高等学校数学教育の理念(I)

文部省科学研究費
補助金（基盤研究Ａ）
高等学校の科学教育改革
に関する総合的研究
課題番号 11308006
平成 11 年度～14 年度
研究報告書第４集

高等学校数学教育の理念
（Ⅰ）

平成 13 年（2001 年） 3 月

研究代表者　長崎　栄三

（国立教育政策研究所　教育課程研究センター　総合研究官）

は し が き

私たちは，平成11年度から４年計画で，科学研究費補助金・基盤研究（A）（1）「高等学校の科学教育改革に関する総合的研究」において，我が国の高等学校の数学教育や理科教育について，総合的に研究することを始めました。私たちは研究チームを作り，高等学校の数学や理科の教育について，多方面から見つめ直すことにしました。我が国の教育課程の状況，教師の考え，生徒の実態，教室の様子，また，諸外国の状況などをできるだけ客観的に把握し，高等学校の数学教育や理科教育のあり方を考えることにしました。

ところで，このような研究を始めたとき，高等学校の科学教育とはそもそも何なのかということが自然と話題となりました。そこで，数学教育に焦点を絞って，高等学校の数学教育の理念を皆で論じようということになりました。第１回は，今後の議論の出発点としてまた共通な土俵を探すために，高等学校の数学教育の理念にかかわることをできるだけ洗い出すという方針で会議を行うことにしました。そこで，高等学校の数学教育を考える上での４つの代表的な立場，すなわち，高等学校の数学の教室，大学の数学科，大学の数学教員養成，国の数学教育行政，のそれぞれの立場から１名の研究メンバーの方々に，30分ずつのご報告をお願いしました（発表順)。

大橋志津江先生（東京都立桐ヶ丘高等学校）には，高等学校の数学教育の現場の立場から，
渡辺公夫先生（筑波大学数学系）には，大学の数学科の立場から，
吉川行雄先生（山梨大学教育人間科学部）には，大学の数学教員養成の立場から，
吉田明史先生（文部省初等中等教育局高等学校教育課）には，行政の数学教育の立場から，

また，第１回ということで数学教育に造詣が深い，平林一榮先生（広島大学名誉教授)，三輪辰郎先生（筑波大学名誉教授）に特別にご参加をいただきました。

第１回検討会は，平成12年12月24日（日）に国立教育研究所において行われました。午前中は上記の４名の方の発表を行い，午後はその発表にも触れながら，参加者が自由に高等学校の数学教育について意見を発表しあいました。司会は重松敬一先生（奈良教育大学）と長崎が交互に行いました。そこで発表された意見は，理念から現状へと幅広いものがありましたが，いずれも数学教育を考える上で非常に重要なものでした。本検討会での議論を踏まえて，今後は主題を絞って話し合いを進めていく予定です。

本報告書は，第１回検討会の趣旨や発表・討議の概要，上記の４名の発表者の報告資料，及び，３名の参加者の発表資料からなっています。これらが，私たちの今後の討議の出発点になるとともに，本報告書をお読みになった方々との交流のきっかけになればと思っております。なお，本報告書に記述されている意見は，研究メンバーが個人の意見を述べたものであり，所属機関を代表して述べたものではありません。

平成13年３月

研究代表者　長崎　栄三 (国立教育政策研究所・教育課程研究センター
・総合研究官)

高等学校数学教育理念検討会（第1回）（平成12年12月24日）

参加者

番号	氏　　名	所　　属
1	荒井　克弘	東北大学大学院教育学研究科
2	一楽　重雄	横浜市立大学理学部数理科学科
3	岩崎　秀樹	広島大学国際協力研究科
4	大橋　志津江	東京都立桐ヶ丘高等学校
5	越智　景三	東京都立大学附属高等学校
6	川上　純	千葉県立市川工業高等学校
7	国宗　進	静岡大学教育学部
8	久保　良宏	共立女子学園共立女子中学校
9	重松　敬一	奈良教育大学教育学部
10	清水　静海	筑波大学教育学系
11	杉山　吉茂	早稲田大学教育学部
12	瀬沼　花子	国立教育研究所数学教育研究室
13	長崎　栄三	国立教育研究所科学教育研究室
14	西村　圭一	東京都立武蔵丘高等学校
15	牧下　英世	筑波大学附属駒場中・高等学校
16	村田　尚志	山口県立徳山高等学校
17	山本　信也	熊本大学教育学部
18	吉岡　淳	奈良県立生駒高等学校
19	吉川　行雄	山梨大学教育人間科学部
20	吉田　明史	文部省初等教育局中学校課高等学校課
21	渡辺　公夫	筑波大学数学系
22	茂木　悟	宮城県立名取高等学校
23	牛場　正則	東京都新島村立式根島中学校
24	島田　功	成城学園初等学校
25	高橋　広明	千葉県立松戸六実高等学校
26	久永　靖史	共立女子学園共立女子中学校
27	牧野　宏	埼玉県狭山市立入間小学校
28	松元　新一郎	東京学芸大学教育学部附属大泉中学校
29	平林　一榮	広島大学名誉教授（特別参加）
30	三輪　辰郎	筑波大学名誉教授（特別参加）
31	塚川　岳彦	中央大学附属高校非常勤講師（オブザーバー）
32	小川　淳	共立女子第二中・高等学校非常勤講師（オブザーバー）

注：所属は平成12年12月現在

目　次

Ⅰ．第１回高等学校数学教育理念検討会の討議の概要

高等学校数学教育理念検討会開催の趣旨

「高等学校の科学教育改革に関する総合的研究」の目的は，高等学校の数学教育の改善にある。そのために，我が国の高等学校の現状を調べ，また，歴史や他国の状況から学んでいる。しかし，改善するためには，改善する方向性を示す理念（参考 1 を参照）があらねばならない。すなわち，高等学校の数学教育はどうあらねばならないかということである。現状を理念に照らすことによって，改善の方向すなわち目指すべき理想が明らかになる。ここでは，高等学校の数学教育の理念にかかわるいくつかの検討事項を挙げることにする。

高等学校とは何か。高等学校の数学教育の理念は，高等学校の理念に制約されるであろう。我が国の高等学校の目的・目標は，昭和 22 年 3 月 31 日に交付された「学校教育法」（参考 2 を参照）に明記されている。ところで，高等学校への当時の進学率は 40%台であったが，現在は 95%を越えている。高等学校の内実は変質せざるをえないであろう。実際に，進学率の増加に伴い，教科・科目の設定，科目の履修・修得，科目の内容などが大きく変わってきている。しかしながら，目的・目標には大きな変更がない。大衆化された高等学校，すなわち，多様な学力と関心と必要性とを持った生徒が入ってくる高等学校はどうあるべきなのということの検討が求められている。そして，高等学校は，中学校と大学との関係をも明確にしなければならない。

数学教育とは何か。学校教育においては，数学教育は，教育課程として具体化される。教育課程は，一般に，目的・目標，内容，方法，評価からなる。実際には，教育課程は，大多数の国においてその特殊化の状況に応じて，国家段階，地域段階，学校段階で作成・実施される。我が国の数学教育の改善という立場から見ると，国家・地域段階の教育課程，すなわち，学習指導要領，教科書のあり方がまず問われる。そして，学校段階の教育課程，すなわち，教室での実際の指導のあり方が問われる。なお，学校段階での教育課程においては，数学教師が中心的な役割を演じるので，教師のあり方が問われることになる。また，数学の教育課程を考えるのに先立ち，数学の意義や役割を考えておく必要がある。

ところで，高等学校教育の検討において，大学入試は避けて通れない。高等学校教育のほとんどの議論は，大学入試があることをもって終わりとなる。また，高等学校においては，他の学校段階よりも，上級段階への準備教育が中心的な話題となる。生徒が大学入試問題を解けるようになることだけに執念を燃やしている教師も多い。大学入試は，高等学校教育の大きな目的ではあるが，それだけではない。それだけではないことを，示す必要がある。

理念は，現状の改善に導くものでなければならない。したがって，最終的にはどのような授業を実現するのかという議論が必要になる。

平成 12 年 12 月 24 日

長崎栄三

参　考

1．理念と理想

「理念が抽象的,一般的なるに対し，理想は具体的,特殊的であると言える。教育の理念は人間の本分の純粋思考,人間一般の本質の根本的考察によって立せられるが，理想はこの理念を時代及び個性の要求に応じて具体化するによって成立し，一が人間一般に共通なるに対し，他は国民の理想，個人の理想と言った如く，歴史的，個人的要素を予想し，時，処，人によって異なった姿をとる。・・・要するに，理念は歴史的に又は人格的に実現せらるべき理想の基礎であり，根本的な統一であり，理想が歴史的，個人的な制約において必然に多であるに対して，理念は唯一つであり，又そうあらねばならぬ。一つでないのは，言いかえれば，学者によって所説区々たるは人間一般の本分に対す

る考え方，即ち人生観が異なっている為で，人生観が一致しさえれば，当然一定して動かない筈である。・・・目的なる語も又しばしば理念及び理想と混用されるが，それは或は理想と同義に用いられ，或は活動の終局点を，或は単に合目的性を指すなど，かなり多義であるから，意義の明らかに限定せられた場合を除き，今後なるべく使用しないことにする。」

(篠原助市．1959.『改訂　理論的教育学』協同出版．57-58)

2．高等学校

学校教育法

第四章　高等学校

第四十一条［高等学校の目的］

高等学校は，中学校における教育の基礎の上に，心身の発達に応じて，高等普通教育及び専門教育を施すことを目的とする。

第四十二条［高等学校教育の目標］

高等学校における教育については，前条の目的を実現するために，次の各号に掲げる目標の達成に努めなければならない。

一　中学校における教育をさらに発展拡充させて，国家及び社会の有為な形成者として必要な資質を養うこと。

二　社会において果たさなければならない使命の自覚に基き，個性に応じて将来の進路を決定させ，一般的な教養を高め，専門的な技能に習熟させること。

三　社会について，広く深い理解と健全な批判力を養い，個性の確立に努めること。

第１回高等学校数学教育理念検討会における４名の発表者の主な論点

ここには，４名の発表者の主な論点をまとめておく。詳しくは，Ⅱに発表後の修正を経た論文が掲載されている。

大橋志津江：高校の現場より

１．なぜ高校で数学を学ぶ（教える）のか

（１）実用的側面，（２）教養として，（３）教育・訓練として（大学入試に対応）

２．高校教育を取り巻く状況

（１）様々なタイプの学校の出現と教育制度の改革

①特色ある学校づくり，②弾力ある教育制度，

（２）中学校の変化

（３）社会状況の変化

３．生徒について

（１）計算力の低下

（２）生徒の意識：自ら解こうとせず正解の説明を待っている

４．教員について――教育は人なり

（１）生徒に対する心のケアの問題

（２）教科指導以外の仕事は，どこまで求められるのか

（３）教科指導に関する教員の意識

（４）研究活動

渡邊　公夫：大学の数学科から

１．はじめに

（１）中・高の数学の評価について

（２）語らせることの大切さ

（３）学びに不可欠なイメージ化

（４）知識を支える豊かな経験

２．中学校の数学

（１）見えないものが見えてくる

（２）観察，操作，実験

[1] 二種類の素数

[2] 中学校数学の領域の構成

[3] 2次方程式の解の公式

[4] 相似の定義

[5] $y=ax^2$ と $y=x^2$ は相似

３．高等学校の数学

（１）情報の付加：

[1] カバリエリの原理（資料「積分を学ぶ前に」）

[2] 擬三角形の面積を求める（資料「積分を学ぶ

[3] 関数マンダラ（資料「初等超越関数の世界」）

[4] 扇形の面積を二等分する（資料「積分を学ぶ前に」）

吉川行雄：教員養成から

1．目標論を根本から考え直してみたい

（1）学校教育において数学教育は dense である，という原点から出発したい。

（2）majority のための数学教育と，余力のある優秀な生徒のための数学の教育の調和

2．試みてほしい授業の具体例

（1）教材研究とそれに伴う指導法のくふう

（2）教師が体験してこなかった指導法

（3）中学校までの学習を振り返る学習

（4）幾何教材の再評価

（5）身の回りに見られる数学への注目

（6）進んだ内容，学んでない内容への取り組み

3．小学校中学校の算数数学教育との関係

（1）小中での数学教育がしっかりしていれば，高校生の数学への取り組み方は違ってくるはず。

（2）高校教師の数学観・授業観も，その教師の小中時代の影響が色濃い。

4．大学入学の選抜方法の改善

5．高等学校カリキュラムの柔軟化

6．教員養成・再教育の問題点

（1）指導法の実際，生徒の学習心理や思考の様相などについて学ばせる必要がある。

（2）現職からの大学院入学についても，研究テーマが授業に結びつかないものが多すぎる。

吉田明史：数学教育の行政の立場から

1．改訂の変遷

（1）高等学校・大学進学率

（2）教科の目標

（3）複線化をもたらした科目

（4）これまでにない新たな科目

（5）理数科の設置

①平成 10 年「数学基礎」　②多様化への対応のステップ

2．これからの課題

（1）目標について

①これからの数学教育を通して身に付けさせたい資質・能力は何か。

（2）科目構成について

①必履修科目について

②学習の系統性と選択の多様性（学習内容の選択を含む）をどのように保障するか。

（3）内容について

①「数学基礎」の精神をどのように生かすか。

②小学校からの学習の系統性をどのように考えるか（領域構成を含む）。

③微積分を頂点としてよいか，現代的課題を解決するために数学的な内容はないか。

④テクノロジーの発展によって示すべき内容は変わるのか。

（4）指導と評価について

①指導計画の作成について（評価の観点）

②指導について

③評価（目標に準拠した評価）

④研究授業・研究協議

第１回高等学校数学教育理念検討会において挙げられた高等学校の数学教育の理念にかかわる論点

長崎　栄三
国立教育政策研究所

第１回会合では，高等学校の数学教育の理念についての論点をできるだけ挙げることを主たる目標としていた。実際に論じてみると，理念を語ると言うことは，その全体像を語るということでもあった。このようにして，第１回会合では，高等学校の数学教育全般にわたって話題が広がっていった。

ここでは，4名の発表者に基づいて行われた全体での話し合いの内容を，大きく13の大項目に分け，そのもとで中項目，小項目と分類した。主として，小項目が，会合で挙げられた内容であり，それらをもとに，大項目及び中項目の見出しをつけて，論点を分類して整理した。

今回の会合は，自由に論点を挙げることに主眼があったので，これらの論点は，同等の時間や重みをもって論じられたのではなく，また，多面的・総合的に論じられたものでもない。なお，これらの論点の中で，理念に直接かかわる次の項目についての議論が多くなされた。

1．高等学校とは何か
5．高等学校の数学の性格
6．高等学校の数学教育の課程設定
7．高等学校の数学教育の目標
13．高等学校の数学教育の理念をどのように具体化するか

本研究会では，今後，これらの項目に焦点を当てて研究を進めていきたい。

1．高等学校とは何か

1.1. 高等学校の目的

1.1.1. 高等学校は新しい大衆機関である。
1.1.2. 役割として人間を育てること。
1.1.3. 学びたい生徒に数学を提供する場。
1.1.4. 教養教育を指向するものである。

1.2. 履修主義と修得主義

1.2.1. 高等学校を卒業した生徒はある水準の力を持つべきである。
1.2.2. 高校で身につけるべき資格を明確にするべきである。
1.2.3. 高等学校で育った力を共通な規準で認定する制度を作る必要がある。

1.3. 普通教育と専門教育

1.3.1. 理数科の数学はどうあるべきか。
1.3.2. 職業科における数学はどうあるべきか。
1.3.3. 総合学科における数学はどうあるべきか。

1.4. 高等学校教育と小中学校の教育

1.4.1. 中学校・高等学校の6年間の中等教育という視点で考えるべきである。
1.4.2. 小中学校で数学を徹底して鍛え上げて，高校は自由と責任を持たせるようにする。

2．高等学校の現状

2.1. 高校の性格の変化

2.1.1. 進学率が増えた段階で高校の性格が変わっている。

2.2. 高校の内容水準の低下

2.2.1. 生徒に合わせて指導の水準を下げている。
2.2.2. 大学が水準を下げることが高校の教育にも影響を与えている。
2.2.3. 学習指導要領の規準で示されたものと実際に行われていることの乖離が激しい。

３．高等学校の生徒の現状と課題

3.1. 無気力な生徒

3.1.1. 最近の生徒は無駄を避ける傾向にある。
3.1.2. 生徒が授業中話を聞かなくなった・聞けなくなった。
3.1.3. ９年間で十分に痛めつけられてきた生徒への対処の仕方を考えるべきである。
3.1.4. 大部分の生徒が自信を失っている。
3.1.5. 認識能力は中学校３年・高校１年くらいをピークに下がっていくようである。

3.2. 入試志向

3.2.1. 入試で点数を取れる指導を望む傾向が強い。

3.3. 計算力の低下

3.3.1. 高校生の計算力が下がっている。
3.3.2. 高校生の計算力が本当に下がっているのか検証する必要がある。
3.3.3. 数学を教えるために計算力が必要という前提は考え直す必要がある。
3.3.4. 計算力とは何かを問い直す必要がある。演算決定力，基礎計算力，見積り力などを考慮すべきである。

４．高等学校の教師の現状と課題

4.1. 教師の意識

4.1.1. 現場の意識はなかなか変わらない。
4.1.2. 教師自身が自分で見つけた経験がなければ，生徒に見つけ出させることはできない。
4.1.3. 教師自身が数学的活動を行う必要がある。
4.1.4. 教師は今やっていることが見渡せるようになっていなければならない。

4.2. 教科指導への消極性

4.2.1. 教科指導の仕方を知るのに積極的ではない。
4.2.2. 部活動は一生懸命行うが教科指導は熱心ではないことがある。
4.2.3. 部活動も教科指導も熱心ではないことがある。

4.3. 生徒理解の不足

4.3.1. 理念が空回りをして，生徒の気持ちを理解していない。
4.3.2. 中学校から見ると，高校の数学教育の研究には生徒の声が聞こえない。

4.4. 大学入試一辺倒

4.4.1. 生徒や親のニーズに応える必要性は理解できるが，大学入試一辺倒過ぎる。

4.5. 教員養成

4.5.1. 理学系出身の教師と教育学系出身の教師との違いを考える必要がある。

５．高等学校の数学の性格

5.1. 数学とは

5.1.1. 自分のやったことが自分で分かる・確かめられるということが数学の特徴である。

5.2. 高校数学の現状

5.2.1. 数学と，問題を解くこと・答えを出すことが同義になって，過程が無視されている。

5.3. 高校数学は１つか

5.3.1. 数学は１つであり，数学教育を生徒対象によって分けるべきではない。
5.3.2. 学問としての数学と教科としての数学の違いを明確にすべきである。
5.3.3. アカデミズムな数学観と大衆のための数学観には違いがあることを意識すべきである。
5.3.4. 数学者教育と数学教育を区別する必要がある。これまでは数学者教育である。

5.4. 高校数学は純粋数学的か応用数学的であるべきか

5.4.1. 生活と関連をもった数学ではなく純粋数学を重視すべきである。
5.4.2. 数学の夢とロマンを追いかけるようにしたい。
5.4.3. 学問全体が現実や社会から離れている。
5.4.4. 数学を使って考えると新しい見方ができるということを基にして内容を考える。
5.4.5. 生徒が面白い，意味があると感じるようなものでなければならない。

６．高等学校の数学教育の課程設定

6.1. 高校で数学を全員が学ぶべきか

6.1.1. 身に付けるのは，見方や考え方のよさや数学観とすると必修科目の必要性が出てくる。

6.1.2. 高校で数学を全員が学ぶ必要があるのかを再検討する必要がある。

6.2. 高校で複線化をすべきか

6.2.1. 複線化は必要ない。

6.2.2. マジョリティとギフティドを分けるべきである。

6.3. 他教科との関係

6.3.1. 教科「情報」との関係を明確にする必要がある。

７．高等学校の数学教育の目標

7.1. 社会と数学教育

7.1.1. 情報化社会での数学教育の役割を考えるべきである。

7.2. 必履修科目の目標

7.2.1. 必履修科目では，実用的，文化的，陶冶的の３つの観点は絶対に必要である。

7.2.2. 内容ではなく追求の仕方で必修科目としての共通性をもつ。

7.2.3. 必修科目としての共通の１つの理念を持つのは無理である。

7.3. 高校数学の目標

7.3.1. 論理性を追求していくこと。

7.3.2. 体系としての面白さを伝える。

7.3.3. 見方や考え方をしっかりと教える。

7.3.4. ただ単に問題を解けるだけではだめである。

7.3.5. 数学が分からないと社会で危険であるという意識を持たせる。

7.4. 数学学習の動機付け

7.4.1. 生徒が数学の重要性を理解し勉強する上で，数学の有用性は動機付けになるのかを調べる必要がある。

7.4.2. 生徒が勉強する根底にはどのような動機付けがあるのかを調べる必要がある。

８．高等学校の数学教育の内容

8.1. 必修の内容

8.1.1. 高等学校の場合には，国が示す必修と，さらに各学校が条件付ける学校必修というものがある。多様化すればするほど何でもできてしまう。学校や教師の責任が問われる。

