデルを概観する．Ⅲ節においては，効用比較に基づく公的・私的教育の選択に関する議論と人的資本関数の導出を行う．Ⅳ節では，政府の効用最大化による最適所得税率の決定に関する分析を行う．

Ⅱ．モデル設定

各個人の経済活動は2期間にわたって行われるとする．本稿では，2期について，t期と$t+1$期を基準とし，各期に生まれた個人をそれぞれ，t世代，$t+1$世代の個人と呼ぶこととする．また，各世代の子供は第2期に誕生するとする．さらに，各世代の人口規模は一定であり，1で基準化されるとする．

Ⅱ.1　人的資本形成

各世代の個人は，第2期において自身の人的資本を形成するものとする．Glomm and Ravikumar (1992) および村田 (2011a,b) に倣い，人的資本の蓄積方程式を⑴のように設定する．

$$h_{i,t+1} = (1-n_{i,t})^{\beta}(q_{i,t})^{\gamma}(h_{i,t})^{\delta}\ ;\ \beta,\gamma,\delta \in (0,1),\ \beta+\gamma+\delta = 1 \tag{1}$$

⑴において，iは個人のタイプ，$h_{i,t+1}$はt世代の個人iが$t+1$期において獲得する人的資本水準，$n_{i,t}$はt世代の個人iのt期における余暇時間，$q_{i,t}$はt世代の個人iがt期において$t-1$世代から受け取る教育投資，$h_{i,t}$は$t-1$世代の個人iがt期において獲得する人的資本水準である．本稿では，Glomm and Ravikumar (1992) および村田 (2011a,b) と同様，各期における全時間を1で基準化する．すなわち，$1-n_{i,t}$はt世代の個人iのt期における学習時間である．村田 (2011b) と同様，$q_{i,t}$はt世代の個人iがt期において公的・私的教育のどちらを受けるかによって区別されるものとし，それは⑵のように表される．

$$q_{i,t}=\begin{cases}E_t & if \quad e_{i,t}=0\cdots\text{公的教育}\\ e_{i,t} & if \quad e_{i,t}>0\cdots\text{私的教育}\end{cases} \tag{2}$$

(2)において，E_tはt期において公的教育を選択する個人一人当たりが受け取る教育投資，$e_{i,t}$はt期において私的教育を選択する個人iが受け取る教育投資である．Cardak (2004) に倣い，公的教育を選択する場合，個人のタイプに関係なく，教育投資は均等に配分されるため，iを表記しないものとする．Cardak (2004) および村田 (2011b) に倣い，E_tは(3)のように定義されるものとする．

$$E_t\equiv\frac{\tau_t H_t}{P_t}\equiv\frac{\tau_t\int_0^{\infty}h_{i,t}\cdot f_t\left(h_{i,t}\right)dh_{i,t}}{P_t} \tag{3}$$

(3)において，τ_tはt期における所得税率，H_tはt期における一国全体の人的資本水準，P_tはt期において公的教育を選択する人口割合，$f_t\left(h_{i,t}\right)$は個人iのt期における$h_{i,t}$についての確率密度関数である．

Ⅱ．2　効用最大化

各世代の個人は第２期において労働を行うとする．すなわち，t世代の個人が労働収入を得るのは$t+1$期である．また，遺産贈与は考慮しないものとする．したがって，労働収入がそのまま所得になる．さらに，Cardak (2004) と同様，本稿では，生産者の利潤最大化問題を考慮しないので，賃金率に関する議論が存在せず，t世代の個人iの$t+1$期における所得水準$y_{i,t+1}$は獲得する人的資本水準と一致するものとする．

$$y_{i,t+1}=h_{i,t+1} \tag{4}$$

t世代の個人iの$t+1$期における消費水準$c_{i,t+1}$は，(5)のように決定付けられる．

$$c_{i,t+1}=\begin{cases}\left(1-\tau_{t+1}\right)y_{i,t+1} & if \quad e_{i,t+1}=0 \quad\cdots\text{公的教育}\\ \left(1-\tau_{t+1}\right)y_{i,t+1}-e_{i,t+1} & if \quad e_{i,t+1}>0 \quad\cdots\text{私的教育}\end{cases} \tag{5}$$

