高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究

日本学術振興会科学研究費補助金
基盤研究（B）
高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の研究
課題番号 16300258

高等学校における
離散数学を中心とした新たな教材の開発研究

平成18年（2006年）2月

長尾 篤志・景山 三平・長崎 栄三
（国立教育政策研究所）

は し が き

私たちは，平成 16 年度から 3 年間の計画で，日本学術振興会科学研究費補助金・基盤研究（B）『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』を行っております。この報告書は，わが国の高等学校の数学科に新たな内容として「離散数学」を導入することに関して毎月 1 回ぐらいの割合で研究会を開き，実証的に研究を行ってきたこれまでの 2 年間の成果をまとめたものです。

わが国の高等学校の数学教育は，昭和 10 年代後半から微分・積分を唯一の頂点として，できるだけ多くの生徒をこの頂点に到達することを目指してきました。しかし，現在は，高等学校への進学率が約 97%に達しており，平成 14 年度教育課程実施状況調査や OECD･生徒の学習到達度調査（PISA2003 年調査）によって，少なからずの高校生が数学の理解に困難を感じたり，数学への興味・関心や数学の社会的有用性についての意識が低かったりなどの問題点が指摘されております。そこで，このような生徒たちでも何らかの成就感を得られるような，微分・積分とは異なる数学の頂点を作ることができないかと考えました。「離散数学」はそのような複数の頂点の一つとなる可能性を持っているのではないでしょうか。

この研究は，数学者，数学教師，数学教育研究者の共同で行われており，さらに，研究メンバー以外の多くの方々のご協力を得て行われております。数学科の教育課程に新しい内容を導入するかどうかは，数学，社会，生徒などの多方面からの検討が必要だからです。本報告書をお読みになった皆様方の忌憚のないご意見をいただければ幸いです。なお，本報告書に示されている研究メンバーの考えは，研究メンバーが研究会での討議を経て個人の考えを述べたものであり，所属機関を代表して述べたものではありません。

お忙しい中, 本研究にご協力いただきました皆様に心より感謝申し上げます。なお,本研究全般を通してお助けいただきました熊岡昌子さんにも心より感謝申し上げます。

平成 18 年 2 月

研究メンバーを代表して

長尾　篤志・景山　三平・長崎　栄三

高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究

研究メンバー

2006年2月現在

研究代表者・分担者

長崎　栄三	国立教育政策研究所・教育課程研究センター（研究代表者）
長尾　篤志	国立教育政策研究所・教育課程研究センター・研究開発部
景山　三平	広島大学大学院教育学研究科
楠岡　成雄	東京大学大学院数理科学研究科
中木　達幸	広島大学総合科学部（前・九州大学大学院数理学研究院）
立花　正男	岩手県盛岡市教育委員会（前・国立教育政策研究所）

研究協力者（五十音順）

熊倉　啓之	静岡大学教育学部
河野　芳文	広島大学附属中・高等学校
正田　実	元文部省
高橋　広明	千葉県立松戸六実高等学校
津島　久美	岡山県立高梁高等学校
西村　圭一	東京学芸大学附属大泉中学校
二宮　裕之	愛媛大学教育学部
萩原　季弘	静岡県立沼津東高等学校
逸見　由紀子	東京都立西高等学校
槙　誠司	山形県教育庁高校教育課
室岡　和彦	お茶の水女子大学附属高等学校
茂出木　祥高	東京都立芝商業高等学校
山口　武志	福岡教育大学教育学部
横澤　克彦	長野県上田千曲高等学校
吉田　亘	東京都立文京高等学校

高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究

報告書の構成

本報告書は，ⅠからⅤの５部から構成されている。

Ⅰ．高等学校への離散数学の導入

高等学校への離散数学の導入についての「総論的」な部分であり，高等学校への離散数学の導入に関する展望を描いたものである。高等学校への離散数学の導入についての基本的な考え方，有効性，教育課程への位置付けからなっている。また，これまでの先行研究や今後の参考文献などもまとめてある。

Ⅱ．高等学校への離散数学の導入に関する講演記録

わが国における離散数学やコンピュータに関わる数学者の本研究会での講演記録をまとめたものである。「離散数学とは何か」に答えるものであり，離散数学の意義，内容，発展，社会での応用などが生き生きと語られている。

Ⅲ．高等学校への離散数学の導入に関する数学者の考え

わが国の数学者の高等学校への離散数学の導入に関する賛否両論をまとめたものである。離散数学の導入についての数学の面からの検討の資料となるものである。今後検討すべき多くの課題が指摘されている。

Ⅳ．高等学校への離散数学の導入に関する諸外国の動向

高等学校に離散数学を積極的に取り入れているアメリカ・イギリスの状況，及び，その教科書における記述例などをまとめたものである。高等学校における離散数学の履修方法や教材の選択・配列などの資料となるものである。

Ⅴ．高等学校等における離散数学の指導の実践例

本研究会メンバーによる高等学校・中学校における，離散数学を扱った研究授業の記録である。内容は，アルゴリズム，鳩の巣原理，グラフ理論，ラムゼー定理などの離散数学の代表的なものである。

目　次

Ⅰ．高等学校への離散数学の導入

高校数学への離散数学の導入に関する基本的な考え方

長尾　篤志　・　長崎　栄三
国立教育政策研究所教育課程研究センター

【要約】数学科の教育課程に新しい数学を導入する場合には，数学，社会，生徒という 3 つの面，及び，教育課程への導入方法ということから検討する必要がある。離散数学という新しい数学の発展がある一方，わが国の高校生の数学に対する意識はあまり高くはないことが明らかになってきた。わが国の数学科の内容は主に理科系の生徒が学習する微分法，積分法を唯一の頂点とする内容で構成されており，そこまで達しない生徒は，何のために数学を学習しているのかが分かりにくくなっている。そこで，あまり多くの予備知識がなくても，それぞれの生徒が自分なりにアプローチでき，じっくり考えることのできる内容をも新たな頂点として準備する必要があると考えた。離散数学という新しい数学は，社会的有用性も高く，しかも，そこには多くの生徒が改めて新鮮な気持ちで取り組めそうな問題がある。離散数学は，わが国の高等学校の数学科の新しい一つの頂点となる可能性が大いにあると考えられる。そこで，高等学校の数学科への離散数学の導入に関しての検討事項として，離散数学の特徴：数学・社会の面からの離散数学の検討，離散数学の学習可能性：生徒の面からの離散数学の検討，離散数学の導入方法：教育課程の面からの離散数学の検討，について述べた。

１．はじめに

数学科の教育課程は，数学，社会，生徒などの変化を要因として改訂される。教育課程一般としては，教育課程を構成する上では，文化遺産の体系，社会の要請，学習者の特性の 3 つの座標軸が考えられている（扇谷他，1981，p.7)。ここでは文化遺産の体系が，数学である。つまり，数学，社会，生徒のいずれかが変われば，数学科の教育課程はその変化に応じて変わらざるを得ないのである（ハウスン他，1987)。