8.2. 高校での基礎基本

8.2.1. すべての生徒が達成できるということでは高校の内容を決めることはできない。

8.2.2. 特性に応じた基礎基本と，国家的な規準での基礎基本がある。

９．高等学校の数学教育における指導

9.1. 目標に照らした指導

9.1.1. 人間形成が目的ならば，人間形成に資する指導法というものも考えるべきである。

9.2. 指導の工夫

9.2.1. 例を提示して考えさせていくことが大切である。

9.2.2. 生徒が授業で活躍する場面が極端に少ない。

9.3. 生徒の特性に応じた指導

9.3.1. 落ちこぼさないようにやることが大切である。

9.4. 生徒と教師の信頼関係

9.4.1. 見方や考え方を指導するということは，教師と生徒の信頼関係があって初めて成り立つ。

9.4.2. 共通な言葉・論理で話し合っていくということで，教師と生徒の信頼関係が育つ。

10. 高等学校の数学教育における評価

10.1. 評価の役割

10.1.1. 評価は，計画(plan)・行動(do)・評価(see)の流れの中にあり，計画や行動をも決める。

10.1.2. 大学入試に重点が置かれすぎている。

11. 高等学校の数学教育におけるテクノロジー

11.1. コンピュータと数学教育

11.1.1. もはや，コンピュータを利用するということではなく，コンピュータが存在している中（コンピュータ環境）で数学教育を考えなければならない。

11.1.2. テクノロジーの活用の際には，学習している内容から飛び出ることがままあり，それだけに数学の鳥瞰を持っている必要がある。

11.2. 大学入試とコンピュータ

11.2.1. 大学入試でテクノロジーが使われないから数学教育でテクノロジーを使わないということではなく，自然現象や社会現象を数学的モデルを使って解明するということからテクノロジーの利用を考えるべきである。

12. 数学教育の実践的な研究

12.1. 高校での研究

12.1.1. 校内研究，授業研究を大切にする必要がある。

12.2. 学校現場と大学の関係

12.2.1. 大学の研究者が見る授業は，意識の高い先生の授業が多い傾向がある。

12.2.2. 大学の研究者はもっと，教室の中に入って現状を見る必要がある。

12.2.3. 大学の研究者と，授業の実践者とはそれぞれの専門性から役割分担を考えた方がよい。

12.2.4. 大学と現場の健全な緊張関係が必要である。現場には授業への誇りがある。

13. 高等学校の数学教育の理念をどのように具体化するか

13.1. 理念を考える方略

13.1.1. 新しい教材を開発して生徒に試しながら，どのような価値があるのかと理念を考えていく。

13.1.2. 教材開発を通して，人間形成を考えていく。ただし，教材が羅列的になるので体系化を考えることが課題となる。

13.1.3. 毎日のテストを考えていくことも理念の具体化につながる。

13.2. 新たな理念の示唆

13.2.1. 教育改革国民会議の「豊かな人間性」，「教養教育」が理念研究のテーマになる。

13.3. 理念の追求する上での心構え

13.3.1. 理念は多様であってよい。それぞれがそれぞれの理念のもとで現実を作っていくことが大切である。

13.3.2. あるべき姿を考えることが現実の問題を解決する大きな力となると捉える必要がある。

Ⅱ．第１回高等学校数学教育理念検討会における発表

高等学校数学教育理念検討会

－高校現場より－

大橋　志津江
東京都立桐ヶ丘高等学校

１．はじめにー私の教員歴

都立北野高等学校	全日制普通課程（いわゆる中堅校）
上野忍岡高等学校	全日制職業課程（商業科と家政科）
上野高等学校	全日制普通課程（いわゆる進学校）
桐ヶ丘高等学校	昼夜開講定時制，総合学科，単位制（チャレンジスクール）

２．なぜ高校で数学を学ぶ（教える）のか

（１）実用的側面

日常生活に役に立つ（計算力，数量認識，平面・空間の把握，論理力）
他教科を学ぶにあたっての道具となる
科学技術の発展のためには欠かせない

（２）教養として

知的好奇心を満足し、学習・調査・研究に対する興味を喚起する
一般化・体系化・抽象化・調和のとれた美しさ等を学び感動を得る
文化の継承，発展

（３）教育・訓練として（大学入試に対応）

忍耐力，集中力を養う
分析，整理能力の育成
資格・進学に関する自己実現の道具とする

これらを通して、数学としてのコミュニケーション能力（図や表を使って、わかりやすく説明する。説明を論理的に構成する。）を育成し、問題解決能力を身につけてさせたいと考えている。

３．高校教育を取り巻く状況

（１）様々なタイプの学校の出現と教育制度の改革

①特色ある学校づくり

単位制，コース制，総合学科，昼間の定時制，中高一貫校等いろいろな高校が登場しており、習熟度別授業，小人数教育，ＴＴなど１コマの授業形態も多様化している。（予算措置がとられるようになってきた。）また、授業時間の単位も大巾に規制緩和が計画され年間の総時間数で単位が考えられることになった。

②弾力ある教育制度

飛び入学、学校外学修による単位認定、フリースクールの容認と大学受験資格検定の改善が行われている。

多様な生徒の要求に対応するということでは、形は整ってきたが、「能力に応じた教育の機会均等」という面では受けられるサービスにかなり差が出ている。生徒個人は一つの学校一つのクラスしか選べない。事前の情報収集能力の違いにより、差が出てきてしまうのではないか。また、多様化したことは後戻りしにくい形を生み、学習目的を早いうちから明確化しないといけなくなってき

ている。従来の画一的なシステムよりも優れた点は多々認められるが、この制度が有効に働くためには、あらゆる面からの柔軟（しなやか）な対応・改善の工夫が常に求められていることを肝に銘ずる必要があると思う。

（２）中学校の変化

次期学習指導要領においては、中学校との連携が重要になると考えられる。中学校から移行される内容について、教師がきちんと理解することは当然だが、中学校と連携してその実践に学び、中学校までの学習内容やその定着の程度を知った上で指導に当たることがより求められる。中高一貫校での様々な試みにも期待したいと思う。

また中学での選択制の導入により、高校に入学した生徒一人一人の学習履歴が異なってくる。それに対する対応策を講じなければならないと思う。これは、今後も増えるであろう帰国子女や、在学中の海外留学生に対する対応とともに考えていくことである。

（３）社会状況の変化

高校数学（学校での学習）が何に役立っているかわからない。役に立たない（受験科目でない）科目の学習は苦役である。という意見を聞くようになった。時代とともにその声は大きくなっている。そして、それを追認している現代の社会状況があるように感じる。
この意識から社会が脱却して、「学ぶことは楽しいことである。学ぶことは生きることであり、それは将来を担い健全な文化や活気ある社会を維持し発展させるためつながることなのである。」という理解を持つ社会にはならないのだろうか。

社会起業家が各分野に出始めている。そういった中に、フリースクールを起業したり、学校改革を行う事例も見られる。こういう新しい動きの中にもアンテナを出して、数学教育を考えて行きたい。

４．生徒について

臨床教育学や精神医学・心療内科などの分野でもさまざま議論がされているが、切れる子（優秀な子どもの意味ではない），多動児，学習障害児などさまざまに呼ばれている一群の子どもと、それに刺激されて同調する（集団の中で同調せざるをえない）子どもたちがいる。過去にはいなかった、この“同調する子どもたち”が今の学級崩壊を招いていると考えられている。この子どもたちが基礎力を十分に身につけずに進級・進学してしまう現実に算数・数学教育も影響を受けていると思う。

（１）計算力の低下

小学校，中学校での指導内容が変化してきているためか、全体的に、計算力の不足，低下が甚だしい。高校の内容について考え方がわかっていても、計算ができないために、正解にまで至らない。考え方を理解して取り組もうとしても、その段階で興味を失う状態になっている。これは、電卓を貸せばよいという問題ではない。文字式・分数式や記号を用いての操作に電卓はなじまない。

発達段階に応じて、教育内容・方法は変わるべきだという現実をとらえてほしい。小学生のうちに訓練をして忍耐力や集中力を身に付けさせるべきなのではないのだろうか。小学生のうちは、それで喜びを感じられる様な気がする。子どもの成長と教育内容についてもっと議論があって良いと考える。臨床教育学の進展に現場も協力して、子どもたちの学校教育不適応について考えていく必要があると思う。

（２）生徒の意識

生徒の主体性・自主性に基づいて、学習支援・指導を行うことが望ましいとされているが、現実には、自ら解こうとせず正解の説明を待っている（それを暗記すればいいとする)。間違うことを嫌い、人前で質問や意見発表をさける等の生徒が多く存在する状況である。また、一斉指導では全く教師の話を聞けず個別に説明するとわかるという現象が頻繁に見られるようになった。

興味・関心の重視，進路（コース）の早期決定のためか、数学に限らずどの教科でも聞かれることだが「好きでないから勉強したくない。」とか「この科目は必要ない。」などと決めてしまう場合

がある。知的好奇心に欠ける生徒が増えているのではないかという感じがする。一方、好きでなくても勉強すべき、勉強すれば面白くなる、と考える教師との間に意識の差が生じている。「教養」が死語になりつつある。「夢とロマンを求めて勉強をするというのは、夢物語なのだろうか。」という嘆きが聞こえる。

学習に対する力，取り組む力をはぐくみながら、授業に対応しなければと考えている。

5．教員について――教育は人なり

人材確保のための対策をとらないと、教育は駄目になるのではないか。これはいつもいわれることである。そして、教員の資質向上のために、研修の充実が必要になると思う。

（1）生徒に対する心のケアの問題

17才（前後）の犯行が何故か続いている。荒れる子供達に対するのに「カウンセリングマインド」という言葉が、前面に出てきている。授業に出ない生徒，寝ている生徒，おしゃべりしている生徒，学習に取り組まない生徒等が高校にはあふれている。その指導にあたって気を使い、疲れてしまう教員が多い。教科指導に時間を割きたいのに、それが出来なくなっている。教員はゆとりと自信を持って様々な生徒に対応できるようにしなければならない。そのための勉強も必要である。

（2）教科指導以外の仕事は、どこまで求められるのか

「部活動指導は、教員の本務ではない。」これはよく聞く言葉である。だが、部活動指導は「教育効果」を上げやすい指導場面でもあり「教科指導でなく部活動の指導をするために教師になった。」と公言する人もいる。また生徒も保護者達も教員は当然部活動指導をすべきだと思っている。教科指導が熱心であることより、部活動指導で成果を上げた先生（目に見える）がもてはやされることもある。 このように、高校教師は本来の仕事以外でも忙しい。教材研究・生徒相談などのきめ細かい指導がしたくても、分担として様々な指導が割り当てられる。特に若い先生や熱心な先生に本務外の仕事も集まる傾向がある。

部活動については社会体育への移管が言われてから何年か経つが、その方向は見えてきていない。

（3）教科指導に関する教員の意識

高齢化の影響もあろうが、指導要領の変化や生徒の変化に対応しきれない教師が多くいるように思う。生徒と教師の学力差がある科目ほど教えやすいといわれるが、数学はまさにその状態にあり、教師自身で問題点があることに気づきにくい。現行の学習指導要領は、多様な生徒に対応するためにコア・オプションという形で現地調達を求めているが、指導の継続性・系統性を求める現場の教師はその流れにうまく乗れなかった。次期学習指導要領では系統性についてはかなり解消されたと思うが、中学校から移行された内容の指導や「数学A」の変化，「数学基礎」という新しい科目等に対応できるだろうか。

また、2 単位科目は内容の定着が難しく、関連した内容の指導・指摘等がしずらい。クラス間の授業時間数に差が出やすいことも問題である。現在指導の順番を入れ替えたり副教材を工夫したり課題の点検を増やしたりと必死に対応している。現場での努力や工夫はさらに求められると思う。

（4）研究活動

研究会に参加する教師が減っている。しかもメンバーが固定されてきている。研究会に自分の意志で参加してくる人はまれで、会の方から若い先生に参加を呼びかけている。せっかく会に参加しても自校の授業には役に立たないと考えてしまうようだ。役に立つか立たないかは、自分の考え方・取り組み方次第であるということに気づくことが大切なのだが、その点に気づいてもらうことができない。余裕が無いのだろうか。また、教材の開発や、指導法の工夫等に熱心な場合も、それが個人レベルにとどまっているように思う。研究大会に発表して、同一教材に対するよりよい指導法を求めて意見をたたかわせたり、より効果的な教材を工夫したりする等、お互いに情報を交換しあい、研究成果を共有してより深めていくことが大切ではないだろうか。

人を作るために、教育研究機関の主導的役割が明日への希望だと考える。

「数学的な見方や考え方のよさ」
― 数学的活動を数学たらしめる認識の確かさ ―

渡邊　公夫
筑波大学数学系

はじめに

学生の「学ぶ楽しさ」がだんだんとなくなってきている。少子化の時代に大学は生き残れるか，どんな学生をとったらよいか考える時にさしかかっている。そのような中で，今回のカリキュラムの改訂，中学校数学科の指導内容の3割削減ということが起こった。ある意味では，ゆとりを前面に出しているものであるが，学習指導要領でそのようにうたっても，中・高の現場では入試がある以上そうは言っていられないというのが現実である。実際の今回の改訂では，3割削減と言われるほどには減っていない。今までとは違った視点に光を当てているという意味では，より本質的学びに近づいたのではないかと思う。

中・高の数学の評価について：

生徒の学びをもっと評価しなければいけない。きちんと学んできた生徒よりも，試験に出そうなところだけちょっと学んだ者の方が評価が良かったとしたら，生徒は堪えられないだろう。評価が学びを歪めてはいないだろうか。学びの空洞化，形骸化を心配する。必ずや受験があるのでやむを得ないが，自分の中で知識が育っていってわかったということはあまり評価の対象とはならない。その先のドリル的な内容についてどうしても評価の対象となる。このあたりが中・高の数学が思うようにいかない原因ではないかと分析している。知識がいかに育つかというプロセスに対する評価の方にもっと目を向けていただきたい。

語らせることの大切さ：

最近，少人数，T.T.と言われるが，所詮，数学教育は個人対個人でしかあり得ないと思っている。これからの数学教育の豊かさのバロメーターは，どれだけ個にかかわれるかにかかってくる。生徒と先生とのコミュニケーションの中でしか育てられないのではないかと思う。(これは，私の極論ですが...) 分からないことやできたことを子どもに語らせることが足りないのではないか。数学とは一つの考え方。考え方とは流れであり，語らないことには流れはじめない。中学校になると，小学校よりも話しにくくなるようだ。もっと生徒に語らせないといけない。

学びに不可欠なイメージ化：

今の生徒はイメージ化が不得手である。生まれてからずっとビジュアルな世界で育っているから仕方ないとは思うが。本来，学ぶということは文字化されたデータをいかにビジュアライズするかということである。いかにしてイメージデータに変換するかということに，その人の能力がかなり反映される。また，そのような訓練をしていないと，中・高の理科なり数学なりの教科書は自分では読めないと思う。本来，自分で図を描くなどしてイメージを作ることに面白さがあるのだが，大変だろう，待てないなどの理由で子どもが自分の知識を変換するプロセスを先生や親が取ってしまった。この辺にも問題があると思う。

知識を支える豊かな経験：

受験にシフトしていった時，なぜ，このようなことをやるの？　どうしてこんな条件がつくの？

など，分からないままともかくやり方を教えられるということが起こりがちである。数学というものは，理解する前に納得しなければならないものをもっている。何だろうと思った時に知識を欲しているので，その時に与えられれば知識がストンと入っていく。数学を学ぶにあたっても，本来，あるものを学ぶ前に，それらしきものや，合点するくらいの例があってしかるべきだと思う。特に数学における前体験が欠けている。理科もそうなってきた。このようなことが，かなり学びというものを形だけのものにしてしまった。このあたりが，数学の危機ではないかと思う。知識を支える豊かな経験がだんだん少なくなってきている。そういうところに，かなり抽象化された概念を教え込もうとしても無理がある。

中学校の数学

見えないものが見えてくる：

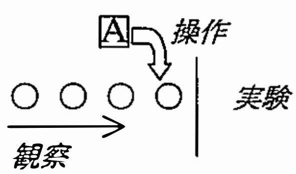
見えないものが見えてくるプロセスが，わかるということではないかと思う。ことばには，我々の見えないもの，イメージしたものをきちんと止めるという作用がある。数や図形もみなそうである。

観察，操作，実験：

具体例からどのように数学が抽出されてくるか，あるいは，具体例の背後に潜んでいるプロセスをぜひ今回の改訂に入れたいと考えた。中学校新学習指導要領の中に，観察，操作，実験という理解のステップを入れることになった。

ある事象を見て，おかしいな，変だなと思って自分で確かめてみる。

例えば，幾つか例が
並んでいるとき，



あるところまで観察し
$\boxed{\text{A}}$という考えをいだいて，操作してみる
そして，合うことがわかり自分のやり方で
やってみることが実験

それでも分からない場合，理解とは所詮個人のものなので，生徒が理解をしやすいような経験をさせるしかない。分からない生徒に対しては，先生の説明不足なのか，その生徒の体験不足なのかを適切に判定して指導にあたる。これが学びの姿である。

[1] 二種類の素数（資料）

2，3
$5=4\times1+1=2^2+1$
$7=4\times2-1$
$11=4\times3-1$
$13=4\times3+1$
$17=4\times4+1=1^2+4^2$
$19=4\times5-1$
$23=4\times6-1$
$29=4\times7+1=2^2+5^2$
$31=4\times8-1$
$37=4\times9+1=1^2+6^2$
$41=$
43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97，
101
$1009=15^2+28^2$
1013

$\cancel{4n}$	…×
$4n+1$	
$\cancel{4n+2}$	…×
$4n+3$	

4で割った余りに着目すれば，素数は二種類。
$4n+1$
$4n+3=4m-1$
1余るか，3余るかという表面的な違いが見える。
さらによく見ると（観察）
$4n+1$ 型は必ず a^2+b^2 と書けそうだ
（本当は操作・実験してほしいところ）
一方，$4n+3$ 型はどうだろうか，書けそうにない...
観察，操作，実験を経て，初めて数学といえる。

$4n+1$ 型の素数と，$4n+3$ 型の素数は，整数の世界では単なる素数である。しかし，$4n+3$ 型の素数は a^2+b^2 と書けるため，複素数の世界では $(a+bi)(a-bi)$ に因数分解できるように，もっと大きな世界で考えたときには，素数のままのものと，素数でなくなるものとに分かれる。数学というものは，視点が高まれば，見えないものの違いが見えてくるし，数学的に説明できるようになってくる。これが数学の面白さである。

[2] 中学校数学の領域の構成（資料「数学科の構成」）

学習指導要領の作成に携わって，数学科の構成についてある視点でまとめたものである。中学校の数学でも豊かな構造をもっている。

中学校数学では，扱う対象のもつ，一様性，均一性等からか，あるいは線型に見ることから，加減乗除，すなわち四則演算の支配する数学である1次の世界が中心となる。

1年	2年	3年
算数から数学	1次の世界	2次的世界

1年生の算数から数学はこれからの順次抽象化していく数学的思考を支える豊かな数学的経験の場として位置している。1次の世界の特殊性を理解するためには2次以上の世界との対比も不可欠である。また，2次の世界の必要性もさることながら，さらなる数学への発展の雛型として1次の世界から2次の世界への広がりを示すねらいをもって2次的世界とした。物事の変化には，1次の比例的でないものもあるということを知ってもらいたい。

次の表は，今回の学習指導要領の骨組みである。

	数	方程式	図形	数量関係
1次の世界	有理数体	1次方程式 （含，連立1次方程式）	直線（で囲まれた図形）	1次関数
2次的世界 （平方根の入った世界）	実2次体	2次方程式	三平方の定理・相似	$y=ax^2$

[3] 2次方程式の解の公式

覚えさせる必要はなく，知るにとどめる。なぜ，2次方程式が必要なのか，どうして，生まれたのか，それはどうやったら解けるのか，という一連のプロセスの最後に解の公式がある。このプロセスを省略してしまう場合が多いが，ここに目を向けてほしい。どのようにしてのところを，子どもたちに一度経験させてほしい。どのように考えたから解けたのかという問題解決のプロセスに光を当ててほしい。それが数学だと思うし，評価もそのように変わるべきであると考える。（また，高校入試もそう変わってほしいと，お願いしたいところであるが......）