(5)において，τ_{t+1}は$t+1$期における所得税率である．

各個人は，公的・私的教育それぞれの下で生涯効用を最大化するように行動するものとする．

本稿における生涯効用とは，２期間全体において得られる効用水準を意味する．Glomm and Ravikumar (1992) および村田 (2011) と同様，それは，第１期における余暇時間，第２期における消費水準[(1)]および次世代への教育投資によって決定付けられるものとする．公的教育を選択するt世代の個人iの２期間全体における効用水準をV^uとおくと，効用最大化問題は，次のように表される．

$$\underset{n_{i,t},c_{i,t+1}}{Maximize} \quad V^u=(1-\alpha_1-\alpha_2)\log n_{i,t}+\alpha_1\log c_{i,t+1}+\alpha_2\log E_{t+1};\ \alpha_1,\alpha_2,1-\alpha_1-\alpha_2\in(0,1)$$

$$subject\ \ to\ \ c_{i,t+1}=(1-\tau_{t+1})y_{i,t+1},\ y_{i,t+1}=h_{i,t+1},\ h_{i,t+1}=(1-n_{i,t})^{\beta}(E_t)^{\gamma}(h_{i,t})^{\delta}$$

一階条件である$\partial V^u/\partial n_{i,t}=0$より，公的教育を受ける$t$世代の個人$i$の$t+1$期における最適余暇時間を$n_t^u$とおくと，最適学習時間は(6)のように導出される[(2)]．

$$1-n_t^u=\frac{\beta\alpha_1}{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta\alpha_1} \tag{6}$$

公的教育を選択するt世代の個人iの$t+1$期における最適消費は，(7)のように求められる．

$$c_{t+1}^u=(1-\tau_{t+1})\left\{\frac{\beta\alpha_1}{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta\alpha_1}\right\}^{\beta}\left(\frac{\tau_t H_t}{P_t}\right)^{\gamma}(h_{i,t})^{\delta} \tag{7}$$

また，公的教育の人的資本関数$h(n_t^u,E_t,h_{i,t})$は(8)のように求められる．

$$h_{i,t+1}=h(n_t^u,E_t,h_{i,t})=\left\{\frac{\beta\alpha_1}{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta\alpha_1}\right\}^{\beta}\left(\frac{\tau_t H_t}{P_t}\right)^{\gamma}(h_{i,t})^{\delta} \tag{8}$$

一方，私的教育を選択するt世代の個人iの２期間全体における効用水準をV^rとおくと，効用最大化問題は，次のように表される．

---

(1) Galor and Tsiddon (1996) とGalor and Tsiddon (1997) では，労働所得が得られない若年期における消費水準を生涯効用の決定要素として組み入れているが，Glomm and Ravikumar(1992)とCardak(2004)では，それは考慮されておらず，本稿でも，同様の設定を行う．この解釈は，若年期における教育投資の中で，その中に生活に必要な消費も含まれているというものである．

(2) (6)の導出過程については，付録１を参照せよ．

$$\underset{n_{i,t},c_{i,t+1},e_{i,t+1}}{Maximize} \quad V^r = (1-\alpha_1-\alpha_2)\log n_{i,t} + \alpha_1 \log c_{i,t+1} + \alpha_2 \log e_{i,t+1};\ \alpha_1, \alpha_2, 1-\alpha_1-\alpha_2 \in (0,1)$$

$$subject\ \ to\ \ c_{i,t+1} = (1-\tau)y_{i,t+1} - e_{i,t+1},\ y_{i,t+1} = h_{i,t+1},\ h_{i,t+1} = (1-n_{i,t})^{\beta}(e_{i,t})^{\gamma}(h_{i,t})^{\delta}$$

一階条件である $\partial V^r / \partial c_{i,t+1} = 0$ と $\partial V^r / \partial e_{i,t+1} = 0$ より，私的教育を選択するt世代の個人iの$t+1$期における最適消費と最適教育投資はそれぞれ，(9)と(10)のように導出される[3].

$$c_{t+1}^r = \frac{\alpha_1(1-\tau_{t+1})y_{i,t+1}}{\alpha_1+\alpha_2} = \frac{\alpha_1(1-\tau_{t+1})h_{i,t+1}}{\alpha_1+\alpha_2} \tag{9}$$

$$e_{t+1}^r = \frac{\alpha_2(1-\tau_{t+1})y_{i,t+1}}{\alpha_1+\alpha_2} = \frac{\alpha_2(1-\tau_{t+1})h_{i,t+1}}{\alpha_1+\alpha_2} \tag{10}$$