わが国の高等学校の数学科は，昭和 10 年代後半から約 60 年余り変わらずに，現在でも内容構成は「微分積分」を最終的な到達点としてきている。戦後，線形代数などが導入されたが，基本的には連続数学の微分積分を学ぶことが大きな唯一の主流を成している。

ところが，今日，数学は発展し，社会は高度情報化社会，少子高齢化社会など大きく変容し，そのような変容する社会に活きる生徒も当然変化している。

20 世紀後半から，「一つずつばらばらに孤立した対象を扱う新しい数学」である離散数学が発展し，社会ではこの新しい離散数学の応用の範囲が急激に広がっている（例えば，秋山，2005)。また，高等学校への進学率は 97%を越えており，その中の大半の生徒は非理工系の生徒である。そして，2000 年以降に国立教育政策研究所によって行われた教育課程実施状況調査からは，高校生の数学に対する態度があまり肯定的ではないことも示されている。このような数学，社会，生徒の現在の状況は，とりわけ，高等学校の数学教育のあり方に再考を迫っている。

2．教育課程への新しい数学の導入についての考え方

（1）数学・社会・生徒からの検討

数学科の教育課程は，先にも述べたように，主として，数学，社会，生徒という 3 つの面から考えられる。したがって，数学科の教育課程に新しい数学を導入する場合には，数学，社会，生徒という 3 つの面から検討する必要がある。そして，これらの検討は，それぞれの内容の独自性から，数学者，数学教師，数学教育学者の共同によって行われなければならない。

数学の面からの検討については，導入しようとしている新しい数学の数学としての価値や他の数学との関連性や系統性が問われる。また，それが現代の数学の考え方を体現しているかどうかも重要な視点であろう。

社会の面からの検討については，導入しようとしている新しい数学が社会で使われているかどうかが問われる。微分積分は，とりわけ物理学の発展と結びつき，科学の言葉として世界や宇宙の探求に役立つとともに，多くの実際的な場面で使われている。なお，この面では，20 世紀後半のコンピュータの発展が見逃せない。コンピュータを駆使することによって，数学の社会での応用が飛躍的に伸びている。

生徒の面からの検討については，導入しようとしている新しい数学が実際に教室での指導に適しているかどうかが問われる。どのように数学的な価値があり社会的な有用性がある数学でも，生徒がその内容に活動的に取組み,それに内在する概念を理解できなければ,指導内容とはなりえない。

（2）教育課程からの検討

新しい数学を教育課程に導入するには，大きく分けると，2 つの方法がある。一つは，それを既存の単元の中に埋め込む方法であり,もう一つは,それによって新しい単元を構成する方法である。

既存の単元の中に埋め込む場合には，新しい内容と性格が類似した単元を探し，その単元の一つの項として扱うことになる。この場合には，新しい内容は分量としてはさほど大きくなく，1 つの原理や定理，その応用問題数題などで構成され，1，2 時間で指導できるものであろう。このような例としては，平成１１年の高等学校学習指導要領の改訂で，相似形の面積比・体積比や球の表面積・体積が中学校数学から数学Ⅰの「図形と計量」に移行されたことがあげられよう。

新しい単元を構成する場合には，その単元を一定のまとまりのある内容としなければならない。このような新しい単元を構成するには，「少なくとも 3 種の素材が必要である。すなわち，導入のための素材，展開のための素材，評価のための素材の三つである」（島田，1970）とされている。さらに,それらについて,それぞれ次のように説明されている。「導入問題の問題の意味と必要性が,それ以前の学習によって興味あるものとしてわかりうること」，「1か月ぐらいの授業で，従前の学習を基礎としてその内容の中心定理に達することができ，この定理によって，導入問題の解法に対するアルゴリズムが得られること」，「その内容が契機となって新しい問題に発展しうること。このことは，その展開の過程に数学として重要ないろいろな考え方の具体例を含んでいるということである」とされている。このような意味での新しい数学の導入は，最近にはない。

3．わが国の高校生の数学に関する現状

平成 14 年 11 月に昭和 30 年代後半から約 40 年ぶりに,国立教育政策研究所教育課程研究センターによって，高等学校における国語，数学，理科，社会，英語の実施状況についての調査が全国的に行われた。この「教育課程実施状況調査」は，平成元年告示の学習指導要領下の数学Ⅰの実現状

況を高等学校３年で調査したものであり，質問紙による調査も併せて行われた（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2004)。なお，その後，平成 17 年 11 月に現行の学習指導要領下での教育課程実施状況調査が行われ，現在（平成 18 年１月)，データの整理が行われている。

（１）数学問題の通過率の平均は約 50%

この教育課程実施状況調査は，数学科では，数学問題全 30 問で実施され，それらの通過率（正答及び準正答であった生徒数の合計の調査参加者数に対する割合）の平均は 50.2%であった。これは設定通過率を約 10 ポイント下回るもので，この結果から，用語や記号の意味の理解など基礎基本が十分には定着していないなどの課題が明らかになった。

（２）「数学の勉強が好き」な生徒は約 40%

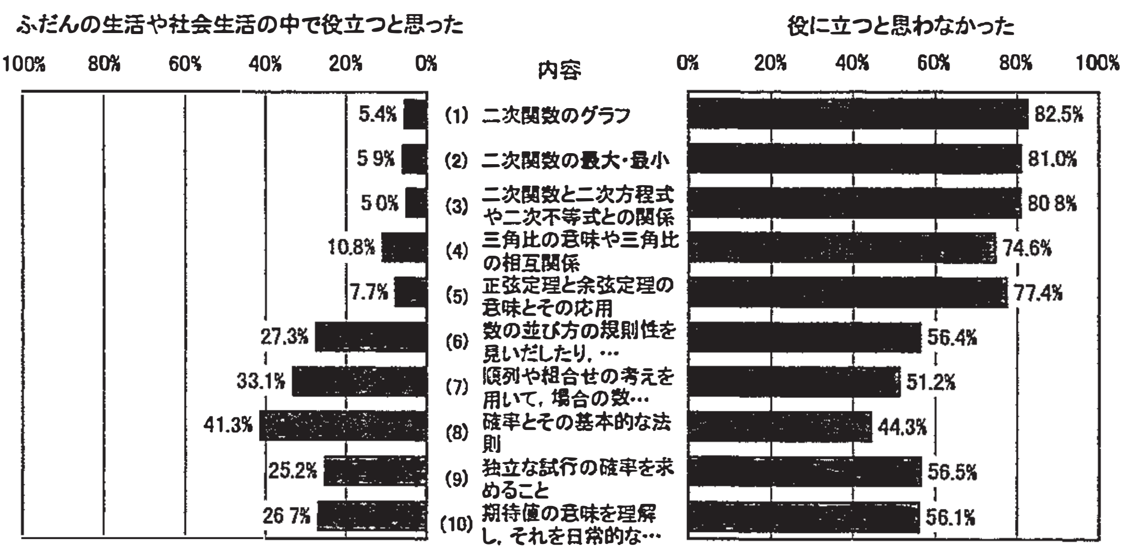
質問紙調査では，「数学の勉強が好きだ」に肯定的な回答をした生徒は約 37%，「数学の勉強は大切だ」に肯定的な回答をした生徒は約 54%，「数学の勉強は入学試験や就職試験に関係なくても大切だ」に肯定的な回答をした生徒は約 39%，「数学の勉強がよく分かる，または，だいたい分かる」と回答した生徒は約 35%であった。