[4] 相似の定義

中学校の教科書における，相似の記述がはっきりしない。相似というと，すぐに，三角形の相似条件となってしまう。しかし，「形が同じ」とは何だろう？　合同ならば，重なるということであるが，重ならないけど形が同じとは何だろうということになる。拡大・縮小にこだわってしまうが，大事なのは，「相似の位置」である。まず，相似な二つの図形には，必ず相似の位置がある，ということを観察によって気づかせてほしい。その次に，この比（相似の中心からの比）を測らせて，必ず同じということに気づかせる。

そうした上で，ではどのように相似を定義しようかということになる。そして，二つの図形があったときに，相似の位置にあるとき相似という，という定義ができ上がる。いろいろな例を見て，

そこから，相似とはこうではないかと約束するのである。

実際に *pantograph*（写図器）などの道具を使って，ある図形を描いてみると，確かに大きくなることが納得できる。実際に，自分の体を使うこと，手や足を動かすことが大切である。そして，なるほど描けるというところから数学がはじまる。

勝手に与えられた図が相似かどうかは数学的には判定できない。数学的な判断は，その図形が，有限個の要素で表現されたときのみ可能となる。相似かどうかチェックするのが簡単な図形は，円，次に三角形。このような特殊な図形については，いくつかの要素をチェックすれば，判定できる。だから，中学校では，三角形の相似条件を扱うことになる。

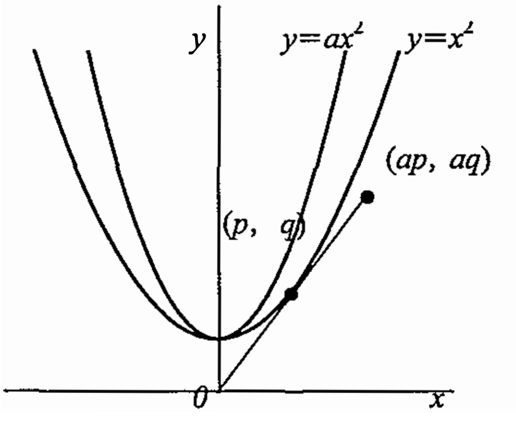
三角形は有限個の要素で与えられる図形　→　相似の位置に移動できる

→　有限個の要素をチェック　→　三角形の相似（三角形の相似条件）

このようなプロセスを経なければ，三角形の相似条件の知識は支えられない。

「ある図形を拡大・縮小したものを相似という」では，拡大・縮小とは何かがはっきりしていないので，定義になっていない。

[5] $y=ax^2$ と $y=x^2$ は相似



確かめ：

$y=ax^2$ のグラフ上の任意の点を（p，q）とする

（p，q）→（ap，aq）（x 方向，y 方向に a 倍）

この点（ap，aq）が，$y=x^2$ のグラフ上にあればよい

（p，q）は，$y=ax^2$ を満たすものだから，$q=ap^2$

$aq=a \cdot ap^2$

$=(ap)^2$　　つまり，放物線はすべて相似

直角双曲線でも同じことがいえる。

高等学校の数学

情報の付加：

数学的に変形するのならば，必ず情報の付加がある。数学の授業で何か言うのであったら，それによって，何か情報が増えていなくてはならない。式を変形するにも視点があるということを忘れないでほしい。

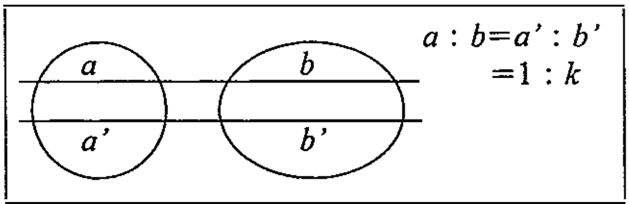
例えば，テーラー展開では，

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

式としては，等価であるが，情報的には全く違う。左辺には実数しか入らないが，右辺には複素数を入れることができる。数学の変形には価値がある，その価値を先生が認識していないといけない。

[1] カバリエリの原理（資料「積分を学ぶ前に」）

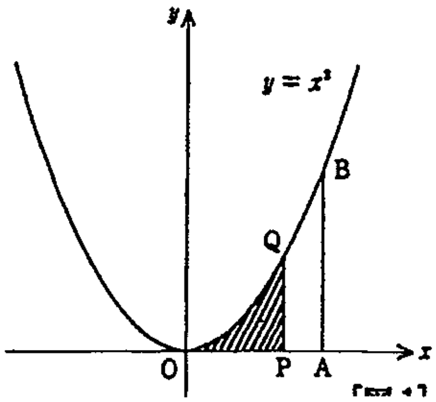
二つの平面図形を一定の方向に直線で切るとき，一方の切り口の長さがつねに他方の切り口の長さの k 倍であるとき，一方の面積は他方の面積の k 倍である，というもの。



「平面図形は線分の集まりである」中学校の教科書にそのような記述がありびっくりした。しかし，残念ながら，平面が直線の集まりであるよさがかかれていない。そういう視点を得ることによってカバリエリの原理を認識できる立場に立つことができる。そこがすごいところ。平面が直線の集まりであることを認めることによって，より高い立場で認識できるのだから。

[2] 擬三角形の面積を求める（資料「積分を学ぶ前に」）

［図 1］ P の x 座標が 1 のとき，三角形のような図形（擬三角形）OPQ の面積は $1/3$ であることがわかっている。では，A (2, 0) のときの，擬三角形 OAB の面積はいくらか。



［図 2］ 放物線 $y=4x^2$ を考えると（$a=2$ と考えると），擬三角形 OPR は，もとの図形を y 軸方向に 4 倍したもの。
さらに，$y=4x^2$ を x 軸方向に 2 倍したものが $y=x^2$

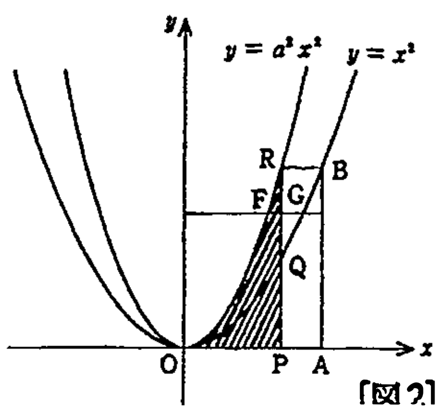
（$q=4p^2$ となる F (p, q) は，x 軸方向に 2 倍すると，G ($2p$, q) となり，$q=(2p)^2$ であるから，$y=x^2$ 上にあるから。）

従って，カバリエリの原理により，擬三角形 OAB の面積は，

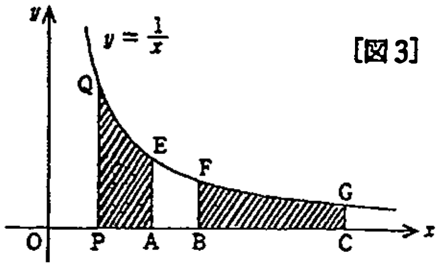
$$\frac{1}{3}\times4\times2=\frac{8}{3}$$

となる。

もしも中学生から，擬三角形 OPQ の面積がなぜ $1/3$ なのかという質問が出たら，チャンスと思ってそれを利用すればいい。



［図 2］



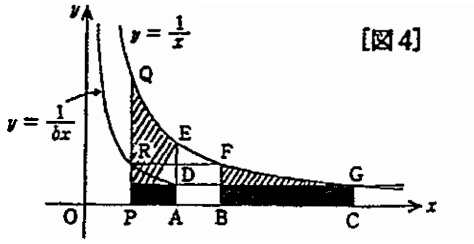
［図 3］

もっとすごいことが，中学校でもできる。

［図 3］ P, A, B, C の x 座標が 1, 2, 3, 6 の時，四角形のような図形（擬四角形）$AEQP$ の面積と $CGFB$ の面積は等しい。

［図 4］ 補助として，$y=1/3x$ ($b=3$) を考えると，擬四角形 $ADRP$ は，もとの図形を y 軸方向に $1/3$ 倍したもの。

さらに，この図形を x 軸方向に 3 倍したものが擬四角形 $CGFB$



従って，カバリエリの原理により，擬四角形 $CGFB$ の面積は，

$$(\text{擬四角形 } AEQP \text{ の面積}) \times \frac{1}{3} \times 3$$

となり，等しいことがいえる。

一般に，P（1，0），A（a，0），B（b，0），C（ab，0）とすると，

$$\int_b^{ab} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^a \frac{1}{t}\,dt$$

$$\log ab - \log b = \log a$$

$$\log ab = \log a + \log b$$ このような公式になる

（中学生の場合は，アクリル板で作って重さを比べてみようと思っている。）

カバリエリの原理が認められると，こういう単なる微積分の公式として証明されるものを，もっとイメージ豊富な知識として子どもの中に与えることができる。

数学的には証明できても，イメージがわかないことがある。知識というものが，どれだけ子どもにとって，合点のいくものとなるためには，自ら体験し，それがイメージとしてはっきりして，それを自分のことばで語れる，このくらいの段階が必要なのではないか。そうすれば，子どもの中に，ものの認識の深まりというものを体得してもらえるのではないだろうか。子どもから，「今日，頭よくなったみたい」という声が聞けたら，最高の評価を与えてあげたい。

子どもの中の断片的な知識に流れができはじめているところで，テクノロジーを使うことは，そのできかかっている流れを切ってしまう心配がある。テクノロジーは，子どもに応じて使わなければいけない。歩きはじめた子どもに，すぐに歩行器を与えてしまうようなことはいけないということである。

[3] 関数マンダラ（資料「初等超越関数の世界」）

高校の数学の教科書に散在している次なる項目

数学Ⅰ	第２章	三角比		
数学Ⅱ	第２章	三角関数		
	第３章	指数関数・対数関数		
数学Ⅲ	第２章	微分法とその応用	§2	種々の関数の導関数
数学C	第２章	いろいろな曲線	§2	２次曲線

を，下のような表にまとめてみた。

$x^2+y^2=1$		三角関数
	対数関数	指数関数
$x^2-y^2=1$		

高校の数学は深い構造を持っている。しかし，これだけ教えればいいという核のみを教えているので，全体が見えない。高校のカリキュラムがもっている豊かな構造が見失われて残念だと思い表を作って見た。上の表の書かれていないことは，比較的大学入試で出されやすい。そして，上の表の空らんをうめたものが，次の表である。

$x^2+y^2=1$	逆三角関数	三角関数
$xy=1$	対数関数	指数関数
$x^2-y^2=1$	逆双曲線関数	双曲線関数

2 列目の特徴は，円や双曲線や直角双曲線から，積分を使って書かれている。(p13 にまとめてある)
その端的な例が，

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$ という公式

これは，非常に驚くことで，先生方が，さりげなく扱うのでは物足りない。徹底的に驚いてほしい。

$$2^2,\ 2^{-2},\ 2^{1/2},\ 2^{\sqrt{2}},\ \cdots\cdots \to 2^x,\ 3^x,\ \cdots\cdots \to e^x$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{x} = (\log x)' \xleftarrow{\text{微分}} \log x$$

これは感動ものである。2^2 からはじまって，たどりついたものがなんと反比例の式。どうして？
それが，上の表の 2 行目 $\boxed{}$ に圧縮されている。

断片的な知識を，大局的に見ると構造が見える。見えないものが見えてくるおもしろさを味わうことができ，数学はすごいということがわかる。そうすると，問題を解くということが，テクニックを労するものではなく，自然に見えてくる。大学入試も構造が見えれば，すごく素直な問題なのだということを言いたい。

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ を言っているにすぎない

$x^2+y^2=1$		三角関数
$xy=1$		指数関数
$x^2-y^2=1$		双曲線関数

この表を見たときに，円に関することと，直角双曲線に関することは，同じようなことをやっているのではないかと気づくであろう。そこで，

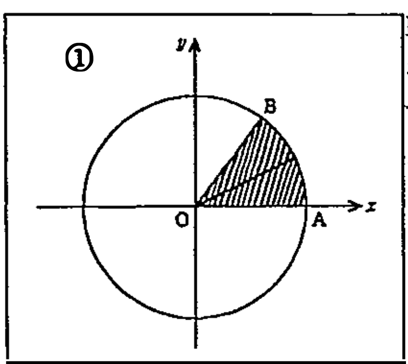
$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$　とおけば，$x^2+y^2=1$ だった

$x=\cosh\theta$，　$y=\sinh\theta$

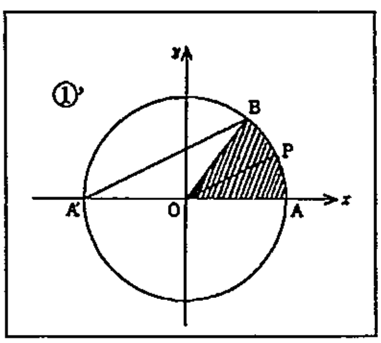
$\downarrow$　　　　$\downarrow$

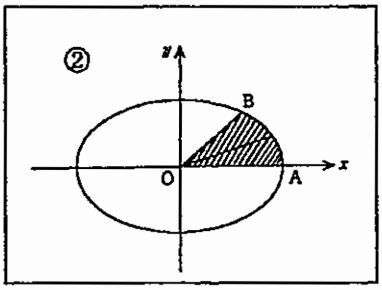
$(e^{\theta}+e^{-\theta})/2$　　$(e^{\theta}-e^{-\theta})/2$　とおくと，$x^2-y^2=1$ となり，非常に類似したことが成り立っている。

[4] 扇形の面積を二等分する（資料「積分を学ぶ前に」）



単位円の場合，扇形 OAB の面積を頂点 O を通る半直線で二等分するのは簡単。
$\angle BOA$ を二等分すればよい。

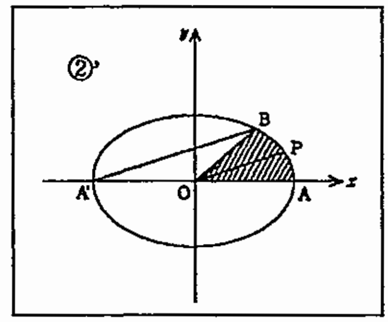


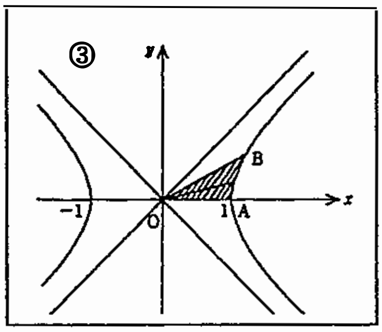


楕円の場合はどうだろうか。
単位円を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍したものが

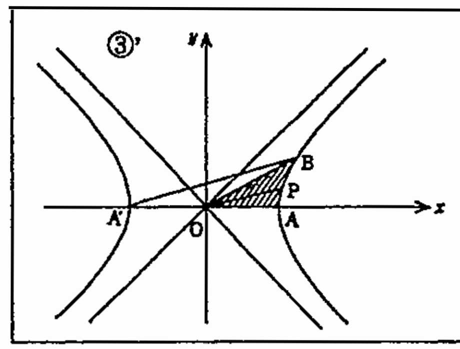
楕円 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

であるから，カバリエリの原理で解決。





では，直角双曲線ではどうか。
というように進めていく。



いきなり③はやらないで，その方法を使わなくてもできる当たり前の例①を出す。①ならば，角の二等分で容易に解決できる。しかし，②で同じようなことをしようとしてもできないので，平行線を引くという工夫する。その工夫は大したものではないので，②で受け入れられる。そして，その方法を③に踏襲すると，あまり違和感を持たれない。

もちろん②や③をチェックするには，きちんとした数学を使わなくてはならないのだが，もし，中学生に分からせようとしたら，アクリル板を切って重さを測ってみるとよい。中学校では，その程度の経験で止めておいて，大学で数学的に確かめる。数学はすごいということの一つの示唆になると思う。

なによりもまずは体験が必要。面積でだめなら重さでもよい。ともかく，同じになるという経験があった上で微積分を教えられると，今までの経験が微積分という大きな流れの中につながって行って，ひとつのシステムができ上がる。これが数学を学ぶ一つのメリットである。

おわりに

ただ単に，便利・役立つだけでなく，数学のもっている，ものを認識するときのよさを，もっと先生方が押し出してほしい。数学というものが認識を確かにし，見えないものが見えてくる，そして，結果として役に立つ。そして，それを支えるのが豊かな体験（経験）である。体験の中で得られた断片的な知識につながりをつけてあげる。生徒が，経験という素材をもとにして，数学という構造を作る手助けをすることが，中学・高校数学の目的ではないだろうか。

背後に見えてきた現象を，表現するすべを持っていなかったら困るであろう。それが，数式などの数学のことばで表現できたとき（書きとめられたとき），初めて，わかったと実感するのである。

うまい表現，イメージにぴったりする表現を見つけたときのすばらしさ。数学にもこのような，感情を豊かにするところがあっていいのではないだろうか。

高校数学教育のあり方を考える

吉川　行雄
山梨大学教育人間科学部

1．はじめに

教員養成という視点からの鳥瞰を試みると、現行免許制度（開放制）による高等学校の実情はそのよさも多いが、ここにきてまずい点が凝縮してきているように見える。

・高校の教員は教員養成系でない大学の出身者が多い。そのことによる問題点。
　学習指導法に関する研究や教育学・哲学的な考察を軽視しがちである。
・小中の教員養成課程（国立大の「教員養成学部」）の危機的状況とその卒業生の質的変容が及ぼす高校への影響。
・絶望感、閉塞感の訴えが強くなっている高校数学教育を変えていく可能性は？
　直接的、現実的には大学入試方法の改善が有効。しかし教師の意識改革の方が本来的であり、より根元的である。

2．目標論を根本から考え直してみたい

・学校教育において数学教育は dense である、という原点から出発したい。
　学校現場の見えにくくなっている荒廃の実態とその中に見出せるいい反応の両方を直視すべきである。
・中学校高等学校では自我の確立に連動して「内的総合化」が図られる必要がある。
　そのとき数学科での学習体験が重要な役割を果たす。「共生」という観点からも同様な働きが期待される。
・数学教育で生徒に学ばせる目標の根幹に「直面する課題への誠実な根気よい取り組み」があると考えたい。
・「数学」への誘い、手ほどきのための学習の機会も別に考える必要がある。
・majority のための数学教育と、余力のある優秀な生徒のための数学の教育との重なる部分と異なる部分とを意識的に区別し、その上で実際の授業での調和を考えるべきである。

3．試みてほしい授業の具体例

（1）教材研究とそれに伴う指導法のくふう

①計算尺、関数尺づくりから「対数尺」へ

・乗法の結果を長さの加法で示せるような関数尺を作ることから対数の学習へ発展させていく。
・人間の知覚の持つ、大きい数と小さい数とでの受けとめかたの違いが、対数関数によく似た関係になっていることへ注目させたい。
・数表を用いた対数計算を再評価すべきである。

②作業を重視した三角関数の学習

・クレーンを用いた場面設定と基本構造のモデル化が効果的である。
・直交座標と単位円の世界から、等速円運動とそれを横から見た単振動との関係へと進めていく。
・図形の性質の議論の中で三角関数（三角比）を用いることの必然性とそのよさを感じさせる。その場面でも上のくふうが利いてくる。

③区分求積法のていねいな扱い

・$y=x^2$ についてグラフをていねいに描き、下側にできる面積を求める工夫をしていく。

・$y=x$，$y=x^3$について同様な扱いをし、$y=x^n$へ一般化する。さらに、面積の性質に注目しながら対象を一般の多項式関数へ拡げていく。
・線形性など、積分の体系づくりのあらましを、作業をしながら一緒に体験していく学習となる。
・微分の学習は、別の工夫でこの後に行なう。

④立体模型づくり

・立方体の切断、分割から始まるストーリー性のある課題による展開。中学校で流行した立方体の切断とは異なる。
・正多面体、準正多面体などの美しさ、相互関係などを実感させたい。
・菱形１２面体の不思議で美しい世界も魅力的である。

⑤「組み紐の幾何学」のゼミ

・実際に紐を使った「ブロック」を作り、それを使って演算を行なう。
・代数構造の理解への好適な教材となる。
・代数と幾何との接点場面や融合の必然性の実際が実感できる。
数学の厳しさ、面白さ、数学者の人間くささなど数学研究の生々しい息吹を感じさせられる話題が紹介されている。