また，私的教育を選択するt世代の個人iの$t+1$期における最適余暇時間をn_t^rとおくと，最適学習時間は(11)のように導出される[4].

$$1-n_t^r = \frac{\beta(\alpha_1+\alpha_2)}{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{11}$$

ところで，(4)と(10)を読み替えると，$t-1$世代の個人iのt期における所得水準と最適教育投資はそれぞれ，(12)と(13)のように求められる.

$$y_{i,t} = h_{i,t} \tag{12}$$

$$e_t^r = \frac{\alpha_2(1-\tau_{t+1})y_{i,t}}{\alpha_1+\alpha_2} = \frac{\alpha_2(1-\tau_{t+1})h_{i,t}}{\alpha_1+\alpha_2} \tag{13}$$

(11)，(12)，および(13)を(1)に代入すると，私的教育の人的資本関数 $h(n_t^r, e_{i,t}, h_{i,t})$ は，(14)のように求められる.

---

(3) (9)と(10)の導出過程については，付録2を参照せよ.
(4) (11)の導出過程については，付録3を参照せよ.

$$h_{i,t+1}=h\left(n_t^r,e_{i,t},h_{i,t}\right)=\left\{\frac{\beta\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)+\beta\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}\right\}^{\beta}\left\{\frac{\alpha_2\left(1-\tau_t\right)}{\alpha_1+\alpha_2}\right\}^{\gamma}\left(h_{i,t}\right)^{\gamma+\delta} \tag{14}$$

⒁において，$\gamma+\delta<1$ であるので，私的教育の下でも，$h_{i,t+1}$ は $h_{i,t}$ についての凹関数となることが分かる．

Ⅲ．教育選択

Cardak (2004) および村田 (2013) に倣い，各個人による次世代に対する公的・私的教育の選択は，両教育の下での効用比較に基づいて決定付けられるものとする．すなわち，教育選択における人的資本水準の基準値は⒂のように，$V^u=V^r$ を満たす値となる．

$$\begin{aligned}&\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)\log n_t^u+\alpha_1\log c_{i,t+1}+\alpha_2\log E_{t+1}\\=&\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)\log n_t^r+\alpha_1\log c_{i,t+1}+\alpha_2\log e_{i,t+1}\end{aligned} \tag{15}$$

⒂において，E_{t+1} は $t+1$ 期における公的教育を選択する個人一人当たりが受け取る教育投資である．⒁を満たす $h_{i,t+1}$ と E_{t+1} の値をそれぞれ，h_{t+1}^*，E_{t+1}^* とおくと，⒃のような関係式が得られる．

$$h_{t+1}^*=\left\{\frac{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)+\beta\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)+\beta\alpha_1}\right\}^{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left\{\frac{E_{t+1}^*\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}{\alpha_2\left(1-\tau_{t+1}\right)}\right\} \tag{16}$$

t 世代の個人 i は $t+1$ 期において，人的資本水準が h_{t+1}^* 以下のとき，$t+1$ 世代に公的教育を選択させ，h_{t+1}^* を上回るとき，私的教育を選択させるとする．ところで，本稿では，t 期を基準とするので，⒃を t 期に読み替える．t 期において，$V^u=V^r$ を満たす人的資本水準と公的教育の下での教育投資をそれぞれ，h_t^*，E_t^* とおくと，⒄のような関係式となる．

$$h_t^*=\left\{\frac{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)+\beta\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)+\beta\alpha_1}\right\}^{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left\{\frac{E_t^*\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}{\alpha_2\left(1-\tau_{t+1}\right)}\right\} \tag{17}$$

これは，$t-1$ 世代の個人についての関係式であり，⒃と同様，人的資本水準が h_t^* 以下のとき，t 世代に公的教育を選択させ，h_t^* を上回るとき，私的教育を選択させる．⑻と⒁より，公的・私的教育それぞれの人的資本関数について，定常状態均衡における人的資本水準をそれぞれ，h_t^u，h_s^r とおくと，⒅と⒆のように導出される．

$$h_t^u = \left\{ \frac{\beta\alpha_1}{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta\alpha_1} \right\}^{\frac{\beta}{1-\delta}} \left(\frac{\tau_t H_t}{P_t} \right)^{\frac{\gamma}{1-\delta}} \tag{18}$$

$$h_s^r = \left\{ \frac{\beta(\alpha_1+\alpha_2)}{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta(\alpha_1+\alpha_2)} \right\}^{\frac{\beta}{1-\gamma-\delta}} \left\{ \frac{\alpha_2(1-\tau_t)}{\alpha_1+\alpha_2} \right\}^{\frac{\gamma}{1-\gamma-\delta}} \tag{19}$$