これらの結果を他教科と比べてみると，次のようであった。「数学の勉強が好きだ」に肯定的な回答をした生徒は化学についで低いが，国語や英語に比べてあまり大きな差はなかった。「数学の勉強が大切だ」に肯定的な回答をした生徒は理科の各科目よりはやや高いが，国語（約 82%）や英語（約 83%）より明らかに低かった。「教科の勉強が好きだ」に肯定的な回答をした生徒は，「教科の勉強がよく分かる，または，だいたい分かる」と回答した生徒の割合に近く，その教科の勉強が分かるか否かは各教科の好感度に影響しているようである。また，「国語の勉強は入学試験や就職試験に関係なくても大切だ」に肯定的な回答をした生徒や「英語の勉強は入学試験や就職試験に関係なくても大切だ」に肯定的な回答をした生徒は，「国語の勉強は大切だ」，「英語の勉強は大切だ」に肯定的に回答した生徒の割合より 5%程度しか下がっておらず，その教科が大切か否かは実生活での有用性との関連でとらえられていることが伺われる。

（３）数学に対する社会的有用性の意識は 5%から 41%

質問紙調査では，数学Ｉの各内容について，「ふだんの生活や社会生活の中で役立つと思った・思わなかった」を尋ねた。この質問に対する生徒の肯定的・否定的な割合をまとめると，図１の通りである。

図１　高校生の数学Ｉの内容に対する社会的有用性に関する意識



数学Ⅰの 10 項目の内容のそれぞれについて「役立つと思った」と回答した生徒の割合は 5%から 41%であった。高等学校数学科は直接，実生活に活用できるような知識の理解のみを目指しているわけではなく，すべての内容について実生活と関連付けた指導を行うことも難しいであろう。しかし，必履修科目である数学Ⅰを学ぶ生徒の大多数は，数学を専門とはしないが，将来の社会で数学を使う可能性を持っている。数学を専門とする生徒を含め，わが国の高校生の数学の社会的有用性に関する意識をもっと高める必要があるのではないだろうか。

4．新しい教材開発の必要性

高等学校の学習指導要領は戦後 7 回全面的に改訂がされている。昭和 35 年以降の高等学校数学科の学習指導要領の内容をみれば，中学校からの移行や削除などの変化や科目間での移行などはあるものの全体としてあまり大きな変化はない。これは，高等学校卒業までに身に付けさせたい数学の内容が戦後 60 年間であまり変化しなかったということであろう。しかしながら，高等学校への進学率が 97%を超える現在，高等学校数学科を再考する必要が出てきているようである。(長尾, 2004)

(1) 数学科では微積分が唯一の頂点

第一は， 数学科の内容が主に理科系の生徒が学習する微分法，積分法を唯一の頂点とする内容で構成されている点にある。このような構成では，微分法，積分法まで学習しない生徒は，最終到達点の頂点まで至らずに高等学校数学の学習を終えることになり，「何のためにこの内容を学習したのか」が分かりにくくなっている。高等学校数学にもいくつかの複数の頂点を置き，それぞれの頂点まで到達させること，つまり，次の内容を学ぶための準備のためではなく，そこまでに学習した内容を活用し問題を解決したり，生徒自身に内容を発展させその面白さを感じ取らせたりすることが必要ではないだろうか。現行の学習指導要領での数学基礎は，高等学校数学科に複数の頂点をおくための試みと考えることもできる。

(2) 数学をじっくり考えさせたい

第二は，第一とも深く関係していることではあるが，数学科の内容に取り組むにはそれ以前に学習した多くの内容を確実に理解していることを前提としていることである。ところが，数学Ⅰの通過率の平均は約 50%であり，「数学の勉強がよく分かる，または，だいたい分かる」と回答した生徒数の割合は約 35%であった。もちろん，先に述べたように数学が分かるか否かが数学の好感度に影響しているとすれば，数学が分かることは当然ながら重視しなければならない。ただし，数学が分かることと問題を解けることは完全には一致していないことに注意しなければならない。分かっていなくても，解法パターンに当てはめて数学の問題を解くことは可能だからである。そこで，数学が分かるようになるためには，基本的な概念を批判的に，試行錯誤しながら学ぶことが必要である。中学校の内容を十分に身に付けず高等学校に入学してくる生徒が少なくないと言われる現状を考慮すれば，あまり多くの予備知識を仮定しなくても，それぞれの生徒が自分なりのやり方で試行錯誤しながらアプローチでき，じっくり考えることのできる内容をも準備する必要がある。

(3) 離散数学への着目

離散数学とは，有限で離散的な構造を扱う数学であり，グラフ理論，組合せ論，計算幾何学，アルゴリズム論，最適化問題などをいい，コンピュータの発達と相まって発展してきた数学の分野である。現在，社会の種々の分野で離散数学が活用されており，離散数学の社会的有用性の高さが示

されていると言えよう。

離散数学の内容や特徴などに関する詳しい説明は後に譲るが，離散数学の内容や問題の特徴について，次のようなことがあげられている。「多くの予備知識を仮定しなくても解決できる問題が多い」，「いろいろな方法で解決できる問題が多い」，「問題の解決を通して，数学の有用性をはじめ，数学的な見方や考え方のよさを感じ取ることができる」，「比較的新しい数学の分野であるので，学習したことが研究の最先端と重なることもある。したがって，数学の研究の面白さに直に触れることができる」などである。

離散数学という新しい数学は，数学としての発展性も豊かであり，社会的有用性も高く，しかも，そこには多くの高校生が改めて新鮮な気持ちで取り組めそうな問題がある。離散数学は，わが国の高等学校の数学科の新しい内容として新たな一つの頂点となる可能性が大いにあると考えられる。

５．わが国の現在の小中高校の算数・数学科における離散的な内容の扱い

現行の小中高校の算数・数学科の学習指導要領には，「離散数学」という内容領域はない。しかし，離散数学を，有限で離散的な構造を扱う数学で，重い計算をするよりは言葉で考え論証する数学であると捉えると，現行の小中高校の算数・数学科の内容にも離散的な内容はある。