（２）教師が体験してこなかった指導法

⑥オープンエンドアプローチによる授業

・高校時代に一度でもいいから数時間かけたオープンエンドアプローチによる授業を体験させたい。日頃の授業もおのずと変わってくるはず。
・オープンな課題に対する多様な反応をもとにした一連の「数学的な活動」の引き出し方や整理の仕方について、事例研究の蓄積が望まれる。とくに高校での実践が少ないので、課題開発の段階からの取り組みが必要である。

⑦問題づくり

・ただ作らせるだけでなく、作った問題どおしの関係や発展など、問題を作った後の授業展開が重要である。
・オープンエンドアプローチとの繋がりを忘れないようにしたい。

⑧グラフ電卓、パソコンを活用した授業

・ハンググライダーの翼の大きさの推測，桜の開花予想などの課題
・パラシュートの大きさの実験など実験結果の処理
（・幾何のシミュレーション、数論の検証、場合の数の計算などでの利用）

（３）中学校までの学習を振り返る学習

⑨分数の見直し

・ベクトルと比較しながら「類」としての見方を導入する。
・順序対としての演算体系を整備し直す。
・原点を通る直線群との対応させ、図的に演算を組み立てる。
・記数法と絡めて数の表現方法と言う視点からの議論もおもしろい。

⑩面積体積についての振り返り

・面積を求める「公式」のいろいろとその相互関係について吟味する。
・分割合同と等積との関係を具体例で検討してみる。
・錐体の体積について、積分による納得と模型による納得を試みる。

（４）幾何教材の再評価

⑪九点円

・従来からの方法による扱いでなくdilatation をもとにした小体系の構築
　コクセター「幾何学再入門」にあるようなストーリーのある扱いなどのくふうによる授業を行なう。

⑫ナポレオン三角形

・円を角の視点でとらえることの価値を実感できる場面となる。
・「きれいな」定理の持つ神秘性とそこに至たる体系の巧みさを味わうことになる。

⑬「幾何学再入門」をテキストとしたゼミ

・現代化時代のＳＭＳＧの精神の優れた点の再評価をしたい。

（５）身の回りに見られる数学への注目

⑭トイレットペーパーの回転数

・高校生らしい着眼、扱いを期待しての課題設定とする。
・「実験」することの大切さ、おもしろさも忘れずに体験させる。

⑮バーコードの解読

・身近かにある不思議なものへの興味関心とその仕組み解明への追求心を育てたい。
・システムの巧みさとともに、その背景にある経済活動へも目を向けさせる。

（６）進んだ内容、学んでない内容への取り組み

⑯「数の体系」などをテキストとした放課後のゼミ

・教科書主体の勉強との「勉強の仕方」の違いを体験させる場としたい。（大学では高校数学と大学の数学とのギャップに学生が対応できなくなっていることが、しばしば話題になっている）

⑰ＵＳＡＭＴＳ（The USA Mathematics Talent Search）の問題への挑戦

・問題はインターネットで簡単に入手できる。
・現在の日本の数学教育では扱わないタイプのいい問題、おもしろい問題が多い。

４．小学校中学校の算数数学教育との関係

・いろいろな面で小中算数数学教育の問題点が高校の数学教育に集約してきている。
・小中での数学教育が本来の意味でしっかりしていれば、高校生の数学への取り組み方はもっと違ってくるはず。
・高校教師の数学観・授業観も、その教師の小中時代の影響が色濃い。

５．大学入学の選抜方法の改善

・現行の「センター試験」にあたるテストは工夫を加えながら続ける。
・別にイギリスの「Ａ－レベルテスト」のようなテストを大学とは別組織で行なう。
・数学科志望者に対する選抜方法は大学ごとに工夫する。

６．高等学校カリキュラムの柔軟化

・現状でも実質的には「柔軟化」している。
・柔軟化の方向、方法に教師の目標論への姿勢や価値観が重要になる。（安易に流れる心配がある）

７．教員養成・再教育の問題点

・現行制度の良さは保存しながら、指導法の実際、生徒の学習心理や思考の様相などについて学

ばせる必要がある。

・現職からの大学院入学についても、研究テーマが授業に結びつかないものが多すぎる。
少なくとも「研究テーマを授業に結びつかせる勉強」も平行させたい。

8．改善への道標はあるのか

・現在の高校数学教育の苦境は、構造的、社会的症状であって、一部分をどう直そうとも完治はしない。

・しかし高校の教師の意識が変われば事態は相当変わってくるはずである。そのもっとも効果的な契機は、上にあげた授業例のような、教師自身がこれまで経験しなかったタイプの授業、扱ったことなかった課題での授業を実践してみることである。そしてその授業で自分の生徒のこれまでと違った反応を見出すことである。

高等学校数学教育の変遷とこれからの課題

吉田　明史
文部省初等中等教育局高等学校課教科調査官

１．改訂の変遷

（１）教科の目標

昭和２６年（試案）

数学の有用性・美しさを知る，数学の果たしている役割の大きいことを知る，数学がどのようにして生まれてきたかを理解する，数学を生かして社会に貢献していく習慣と能力を養う，…

昭和３０年

生活を合理化し向上させていくのに基礎となるような数学的な教養を生徒に与える，基本的な数学的な能力や態度を養う

基本的な概念・原理，法則の理解，数学が体系的にできていることと体系を組み立てていく考え方を理解，用語・記号の正しい使い方の理解，論理的な思考，数学的なものの見方考え方の意義を知る

昭和３５年

より進んだ数学的な考え方や処理の仕方，数学を積極的に活用する態度

昭和４５年

統合的・発展的に考察する，社会において数学の果たす役割

＜以降の学習指導要領は，中核的な目標だけが示された。（原文のまま引用する）＞

昭和５３年

数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，体系的に組み立てていく数学の考え方を通して，事象を数学的に考察し処理する能力を高めるとともに，それを活用する態度を育てる。

平成元年

数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高めるとともに数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる。

平成１１年

数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる。

（２）複線化をもたらした科目

26 年「一般数学」：将来それほど数学を必要としない生徒に対して一般教養としての数学を学習させる科目である。生活経験によって内容を示した。「このコースは，将来，特別進んだ数学的技能をさほど必要としない生徒のためのものである。中学校における数学の発展として，今までに学習したものに対してひろい見透しと，まとまりとをもたせるとともに，ある程度の高等学校の数学科における知識，技能を得させることを主な目的としている。(s23.11)」

30 年「応用数学」：数学をよく用いる専門的な分野の学習を容易にするため，特に必要な数

学の部門（統計，数列・級数，複素数，三角関数，微分，積分，計算法，図形とその方程式）を取り出して構成した。

35 年「応用数学」：職業教育を主とする学科の生徒に履修させる科目である。従前の内容に，空間座標，直線・平面・簡単な二次曲線の方程式，ベクトル，簡単な部分積分，対数関数の積分，正規分布を加えた。行列式，画法幾何，球面三角法，ラプラス変換も指導可能とした。

35 年「数学ⅡA」：この科目で履修を終わる生徒を対象とし，実用的で平易な内容，現代の要求に応じられる内容（計算法，確率と統計，数列と極限，微分法と積分法）で構成した，選択必修の科目の一つである。

45 年「数学一般」：この科目で高等学校数学の履修が終わることを前提に，基本的事項について平易に構成し，具体的な事象について実験・実習などにより学習させることを重視した。共通の内容として，集合，図形，変化とそのとらえ方，不確実な事象のとらえかたを扱い，選択の内容として，論理，ベクトルと行列，線形計画の考え，電子計算機と流れ図を扱うこととした。

45 年「数学ⅡA」：「数学ⅡB」よりも易しい内容（行列，微分法と積分法，確率と統計，電子計算機と流れ図）で構成した。選択科目である。

45 年「応用数学」：「職業教育を主とする学科において履修させる科目である。共通の内容として，ベクトルと行列，微分法と積分法Ⅰを扱い，選択の内容として，確率分布，有限数列，三角関数，微分法と積分法Ⅱ，確率と統計の応用，計算機と数値計算を扱うこととした。

53 年「数学Ⅱ」：一般的な教養としての数学の内容（確率と統計，ベクトル，微分と積分，数列，いろいろな関数，電子計算機と流れ図）で構成した。

（３）これまでにない新たな科目

H10 年「数学基礎」：理系の生徒の履修も視野に入れた，生徒の多様な特性等に応じることのできる履修形態が多様な選択必履修科目である。内容（数学と人間の活動，社会生活における数理的な考察，身近な統計）を大綱的に示した。

（４）多様化への対応のステップ

・別個の内容を生活経験に則して示したもの（「一般数学」）
・理数科の学習指導要領(s45〜)
・内容の一部を取り出したもの（「数学ⅡA」，「数学一般」，「数学Ⅱ」$_{53}$）
・職業教育を意図したもの（「応用数学」）→「工業数理」（s53)→「工業数理基礎」
・学習内容を選択できるもの（「数学A」$_{H1}$，「数学B」，「数学C」）
・新たな視点で内容を大綱的に示したもの（「数学基礎」）
・必修科目単位数相違（s30「数学Ⅰ」（6,9）→H10「数学Ⅰ」(3)「数学基礎」(2)）

２．これからの課題

新学習指導要領に基づく数学教育の実践と次期学習指導要領の改訂に向けて，各学校段階にとどまることなく，小学校から高等学校までを含めた算数・数学科のカリキュラム研究（目標，内容，方法，評価）が必要である。

大学等における数学教育研究者の理論が，高等学校における実践に生かされるようなシステムの構築，各高等学校における教育課程の実施状況の把握（国立教育政策研究所における「教育課程実施状況調査」など），学校側からの建設的な議論（そのための研究実践），…

具体的にいくつかの項目をあげておきたい。

（１）目標について

a.これからの数学教育を通して身に付けさせたい資質・能力は何か。

数学的な見方や考え方，創造性の基礎（論理的思考力，判断力，表現力…），…

（２）科目構成について

a.必履修科目について

・必履修科目として存在し続けることができるか。

・内容をどのように構成すべきか（中学校における選択教科との関連)。

b.学習の系統性と選択の多様性（学習内容の選択を含む）をどのように保障するか。

「数学Ｉ」$_{H1}$と「数学Ａ」$_{H1}$⇔先々の準備として学ぶ＆必要に応じて学ぶ。

（３）内容について

a.「数学基礎」の精神をどのように生かすか。必修数学として最後の砦？

b.小学校からの学習の系統性をどのように考えるか（領域構成を含む)。

c.微積分を頂点としてよいか，現代的課題を解決するために数学的な内容はないか。

d.テクノロジーの発展によって示すべき内容は変わるのか。

（４）指導と評価について

a.指導計画の作成について（単なる「進度表」からの脱却)

・本校数学科で身に付けさせたい資質・能力を明確にする。

・評価の４つの観点を踏まえた目標分析を行う。

・「総則」に示されているように発展的な内容等の取り扱いも視野に入れる。

・科目間の関係・生徒の履修歴を把握する。

b.指導について

・中学校との連携

・数学的活動の充実

数学を創造する経験，考える楽しみ，テクノロジーの活用…

・教材分析・研究の充実（「塾」に負けない研究を)

c.評価（目標に準拠した評価)

・「評価規準」の作成，自己点検・自己評価

・テスト問題は妥当か

d.研究授業・研究協議

実践研究の基本，研究協議の実施

（参考）

理数科（数学的分野）の科目構成

（昭和 43 年理数に関する学科の設置が可能；現在１６９校）

---

45 年「総合数学」:「数学Ⅰ」を履修した後に履修する必履修科目。「数学ⅡＢ」及び「数学Ⅲ」の内容をまとめ，発展的・総合的に考察できるようにしたもの。複素数平面，逆三角関数などを含む（１３～１８単位）

45 年「計算機数学」: 必要に応じて履修させる選択科目（２単位）

---

53 年「理数数学」:「数学Ⅰ」が６から４単位に減ったことを受けて，第１学年において全ての生徒が履修する科目。必要に応じて「数学Ⅰ」の内容を拡充発展させて扱う。なお，「数学Ⅰ」に，常用対数と計算機数学を追加。単位数は設置者が定める。

53 年「総合数学」:「理数数学」を履修した後に履修する科目。内容の一つに「課題研究」を設定。単位数は設置者が定める。

H1 年「理数数学Ⅰ」:「数学Ⅰ」及び「数学Ａ」の内容を中心に発展的・系統的に整理。必履修科目。

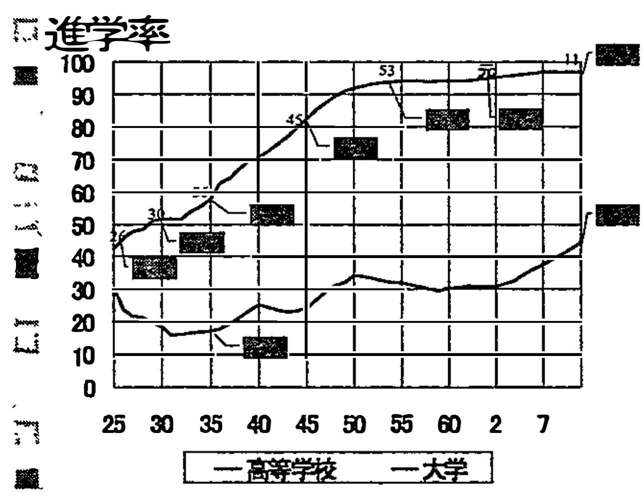
H1 年「理数数学Ⅱ」:「数学Ⅱ」,「数学Ⅲ」,「数学Ｂ」,「数学Ｃ」の内容を中心に発展的・系統的に整理。「理数数学Ⅰ」の後に履修させる。必履修科目。課題研究を設置。

H11 年「理数数学Ⅰ」: 「数学Ⅰ」,「数学Ａ」の内容を中心に発展的・系統的に整理。必履修科目。

H11 年「理数数学Ⅱ」: 「数学Ⅱ」,「数学Ⅲ」の内容を中心に発展的・系統的に整理。必履修科目。

H11 年「理数数学探究」:「数学Ｂ」,「数学Ｃ」の内容を中心に発展的・系統的に整理。選択科目。課題研究を設置し必履修他は学習内容を選択して履修。

高等学校・大学進学率



高等学校数学科科目構成等の変遷

年	S22	S26[45.6]	S30[51.5]	S35[57.7]	S45[82.1]	S53[93.5]	H1[94 7]	H10[96.9]
科目	解析学Ⅰ(5) 解析学Ⅱ(5) 幾何学(5)	一般数学(5) 解析Ⅰ(5) 解析Ⅱ(5) 幾何(5)	数学Ⅰ(6,9) 数学Ⅱ(3) 数学Ⅲ(3,5) 応用数学(3,5)	数学Ⅰ(5) 数学ⅡA(4) 数学ⅡB(5) 数学Ⅲ(5) 応用数学(6)	数学一般(6) 数学Ⅰ(6) 数学ⅡA(4) 数学ⅡB(5) 数学Ⅲ(5) 応用数学(6)	数学Ⅰ(4) 数学Ⅱ(3) 代数・幾何(3) 基礎解析(3) 微分・積分(3) 確率・統計(3)	数学Ⅰ(4) 数学Ⅱ(3) 数学Ⅲ(3) 数学A(2) 数学B(2) 数学C(2)	数学基礎(2) 数学Ⅰ(3) 数学Ⅱ(4) 数学Ⅲ(3) 数学A(2) 数学B(2) 数学C(2)
必修数学	国語，社会，体育のみ必修教科数学は，内1科目選択必修(5)	内1科目(5)	Ⅰ(6，9)	Ⅰのほかに，ⅡA，ⅡB，応用数学から1科目(9～11)	数学一般とⅠから1科目(6)	Ⅰ(4)	Ⅰ(4)	Ⅰと数学基礎から1科目(2，3)
目標	新制高等学校の教科課程に関する件(22.4.7)	10か条の一般目標	5か条の目標，中心概念	6か条と後文	総括的目標 具体的目標	中核的な目標	中核的な目標	中核的な目標
特色	一高等普通教育を主とする高等学校の教科課程	一般教養と職業的・専門的な教養 生活経験	数学的な考え方	能力・適性・進路等への対応 内容の精選・充実	現代化学習指導要領	共通の必修科目 領域別選択科目	「よさ」の認識・活用する態度 選択履修の充実	選択必修
理数					総合数学＊ 計算機数学	理数数学＊ 総合数学＊	理数数学Ⅰ＊ 理数数学Ⅱ＊	理数数学Ⅰ＊ 理数数学Ⅱ＊ 理数数学探究
ねらい	大学進学準備課程と職業への準備課程 学科ごとに区別	生活経験重視	必修科目の類型性	基礎学力充実 科学技術教育の向上 A,B科目設置 標準単位数表示	必修削減 質的改善と精選集約	多様化対応 ゆとりと充実	生涯学習の基礎を培う 「新しい学力観」 家庭科男女必修 履修と修得の区別	ゆとりの中で「生きる力」をはぐくむ 情報必修
必修等	44.7% 6科目 38/85	44.7% 7科目 38/85	52.9～71.8% 10～12科目 45～61/85	普通80～89 4% 男17科目 68～74/85 女18科目 70～76/85	55.3% 男11～12科目 47/85 女12～13科目 47/85	40% 男7科目 女8科目 32/80	47.5～57.5% 11～12科目 38～46/80	41.9～60.8% 13～14科目 31～45/74 (総合3～6)

第１回高等学校数学教育理念検討会資料

一楽　重雄
横浜市立大学理学部数理科学科

Ｉ．人格形成の視点からの数学教育

１．新指導要領では，「創造性の基礎を培う」，あるいは，「数学的活動」というような言葉で，科学技術教育としての数学教育だけではなく，全人教育，人格形成のための数学教育という側面が強調されている．これは大切な視点である．これまでの数学教育では，理科系の数学，将来の科学者，技術者の養成へ向けてという意識が強く，人格形成に資する数学教育という視点は希薄ではなかっただろうか．

２．生徒の多様化や全般的な意識変化から，旧来のような入試圧力等の外在的要因による勉強への動機づけなどがとても期待できない今，勉強への動機づけを何に求めるか，いや，むしろ，勉強の忌避をいかにさけるかと言う観点が必要とされている．

これについては，抽象的には，『生徒が「面白い」とか「意味がある」というように感じる教育内容』を展開しなければならない，内在的動機づけが必要と言えよう．

３．現在の数学教育の最大の欠点は，多くの人に「劣等感」を植え付け，「嫌悪感」を抱かせている点である．これは，人格形成の観点からは，最大のマイナス要因である．というのは，個人の心の中で実は責任と自信は常に一体であり，自信の無いところに責任感は生まれようがない．この点は，ピーター・フランタルがその著書「ピーター流勉強術」で「日本には地震が多いが，日本人は自信がない」と言い当てている．

このような数学教育を変えてゆくキーコンセプトとして，「リベラル・アート（教養）としての数学教育」を主張したい．これまでは，理科系の数学教育と国民全部に必要とされる「リテラシー」という概念で数学教育を考えて来たが，リテラシー概念がいまひとつ説得力に欠けていたと思う．その前提として，理科系，文科系の区別を所与のものとして，理科系以外の人たちに対する数学の「読み書き能力」ということが中心となった「リテラシー」概念は，現実的に展開不可能だったのではないかと思う．

４．具体的には，「問題解法＝数学」という固定観念が完成してしまったが，自然や社会を見る手段としての数学，ものごとを構造化・論理化するものとしての数学的考え方，というものを重視するように転換することが必要である．リベラル・アートとしての数学では，当然，「文化としての数学」の観点も重要である．数学を通して，抽象化とか事実のレベル（その事実が何に依存しているのか，特殊性と一般性の見極め），普遍性などの考察がなされる必要があると考える．問題解法は，数学理解のごくごく一部であることを，教育に携わる者のコンセンサスとすることがこれからの課題であろう．

5．興味を持ち，自信を持つような数学教育の展開の基礎理念は何か．それは，「現実との関わり」ではないかと思う．普遍性へつながる数学の抽象的性格を大事にすることも，一方で大切であるが，数学者のような一部の人を除いて，抽象的なものは理解が難しく，特に興味を持てない場合が多い，逆に具体的なものには自然に関心が持てる．現実に意味のある活動一数学的活動一を通して，生徒の興味を呼び起こすことが重要であり，総合学習の内容として期待されるところでもある．

このような総合学習については，小学校の例ではあるが，信州大学付属長野小学校における，大正時代からの伝統ある「総合学習」が参考になる．（「教科書を子どもがつくる小学校」，小松恒夫，新潮社）