⒅と⒆について，公的・私的教育の人的資本関数はともに凹関数であるので，h_t^u と h_s^r は安定的な定常状態均衡である．ここで，Cardak (2004) および村田 (2011b) と同様，P_t は⒇のように決定付けられるとする．

$$P_t = \int_0^{h_t^*} f_t(h_{i,t}) dh_{i,t} \tag{20}$$

村田(2011b)と同様，⒅と⒆について，$h_t^u < h_s^r$ を仮定する．すなわち，⒅における $E_t = \tau H_t / P_t$ は，㉑の条件を満たすように決定付けられる．

$$E_t = \frac{\tau H_t}{P_t} < \left\{ \frac{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta\alpha_1}{\beta\alpha_1} \right\}^{\frac{\beta}{\gamma}} \left\{ \frac{\beta(\alpha_1+\alpha_2)}{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta(\alpha_1+\alpha_2)} \right\}^{\frac{\beta(1-\delta)}{\gamma(1-\gamma-\delta)}} \left\{ \frac{\alpha_2(1-\tau)}{\alpha_1+\alpha_2} \right\}^{\frac{1-\delta}{1-\gamma-\delta}} \tag{21}$$

また，t 期において，両教育の下で獲得できる人的資本水準が等しい，すなわち，$h(n_t^u, E_t, h_{i,t}) = h(n_t^r, e_{i,t}, h_{i,t})$ を満たす人的資本水準を h_t^{**} とおくと，㉒のように求められる．

$$h_t^{**} = \left[\frac{\alpha_1\{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta(\alpha_1+\alpha_2)\}}{(\alpha_1+\alpha_2)\{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta\alpha_1\}} \right]^{\frac{\beta}{\gamma}} \frac{(\alpha_1+\alpha_2)\tau H_t}{\alpha_2(1-\tau)P_t} \tag{22}$$

㉒より，両教育人的資本関数については，交点が存在する．村田 (2011b) と同様，⒅，⒆，および㉒は，図１のような関係にある．

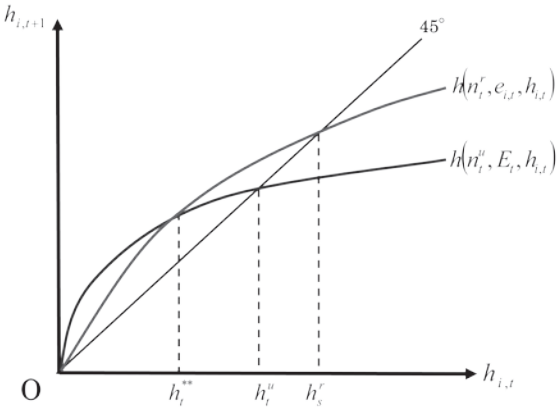

図１　両教育の人的資本関数

(22)より，h_t^*の値が高く（低く）なるほど，公的教育を選択する人口割合が増加（減少）し，(4)より，それは公的教育を受ける個人一人当たりが受け取る教育投資の減少（増加）につながり，公的教育を受ける個人の人的資本水準が低い（高い）値から出発することになる．

Ⅳ．政府による最適所得税率の決定

Glomm and Ravikumar (1992) および村田 (2011a) に倣い，政府は公的教育を選択する個人が獲得する人的資本水準を所与として，自身の効用V^Gを最大化するように所得税率を決定付ける．村田 (2011a) に倣い，それは次のように表されるとする．

$$\underset{\tau_{t+1}}{Maximize} \qquad V^G = \rho \log\left[(1-\tau_{t+1})h_{i,t+1}\right] + (1-\rho)\log \tau_{t+1} H_{t+1}$$

一階条件である $\partial V^G / \partial \tau_{t+1} = 0$ より，最適所得税率は(23)のように導出される[5]．

$$\tau_{t+1} = 1 - \rho \tag{23}$$

(23)を(18)と(19)に代入すると，定常状態均衡における人的資本水準h_t^u，h_s^rはそれぞれ，(24)と(25)のように書き換えられる．

[5] (23)の導出過程については，付録４を参照せよ．

$$h_t^u = \left\{ \frac{\beta\alpha_1}{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta\alpha_1} \right\}^{\frac{\beta}{1-\delta}} \left\{ \frac{(1-\rho)H_t}{\alpha_1+\alpha_2} \right\}^{\frac{\gamma}{1-\delta}} \tag{24}$$

$$h_s^r = \left\{ \frac{\beta(\alpha_1+\alpha_2)}{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta(\alpha_1+\alpha_2)} \right\}^{\frac{\beta}{1-\gamma-\delta}} \left(\frac{\alpha_2\rho}{\alpha_1+\alpha_2} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma-\delta}} \tag{25}$$