（１）小学校算数

第１学年の数と計算は，ものの個数を数えることの活動を通して進めるなど自然数を扱っているので離散的と見ることができ，また，第３学年から５学年にかけての資料の分類，整理などの統計的な内容にも離散的なものが含まれている。

第３学年から５学年にかけての平面図形の敷き詰めは，帰納的な考えではあるが，離散的な思考を行っていると見ることができる。

（２）中学校数学

「数と式」領域の整数関係は，基本的には離散的である。さらに，中学校２年の確率の樹形図の利用は離散的である。

（３）高等学校数学

高等学校の数学の各科目には，多くの離散的な内容が含まれている。

①数学基礎：数学と人間の活動，社会生活における数理的な考察，身近な統計

数と人間，図形と人間，社会生活と数学，身近な事象の数理的な考察，資料の整理，資料の傾向の把握

②数学Ａ：集合と論理，場合の数と確率

対偶，背理法，順列・組合せ，二項定理，数学的確率・公理論的確率，余事象

③数学Ｂ：数列，統計とコンピュータ，数値計算とコンピュータ

漸化式と数列，度数分布，相関図，アルゴリズム

④数学Ｃ：行列とその応用，確率分布

行列，確率の計算，条件つき確率，二項分布，標本調査

（４）数学科の新しい内容としての離散数学

これまで述べてきたようにすでにわが国の算数・数学科の教育課程には多くの離散的な内容が含まれている。しかしながら，私たちは，これらを含めて，新たに鳩の巣原理の有用な考え方やグラフ理論などを取り入れたらどうかと考えている。以下では，これまでの離散的な内容と，鳩の巣原理や数え上げの原理などの基本原理及びグラフ理論などの新しい離散数学の内容とを合わせて，「離

散数学」と言うことにする。

6．高等学校の数学科への離散数学の導入に関しての検討事項

わが国の高等学校の数学科の教育課程に離散数学の新しい内容を導入するためには，これまで明らかにしてきたような，現在の数学科の教育課程の特徴や高校生の数学学習の現状に加え，離散数学との関わりで次のようなことを明らかにする必要がある。これらの研究は，数学者，数学教師，数学教育研究者の共同作業となる。

（1）離散数学の特徴：数学・社会の面からの離散数学の検討

離散数学について，数学や社会の面から検討を行う。その際には，離散数学の長所だけではなく，短所についても検討を行う。

①離散数学の本質

離散数学とは何か，離散数学の社会的有用性はどこにあるのか，さらに離散数学における数学的活動の可能性などを明らかにする。

②離散数学の課題

離散数学の高等学校への導入の可否や長所・短所などを数学の系統性などから明らかにする。

（2）離散数学の学習可能性：生徒の面からの離散数学の検討

高等学校や中学校において離散数学の内容に関する研究授業（長崎ほか，2004）を行い，授業中・授業後の生徒の反応を検討する。

①授業中の生徒の活動

離散数学を扱った研究授業中に，生徒はいかに考え，生徒同士や生徒と教師がどのようなやり取りを行うかを明らかにする。

②授業を通した生徒の成果

離散数学を扱った研究授業後に，生徒の感想文やワークシート，ノートなど分析して，生徒が離散数学をどの程度理解し，離散数学の学習を通して何を身に付け，離散数学や数学に対してどのような意識を持っているかを明らかにする。

（3）離散数学の導入方法：教育課程の面からの離散数学の検討

離散数学の導入に関して，既存の数学内容との関連，履修のあり方，教材化，指導や評価のあり方などの教育課程上の諸課題を検討する。

①わが国の現在の小中高校における離散数学の扱い

離散数学は，現在の内容にも散見できる。そこで，わが国の現在の教育課程における小中高校を通した離散数学の内容を明らかにする。

②わが国における離散数学導入に関する先行研究

諸外国の動向に応じてわが国でも，1990年代から離散数学の導入に関する研究が行われるようになった。そこで，これまでのわが国の数学教育界での離散数学の扱いに関する研究状況を明らかにする。

③諸外国における離散数学の導入の実態

世界には離散数学を積極的に取り入れている国々がある。それらの国々の教育課程における離散数学の履修の仕方や教科書における離散数学の扱い方を明らかにする。

④離散数学の教材化

高等学校や中学校における離散数学を扱った研究授業の計画，実施，検討を通して，離散数学の

高等学校における教材化のあり方を明らかにする。

⑤離散数学を内容とした指導・評価のあり方

高等学校や中学校における離散数学を扱った研究授業を通して，離散数学の指導や評価のあり方を明らかにする。

7．おわりに

私たちは，これまで，高等学校数学科の新たな教材として離散数学を考え始めた理由などを述べてきた。ただし，研究するに当たって，初めから「離散数学ありき」，ではなく，離散数学を導入することに対して数学者はどのような意見を持っているのか，離散数学を導入するとすればどのような趣旨で導入するのがよいか，その趣旨を生かすためにはどのような内容にすべきか，実際にその内容で教材は作成できるのか，その内容で授業をするときどのような点に配慮すべきかなどを丁寧に検討していくことが必要不可欠であると考えている。この検討の中で，どうしても乗り越えられない問題が出てくれば，どのように魅力的な内容でも，高等学校数学科に導入するのは無理だからである。そのため，検討は誠実さ，粘り強さ，及び細心の注意が必要である。また，現在のわが国の高等学校の数学科の授業は大学入試の影響を強く受けており，問題の解法の説明と問題練習が中心の授業になりがちだと言われている。可能であれば，そのような授業を変えることも視野に入れた研究を目指したい。

参考文献

秋山仁(2005)「「離散数学」デジタル化社会が求める新しい数学」『ILLUME』東京電力. Vol.17,No.2. pp.4-23.

扇谷尚・元木健・水越敏行（1981）『現代教育課程論ーカリキュラム入門ー』有斐閣双書.

国立教育政策研究所教育課程研究センター（2004）『平成 14 年度　高等学校教育課程実施状況調査報告書　数学　数学Ⅰ』実教出版.

島田茂(1970)「教材研究の新しい視点ー数学科を主としてー」『中等教育資料』No.259. pp.10-15.

長尾篤志(2004)「高等学校学習指導要領の変遷」『中等教育資料』No.815. pp.46-47(以下，続刊).

長崎栄三・長尾篤志・吉田明史・一楽重雄・渡邉公夫・国宗進編著（2004）『授業研究に学ぶ　高校新数学科の在り方』明治図書.

ハウスン・カイテル・キルパトリック（島田茂他監訳）(1987)『算数・数学科のカリキュラム開発』共立出版株式会社.