Ⅱ．選択制か複線教育か．

数学関係者の中には，現在や新しい指導要領の内容が少ない，昔の一時より，大幅に内容が削減され，これでは「外国に負ける」と言う論調が多く見られる．その民族主義的視点自身も，危険性を孕むものではあるが，それはさておき，内容が減ったことが問題であるという立場では，もとのように戻せば良いという帰結にならざるを得ない．が，果たしてそうであろうか．そのように考えると，進学率の向上の結果，能力の多様化が必然であり，それにも関わらず，レベルを下げないためには，複線型が望ましいという結論になる．

戦後日本の教育の理念のうち，成功したもののひとつが「単線型」である．日本の青少年の犯罪率は，犯罪形態の意外性によって世の中で話題になるのに反して，国際的に異常にというほど低いとのことである．この理由については定説がないようであるが，私は教育の単線形が非常に関係しているのではないかと考えている．これだけ，単線形の教育が定着した今，文字通りの複線型は実行できないであろうが，考え方としてどちらを取るかという問題はある．

現在の文部省が進めている「選択性の拡大」によって，生徒の多様化に対応するという路線は，基本的にはよい方針と思う．単線型を守りながら，多様な教育を提供する方策として，これ以外には考えられない．しかし，本当に個々の生徒の選択が保証されているか，とか具体的には基本的な問題が大きく横たわっている．

Ⅲ．まとめに代えて

最後に，数学の自律性に触れたい．責任と自信が不可分であることを述べたが，自信をつけるというと，易しいテストでよい点を取らせるということがすぐ思いつくが，それはそれで意味があるが，数学は「自分でやったことが自分で確かめられる」という性格（自律性）を持っている．ただ早く進むということばかりに目をやらず，このような大事な観点を大切にしたい．それには，当然，授業の展開は丁寧な必要があり，時間がかかるので，教育内容を多くすることは難しい．しかし，人間は成長するものなのだから，その成長の力を持つことが大事であって，何を知識として得ているかということはそれほど問題でない．

現実と関わりを持った教育の展開，自信を持たせることと関連して自律性を大切すること，これらがこれからの教育の課題であると思う．

高等学校数学教育理念の問題

平林　一榮
広島大学名誉教授

要　約

1．わが国数学教育の実績

普通教育として高等学校の数学教育は成功していない。

・普通の人は、高校を出て社会人となると、数年の間に高校数学は急速にしかもほとんど全部忘れてしまう。
・多くの生徒にとって、数学はわからないもの、面白くないものという先入観が高校の間に固定されてしまう。（数学を嫌いにするための数学教育が行われている？）

2．初等教育と中等教育との理念的対立

「普通教育における数学教育」という概念が、中等教育においてまだできていない。

・初等教育と中等教育とは、一方は庶民教育、他方は指導者教育という伝統をもち、両者の理念は安易に混同できないことが見落とされたまま、中等教育の大衆化が行われた。
・すべてのものが科学者・技術者になるかのような、甚だしくは、すべてのものが数学者になるかのようなカリキュラムしか考えられなかった。
・数学のできない者には、できる者のクズみたいなところを、文科系の者には、理科系の者の数学の端切れを与えておけばよいと考えられているかにみえる。

3．教育における学問観

今日の高校数学理念の混迷は、歴史的には、旧帝大と旧師範の学問観・教育観の相違に由来している。

・学問観・教育観が昔と大きく変化した今日、「学問は教育するか」という問題は、数学の範囲でも根本的に反省してみる必要がある。
・数学の陶冶性と実用性は、歴史的な対立問題であるが、今日はその何れについても充分な反省が加えられていない。受験対策への偏向が、数学教育を無思想的なものにしてしまった。
・一般教養を基礎にしないアカデミズムは、教育的には大きい弊害をもたらす。数学教師は、どうかするとかようなアカデミズムに陥りやすい。昔と違って、大衆社会おけるアカデミズムとでもいった概念が考えられるであろうか。これは、数学教師養成の理念にもつながる。

4．高等学校数学教育理念の研究方法

高校数学教育の理念は、単に思弁的に確立されるものではなく、カリキュラムの構成、教科書の編集、授業実践事例集の制作といったような実際的・実践的作業の中で構築されるものであろう。このことを私の具体例で示した。

・この点で参考にできるのは、ドイツの　E. Ch. Wittmann の思想と実践であろう。私はここに、数学教育学の独自性を認めることができる。

5．結語

・ここでは、次のような仮説的提案をしている：高校数学教育の理念は、生徒に大量の知識技能を与えることではなく、「数学の言語的・記号的・理論的統合性といえるものが、われわれの主観的・客観的世界の統合的理解に役立つものである」ことを自覚させることにある。

１．わが国の高校数学教育の実績

（１）二三のエピソード

わが国の高校数学教育は、どれほど成功しているかどうかを反省するために、先ず私の教職経験からいくつかのエピソードを語りたい。

① 何年か前、ある大学の家政学系の新入生に、数学を教える機会を与えられたことがあった。学生の数学の実力の程度を知るために、最初の時間にちょっとしたテストをやってみたところ、その結果は惨憺たるものであった。例えば、「ピタゴラスの定理を書け。」という問題に対して、できた者は極く少数であった。 $a^2+b^2=c^2$ と式だけ書いていたものがいたので、「ａｂｃは何か」と聞いてみたら、「それは忘れた」といって、恬然としていた。あるものは、ほとんど白紙のテスト用紙の端にこう書いていた。「高校の時は覚えていたのですが、しばらく数学をやらないので、すっかり忘れました。ご免なさい。」高校を卒業してまだ二三ヶ月にしかならないのに、この有様である。私は、これはひょっとすると、多くの生徒にとっては、詰め込み、暗記でしか対応できない、今の数学教育の一般的状況を象徴する結果ではないかと思った。

② ある文科系の大学で、教養課程で必修の数学を担当したことがあった。ある新入生が私の所へ真剣な顔つきで抗議してきた。「自分は数学が嫌いで、入学試験に数学がなかったから、この大学へ来た。それなのにここではなぜ数学が必修なのか。」というのである。私は彼を充分に説得することはできなかった。

③ 極く最近のことである。私は医療系の専門学校で統計学を教える機会があった。全くできないので、欠点をつけてやった生徒がいた。学校当局は追試をやってくれというが、追試をしても駄目だから、二三時間補講をしてその結果をみて単位を認定しようということにした。ところが、本人がいうには、「いくら補講をしてもらっても、自分には数学をする能力が全くないので駄目です。」といってきた。私は、そのやる気のなさをとがめるより、完全な自信喪失状態に同情した。それは、誰のせいであろう。

（２）数学教育の成果

多少誤解を生むがかも知れないが、私は「数学者教育」と「数学教育」を区別したいと思う。数学者や科学技術者が、日本の高校生の数学力低下を危惧していることに、私も共感している。しかし、それが、優秀な数学者科学者が生まれないことを心配するだけであれば、それは、「数学者教育」に対する懸念である。それへの対応は比較的簡単で、今の数学教育の内容や方法をそれほど大きく変える必要はないと思っている。ただ、奇妙な知的平等主義を捨てて、その才能をもっている生徒を遠慮なく伸ばせるような教育システムをつくってやれば、それよい。できれば、優れた生徒が優れた数学者に教えてもらえば、その子は優れた数学者になれることは、そういう才能を持たなかった私ではあるが、自分のささやかな見聞から確信している。問題は、上例に見られるような生徒を含めて、彼らに対する普通教育における「数学教育」をどう考えるか、また、どうすればよい効果を上げられるかということであり、本稿の試みもそのことの模索である。

文部省が、時々学力検査をやって、これまでのところ日本の数学教育の結果はまあまあだということが多いが、この種の調査は「数学教育」の真の成果を知るのにあまり適切ではない。中学一年で中学校数学の達成度を測ったり、二年生で一年生の学習成果を調査することは、それなりの意味はあるであろうが、本当の教育成果は、学校での学習成果が、どんな形でどれほど社会に残存しているかを調査しなければならない。しかし、この調査はそれほど容易ではない。街を歩いている人

をつかまえて、「あなたはこの方程式を解けますか。」と尋ねたり、任意の家庭を訪問して、「奥さんはピタゴラスの定理を言えますか。」などと聞くのは、不可能であろう。

しかし、いろいろな経験から私の推測するところ、全国の成人社会における算数・数学の平均学力は、義務教育の中学校程度だとさえいえないであろう。小学校卒業程度というのも危なっかしい。恐らく小学校４年生ではないかと、私は想像している。

多少余談になるが、小学校４年生というのは、知的形成上のクリティカル・ポイントだと私は思っている。昔、ある英語教育研究者は、向こうの小学校４年生ぐらいの英語ができれば、日本では立派に英語教師がつとまると言っていた。また、心理学者岡本夏木氏の「ことばと発達」（岩波新書）[2] から、私は、言語発達に「９歳の壁」といわれる障壁があることを知った。これは本来聾唖教育で意識されたことであるが、健常者にもそれがあるのではないかという推測である。つまり、子どもの言葉が大人の言葉に切り替わる時期が小学校４年あたりにあり、その切り替えに成功しないとそれ以後の言語発達に大きな支障を来すというのである。私は、数学的成長にも、同様な「壁」が小学校４年あたりにあるのではないかと思っている。数学も一種の言語であり、自然言語との関連も深いから、かようなものが存在しても不思議ではない。ある席で、「小学校４年生でその後の算数・数学ができるかどうかが決まります。」といって物議を醸したことがあったが、少なくとも数学落ちこぼれへの分岐点の一つは、小学校４年頃にあり、それが、高校数学の学習にも大きく関係しているように思う。

数学教育の成果は、単に計算ができることではなく、知識・技能の習得だけでもない、いわゆる数学的考え方、態度、関心の形成も数学教育のねらいであると言われている。しかし、しかし、知識・技能以外の目標は、あまりはっきりした評価法がないので、いつもお題目のように唱えるだけに終わっている。私は、数学教育を普通教育に位置づけるには、それを一種の言語表記教育とみなす必要があると考えている。「考え方」は個人の内面的行為に属するものだが、最終的には、言語的・表記的に表出されてはじめれ伝達され、自分にも納得される。そして、かような表現技能こそ、言語教育とともに、数学教育も分担すべき教育分野であろう。

かつて、私も入学試験の採点に携わったことがある。まるで、殴り書きような答案をみるのは不愉快なことであった。到底見ていただくという答案ではなく、見せてやるから読んでみろ、といった答案が極めて多かった。恐らく、考えるのに精一杯で、それをきれいにまとめる余裕がなかったからだろうと、好意的に同情してはいたが、それにしても、高校数学の指導では、この点極めて躾が悪いと思わざるをえなかった。ある答案は、一ページにわたって式ばかりザーと並べてあり、最後に「裏」と書いてあるので裏を見るとまた式ばかりザー・・・。つなぎの言葉が全く書いてない。こんな答案は零点にしようと思って最後を見ると答が合っている。仕方がないから、始めから判読するように式を読み返す、といったことがよくあった。

まともな日本語が綴れないのは、国語教育だけのせいではない。論理的、説明的な文章の訓練は、普通教育としての数学教育の仕事でもある。考える負担を多少軽減して、思考を明確に文章的に表現する訓練は、普段の数学教室でやってよいことである。上のような、数学的言語障害は、論証幾何がなくなってからとみにひどくなったように思う。

私は、教師志望の大学生の授業のおり、黒板で、角の二等分をやってみせて、いま私のやったことを文章で書いてみなさいと言った。回答を見て驚いた。「コンパスをひらいて、針の端を点Oに立てて・・・」といった類のものが極めて多かったからである。われわれ数学教師はあまり意識しないが、数学では、日常文とはかなり違った、いわば数学的方言、あるいは数学的文体を使っているので、生徒にもそれに慣れさせる必要があるのではないかと思った。それは、数学をやるのに必要

なだけではなく、時として、日常的・社会的生活にも有用な表現法となっている。

はっきり言って、今の高校教育は、受験数学に方向付けられて、かなり偏った数学観のもとに行われている。それは、将来、科学技術者・数学者になるものには、必要なものかも知れないが、大多数のものには、どこか別世界のことのように受け取られているであろう。数学を普通の生徒にも我がことと感じられるような形に構成し直すことが、これからの急務であろう。数学的文章、文体に慣れさせることもその一つの手だてであろう。

（3）数学教育で残るもの

今の算数・数学教育が、どれほどの成果を挙げているかを、知ることは難しいが、はっきり言えることは、今の数学教育は、かなり多くのものを数学嫌いにしていることは確かなようである。私には、数学が余りできなくても数学が好きになるようにする数学教育ならばともかく、数学を嫌いにするために数学を教えているように思われる。この点で、先般おこなわれた数学教育国際調査の結果は極めて深刻である。日本の子どもは数学はできるが数学は大嫌いだという結果だからである。

注意すべきことは、情緒的なものは認知的なものよりも、はるかに永続的に強力に人間の行動を支配するということである。何を習ったかということは忘れても、その授業が楽しかったことは何時までも覚えているものである。そして、その楽しかった記憶は、やがて学習した知識をもう一度やり直すとか、より発展させるとかするときの動因になるであろう。しかし、できるが嫌いだというのであれば、今できることもやがて忘れ、再びやる意欲もでなくなることを予想させる。

わが国の今の数学教育の奇妙な現象は、子どもを受験で脅して勉強させていることの結果であることはあきらかである。学校、とりわけ高校では、これは受験社会のやむを得ない現象と考えられているかも知れない。また、教授法の問題として、その改善が考えられているかも知れない。しかし、私はこれは、単なる教授法の問題ではなく、高校の責任において対処すべき、カリキュラムの問題であると思っている。数学者教育ならばともかく、普通教育における数学教育であれば、今の数学教育は、教授法のみならず、教育内容も編成し直すべきであろう。そして、生徒が意欲的に取り組める形にせねばならないであろう。最も重要なことは、内容を身につけるというよりも、内容の学習を通して、数学に対するある種の永続的な好感をもたせ、将来必要に応じて、適当な数学の学習を再開できる知的情緒的態勢をつくってやることであろう。本当の教育成果は、かような形のものであろう。

2．初等教育と高等教育の理念的対立

（1）中等教育大衆化の経緯

教育学者には常識的なことであろうが、小学校と大学とは歴史発生的に全く関係のないことであった。今日、極めて安易に「小中高一貫」教育と言われているが、その重大性には全く言及されることがないのは、私には、不思議なくらいである。初等教育と高等教育の理念的相違は、それほどたやすく解消されるべきものではない。単に学歴社会における偏見を是正のための対症法として、両者を安易に統合ないしは混合することは、両者をともに駄目にするであろう。

初等教育（小学校）は本来庶民教育で、すべてのものが一人前の人間として社会に参加できるようにするためのものであった。後には（西欧では恐らくペスタロッチ以後）すべての人間に共通の「基礎陶冶」と考えられるようになったが、本来は「よみ・かき・そろばん」ができて、社会に出て困らない人間にすることが、初等教育の目的であった。高等教育（大学）は、始めから学者・指

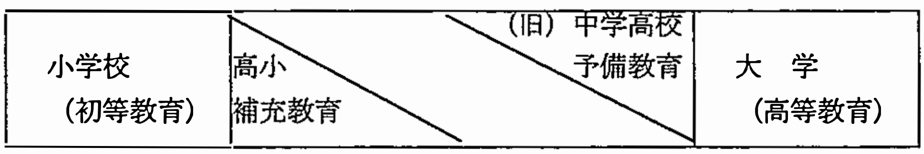
導者の養成の機関として生まれたものであった。そこでは、日常生活や普通の社会生活には縁遠い知識が教育されていた。今日の大学に牢固として現存するアカデミズムはその伝統的理念である。

私はかつて、その理念的変容を次のような図式で示したことがある[2)]

①

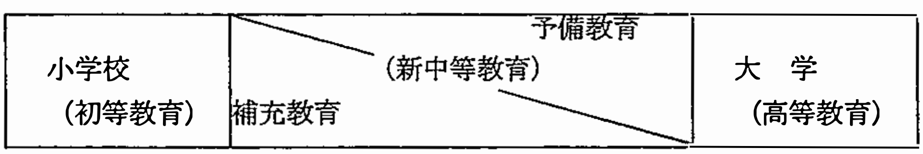
図①は、教育理念の発生期の状態を示したつもりである。初等教育と高等教育とは何の関係もない。

②



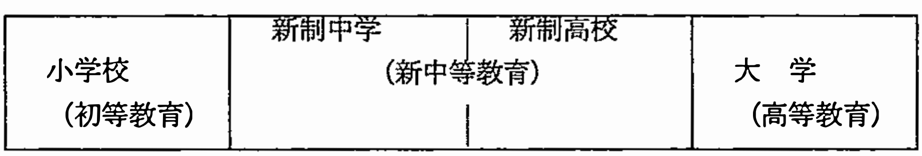
図②は、社会の進展とともに、初等教育の補充機関として高等小学校ができ、より高い水準から学問研究ができるための予備教育としての中等教育（わが国では旧制中学・高校）が発生したことを示している。

③



図③は、社会の進歩とともに、この両端からの拡充が合体したことを示している。

④



図④は、現状を示す。ここでは中等教育の概念が図②とは異なっていることに注意したい。中等教育が前期（新制中学校）と後期（新制高等学校）に分かれているが、９５％の子どもが高校まで進学するようになった今日では、中等教育は、昔の初等教育の補充と、高等教育の予備との二つの役割を持たされた。両者は、教育理念的には容易く統合できないものである。

今日理念的に最も混迷しているのは、中学校であろう。それは義務教育としては小学校と、中等教育としては高校と理念を同じうしているからである。高校の数学教育の理念の混迷も、このような安易な理念の合体に起因している。そしてその実際的結果がいわゆる「中等教育の大衆化」である。

これに関連して、次の二つの節で二つのことを注意したい。

（２）数学　vs.　教育

一つは、今日の中学校のカリキュラムの性格である。それは、全く新しいものとして構想された

のではなくて、むしろ安易に、旧制の高等小学校よりも旧制中学校の性格を受け継いでいるということである。私は最近、昔の「高等小学校の算術」と今の「中学校の数学」との比較に興味をもっている。今となっては、資料的には教科書の比較しかできないが、恐らく両者とも数学教育としては成功的ではなかったであろうと推測している。昔の高等小学校では全科担当の師範出の教師が算数を教えたが、内容的には教えきれなかったであろうと思っている。現在の中学校は大学で数学を専攻した、いわば数学者の申し子が数学を教えている。確かに数学はできる教師だが、ひょっとしたら、子どもの全人的発達を見落としているのではないか。そうでなければ、前述の調査にみられるように、これほど多く数学の嫌いの生徒が出てくるはずがない。

私は次のように推測的結論を出している：

「教育学を知っているが、数学をよく知らない教師によってなされた数学教育（高等小学校算術）も、数学を知っているが、教育学をよく知らない教師によってなされる数学教育（中学校数学）も、いずれも充分な成功をもたらさない。」

（3）カリキュラムの程度のちがい・質のちがい

次に、こうした理念的齟齬に由来するカリキュラム上の問題を、単に数学内容の程度の問題ととらえて、程度を下げることによって対応しようというのは間違っていることを、ここで指摘したい。十年毎の学習指導要領改定の原理は、「難しいことは一切やらない。」ということではなかったか。つまり、改定毎に難しいとされる内容は削減または軽減または先送りされるのがつねであった。

かつて学習指導要領の改定のあと、それが実施されたころ、私は親しい中学校の校長さんに伺ったことがある。「指導要領の改定で数学が易くなり、みんなが数学をやるようになりましたか。」と。ところが、「とんでもない、できない子はいくら程度を下げてもできないし、やらない。それどころか、できる子が数学を馬鹿にしてやらなくなりました。」

ということであった。結局、程度さげてもあまり効果はなかった、いや逆の効果があったということであった。同じことは、今高校で必修になっている「数学Ⅰ」についても言えそうである。

以前数学を余りやらなくてよい生徒のために、一番易い教科目として、「数学一般」が設けられたことあったが、生徒も親もその教科書を持つことをきらった。その教科書は、数学ができない子だという象徴だと考えられたからである。結局、いろいろな程度の異なる「数学Ⅰ」を全員が持つことになった。しかし、問題は程度ではなく質の違いでなければならない。程度は比較され、差別の原因になるが、質は独自の教育目標に関係しているから、比較の対象にならない。高校数学の今回の「数学基礎」も、固有のよい質をもったものとしないと、同様の運命をたどるのではないかと心配している。

「難しさがなければ、学習はなされない。」とフランスの数学教育学者ブルッソー(G. Brousseau)は、その教授学の書物で公然と言っている。勿論、一概に難しければよいというのではない。難しさは教育的にみて罪悪ではなく、学習に欠かせないもの、学習に利用すべきものである。難しいことは一切やらないのかと思われる、今の算数・数学教育思想は、決して健全なものではない。