(24)と(25)より，最適所得税率が政府の効用最大化によって決定付けられる場合，政府の選好が人的資本蓄積に影響を及ぼすことが確認できる．

Ⅴ．結語

本稿では，村田 (2011b) モデルにおける人的資本水準について，Glomm and Ravikumar (1992) および村田 (2011a) に倣い，政府の効用関数を新たに導入し，公的教育投資の財源である所得比例課税について，最適税率の決定メカニズムを組み入れることによって，議論の拡張・修正を行った．

本稿の分析について，今後の展望を述べる．これは村田 (2011a) においても述べられているが，選好度を表すパラメータを付加したとはいえ, Glomm and Ravikumar (1992) における政府の効用関数の設定は，家計と政府の効用に大きな乖離を生まないものであるため，最適所得税率の導出が容易になっている点が否めず，この点については，様々なケースを検討する必要があるだろう．また，Glomm and Ravikumar (1992) における政府の効用関数を肯定するとしても，選好度を表すパラメータについて，政府は何らかの理由で変化させることは現実的に考えられ，特に民主主義国家の場合，これは投票制度による影響も考えられよう．これらの点については，稿を改めて論じたい．

参考文献

[１]　Benabou, R. (1996), “Heterogeneity, Stratification, and Growth: Macroeconomic Implications of Community Structure and School Finance,” *The American Economic Review,* Vol.86, pp.584-609.

[２]　Cardak, B. A. (2004), “Education Choice, Endogenous Growth and Income Distribution,” *Economica,* Vol.71, pp.57-81.

[３]　Eckstein, Z. and I. Zilcha (1994) “The Effect of Compulsory Schooling on Growth, Income Distribution and Welfare,” *Journal of Public Economics,* Vol.54, pp.339-359.

[4]　Galor, O. and D. Tsiddon (1996) "Income Distribution and Growth: The Kuznets Hypothesis Revisited," *Economica,* Vol.63, pp.103-117.
[5]　Galor, O. and D. Tsiddon (1997) "The Distribution of Human Capital and Economic Growth," *Journal of Economic Growth,* Vol. 2 , pp.93-124.
[6]　Glomm, G. and B. Ravikumar (1992), "Public versus Private Investment in Human Capital: Endogenous Growth and Income Inequality," *Journal of Political Economy,* Vol.100, pp.818-834.
[7]　Gradstein, M. and M. Justman (1997), "Democratic Choice of an Education System: Implications for Growth and Income Distribution," *Journal of Economic Growth,* Vol. 2 , pp.169-183.
[8]　Kaganovich, M. and I. Zilcha (1999), "Education, Social Security, and Growth," *Journal of Public Economics,* Vol.71, pp.289-309.
[9]　Saint Paul, G. and T. Verdier (1993), "Education, Democracy and Growth," *Journal of Development Economics,* Vol.42, pp.399-407.
[10]　村田 慶 (2011a)「所得税率と公的教育に関する一考察」,『経済論究』(九州大学大学院) 第139号，pp.145-151.
[11]　村田 慶 (2011b)「教育選択と経済成長」,『九州経済学会年報』第49集，pp.199-206.

付録 1

制約条件式を効用関数V^uにおける$c_{i,t+1}$に代入すると，次のようになる.

$$V^u = (1-\alpha_1-\alpha_2)\log n_{i,t} + \alpha_1 \log\left[(1-\tau_{t+1})(1-n_{i,t})^{\beta}(E_t)^{\gamma}(h_{i,t})^{\delta}\right] + \alpha_2 \log E_{t+1}$$

一階条件である$\partial V^u / \partial n_{i,t} = 0$より，

$$\frac{\partial V^u}{\partial n_{i,t}} = \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{n_{i,t}} - \frac{\beta\alpha_1(1-\tau_{t+1})(1-n_{i,t})^{\beta-1}(E_t)^{\gamma}(h_{i,t})^{\delta}}{(1-\tau_{t+1})(1-n_{i,t})^{\beta}(E_t)^{\gamma}(h_{i,t})^{\delta}} = \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{n_{i,t}} - \frac{\beta\alpha_1}{1-n_{i,t}} = 0$$