高等学校へ導入する離散数学の有効性について

景山　三平
広島大学大学院教育学研究科

【要約】数学は，科学を記述する言葉，論理を通して理解する学問，思考文化の構造，などと捉えることができ，暗記する学問でも計算でもない。その数学教育の目的を，数学の有用性，文化・教養性，陶冶性の面から記述しまた認識することができる。しかしながら現在，無限と連続で象徴される微分積分を頂点とした伝統的な高等学校数学カリキュラムの中で，数学離れ等が起こっている。本稿では，その現状を打破し高校生に健全な数理感覚を醸成するために，高等学校数学教育に新しい分野の離散数学を導入することを提案し，その意義，必要性，特徴，育成できる特性，有用性，内容等を論じる。

1．導入の必要性

教育現場では生徒の多様性とカリキュラムの多様性がミスマッチを起こし，「数学嫌い，数学離れ」の現象が起きている。多くの高校生は高々「数学 II/数学 B」までしか学ばない。実際，「数学 III/数学 C」まで学ぶ高校生は高々 20 %程度であり，さらに数学を修得しなくてもよいとした学科が６%程度もある（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2004)。このような中でも，高校生に対して種々の数学を示すことで数学の広さやその多様性を知らせることは重要なことである。また，数学は学習するという行為なしには学習意欲もわかないし，学習する時間が少なくなれば学力は一般には低下する。これまた自然なことである。

そこで，新たに離散数学に関する教材を何らかの形で系統的に導入し，その内容の学習を通して，このような現象をくい止めるための歯止め対策としたい。この試みは 21 世紀型学力の育成に数学から迫るものである。ここで述べる離散数学とは，有限で離散的な構造を扱う数学で，基本的には，重い計算をするよりは，言葉で考え論証する数学であり，豊かな発想と論理的な思考力が特に求められるものである。

今日まで種々の教科書で，パズルのような問題が紹介され，高校生が今まで知らなかった内容による目新たらしさ，その問題自体への取りかかりのよさ，新鮮さや面白さが強調されているが，それらは離散数学の一端で小さい入り口を示しているにすぎない。高等学校の数学教育活動において，その一つの新しい扉を開いて中に踏み込み，道の両側に咲く草花，木々又は湖などを楽しむことのできる世界を紹介する必要がある。その中で，今まで知らなかった新しい数学の世界を生徒達に感得させ，楽しむ心をもって高校数学を勉強することのできるエネルギーを与えることが求められている。

2．離散数学の特徴

体系的な知識や技能の積み重ねを必要とする伝統的な連続数学を中心としたカリキュラムの中に，多様な内容の離散数学(全体的には体系的ではなく，その都度考え工夫する内容が多い)を加味することを考え，情報を図(グラフ)等で表現・思考することの良さを感得させる必要がある。同時に，この分野は数理構造を視覚化しやすい面をもっていることにも注目すべきである。本来離散数学の

特徴は，ある対象のものを数え上げる行為でもある。これは，一定の条件下である性質を満たす場合の数を求めることにつながる。一般には，有限で離散的な対象を扱う分野としての問題は，大別して，存在問題(構成問題)，数え上げ問題，特徴づけ問題，最適化問題，を挙げることができる。これらに共通する一般的な特徴を次に示す。

（１） 問題解決の前提となる知識や技能が少なくて考えられる場面を設定できる。

（２） 能力(アイデア)に応じて多様な解法が考えられる(着想の転換)。

（３） 身近な事象，特に，社会的事象から題材を得やすい。

（４） アルゴリズムの開発が中心的な課題の一つである。

これらの特徴が生かせる離散数学に関する内容の教材化が重要となる。

また，離散数学が応用されている領域等については，例えば，本冊子第 II 章の秋山仁・酒井利訓の原稿を参照されたい。

３．命題からみた離散数学の一つの位置づけ

高等学校における数学の内容を命題からみると，存在命題の一部の場合が欠落している。命題とは， 真，偽を判定することが可能な文章や式を指す。今，「$p(x)$，$x \in U$」を命題関数とすると，命題は二つに大別できる。

（A）全称命題：「$p(x)\ \forall x \in U$」（すべての x に対して）

ここで，例えば，U を自然数の集合とおくと，これは数学的帰納法(棋倒し，ドミノ倒し)での論証に対応する。この内容は「数学B」で扱われている。高校数学では，多くの場合この全称命題を扱っている。

（B）存在命題：「$p(x)\ \exists x \in U$」 （ある x に対して）

ここで，集合 U について更に二つの場合が考えられる。それは，（１）U の濃度が無限，（２）U の濃度が有限，の場合である。まず，（１）の場合は，高等学校ではよく扱われる。例えば，整式の除法における商と剰余の存在定理（「数学Ⅱ」)，中間値の定理，平均値の定理(「数学 III」)，ロルの定理，等に対応する。次に，（２）の場合に対応した問題の解決に有用なものの中に，『鳩の巣原理』（デイリクレの原理，引き出し論法，部屋割り論法）と呼ばれるものがある。これは，一般には「自然数 n，k に対して，nk+1 個の対象を n 個のクラスに分類すると，少なくとも１つのクラスは k+1 個以上の対象を含む。」，または「p+q−1 羽の鳩が２つの巣を共有しているとする。すると，少なくとも１つの巣には p 羽の鳩がいるか，もう１つの巣には q 羽の鳩がいる。」と表現されているものであり，ごく自然な原理である。高等学校の現行教科書を調べてみると，「数学Ａ」数研出版 (2003) の「第１章 場合の数と確率」(p. 16) に鳩の巣原理の紹介がある。特に，離散的な数理現象に対して（１）の中間値の定理の考え方を（２）の場合に応用したことに注目したい。例えば，本来（２）のカテゴリーに属する離散現象の等分問題に関するパンケーキ定理等がそれに相当する。高等学校数学において，この場合（２）の存在命題をもっと扱ってもよいのではないかと考える。それは，生活や社会の中で数学が役立っていることを感得できる存在命題について思考する経験をもつことは，数学の有用性やネットワークなど他分野への応用の可能性等を理解する上で大切であると判断しているからである。

４．育成できる特性

離散数学に関する内容の教材化を視野に入れるなど，既存の教材以外をも用いて，数学の世界の

広さを生徒達に伝えていくことは，算数・数学嫌いの多い中，極めて大切である。それによって思考の楽しさを共有でき，生徒の主体的な学習活動の活性化につなげることができる。このことは，高等学校までの数学や大学での線形代数学とか解析学などは，多くの場合，自分の頭の中で内容が鮮明でなくとも，公式を覚え，それにあてはめ，またそれをうまく使うテクニックを身につけていれば，問題は解ける，というように感じているのではと考えるが，離散数学の問題を解く際には，何となくでは解けない場合が多いことにも表れている。

そこで，教材化の意義を明らかにするためにも，離散数学に関連した教材で次に述べるポイントを育成できることを主張したい。これらのことが離散数学を高等学校の数学教育の中に導入する理念の明確化につながる。そのポイントとは，