今の中学・高校数学の問題点は、程度ではなくその質である。できない子にはできるこのクズみたいなものを与えておけばよいというかのごとき思想が基本的に反省されねばならない。文科系のものには理科系の数学の端切れみたいなところを与えればよいと考えられているのではないか。

これは、教師養成の問題にもかかわる。何時、何処で読んだか忘れたが、アメリカのある雑誌で「理学部の数学は歯のたたないステーキであり、教育学部の数学は肉の入らないスープだ」とかいてあるのに苦笑したことがあった。それはともかく教師養成の教育学部の数学は、理学部の数学と

程度においてではなく、質において異なるべきだと思うが、具体的にどうしたらよいかは、今のところ私には大した成案はない。ただ、多少の意見はあるので後から述べたいと思っている。

3．教育における学問観

（1）数学学習の基本的動因

わが国の数学教育の大先達ともいうべき、藤沢利喜太郎先生の書物を読んでいて、私には以前から奇妙に思われることが一つあった。それは、藤沢先生は、算術では理論性や厳密性をかなり大胆に排除し、実用性・実際性を推奨されていながら、幾何では、理論的厳密さを毫もゆるがせにしないという菊池大麓先生の方針に賛同しておられることである。恐らく、少なくとも脳裏では、藤沢先生には、算術は庶民の教育材、幾何は知的エリートの教養のためのものという、教育に対する二分法があったのであろう。

これは社会階層の区分だとか、知的階層の区分とか言って、時には非難されるかも知れない。しかし、私は、これは、数学学習に対する要求ないしは動因の区分であろうとあろうと思っている。それは数学という学問が持つ、本来的な性格に由来するものであろう。この性格は、大きくわけて二つに分けられると思う。一つは理論性、もう一つは実用性である。数学教育では、そのいずれも種々の程度に考慮されねばならないが、個々の子どもにとっては、その生来的・環境的な種々な理由から、そのどちらかが強調されることはあるであろう。数学の理論性に興味を持つ子もあれば、生活上その他の実際的の必要性から、無理にでも学ばねせねばならないこともあるであろう。

しかし、それとは別に、数学の本性に由来しない学習動機もあると思う。私の（旧制）中学校時代でも、幾何のまともにできる者はかなり少なかったが、ともかくそれは学ばれていた。その動機は多少の理論的興味であったかもしれないが、決して実用的要求からではなかった。それはもっと素朴な衝動によって支えられていたことを否定できない。例えば、私のように、田舎の貧しい生まれで、中学校へ行けるのは稀にみる幸運であると感じていたものは、必要か否かを考えるよりも、かような難しいことを勉強できるのは誇らしいことであった。いわば一種のエリート的誇りが、学習を支えていたと反省している。

そのような学習動因は、よいわるいは別として、今は普通の中学校ではあまり褒めたものではないと考えられているかにみえる。勿論、その優越感は、その実質性と謙虚さに裏付けられねばならないが、スポーツや芸能ではエリート教育が公然と許されているのに、数学ができるといったような知的エリート的優越感は何か罪悪視されているようにみえるのは、どうしたものだろう。今の数学教育は、子どもから、時には動物的とも見えるほど素朴な、学習の基本的動因や衝動を奪ってしまったような気がする。

（2）数学の理論性と実際性

中等教育における数学は、歴史的にはその理論性に教育価値が置かれていた。とりわけ幾何（論証幾何）は知的陶冶に有益なものと信じられてきたことは、周知のところである。それは、アカデミズムへの出発点であり、大学への進学を予定されているものに、大学人がどうしても要求したい知的態度であった。

この牢固な伝統に対して、始めて戦いを挑んだのはご存知のJ. Perryであった。前述の用語を用いれば、学習動機の理論性に対して実用性を高揚したのである。当時のアカデミズムに異を唱えることは、今では想像もつかない困難な闘いであった。

私は、ここで、数学教育改造運動を巡る数学教育史を反芻しようとは思っていない。しかし、わが国の改造運動は、欧米のこの運動成果だけを、余り苦労することなしに受け取ったために、この運動の重要な側面を見落としており、あるいは誤解していることを指摘したいと思う。それに起因する禍根は今日の算数・数学教育にまで内在している。それは、実際性と実用性との混同という言葉で表現できるであろう。

Perryは確かに伝統的な数学アカデミズムへの最初の反抗者であったが、彼の引き起こした改造運動の本当の趣旨は、W. Lietzmannの言葉をもってすれば、学校数学において、ユークリッドに代表される「理論数学」と対等の位置に、ヘロンに代表される「実際数学」を併置することであった。単に生活に有用な数学をやろうということではなかった。[3)]

このことの理解には、数学における真理性の基準を何処に置くかということから反省しなければならない。それを「論理」に置くのが理論数学であり、「自然（事実・実際）」に置くのが実際数学である。この両数学は、人類の歴史において、古代から対等の位置をとって発展してきた。前者は「学者の数学」、後者は「職人の数学」とでも言えよう。中等学校数学では理論数学、学者の数学のみに偏向していたというのがLietzmannの主張であった。

わが国の改造運動では、少なくとも中等教育では、実際性を完全に無視するか、実際性を安っぽい実用性と混同したか、いずれかではなかったかと、私は予想している。これは、昔の中学校の数学教科書の研究から分かることではないかと思っている。恐らく、それは著者によって、帝大系のものと高師系のものとの違いとなって現れているのではないかと思っているが、今のところ実証のない、全く乱暴な予測にすぎない。

誤解されるのを恐れるので、二つのことを付け加えておきたい：

第一は、Perry は決して軽薄な実用主義者ではなかった。彼の有名なグラスゴー講演をよく読んでみれば、彼は、すべての子どもにそれに適した数学を与えようという極めて高雅なヒューマニストであったことが分かる。

第二は、私が恩師戸田清教授から教えられたことである。それは、ユークリッド幾何では、一見論理が真理の判定基準にとられているようにみえるが、実は根本において自然が真理判定の基礎になっている、ということである。「二点を通る直線はただ一本存在する」という公理は、少なくともわれわれの身近な自然界がそうできていることを踏まえている。実験・実測のような実際的検証手段を幾何の学習に持ち込んでも、それはユークリッド幾何の純潔性をけがすものではないであろう。論理だけが、真理性を保証するようになったのは現代数学である。

（3）学問は教育するか

東洋の伝統的学問観では、学問は、中国の古典「大学」にあるように「修身・斉家・治国・平天下」の手段であった。卑近な表現をすれば、昔は、学問をすると立派な人間になれるという確信があった。いまの学問は人間形成にとってどんな役割をもっているか。数学をやれば、立派な人間になれるのか。もっと一般的に学問は教育するか。アカデミズムは今日の社会で、教育とどんな関連をもっているか。

数学教育者は、教科の中でもとりわけ、自分の教科がそのような教育的効果を持っているかについて、あまり真剣に考えることはなかった。受験科目の寵児としてもてはやされることに甘んじていたのではないか。そして、今日の子どもたちの「数学離れ」に対して、ほとんどなすところのないのは、この無思想的体質をしめすものではないか。

私が戦中の学生時代に、微分幾何を習った恩師に、岩付寅之助という先生がおいでになった。こ

の方は優れた数学者であるのみならず、(国粋主義者ではあったが、) 偉大な思想家でもあった。私は、幾何の方はすっかり忘れたが、一つだけ先生のお話を記憶している。それは、英国のscience（サイエンス)、フランスのscience （シアンス)、ドイツのWissennschaftでさえ、いずれも概念的に互いに異なっている、まして東洋の「学問」をそれらと同じにみてはならない、と言われたことである。私は、今日の数学教育者は、「学問」を安易にscienceと同一視しながら、学問は一概に教育するものと考えているのではないかと思っている。何時だったか、私は教育大学協会のある会合で、「学問は教育するか」という題で、教育学部における学問の独自性に反省を求めたが、大した反響はなかった。

学問観の反省は、教育学部の独自性の問題に関係しており、教員養成の基本的問題でもある。教育学部のある教授に、あなたのやっておられる代数と理学部の代数とどんな違いがありますかと、多少皮肉をこめて尋ねたことがあった。「全く変わりません」というのが答であった。それはそれで結構かも知れない。しかし、教育学部では、数学は人間とどんな関わりをもっているかについての反省もこめた、数学の講義があってしかるべきではないか。そんなことは、数学教育法のものにまかせて、自分はアカデミズムの中に安住するというだけでよいであろうか。

しかし、学問と教育の関連については、歴史的に難しい問題があり、今でもそれは解決していない。

昔の文理科大学は、帝国大学とはちがった、教育研究の性格をもった大学となるはずであった。ところが、私の印象では、当初の文理科大学は帝大に伍するのに精一杯で、とても独自の学風を形成する余裕はなかったように思われる。それ以前からあった高等師範学校は、文理科大学創立以後は、それに付設された形になった。わたしの同窓生からは、いささか文句の出そうな言い方をすれば、高師の卒業生で教員嫌いなものが文理大に行き、文理大の卒業生のなからは、いっそう教員の嫌いなものが大学に残ってしまったように思われる。結局、高師型の独自の学問観は、模索されることなく、帝大型のアカデミズムの中に埋没してしまったと言えるかも知れない。そして、この種の学問と教育とのある意味での不調和は、今日でも学校教育に微妙な影響を与えている。

旧帝大出身のある人が、ある教育系の大学の学長となられてから、私にこう言われた。「前の大学（国立大学理学部）の学生は、私を自分たちのなれの果てだとみていたが、今度の（教育系）大学の学生は、私を自分とは全く関係のない異邦人のようにみている。」また、「学問は教員になるためには大して必要がないが、免許状を得るためやむを得ずやっているのだと、ここの学生は考えているようだ。」とも言われた。

ここには二通りの将来の教師が示唆されている。教育よりも学問の好きな教師と、学問と教育とは余り関係のないと考える教師である。

先般亡くなられた、元文部省図書監修官で、「カズノホン」の編集者でもあった前田隆一先生が、私にしみじみ語られたことを思いだす。先生はそれ以前に第八高等学校の教授でもあった。

「昔の高校には二通りの型の教師がいた。それは、学生をほったらかして論文ばかり書いていた教師と、あまり勉強せず学生と遊んでばかりいた教師である。それが、戦後新制大学にきりかわったとき、前者は多くの論文があって新制大学の教養部に、後者はそんな業績がなくて新制高校に配属になった。これが、戦後の学生紛争の原因ではなかったか。」　同様なことが別なかたちで、今の中等教育にも起こっているのではないか。

学問と教育との関係は、かなり微妙である。大学でよい成績のものがよい教師となるとは限らない。教師の学問的教養の在り方は一概に規定できないかも知れないが、それを究明するのが教育学部の仕事ではないか。とりわけ数学の場合、数学の本性に対する理解と、数学と人間性との関連に

ついての認識とは、数学がよくできるか否かに関わらず、すべての数学教師に必要な教養であり、かような教養を与えるのが、教員養成関連大学・学部の責任ではないか。数学を絶対視して子どもにその学習を強要するのも、数学を軽視して子どもの学習不振を放置するのも、基本的な数学観・教育観に欠けるところからきている。

戦後師範学校は戦犯的扱いを受けた。学生はかなり安易な手続きで教員免許状がえられ、だれでも安直に先生になれるようになり、正式の師範教育は「師範型」教師をつくるとして、むしろ敬遠されるようになった。しかし、かつての師範教育はそのよさ悪さを含めて、もう一度冷静に反省されるべき時が来ているように思う。そして　そのためにも、教育学部に固有で独自の学問観が樹立されねばならないと思っている。

4．高等学校数学教育理念の研究方法

（1）実践的反省法

高校数学教育関係者の間で、単に指導法やカリキュラムの問題だけではなく、その教育の基本理念にまで立ち到って反省しようとされていることに、私は深く敬意を表したい。これまでの高校数学教育では、むしろ受験対策に追われて、かような問題を真剣に考えようととする意欲は、むしろ乏しかったのではないか、そして、今やそれを考えないではおれない状況が、生まれてきたのではないか、と想像している。私も、大げさに言えば、高校数学の危機といったものを感じていた。そしてその最も大きい原因は、高校数学教育の教育思想的貧困さにあったように思っている。

今の高等学校は、旧制の中学校の体質をそのまま受け継いで、中等教育の大衆化の時代に応ずる自己改革を疎かにしてきのではないかと思っている。このような、昔と較べて圧倒的多数で、しかも多様な生徒の要求に応ずる数学教育を考えねばならない時代になると、人間にとって、しかも普通の人間にとって、数学は何なのか、彼らにとって、数学を学ぶことの意味・効用はなにであるかという、単純には答の出ない哲学的理念的問題を考えねばならなくなったのは、当然の成り行きかも知れない。

それにはいろいろなアプローチの方法がある。歴史的方法、社会学的方法、認知心理学的方法などなど、数学だけを専攻してきたものにとっては、かなり不案内な領域に立ち入らねばならないかもしれない。最近は「数学教育学」という分野も漸く開拓されて、これらのさまざまな方向からの考察もかなり多く見られるようになった。しかし、実践家からみると、これらの諸研究を具体的にとりいれたり、自分に学習指導に反映させたりするには、まだまだ距離があるようにみえるであろう。

理念研究といえども、手をこまぬいて考えていても不毛であろう。私は、むしろ「実践的反省法」とでもいえる方法を推奨したい。それは、私自身がしばしばやってきた「新教材の開発」という実践的活動を通しての反省である。具体例はあとで述べることにして、手法を一般的に叙述してみよう。

①　単元の構成：　ともかくまず、教科書や指導要領とは無関係に、自分で一つの数学単元を構成してみよう。そのきっかけは教科書や受験参考書の問題でもよい。それを一つの数学教材としていろいろな角度から学習単元として展開してみることである。始めは、いま教えている生徒に適しているか、教えられるかどうかに余りこだわらなくてよい。自分の好きなように、できるだけ初等的な方法で、できるだけ広く拡張したり、類似問題をつくったりしてみることである。

②　単元の適用：　できれば、折を見て、それについて授業をしてみよう。その後で、次のような

考察をしてみよう：

・生徒の現有する学力にどの程度適合したか。

・生徒はそれに興味関心を持ったか。

・生徒にとってそれはどんな価値をもっていたか。

・それはどれほど「数学的」なものを含んでいたか。

③ 単元の反省： 以上の反省に立って、教材の再構成をする。目的は、次の機会にもっとよい教材として生徒に提示できるものにすることであるが、それと同時に、それから示唆される教育的意味や価値を一般化して反省することである。

・数学の題材として健全であるか。その統合性、発展性、応用可能性の反省

・用いた用語や記号法は、人間の思考一般の展開にどう役立つか。

・それと類似の考え方は、他のどんな場合に応用できるか。

なお、二三の注意を付け加えておこう：

まず、このような実践は、一人でなく二三人の仲間と協同で行うのがよいであろう。多様な考え方が出てきたり、思わぬ発見があったりする。

また、できるだけ生徒の手作業（作図、模型製作など）をともなうような単元構成が望ましい。記号を動かして考えることの得意な子もおれば、物をいじりながら考えることの好きな子もいるから。

（2）具体例

（紙面の都合上、末尾の付録１．としたので、それを見られたい。）

（3）Wittmann の「本質的学習環境」[4)]

先般のICME 9で、ドイツのE. Ch. Wittmannは、「本質的学習の場（Substantial Learning Environment略して SLEs） なる概念を提唱した。これは、かねてから彼が提唱していた「教授単元（ Teaching Unit, Unterrichtsbeispiel)」の概念を拡張したものであり、私の上述の「実践的反省法」と基本的な考え方において、極めて類似したものと考えている。彼の講演は、湊三郎氏によって訳されているので、それによって、彼の述べている所を紹介しよう。SLEsとは、彼自身の解説によれば、次のような性質をもった単元である。

《 （１）算数・数学指導の主要な目的、内容、原理が或る水準において示されていること、

（２）この水準を越えた重要な数学的な内容、過程、方法と結びついており、数学的活動の豊かな源であること。

（３）柔軟性をもち、個々の学級の特殊事情に合わせることができること、

（４）算数・数学指導に関する数学的、心理学的、教授学的観点を統合し、実践的研究の豊かな場を形作ること。 》

彼は、この講演でもいくつかの事例を紹介しているが、この種のSLEの開発のために、「mathe 2000」というプロジェクトを建ち上げている。

上の４つの性質を、私なりの理解を平易に表現すれば、

（１）は、数学教材として完成していること、

（２）は、数学的な発展性をもっていること、

（３）は、学級・生徒に応じて変えられること

（４）は、教育学的に健全なこと

を要請しているものと思われる。

しかし、このような要請はどこからできたか。それは、一つの数学教育「理念」とも言うべきもので、この講演の眼目であったかも知れない。しかし、それは（申し訳ないが）まだ思想的に未熟なわが国の数学教育界では、かなり高遠な理論として受け取られるであろう。とりわけ、講演の主題となっている、「生命論的過程（systemic process）」などは、最近のエコロジー的視点にも通ずるもので、機械的詰め込みに狂奔する数学教育の現状からは、きわめて縁遠いものと受け取られたかも知れない。

私は、いささか俗っぽい観点から、彼の視点を受け取っている。

まず、彼の考えの根底にあるものは、これまでの伝統的学校数学教材をどう教えようとかというのではないことに注意したい。それを一応ご破算にして、改めて新しい教材を構成しようというのである。勿論、それを無視するのではないが、それは、新しい教材の中へ、必要とあれば適切に位置づけるだけのことである。

なぜ、かような革命的とでもいえる教材改革が必要とされるか。これこそが数学教育の「理念」の問題である。私は、Wittmannのいくつかの論文を読んだが、これについて彼が積極的に語っているところをまだ知らない。何か、ドイツでもそれをはっきりと語れない事情があるかも知れない。かつてドイツの雑誌で、「数学教育などは学問ではない」と公然と言う数学者の発言をみたことがあるし、日本でも、G. Polya　が「数学教育はscienceではなく、artだ」といったのを、わが意を得たようにひけらかす数学者がいた。そうした、アカデミカルな状況のなかで、「すべての子どものための数学」を学的に構成しようというということは、かなりの勇気がいることである。それには、まさに毒をもって毒を制するの類の冒険になるかも知れないが、この観点からの別なアカデミカルな理論が必要である。「生命論」はそれかもしれない。

今回、日本でも、高校数学教育の研究で「理念」の問題をとりあげると聞いて、失礼ながら、私は日本の数学教育もやっとそのことの重要性に気付いたかと思った。恐らくそれに気付かせたのは、生徒たちであろう。受験に必要なものというだけで、有無を言わせず数学を押し付けられるのに反撥するような子どもが増えたからである。「春秋の筆法」をもってすれば、かような生徒を育てことが、戦後の数学教育の唯一の成功であったかもしれない。

５．結語

私が具体例（付録１）で示した単元は、ふと意識された一つの小さい事実から、出発して私の力の範囲で、自分の関心を次々の発展させたものである。そこには、次のような活動がみられる。

（１）次元的類推など類似性の追求

（２）数的一般化（文字・記号の使用）

（３）広範に適用できる用語の構成

（４）意外な発見、（中には手に負えないような）意外な問題の意識

これらは、数学研究者ならば、普通に経験することであろうが、このような、いわば数学的創造活動は、初等数学の範囲でも体験させられることである。しかし、今の数学教育は、このような活動をひどく無視している。中学・高校で、子どもに、数学的問題をつくらせたことがあるであろうか。

さて、このような活動を生徒ともに展開することによって、われわれは彼らに何を与えうるであろうか、あるいは何を与えることをねらいうるであろうか。それは、「知識」というものではないように思う。それは、一種の「意識」というものかも知れない。C. Gattegnoの Only awareness is educable.（意識することのみが教えうることである）という難解な言葉は、このことだったかも知れないと、今にして思う。 そして、それを与えることが、数学教育の基本的理念であろう。[5)]

この理念を言語的に形式化することは極めて難しいが、あえて言ってみれば、少なくとも次のようなことが含まれているであろう。

第一：数学では問題を解くことよりも、問題をみつけること、とくに、ある意味で良質な問題をみつけることが大切である。

第二：よい問題とは実用的に役立つこともあろうが、それ自身の価値をもっていること。例えば、理論的な美しさ、多くの問題を解く解決力、多くの問題を展望できる統合性など。

第三：かような問題の追求は、音楽や美術、スポーツと同様、人間に固有の尊い活動すなわち文化であること。

第四：例えば、正方形－立方体を「単位体」、頂点－辺－側面を「多次元側面」といったように、人間は言葉によって主観的・客観的世界を統合し、それによって、それらの世界の理解をより広くしていること

教師は何から何まで与えることはできない。生徒は自分で自己発展するものである。教師はその発展のきっかけづくり、方向付けに関与できるだけである。そして、それができれば、教育は成功である。学習過程のどこかで、数学をやることの価値を自覚させることができなければ、どんなに大量に知識や技能を与えても、数学教育は失敗である。その類のものは、学校を出れば急速に忘れられる。端的にいえば、数学の言語的・記号的・論理的秩序性を、自分なりに鑑賞・創造することの重要性を教えることは、実用的有用性を教えることと同様に、いやそれ以上に高校数学の基本的理念ではないか。これまでの数学教育は、この理念を育てるどころか、かえって打ち壊して来たという点で、ほとんど失敗を通り越して、罪悪的であったと言えよう。

付録１．具体例：「立方体の賽の目切り」より出発して

（１）出発点

ある算数教科書５年生用で、ちょっと興味をひかれた問題があった（付録２）。それは、子ども向きに表現されていたが、私は次のような問題に改めて、これを小学校教員養成課程の算数教材研究の資材として利用したことがある。

《立方体の全表面にペンキを塗ったあと、これを縦・横・高さの３方向に、平行な面でそれぞれ３等分すると、いくつかの小さい立方体ができる。これらの小立方体は、いくつかの面にペンキがついている。ペンキのついた面の数によって、これらの小立方体を分類すると、各類はそれぞれ何個ずつあるか。》

ここでは、この問題を出発点として、これをいろいろな方向に発展させた経験を述べてみよう。私の念頭には、二つの指針があった。

第一は、私の敬愛した、故 Caleb Gattegnoの次の言葉である。これは、私の若い頃、昭和34年2月、彼が来日したとき、大阪で行った講演で聞いた言葉である。

Start from small things and develop, develop! Mathematics is like that.