上の式を変形すると，最適余暇時間n_t^uは次のように導出される.

$$n_t^u = \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta\alpha_1}$$

したがって，最適学習時間$1-n_t^u$は，次式のように導出される.

$$1-n_t^u=\frac{\beta\alpha_1}{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta\alpha_1}$$

付録２

制約条件式を効用関数V^rにおける$c_{i,t+1}$に代入すると，次のようになる．

$$V^r=(1-\alpha_1-\alpha_2)\log n_{i,t}+\alpha_1\log\left[(1-\tau_{t+1})h_{i,t+1}-e_{i,t+1}\right]+\alpha_2\log e_{i,t+1}$$

一階条件である $\partial V^r/\partial e_{i,t+1}=0$ より，

$$\frac{\partial V^r}{\partial e_{i,t+1}}=\frac{\alpha_1}{(1-\tau_{t+1})h_{i,t+1}-e_{i,t+1}}+\frac{\alpha_2}{e_{i,t+1}}=0$$

上の式を変形して整理すると，私的教育を選択するt世代の個人iは$t+1$期における最適教育投資e_{t+1}^rは次のように導出される．

$$e_{t+1}^r=\frac{\alpha_2(1-\tau_{t+1})h_{i,t+1}}{\alpha_1+\alpha_2}$$

また，$c_{i,t+1}=(1-\tau)h_{i,t+1}-e_{i,t+1}$ より，私的教育を選択するt世代の個人iの$t+1$期における最適消費c_{t+1}^rは，次のように求められる．

$$c_{t+1}^r=\frac{\alpha_1(1-\tau_{t+1})h_{i,t+1}}{\alpha_1+\alpha_2}$$

付録３

制約条件式を効用関数V^rにおける$c_{i,t+1}$に代入すると，次のようになる．

$$V^r=(1-\alpha_1-\alpha_2)\log n_{i,t}+\alpha_1\log\left[(1-\tau_{t+1})(1-n_{i,t})^{\beta}(e_{i,t})^{\gamma}(h_{i,t})^{\delta}-e_{i,t+1}\right]+\alpha_2\log e_{i,t+1}$$

一階条件である $\partial V^r/\partial n_{i,t}=0$ より，

$$\frac{\partial V^r}{\partial n_{i,t}}=\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{n_{i,t}}-\frac{\beta\alpha_1(1-\tau_{t+1})(1-n_{i,t})^{\beta-1}(E_t)^{\gamma}(h_{i,t})^{\delta}}{(1-\tau_{t+1})(1-n_{i,t})^{\beta}(E_t)^{\gamma}(h_{i,t})^{\delta}-e_{i,t+1}}=0$$

上の式に，付録２で導出したe_{t+1}^{r}を代入すると，

$$\frac{\partial V^{r}}{\partial n_{i,t}}=\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{n_{i,t}}-\frac{\beta\alpha_1(1-\tau_t)(1-n_{i,t})^{\beta-1}(E_t)^{\gamma}(h_{i,t})^{\delta}}{(1-\tau_t)(1-n_{i,t})^{\beta}(E_t)^{\gamma}(h_{i,t})^{\delta}-\dfrac{\alpha_2(1-\tau_{t+1})h_{i,t+1}}{\alpha_1+\alpha_2}}=0$$

上の式を変形すると，最適余暇時間n_t^rは次のように導出される．

$$n_t^r=\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta(\alpha_1+\alpha_2)}$$

したがって，最適学習時間$1-n_t^u$は，次式のように導出される．

$$1-n_t^r=\frac{\beta\alpha_1}{(1-\alpha_1-\alpha_2)+\beta(\alpha_1+\alpha_2)}$$

付録４

一階条件である $\partial V^{G}/\partial\tau_{t+1}=0$ より，

$$\frac{\partial V^{G}}{\partial\tau_{t+1}}=-\frac{\rho h_{i,t+1}}{(1-\tau_{t+1})h_{i,t+1}}+\frac{(1-\rho)H_{t+1}}{\tau_{t+1}H_{t+1}}=0$$

上の式を整理すると，最適所得税率は次式のように求められる．

$$\tau_{t+1}=1-\rho$$