（1）考える意欲の喚起と，数学的な見方や考え方
（2）柔軟な思考力(鋭い着眼点，思考の自由性，多面的にものを見る力)
（3）問題に潜んでいる数理構造を見つけ出す能力
（4）アルゴリズム的問題解決能力
（5）数学を活用する能力や態度(思考の楽しさ)
（6）学習意欲の喚起と，(連続)数学に対する積極的な学習態度
（7）言葉での説明が多いことに起因する論理的表現力
（8）人間本来の知的好奇心や美への探求心

等を挙げることができる。無論，これらは従来の連続数学をフィルターとしても育成できるはずであるが，現状では多くの高校生にとって困難な状況にある。

4.1. 手段

上記のポイントを育成するための離散数学に関する教材を導入する実際的な教育場面を考えると，「数学基礎」，場合の数と確率，集合と論理，順列・組合せ(「数学Ａ」)，数列(漸化式を立てる)(「数学Ｂ」)，行列，数値計算とコンピュータ，「総合的な学習の時間」，「学校設定科目」，の中で教育活動展開が可能となろう．最低でも，単元「個数の処理」（旧数学 I）の復活は考えたい．

4.2. 方法

離散数学に関する新たな単元の創設としては，先ずは，高等学校文科系生徒，職業科生徒等を対象としたものでも良い．「数学 III，数学C」まで学ぶ生徒の割合はそれほど大きくなく，その内容以前までで数学の学習を終えている多くの生徒に，数学的思考の多様性を示すことで，健全な数学観を醸成する必要がある．その『導入方法』としては，次の２通りが考えられる．

（1） 1つの科目・単元等として独立に設定する場合
（2） 通常の授業の中でトピック的に設定する場合

それぞれの設定には特徴があるが，前者は，系統的な内容で授業を構成することができる点で望ましい。このスタイルでは，それなりに授業時間が確保でき，そして離散構造の森に一部入り込むことができ，前述した育成すべき資質の獲得の確認作業がしやすくなる。即ち，学校数学的視点での体系化の必要性からくる問題である。一方，後者の位置づけでは，スポット的な授業時間の確保での展開になるので，生徒に一般には離散的な数理思考のよさの意義が有意に伝わり難く，その場面だけでの楽しさを感じることだけに終わりがちである。よほど授業の展開を工夫しない限り，真に身に付くものがないという恐れがある。このように授業の構成には十分な配慮が必要となる。

５．指導上の留意点

離散数学の内容を授業の中で展開する場合には，教師も思考を楽しんでいる姿勢を見せながら，次の３つの点には特に細心な注意が必要となる。

（１） 多様で十分な思考活動時間の確保

（２） アルゴリズムの背後にある考え方やアイデアの意識化

（３） 基本的にはグループ学習形態での実施（一斉授業では行わない）

これらの活動を保証せずして，離散数学の教材を通して，数学嫌い，数学離れをくい止める役割を演じることは出来ない。特に，（１），（３）については，研究授業を通してもその重要性は確認されている。

さらに具体的な指導方法は，本冊子の第Ⅴ章でまとめられるいくつかの研究授業実践に対する多角的な検討を通して提示されるものと考える。

６．問題点

離散数学全体の学問としての体系化はなされていないが，考察手法として体系化されつつある。それを確率的手法，線形代数的手法などにみることができる。では，どのような分野があるのだろうか。それらは，組合せ論，グラフ理論，ラムゼー理論，極値集合論，デザイン理論，符号理論，離散幾何学，最適化理論，マトロイド理論等である。実に多岐にわたっている。このことが離散数学に関する教材の作成に際して話題の宝庫となりうることを示している。と同時に，有機的に考えないと種々の分野からのつまみ食い的な内容で構成する危険性をはらんでいる。

1736 年，L. オイラーはケーニヒベルグの橋の問題と呼ばれる問題をグラフ理論的考察で解決した。オイラーの一筆描き定理である。教材化しやすい話題である。また，1996 年までの日本のグラフ理論とその周辺の離散数学の歩みについての調査を秋山仁（1996）に見ることができる。

現在，分野毎には体系化されつつあるので，高等学校数学レベルでは教材化作業に問題はないが，教師の数学観が影響する可能性がある。即ち，伝統的連続数学信奉者である。このことは，離散数学の内容の話題についての選択の幅及び適切に選択すべき内容に影響する。これらは，現場教師が離散数学を落ち着いて学んだ経験を有していないことに起因すると考えている。

７．離散数学の基礎

その都度，忍耐強く考える力があれば，基礎的なものとして特に挙げる必要を感じないが，伝統的なこととして下記の事項についての理解ができていると，いろいろな問題等を把握し思考する時間を節約できるという意味で有用であろう：

(1) 集合と集合演算，(2) 集合の分割とスターリング数，(3) 場合の数，(4) 和と積の法則，(5) 順列と組合せ，(6) 数学的確率（古典的確率），(7) 数の分割（分割数）とヤング図形（またはフェラーズ図形），(8) 数学的帰納法，(9) 包除原理，(10) 鳩の巣原理，(11) 二項定理と多項定理，(12) 命題と論理演算，(13) 関係と関数，(14) フィボナッチ数，(15) 線形不定方程式，(16) 母関数，(17) 漸化式関係。

８．離散数学内容の提案

高等学校において，３年間に亙る離散数学のカリキュラムは不必要で，連続数学の中に如何に居場所を見つけるかが鍵となる。高々１年間のカリキュラムで十分であろう。しかしながら，第６節

で述べたように多岐にわたる分野が存在する上，指導時間数にも関係するので，どのような（到達）目標に対してどんな内容を導入することが適切であるかを検討する必要がある。

離散数学の問題には，大きく分けると２つの場合がある。それは，その問題の解が一般的に式表現できる場合（解の公式の存在等）と，式表現できない場合である。前者は，学校教育の場面に導入しやすいが，後者は，導入が難しい。それは，解を探すのに時間を要する場合が多いからである。しかしながら，そこには思考の楽しさを見出すことができる。

高等学校数学教育の中に導入する離散数学の内容については，以下の骨子（１），（２），（３），（４）で構成することを提案する。

（１）原理について

１）数え上げの基本原理

ある事象が n1 通り起り，引き続いて第２番目の事象が n2 通り，さらに引き続いて第３番目の事象が n3 通り起る，・・・。このとき，

和の法則（各事象のどれかが起る場合の数は，n1 + n2 + n3 + … 通りである。）

積の法則（各事象が示された順序ですべて起る場合の数は，n1n2n3… 通りである。）

２）包除原理（包含と排除の原理，包含と排除の法則，和積定理とも呼ばれる；ある集合の要素数を数えるために，その集合に含まれてはならないものを除外し，不当に複数回除外されたものを補正する方法。簡単な一例をあげると，二つの集合ＡとＢに対して，その和集合の要素の数は，Ａの要素数とＢの要素数を合わせたものから，ＡとＢに同時に入っている要素の数を引いたものである（「数学Ａ」の単元（２）集合と論理，にある），となる。本原稿末「資料」IIも参照）