（小さいものから出発して、それを何処までも何処までも発展させよ。数学とはかようなもので

ある。）

第二は、S. I. Brown & M. I. Walter の What - If - Not？（でなけりゃどうか）という「問題設定の技術」である。それは、次のように５段階に要約されている：

１．出発点を考える　２．属性の目録づくり　３．What - If - Not?

４．問題設定　５．問題分析

（詳しくは、私どもの訳した次の書を参照されたい：「いかにして問題を作るか　問題設定の技術」東洋館出版、1990）[6)]

出発点は勿論たまたま出会った上の問題である。これを、

「立方体を平行な面で３方向に３等分する」

と要約してみると、この命題はいろいろな属性をもっているが、ここでは「立方体」「３等分」という二つに注目してみよう。まず、

Ⅰ．「３等分でなければどうか？」次に

Ⅱ．「立方体でなければどうか？」という二つの観点を採り上げよう。

（２）Ⅰの展開：m等分への発展

例えば、５等分の場合：

ペンキが３面についたもの			：８	＝８
〃	２面	〃	：12×3	＝３６
〃	１面	〃	：6×3^2	＝５４
〃	０面	〃	：3^3	＝２７
			計	１２５個

例えば、２面にペンキのついた小立方体は、もとの立方体の各辺の切片を含むものだが、両端のものを除かねばならない。各辺から３個出るので、それを辺数倍（１２倍）している。

一般に、m等分の場合：

ペンキが３面についたもの	：	8
〃　２面	：	$12(m-2)$
〃　１面	：	$6(m-2)^2$
〃　０面	：	$(m-2)^3$

ここで当然のことながら、

$$8+12(m-2)+6(m-2)^2+12(m-2)^3=m^3$$

という関係に気付く。係数は立方体の頂点、辺（稜）、側面などの数であることに注意。

このことは、すべての次元で言えるのではないかと予測される。この式は、関数論でよくやられるように、m^3を $m-2$について展開したものである。

（３）Ⅱの発展１．：　n次元への拡張

上は、３次元の立方体についての切断であったが、２次元でそれに相当する図形正方形についての問題にならないか。すなわち、

《正方形の周囲にペンキを塗った後で、これを縦・横の２方向にm等分するとき、どのように縁取られた小正方形がそれぞれ何個ずつできるか。》

(正方形をペンキに浸けるのではなく、この度は周囲を縁取るのである。)

結果は、ペンキが 2辺についたもの　:　4

〃　1辺　〃　:　$4(m-2)$

〃　0辺　〃　:　$(m-2)^2$

確かに、　$4+4(m-2)+(m-2)^2=m^2$

１次元（１本の線分）の場合での確認はトリビアルであろう。

以上は、３次元，２次元，１次元と逓減的に類似を進めたが、より高次の場合に拡張するとどうなるであろうか。

先ず「４次元の立方体を３次元の面で４方向にそれぞれ平行に切る」ことになるが、もはや、３次元的直観はきかない。「立方体」というのも３次元的であり、面というのも２次元的である。そこで、立方体、正方形、線分、点などを統一する言葉として、「単位体」ということにし、側面、辺、頂点などといった次元に固有な言葉を、「各次元の側面」と呼ぶことにする。また、「ペンキを塗る」という３次元行為も４次元以上では通用しない。

上の問題は次のように表現される：

《４次元単位体を、３次元面で４方向にそれぞれ平行にm等分するとき、多くの小単位体ができる。それらを、もとの単位体の３次元側面でもあった側面の数によって分類すると、それぞれ何個ずつできるか。》

ここで、また、いくつかの問題が生まれる。

① n 次元単位体、とくに「４次元単位体」とはどんな図形か。

② 小単位体がもとの単位体の側面でもあった面をいくつ持っているかは、どうして判断するか。

①について：

「点」が一定の長さだけ動いて「線分」ができ、「線分」がそれと垂直の方向に同じ長さだけ動いて「正方形」ができる。さらに「正方形」がそれに垂直の方向に同じ長さだけ動いて、「立方体」ができる。もし、「立方体」が第４次元の方向に同じ長さだけ動くとすれば、「４次元の単位体」ができるのではないか。

②について：

まず、各ｒ次元の側面の数を求めよう。それを $(m-2)^r$ 倍すれば、ｎ－ｒ個の面にペンキのついた小立方体の数が求めると予想されるからである。

例えば、「４次元の単位体」の「２次元側面」の数は、立方体を動かすことによって、次のようなることが分かるであろう。

始めの側面の数（６）＋終わりの側面の数（６）＋辺が動いてつくった側面の数（１２）で、計２４個である。

一般に、ｎ次元単位体のｒ次元側面の数をＳ（ｎ，ｒ）としたら：

漸化式：　$S(n,r)=2\times S(n-1,r)+S(n-1,r-1)$　　$n>r>0$

$S(n,n)=1$

$S(n,0)=2\times S(n-1,0)$

一般項：　$S(n,r)={}_nC_r\cdot 2^{n-r}$ である。

確かに、　$2\cdot{}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}={}_nC_r$ であることは、高校生にも容易に確認されよう。（しかし、私は、この一般項は、上の漸化式から計算的に出したのではなく、むしろn次元単位体の各次元の面の数は、m^nのm－2における展開の係数であろうという、上述の予想からえられたものであった。これについては以下＊の式を参照されたい。）

例えば、4次元単位体の各次元側面の数は、3次元単位体（立方体）のそれから、この式を用いて計算される。

0次元：8×2＝16、

1次元：2×12＋8＝32

2次元：2×6＋12＝24

3次元：2×1＋6＝8

4次元：1

これは、前述の予測を裏打ちする。すなわち、次式で示すように、それぞれは、m^4をm－2で展開したときの、各係数になっている。

$$m^4=16+32(m-2)+24(m-2)^2+8(m-2)^3+(m-2)^4$$

一般に二項定理より、

$$m^n=\{2+(m-2)\}^n=\Sigma\, r=0^m\, {}_nC_r\cdot 2^{n-r}\ (m-2)^r \qquad *$$

ここで、各次元単位体のそれぞれの次元の個数を、表にしてみよう。そうすれば、これは、「パスカルの三角形」と類似していることが分かる。

単位体次元	0	1	2	3	4	・・・
側面次元 0	1	2	4	8	16	
1		1	4	12	32	
2			1	6	24	
3				1	8	
4					1	
・						
・						

この表は、一方の端には1、他方の端には順次2^r（r=0, 1, 2,・・・）を置いて、後は「パスカルの三角形」と同じようにつくる。ただ上の二数を加えるとき、一方を2倍して加えている。このような言わば、「一般パスカルの三角形」をどう定義するかは明らかであるが、その一般項（二項係数にあたるもの）はどうなるかは、私には今のところ分からない。そのために上で、S(n,r)の漸化式から一般項を計算的に出せなかった。どなたか教えていただければ有り難い。

（4）Ⅱの発展2.：　座標の導入

当初の目的は、n次元単位体の各次元の面の数を求めることではなく、切断によってできた多くの小単位体を、ペンキについた面の数によって分類し、それぞれ何個あるかを求めることであった。各次元の面の数は、それを求めるための、手段に過ぎなかった。以下では、各次元面の数に関係なく、目的を達成する方法を考えてみよう。目的は意外に簡単に達成できる。

4次元以上では、3次元的直観はきかないので、もとの単位体や、それからできるそれぞれの小単位体が、「ペンキのついた面を持っている」といったような3次元的表現はできなくなるが、座標を導入すると、そうした言葉を使わなくてもよいようになる。それを、まず、3次元立方体の5等分の場合で確認したあとで、4次元以上の切断の場合に応用しよう。

立方体の一つの頂点で、各方向の辺（単位線分）を5等分し、それぞれの区間に1 〜5の整数を与えると、(x， y，z) によって、今の場合、125個のすべての小立方体を示すことができる。例えば、

（1，1，1）や（1，1，5）は、もとの立方体と頂点を共有する小立方体で、もとの立方体と3面を共有する（すなわち、3面にペンキがついている。）

また、（1，2，5）は2面に、（1，2、3）は1面にペンキがついており、（2，3，4）は全くペンキのついていない小立方体を表す。つまり、ペンキのついた面の数は、1または5がいくつあるかで分かる。こう考えれば、ペンキのついた面の数で小立方体を分類したときの各類の数を求めるのは、組み合わせの問題である。

3面のもの：　$2^3 = 8$

2面のもの：　${}_3C_2 \cdot 2^2 \cdot 3 = 36$

1面のもの：　${}_3C_1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 54$

0面のもの：　$3^3 = 27$

一般に、n次元単位体を、平行な（n－1）次元の面で、n個の各方向にいずれもm等分したときできる小単位体で、もとの単位体とr個のn－1次元面を共有するものの個数は、${}_nC_r \cdot 2^r \cdot (m-2)^{n-r}$ である。 それは、n次元座標：(x_1，x_2，・・・，x_n) のn個の座標のうち、r個所だけに1またはnが来る小単位体が、r個の面を共有するからである。

（5）Ⅱの発展3．： 正四面体の切断

正方形、立方体とくれば、三角形、正四面体へのアナロジーをもとめることも自然だろう。

ここでは、余り長くなるからペンキ塗りはやめて、平行線、平行面による切断で、どんな図形がいくつできるかということだけを考えてみよう。三角形の場合は小学校算数向きで簡単すぎるから、ここでは正四面体を各底面に平行な平面で等分してみよう。正方形から正方形、三角形から三角形、立方体から立方体ができるとすれば、正四面体から正四面体ができると予測するのも自然だろうが、実はそうでない。

生徒には、次のような問題から始めるのが面白かろう：（ [ ] 内は答)

「・机の上に正四面体を想像しなさい。底面（机の面）と平行な面で、この正四面体の頂点の近くをきりとりなさい。きり口はどんな形ですか。また、どんな図形がきりとれましたか [正三角形、小さい正四面体]。

・ 残りの図形はどんな図形ですか [三角錐台]。

・だんだん深く切り取って、ちょうど真ん中できったとき、切り口はどんな図形ですか [正三角形]。

・もとの正四面体には、4つの頂点がありました。すべての頂点で、いまと同じように、何れもちょうど真ん中から、小さい四面体を切り取ると、残りはどんな図形ですか [？]。」

多くの子どもは、正四面体が残ると思うが、実は正八面体である。従って、もとの正四面体は、各底面と平行な平面で真ん中から切ると、４つの小正四面体と一つの正八面体に分割される。（少し言葉が適切ではないが、これを、便宜上「二等分する」、一般に「m等分する」と言おう。）

さて、正四面体を各面に平行な面で（上の意味で）m等分するとき、どんな図形がそれぞれいくつできるか。３あるいは４等分の場合に、生徒の協同作業として、実際にボール紙で模型をつくって考えてみるとよいであろう。また、それから一般の場合の答がえられるであろう。その際、今高校の数学教材となっている、数列の和の公式やΣの適用も必要になる。ここでは、答のみ書いておこう。

いろいろな方法があろうが、正四面体をm等分したとき、一番上の小正四面体から数えて、k番目の層をつくる三角錐台から始めるがよいように思う。これは、正四面体と正八面体からできている。その個数をそれぞれ $\triangle k$ 、$0k$ とすると、

$$\triangle k = k^2 - k + 1 \qquad 0k = 1/2 \cdot k(k-1)$$

従って、m等分してできる正四面体、正八面体の個数をそれぞれ ${}_mS_4$、${}_mS_8$ とすれば、

$${}_mS_4 = \Sigma_{k=1}{}^m \ \triangle k = 1/3 \cdot m(3m-1)$$

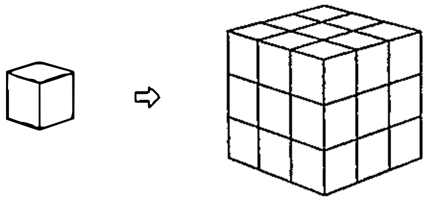
$${}_mS_8 = \Sigma_{k=1}{}^m \ 0k = 1/6 \cdot m(m-1)$$

正四面体の切断は、必然的に正八面体の切断に関連していることも興味深い。例えば、正八面体を、それぞれ底面に平行な４つの面で２等分すると、８個の正四面体と６個の正八面体に分割される。

付録２．大阪書籍版、小学算数５上、（昭６０）pp. 33～ 34 より

⑥ 立方体の数を調べましょう。

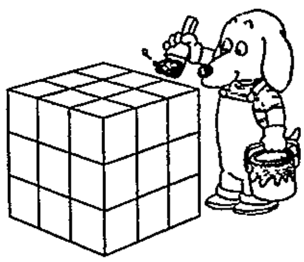
(1) １cm³の立方体を，たて，横，高さに３つずつ積み重ねて，１つの立方体をつくりました。



① 立方体をつくるのに，１cm³の立方体が何こいるでしょうか。

② 立方体の体積は何cm³でしょうか。

(2) できた立方体の６つの表面すべてに，青い色をぬりました。



① この立方体を，もとのように１cm³ずつの立方体にくずすと，次のような立方体がそれぞれいくつあるか，見当をつけてみましょう。

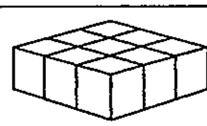
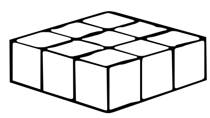
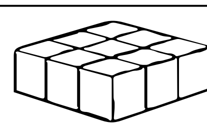
㋐ ３つの面に，青い色がぬられている立方体

㋑ ２つの面に，青い色がぬられている立方体

㋒ １つの面だけに，青い色がぬられている立方体

㋓ どの面にも，青い色がぬられていない立方体

② ①で見当をつけた立方体の数を，上，中，下の３だんについてたしかめ，次の表にかき入れましょう。

		㋐	㋑	㋒	㋓
上のだん					
中のだん					
下のだん					
合　計					

参考文献

1）岡本夏木：ことばと発達　（岩波新書、289、1985）

2）拙稿：数学教育の有効性　（奈良教育大学紀要、35巻、２号、1980）

3）拙稿：「実際幾何」の伝統　（広島大学教育学部紀要、第１部、15号）

4）Wittmann, E. Ch.: Developing Mathematics Education in a Systemic Process (ICME 9 Plenary Lecture,　湊三郎訳：算数・数学教育を生命論的過程として発展させる、日数教会誌２巻12号、算数教育49－6,2000)

5）Gattegno, C. : the common sense of teaching mathematics (Educational Solutions, 1973)

6）Brown, S. I. & Walter, M. I. : The art of problem posing (Lawrence Erblaum Associates, Inc. 1983)　平林他訳：いかにして問題をつくるか、東洋館出版、1990)

高等学校数学教育理念検討会（第１回）での意見

三輪　辰郎
筑波大学名誉教授

ここでは、表記の会での発言を中心に、私のささやかな意見を述べさせて頂くことにする。

高等学校数学教育について検討するのであれば、その現状をできるだけ多方面から調べて問題点を明らかにし、その解決策を提言するという形を取ると考えるのが自然であろう。しかし、この会の主題が特にその理念についてということであるから、それ以上のものが要求されるのではあるまいか。理念という言葉は難しいので、ある辞書を引いてみると、「あるものごとについての、こうあるべきだという根本の考え」と書いてある。つまり、現実の問題をありのまま考えると言うより、それを考える際の根底となる「あるべき姿」を想定する根本的な考えを指すということであろう。したがって、先ず、その立場からの考察が必要であろうと思われる。私の意見もそれに触れることから始めることにしたい。それに続いて、現在の問題点も含めて考えるための枠組みと言えるものを示し、それに関連して少しばかり意見を述べさせて頂くことにしたい。

しかし、私は現職を定年で退いてから十年に近く、現在の問題点に関する情報を得ることが極めて困難なので、皆様の関心と合致するかどうか、また、誤り、思い違いが多いことを非常に恐れていて、大変心細いのが本当のところである。さらに、手許に文献等が少なく、引用文献を明示できないことを恐縮に感じている。これらの点について、予め御了承を得たいと思う。

最後に、ここで述べることの中に、私の浅慮のために皆様のお考えに反しお気にさわる点が含まれ、また、当日の会議で皆様のご意見を伺った後で考えたこともあることをお許しを願いたく思う。

１．高等学校は何をするところか

高等学校数学教育を考えに当たっては、先ず、参加者の間で、「高等学校は何をするところか」について何らかの合意が必要であろうと思われる。学校教育法には高等学校の目的が述べられているが、その意味するものが現状を律しているかどうか、疑わしいように思われるのである。実際、「中学校教育の基礎の上に」はその通りとして、職業課程を別として、「高等普通教育」と言えるものを行っているのであろうかという疑問である。

明言すれば、高等普通教育というのであれば、それを終了（つまり、卒業）した段階で何かの資格の基礎となり得るものが身に付いているべきではなかろうか。手近な例であれば、高校卒業は大学に進学するための基礎資格になっているはずであり、大学に進みそこで活動する基礎ができているべきなのである。また、「・・士」という国家的あるいはそれに近い資格がいろいろあるが、その多くについて基礎的要件になっているように思う。このことは、高校卒業によって、中学校卒業を越える何らかの基礎的資格というものを獲得していることを前提にしていると考える以外にないのである。通信制等いろいろな課程で、年令に関わらず、高等学校課程を履修する人が少なからずいるのは、このことを裏付けていると思われる。そこで、高等学校は、単に、<u>中学校卒業後の16〜18才の青少年を教育する場であるということではない</u>というのが本来というべきではないか。

上の「本来のこと」と言うのは制度的なことに過ぎず、現状は下線のようになっていると考えるのが普通かもしれない。そうであるなら、そこでの教育の目的が明示されなければ、その存在理由がなくなるのではないか。

それにしても、「分数のできない大学生」という言葉の持つ衝撃は極めて大きいと言わざるを得ない。それを１つの表面的な現象に過ぎないと言って済ますわけにはいかないと思う。その著書を

読めば分かるように、少なくとも数学に限って、高校を卒業して大学に進んだ学生の中に、高校はおろか小学校レベルの問題も解けないものが少なからずいるという事実があり、しかも、それは例外的な事実であると言うことができないことが明示されている。数学に限ってみて一他の教科、あるいは、教科外のいろいろの面についても言えることかもしれないが一高等学校は、制度的な本来の姿からかなり離れていると言うことができるのではないか。

こうして、始めの、高等学校とは何かを考えることについて、どういうスタンスを取るかが問題になるのではないか。それは、大きく、本来の姿を求める立場に立つのか、現状を追認してそれを改善する立場に立つかの、2つに分けられると思う。

私は、前者の立場に立ち、そこへ一歩でも近づけるよう関係者が努力するという考えを取りたいと思う。当然、それは何らかの基準を設定し、それへの到達を義務づけることを前提する。それは困難が非常に多いことは事実であり、実行においても、実効を上げ難いことにおいても、厳しいことが考えられる。それをどのように克服して行くかが課題ということになる。