３）鳩の巣原理（第３節，及び本原稿末「資料」Ｉを参照）

（２）数え上げ

１）順列と組合せ（「数学Ａ」の単元（３）場合の数と確率，の内容）

２）二項係数と二項定理（「数学Ａ」の単元（３）場合の数と確率，の内容）

３）線形不定方程式の解の個数（ディオファントス方程式；複数個の変数に関する一次方程式の整数解の個数を求める。例えば，方程式 x+y+z=5 の正の（又は非負の）整数解の個数は６（又は21）である。）

４）分割数（いくつかの自然数の和に分割する方法の総数；例えば，５の分割数は，その分割が，5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1,であるので，７となる。）ここでは，順番は無視する。上の例で言えば，例えば，3+1+1 と 1+1+3 は同じと見なす。

５）再帰的関係（数列の n 番目の要素とそれより前のいくつかの要素との関係；これらの関係を表す式を漸化式または差分方程式ともいう。プログラミングでは，自分自身を呼び出すアルゴリズムを再帰的アルゴリズムという。フィボナッチ数列，ハノイの塔の問題はその典型例。「数学Ｂ」単元（１）数列，の内容もある。）

（３）グラフ理論

次の２種類の内容で構成する。

１）課題をグラフ理論的に捉えることにより有効に解決できる題材：

一筆書き問題（ケーニッヒベルグの橋問題—オイラー路，ハミルトン閉路）など，問題を点と線でグラフ構造化し捉え直すことにより解決する課題を扱う。

２）グラフ理論の諸基本概念（平面グラフ，完全グラフ，１因子分解，木，２部グラフ，交グラフ，

マッチング ―ホールの結婚定理―，グラフの隣接行列，など）：

基本的には，その概念を用いた議論結果が応用（アルゴリズム，交通問題，ネットワーク，ゲームなど）を有するものに限る。また，数学的不変量を感じる意味で，オイラーの定理（ある平面グラフにおける面の数，頂点の数，辺の数に関する関係式）も興味深い。２部グラフやマッチングなどは関数や関係の項目に追加しても学習できる。

（４）離散数理を楽しむ

思考そのものを楽しみ味わうために，応用場面等をもつ種々の問題について考える。例えば，可視性問題（美術館問題；n 角形の形をした美術館がある。何台かの監視カメラを館内に設置し壁に展示してある絵画を監視したい。カメラは高々何台必要か。），巡回セールスマン問題（セールスマンが全ての顧客を回り元に戻る最短経路の発見；離散アルゴリズムでの近似解法；効率よく解くことが困難），パンケーキ定理（平面上に任意に与えられた n 個の赤点と m 個の青点に対して，これを同時に２等分する直線が存在する。），ハピー・エンド問題（どの３点も同一直線上にない任意の５点に対して，ある適当な４点を選びその４点で凸四角形ができる。），カークマンの女学生散歩問題（分解可能釣合い型不完備ブロックデザインの構成問題と同値），畳敷き問題（パリティ，２値化；問題の構造を視点を変えて捉え，偶数，奇数の特性を用いて解決する。），パスカルの三角形の性質（パスカルの三角形中の両端を除く各数は，その数の斜め左上と右上の数の和，三角形は左右対称，n+1 段目の n+1 個の数の総和は 2n，等），ハノイの塔問題（漸化式；３本の棒を使っていくつかの円盤を移動させる問題），配線問題（平面上に赤点，青点がそれぞれ 10 個ずつ任意に配置されている。ただし，どの３点も同一直線上にはないとする。このとき，赤点，青点を両端点とするような 10 本の線分が引けて，かつ，そのどの２本も交差しないような結び方が存在する。），など。

９．具体的な離散教材の構築に向けて

前節までの内容確認と精査を行うために，具体的な離散数学に関する教材開発にヒントを与える問題集を，まずもって作成することが大切となる。これら各種テーマに応じた例題の作成は，この種の新しい活動に多くの理解者を得る上で有益である。これらの作業が教材化のための第一歩になろう（参考文献 I を参照）。この中で，ロシアの中学生，高校生向けの数学問題集「数学のひろば I, II」（志賀浩二・田中紀子訳，1998）には特に有益な情報が含まれている。とにかく前節で提案したような内容が決まれば，例えば，その分野の著書（参考文献 II を参照）などにはいくつかの例題をみることができ，高校数学教育レベルを考えた上での教材化作業が可能となろう。離散数学の話題に関する問題づくりのアイデアやその作成手順等を，根上生也・中本敦浩（2004）に見ることもできる。

本原稿末に「資料」として，特に鳩の巣原理に関する 40 問題や包除原理に関する４問題，その他６問題，を挙げている。本節では，大学入試問題として出題された離散数学の内容に関する９問題のみ列挙する（他の入試問題は，景山，2005，を参照せよ）。初等整数論に関係した問題が結構多く見られるが，それらは原則として離散数学としては扱わない。それらとは，例えば，単なる各種の整数問題や，整数方程式，不定方程式，単位分数の和，素因数分解，n 進数，格子点の個数，ユークリッドの互除法などに関する問題である。他に，パスカルの三角形，ピタゴラス数，順列・組合せ，２項定理の応用，２項分布確率，集合と論理（命題の真偽問題）などに関する問題も見られる。数学的確率（古典的確率）の問題は実に多いがここでは記載しない。

明治大学経営学部では，一時頻繁にグラフの問題が大学入学試験で出題されていた。また，最近

の傾向の一つに，横浜国立大学教育人間科学部マルチメディア文化課程の前期総合問題の問題１には，2001年度から毎年，離散数学の問題が出題され続けている。

1．東北地方の地図の概形は右図（省略）のとおりである。６つの県を色で塗り分ける。ただし，隣り合う県は異なる色で塗り分ける。このとき，次の（１），（２）に答えよ。

（１）３色を用いるとき，何通りの塗り方があるか。

（２）４色を用いるとき，何通りの塗り方があるか。

2．「n-1 個以下の引き出しに n 個の物をしまえば，どこかの引き出しには２個以上の物が入らなくてはならない（１）。」このごく当然の道理は，デイリクレの原理といって数学ではよく利用される。

さて，この原理をつかって，「どのような会合においても，その中に友人の数が同じであるような人が少なくとも２人はいる」ことを証明しよう。ただし，友人関係は相互的であって，自分自身は友人とはいわない。