2. 数学、教師、生徒、そして、教育環境

教育、特に、教室における教育一教授と指導一を考えるとき、それを構成する要素として、教師、生徒という人間の存在、そして、両者の媒介となる教育内容・教材(ここでは、言うまでもなく、数学)の3つを挙げるのが、教育学では普通のようである。私もそれにそれに従って、以下、これらを取り上げて論じていく。ただし、検討に当たっては、都合で順序を変えてある。

さらに、教育環境と言ったのはそれらを包み込むいっそう広いもののつもりで、社会ないし文化と言えるものである。これも大きな力を持つと言わざるを得ないので、それに触れることにしたい。

以下では、上記1で述べた私の立場に立ちながら、必ずしも「あるべき姿」だけを追うのでなく、現状をも考慮に入れ、問題点を探り、ささやかな考察を加えていく。

(1) 数学

①高等学校数学の全体的像

高等学校の数学が、小学校算数、中学校数学に続き、その上に築き上げられるべきものであることは論をまたない。しかし、その数学が全体としてどのようなものであるかは必ずしも明瞭ではないように思われる。実際、学習指導要領を見ると数学の項目が並んでいて、私には、高等学校数学全体としての展望が得難いように思える。周知であろうが、中学校数学については学習指導要領解説に、内容の骨格として、数の拡張、ユークリッド空間の把握、関数の理解、文字式の使い方の基本の会得、演繹法の理解が挙げられていて、何を学ぶかが明らかになっている。ところが、高等学校数学でそれに相当するものは示されていないのである。今回だけでなく、これまでもなかったように記憶している。それは何故なのか。科目選択という仕組みを取っていること等、いろいろの理由があろうが、そうした点を考慮しても、全体像を明言することは、教育に当たるものが、全体の見通しをつけ、内容を構造化するのを可能にする点で望ましいと思うのである。

この点に関して、二つのことを注意して置かなくてはならない。その一つは、中心概念の考えである。これは昭和30年台始めの学習指導要領に示されたものであって、指導の項目、例えば、無限数列や微分法を考える先に、極限や局所的変化といった中心となるアイデアを明示し考察するものであったと記憶する。そういう中心概念を明らかにすることは、上記の全体的な見通しをつける上でも、内容の構造化の上でも有効であると思われる。

他の一つは、故河田敬義教授の提言である。教授は、学校数学の内容として、ギリシャ時代の演繹的数学(幾何学)、近代の微積分法、現代の公理的数学の三つを含み適切に組み合わせることを提言された。また、藤田宏教授は、新しい数理科学をそれに加えることを提案されている。これら

は卓見と言うべきであると考える。近代の微積分法にその前提となるヴィエタ、デカルトの文字式の使用を含めれば、恐らく高等学校数学の最も重要な内容はカバーされるであろうし、新しい数理科学は、実生活を含めて数学が果たす役割の大きさの理解に貢献するであろうからである。

②数学的なアイデアと、思考の数学的仕方

次に、高等学校数学で指導すべき内容にについて検討しなくてはならない。ここで、私は次のことを述べておきたい。

それは、数学的なアイデア、思考の数学的仕方に注目するのが大切であり、それを教育において重視すべきではないかということである。例えば、二次関数は、高等学校では、数係数よりも文字係数が強調されているように見える－教科書でも、センター試験でもー。これは、個々の関数よりも、関数の類を強調し、その類がどのような性質を持つか調べることを重視することを示していることの端的な表現ではなかろうか。これは、「集合で捉える」という数学的アイデアを重視する現れであろう。この種の数学的アイデアは、他にもいろいろあると考えられる。「極限」のアイデア、微分と積分に見られる「局所的と大域的」は、数列の漸化式とその一般項表現の関係をも含むと考えられよう。一方、思考の数学的仕方というのは、例えば、公理的な思考の仕方、数学的モデル化の考え方、常に統合や一般化を求める思考とそれを進めるための思考の方法のように、数学を進めているとき、私たちが日常に行っている思考の進め方そのものに他ならない。私は、こうした数学的なアイデアや思考の数学的仕方を身に付けることが個々の内容の理解よりもいっそう重視すべきではないかとさえ考えることがある。

ここで、１で取り上げた「分数のできない大学生」に関連して触れるなら、それらの大学生は２(1)①の中学校数学の主要内容を技能的面を除いて理解していないことが明らかである。したがって、ここで述べた数学的なアイデア、思考の数学的仕方の中でも、文字式の使用、演繹法を含む論証という最も基本となる部分が身に付いていないと言えるのではなかろうか。これらの内容は、理解を徹底することの非常に困難なものであることがよく知られていて、実際指導も難しいことは確かである。現状には、こういうところを踏まえ、中学校数学とは異なっていて、それからはいっそう進んでいるように、高等学校数学を構成し直すことを必要としている部分があるのではなかろうか。

（２）教師

①教師の役割

言うまでもなく、教室における教師の役割は非常に大きい。指導の内容と順序及び方法、また、評価の方法とその実行と結果を決めるのは教師である。もちろん、それは教師の独裁というわけでなく、生徒との相互作用・協同によって進められるのであるが、教師の役割の大きさは、どれほど強調してもし過ぎることはないと思われる。

教師の役割において、良い教室環境を創り出すことが、非常に大切であることを指摘しておきたい。私自身の経験から言って、同じ学年のクラスであっても、いろいろの意味で、授業が進めやすいクラスとそうでないクラスがあったことを覚えている。相性といったものかもしれないが、やはり、それぞれのクラスの持つ教室の雰囲気が違うということであろう。数学授業がそうした教室の中で進められるのであるから、それを創り出すことは、指導において鍵と言えるであろう。

良い教室環境というのは、結論的には数学の勉強に積極的であるような教室の雰囲気を指すのであるが、それはいろいろの局面があることに留意しなくてはなるまい。例えば、数学に対して肯定的である一数学が嫌なもの、学び難いものという否定的な態度でない一、数学的議論に対して肯定的であるーそういう議論そのものを嫌うことがない一、コミュニケーションが自由になされ、意見を述べることにリスクを感じない一自分の意見を述べたり、人の意見を聞いたり批判したりするこ

とが自由にでき、またそうすることがはばかられることがない一ような、教室の雰囲気である。こうした雰囲気は、まさに教師と生徒が作り上げるものであるが、同時に、作り上げられた今日の状況が明日の雰囲気を産み出すことも確かであろう。

②数学教師のあり方

御参加の先生方からお叱りを受けるのは間違いないが、昔次のような言葉を聞いたことがある。「数学の教師ほど楽な教師はいない。生徒との実力差は大きいし、数学の内容は変わるはずがなく、一回勉強すれば後は毎年同じことを喋ればよいのだから。」というものである。実験準備も不要、新しい事実を調べることも不要と言うので、他教科の教師からも羨まれたと言うのである。今日、これは馬鹿げた言葉であると退けるのは当然であって、このような状況が全く問題にならないとないと断言できることを期待するが、そうであろうか。

というのは、上の言葉の中に我々自身反省するべき真理が幾分かは含まれているのではないかと考えられるからである。例えば、実力差が大きいことは、生徒がどこを難しいと考えるか、どこで誤るか、またどのような誤った観念を持っているかを思いやることの難しさに導くことはないだろうか。数学の内容が変わらないというのは、指導内容でなくて、高等学校程度の数学そのものが変わらないということで、新しいもの、あるいは、これまでなかったものが出現するはずがないという高をくくった態度を含んでいるのではないだろうか。

生徒は毎年変わり、そのレディネスは常に検討するべきであるという事実、指導内容は項目というよりそこに見られるアイデアや方法の考え、教育目標についての考え方等は、数学教師の持つべき「教授的内容知識」であって、いわゆる「教科内容知識」と区別され、教師を他の職業(例えば、数学研究者)と分けるものであるという認識が十分なされているのは当然のことで、問題にしなくてよいと言えるだろうか。また、新しいものについての上の見方は、創造性開発の基礎とも言うべき「生徒が未知のものを見出す」のを励ます必要が叫ばれる今日、教師自身がそういう未知のものを見出す経験をあまり持っていないこと、さらに、生徒にそれができることを信じないということ意味するのではないだろうか。前者は、学部レベルの学生の中に、数学の勉強が「聞く、学ぶ」で、「自ら見つけ出す」のが含まれているとは考えていない者がいる事実からあり得ることのように思うし、後者はそうした発見を奨励しそれに導く指導のあり方が大きな力を得ているように見えないわが国の現状では止むを得ないかもしれないが、諸外国に幾多の事例を見ることができることを忘れてはならない。

かって、教育社会学の教授に次の話を伺ったことがある。「ある高等学校の数学の授業一それはベクトルの最初の授業であった一を参観したとき、生徒からの質問「何故ベクトルを取り扱うのか」に対して、教師が「それは学習指導要領にあるからだ」と答えた。」というものである。私の感想は「言うにこと欠いて、なんと言うことを」というものであった。これは、上に述べた昔の教師についての言い方と表現は違うが、裏にある思考は似ていると感ずるのである。

以上失礼な言葉を連ねたが、述べたことは、私の妄想であるかもしれないし、またそれを強く望むけれども、数学教師のカルチャーと言うべきもので、もしいくらかでも存在するとすれば、それをどのように改革していくかが課題であると思われる。そして、それが、就職前の教師教育と言うより、現職でいわば言わず語らずの中で受ける教育の中でなされることが大切であるように思う。

(3)生徒

生徒は学習の主体であり、彼らが積極的に学習しないなら、教育がなされているとは言えない。実際、どれほど優れた数学の内容を、教師がどれほど優れた仕方で教授を行ったとしても、万一、生徒が聞く耳を持たず学習をしないなら、その教育は無効という他ないのである。現在、かなり多くの学校で、生徒の態度が問題になっているのは、まさにこの点の危惧があるからであろう。した

がって、このことについて、真剣に取り組むことが最も緊急でしかも重大な問題であると思われる。

①生徒の数学への態度

新聞に出ている漫画に学校数学を貶めるに近いものがしばしば見られる。「あの嫌な数学の時間」といった表現である。これはある漫画家の思いつきと軽く考えることはできない。大新聞がそれを認めているからであり、それが生徒に跳ね返っていると考えられるからである。だから、かなり多くの生徒が数学に対し決して肯定的とは言えない態度一そのようにはっきりと意識しているかどうかは別として一を持っているのではないかと考えられる。この態度は、あるいは、昔もそうであったかもしれない。しかし、違いは、かっては、数学が大切であるという意識があった一たとえ大学入試の科目として決定的な重要さを持つという甚だ実利的ものであるとしても一ことである。今日こういう意識は全くないか、あるとはあるとしても極く薄いのではないか。高等学校生徒にとって、直接実感できる大学入試の科目の重石は極く一部に留まっているからである。

こうして、数学に対する肯定的一積極的とまで行かなくとも一態度が少なくなり、しかも、数学の重要性が生徒の実感に結びついていないことがそれをさらに強めているのではなかろうか。

さらに、次の事情もこれに加わると思われる。よく論証指導の困難の１つに「論証の必要性が分からない」が挙げられる。それは、何故論証をするかの必要性が分からないので、論証を学習する意欲をなくするということである。しかし、忘れてならないのは、その疑問が、実は論証が理解できず、それで勉強したくないという心理的嫌悪が根底にあって表面上「必要性が分からない」という形を取っていること、あるいはその可能性である。これはかなり支持されていると考えられる。そして、このことは決して論証に限るものでなく、数学の全般にわたるものと言うことができるように思われる。つまり、数学が分からないことを、数学の必要性が分からないという形で表現し、それを勉強しないでよい言い訳にしている心理的状況がかなりあると考えられることである。こうした生徒は、根底にある「数学が分からない」ことを「数学の必要性が分からない」に言い換えて、「数学を勉強しない」ことを心理的に合理化していることになっている。だから、彼らは数学を勉強しないことを何ら悪と考えることはなく、悪いのは必要性を理解させない教師の側であると自分を信じ込ませることになってしまっている。

数学を勉強しないことは、当然のことながら、いっそう数学が分からないことに導くのであるから、上で述べた状況をいっそう拡大した形で繰り返すことになる。つまり、拡大されていく悪循環である。もし、このことが正しいとすれば、そして、それが早期から始まると想定するならば一そして、それは、全くありそうもないことでなく、幾分かは真であると、私は考える一、非常に恐るべきことが起こっているのではないだろうか。早い話、「高等学校数学は、中学校数学の基礎の上に立って」という、私どもが考えを進める上での大前提があべこべになってしまっていることになっているではないか。上で言ったことは、中学校までに十分数学が分からなくなり、数学の勉強をする気もなくなっていることが基礎になっていることを意味するからである。

これが高等学校生徒の数学学習の現状を示しているものとは思われないが、全く架空と言うわけでもないように思う。現場におられる先生方にどのように御覧になっていられるだろうか、御教示を頂きたく思うものである。

②生徒の数学学習への動機付け一数学の面白さの実感と数学を分からせることと

上の①で述べたことは、生徒の数学学習に向けて動機付けを図ることに関わっていて、しかも、それが非常に大切な問題であることを示している。また、それに留まらないことも示し、その解決のためのヒントも見つけられるように思う。

数学学習に対する動機付けの方法の一つのとして、実生活での数学の有用性が挙げられることがある。小学校低学年の算数ならともかく、高等学校数学では、そうした実例を手近に見つけることは難しいのは事実である。例えば、実例の持つ背景ないし文脈の説明がかなり面倒で、それを理解

するのに時間がかかることが多いこと、しかも、それすらも現実そのものと言うよりかなりモデル化されたもので、生徒からは現実から遠いと感じられること、数学が高いレベルのものでないと利用するのが無理であり、一方それでは生徒の理解が難しいこと等が理由と考えられる。モデル化という重要なアイデアとその重要性が教授され、生徒に理解されていれば、上記の困難は幾分解消されるかもしれない。しかし、そうであっても、それほど容易であるとは考えられないのである。

加えて、次の二つの点が注意されなければならない。その一つは、教科書である。教科書の挙げる利用は、実生活での数学の利用とはかなりかけ離れている。二次関数や指数関数で取り上げている例を見れば明らかであろう。少なくとも、現実の問題から出発して、適切に仮定を置き、研究し、解決すると言うより、二次関数が利用されるように現実が書き直された、つまり、作られた問題を取り上げていると言っても過言ではない。これで、実生活での有用性を悟るのは無理であろう。第二は、教師の側の問題である。教科書が上のようであるのは、教科書のいわば罪と言うより、教師がそういう教科書を好む一そういう教科書でないと使われない一という証拠かもしれないのである。教師自身、数学の有用性を卑近なものでなく、信じているのはいっそう高いレベルの数学の有用性であるかもしれない。そうであるなら、高等学校レベルでは有用性は問題でないと考えていることになろう。

こうして、動機付けとしての有用性は十分問題になり得るように思われる。このことは、もちろん、有用性が問題でないと言うことではない。動機付けとは別の面で、有用性は数学教育を進める上で必要不可欠な側面であることは明らかである。

では、動機付けとして何を考えるかと言うと、それは<u>数学の面白さを実感させる</u>ことであり、それに、加えて、<u>数学が分かるようにする</u>ことであると考える。

私は、数学が面白いのは、例えば、数学的状況には一見我々を驚かせるような現象が見られ、しかも、それが決してミステリー（不可思議なこと）ではなくて、合理的な根拠に基づいていて、納得できるものであると実感できることによるのが一つであると思う。その場合、現象があまり説明や準備を必要としないで理解できるものであれば、また、内容が新奇であれば、そして、根拠が生徒が容易に理解できるものであれば、数学の面白さの実感はいっそう強いであろうと考えられる。

思いつきの例を挙げてみよう。乗法九九の積を表す表からその一の位の数だけを残した表（下図参照）について、この表の数の並びで気づくことを挙げさせる問題はどうだろうか。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	8	7	6	5	4	3	2	1

この表の数の配列には、行と列の対称性、偶数の行と奇数の行に並ぶ数の対比、数の並びが平行移動しているもの、対称性（線対称と点対称）、行の数の10についての補数性等、いろいろのことが見出されるだろう。しかも、それが成り立つ理由はよく知られた乗法の性質を根拠にたやすく示すことができるのである。もっと良い例があるだろうし、教師が自ら見出すことが望まれよう。

数学が分かるようにすることは、①で述べた悪循環を切り裂くような最も重要な手段であると考える。改めて述べるまでもなく、分かるというのは、単に・・・ができることを越えるものであろう。いわゆる「用具的理解」一こうすればできるという<u>仕方</u>が分かる一を越えた関係的理解一<u>何故</u>

そうであるかの根拠が、他のものとの関係において分かるーを指しているであろう。この理解の積み重ねが数学が分かることを結果すると考えられる。したがって、生徒の勉強の努力が基本であることはもちろんとして、教師も対応して手をさしのべることが求められるであろう。

こうしたところで、教師の役割の大きさがいっそう明らかになると言うことができるであろう。

（4）教育環境

教室を含むいっそう広い教育環境が、（数学の）教育に大きな影響を与えることは言うまでもない。文化、例えば、言語（日本語）システムが非常に大きな力を持つことは明らかである。家庭の教育力が問題になっていることは、その力の大きいことを前提にしている。こうして、いろいろの面を取り上げることが必要であるが、ここでは、その中の二つだけを取り上げることにする。それは、数学に直接に影響する上、現在の問題につながると思われるからである。

①テクノロジー

現在、コンピュータや電卓のようなテクノロジー・ツール、あるいは広く情報テクノロジーは数学教育で次第に使われるようになってきているが、わが国の高等学校数学では、なお一般化していると言えないようにも聞いている。こうしたテクノロジーの利用について、私は、それの効果と使用のための費用ー購入費用のような金銭的なものだけでなく、利用するため準備する時間や労力も含むーとの対比、つまり、対費用効果を考えた上で、利用をはからなくてはならないと考えてきた。しかし、今日に至ると、そうではなくて、テクノロジー環境という考え方、つまり、こうしたテクノロジーが存在している環境に我々は生きているという立場に立つのが至当であると考えを改めるようになった。したがって、そうしたテクノロジー環境の中で、数学教育において、どういう目的で、どのように利用するのがよいか、また、利用のための障碍は、もしあるとして、何であり、どのように克服されるか　等を具体的に検討することが要求されていると考える。

②試験（特に、外部試験）

試験がそれが学校内でなされると学校外でなされようと、普通、評価の目的でなされる。評価は何かの行為がなされたとき、その結果がどれだけ行為の目的を達成したかを見るためになされるものであって、行為の後になされるもの、つまり、事後的なものと解される。しかし、実際の評価の働きを見ると、必ずしも事後のものとは言えないことが多いように思われる。例えば、行為の目的が抽象的に述べられていて、それを達成したかどうかがはっきりとしないとき、評価がなされて始めて、目的が達成されたかどうかがはっきりすることがあり得る。教育の場合にしばしば見られる現象であって、そのときは、評価が目的を達成したかどうかを決めるわけであり、評価が行為の当否を決めることになる。つまり、評価は事前に行為を規定するのである。生徒が、試験にどんな問題が出るかを盛んに気にするのは、このことを裏書きしている。このとき、生徒が質問するのは、どんな問題が出るかと、どのように採点するかである。前者は評価の内容であり、後者は採点基準であり、評価システムで何が許され、何が許されないかを明らかにすることである。特に、試験の結果が受験者にとって重大であればあるほど、これは大きな力を持つ環境として働くことになる。わが国では、入学試験あるいは採用試験のような外部試験がその代表と言える。そうした試験のあり方は教育に大きな影響を持つことを改めて認識し、検討していくことが大切なのではなかろうか。

3．終わりに

ここではまとめでなく、私が日頃感じていることをつけ加えさせて頂くことにしたい。

それは、全ての組織・機関が教育機関であると言うことである。学校が教育機関であると言うとき、それは学ぶ生徒の教育のための機関であると解されるのが普通であろう。しかし、私の言いた

いのは、それだけでなく、教師のための教育機関でもあるということである。私自身学校を卒業してから幾つかの学校・大学に勤務し、また、いろいろの組織に属して活動してきた。今振り返ると、そのどこにおいても身の周りに多くの優れた方一学生・生徒を含んで一がおられ、その方々に本当に良い教育を受けたことを実感している。つまり、私にとっては、大学・学校は学生・生徒の教育機関である以上に、私自身の教育機関であったことを身にしみて感じ、ありがたく思っている。そして、これは恐らく他の人にとっても同じであろうと考えるのである。このことは、今日の会の目的に何らかのつながりがあると信ずるので、ここで述べさせて頂いたのである。

(2001. 1. 19)

高等学校数学教育の理念

（I）

平成13年3月30日発行

〒153 - 8681　目黒区下目黒６－５－22

国立教育政策研究所

研究代表者　長崎　栄三

印刷所：チヨダクレス(株)