会合に集まった n 人のおのおのに，その友人数を対応させる。友人数は最小 0 から最大 n-1 までにわたりうるが，0 と n-1 とが同時に現れることはない（２）。したがって，友人の数は n-1 を越えない。そこで，デイリクレの原理により，同じ友人数をもつ人が２人はいることになる（３）。

（１）なぜか，理由をわかりやすく述べよ。

（２）なぜか，理由を述べよ。

（３）デイリクレの原理をどう適用したか。

3． 平面上に，どの３点も同一直線上にない６個の点があり，すべての点の間が線分（辺）で結ばれている図がある。今，この図のすべての辺に赤か青のどちらか一方の色をつけるとする。このとき，この図の中には3辺が同じ色の三角形が存在することを説明せよ。

4．xy 平面において，x 座標，y 座標がともに整数である点を，格子点とよぶ。次の問いに答えよ。

（１）ただ１つの格子点しか通らない直線が存在することを説明せよ。

（２）１つの格子点も通らず，x 軸，y 軸のどちらとも平行でない直線が存在することを説明せよ。

（３）n を２以上の自然数とする。ちょうど n 個の格子点を通る直線が存在するかどうか，あなたの考えを書け。

5．平面上に任意に与えられた n 個の赤点と m 個の青点に対して，これを同時に２等分する直線が存在することを証明せよ。但し，n，m は有限の値である。

6．一辺の長さが 50cm の正方形の形をした射撃の的がある。いま，51発の弾丸が的上のすべて異なった点に当たったとする。このとき，弾丸が当たった点のうちのある３点は，一直線上に並んでいるか，あるいはそれら３点を頂点とする三角形の面積が 50cm^2 以下となっていることを証明せよ。

7．円に内接する正８角形の８つの頂点から３つを選んで作れる３角形で，鋭角３角形の個数を求めよ。

8．赤，黄，緑，青，紫の小さな球がたくさんあり，次の条件（１），（２），（３）を満たしている。

（１）同じ色の球は，同じ重さである。

（２）球の重さは，100g，101g，102g，103g のいずれかである。

（３）赤い球256個，黄色い球64個，緑色の球16個，青い球４個，紫色の球１個の重さの合計は，ちょうど 35000g である。

各色の球１個の重さを求めよ。（注：問題には，球が並んだ図がある，これは省略する。）

9．1gから40gまでの，1gの整数倍の質量をもつ任意の物体を，天秤を使って1g単位で量りたい。このとき一方の皿に物体を，他方におもりをのせ，つり合わせて量る方法Ａと，物体をのせる皿にも，おもりをのせることを許す方法Ｂがある。方法Ａと方法Ｂで用意すべきおもりの個数の最小値をそれぞれ求めよ。

10．授業実践例

１．広島市のある高等学校において，１年生を対象として，2001年９月に４回（それぞれ「鳩の巣原理」「ハピー・エンド問題」「パリティ（偶奇性）を利用する問題」「タイル張り問題」を中心に），12月に３回（「ハピー・エンド問題」を３クラスで），津賀章二による離散数学の話題を中心とした研究授業が実施された。各教材観のエッセンスは，順に，あいまいさに惑わされることなく，そのあいまいさを有効に使う能力，分類・整理する能力，パリティ（偶奇性）を理解しその特性を用いて問題解決する力，連鎖反応を読む能力等を身につけることをうたっている。また，そこでは，１）離散数学教材に関する問題を１問，「今日の問題」として設定し，生徒たちが自由に考え，発言できる場面を設定しながら教師側が必要に応じて支援を送る形態で行っている，また，２）それぞれの授業の内容は，その時間内（50分）で完結することを目標としている。興味深い考察が行われているが，この中の１回分（鳩の巣原理を取り上げたもの）の授業実践に出席して感じた事は，生徒がこの種の問題にはじめて出会ったことで興味を示したが，現代の高校生は少し考えて分からないとすぐに思考をストップする，all or nothing 的な状況に陥り易いということだった。忍耐強く思考を継続してはくれなかった。

２．2005年11月に，鳩の巣原理を中心とした５回にわたる研究授業実践を実施した。授業実施者は岡山県のある高等学校教諭津島久美である。筆者も２回目の授業を参観し，その分析に携わった。５回分の授業は，鳩の巣原理の発見（１回目），鳩の巣原理を用いた三つの問題演習（２回目），前時の最終問題についてのグループ討論（３回目），グループ発表会（４回目），鳩の巣原理の理解度を見るための問題の解決活動（５回目），の順で進めた。同時に各授業の前後にアンケート調査を実施し，１週間後と１ヶ月後にも情意面の変化に関するアンケート調査を実施した。これらの考察から，数学という学問の新しい面や微分積分を頂点とする伝統的な高等学校数学カリキュラムの中での離散教材の有用性を示せたと評価している。具体的に生徒の状況を述べると，この一連の授業では，思考の葛藤の中で生徒たちの笑顔が見られたこと，生徒たちが輝いていたこと，すごく楽しんでいたこと等が挙げられる。この実践授業の詳細な報告は，本冊子の第Ⅴ章に含まれている。本実践は，１．の広島市での研究授業とは異なり，５回とも同じ話題で進めたという点に特徴がある。

参考文献Ⅰ

離散数学内容の教材化等で参考になる文献を挙げる。

秋山　仁（1988）：有限離散の数学．三省堂高校数学ぶっくれっと，No. 9，pp. 1-17.

秋山　仁（1989）：数学の視覚的な解きかた．発見的教授法による数学シリーズ　講義４．駿台文庫.

秋山　仁（1996）：日本の離散数学の歩み．日本数学会応用数学分科会，特別講演.

秋山　仁（2005）：「離散数学」デジタル化社会が求める新しい数学．イリューム，第 34 号，pp. 4-23.

池本圭正（1999）：応用数学的アプローチを基盤とした数学カリキュラムの開発に関する研究 ―高等学校数学への離散数学的課題導入の試み―．高知県教育センター紀要，第 36 号，pp. 281-287.
景山三平（2005）：高等学校数学教育における離散数学の有用性―鳩の巣原理を中心として―．離散数学研究会，東京，25pp.
木村利幸（1995）：事象の変化の見方と離散数学 ―離散的な変化の見方を高等学校数学に位置づけるために―．第 28 回数学教育論文発表会論文集，pp. 443-448.
熊沢和敏（1993）：高等学校における離散数学の教材化に関する一考察．第 26 回数学教育論文発表会論文集，pp. 327-332.
熊沢和敏（1994）：高等学校数学における離散数学の教材化の意義．数学教育研究，上越教育大学，第 9 号，pp. 85-94.
公庄康三（2004）：Discrete Math 離散数学．東京書籍．
河野芳文（1999）：グラフ理論 ―一筆書きとオイラーの定理―．広島大学付属中・高等学校研究紀要，第 46 号，pp. 31-37.
国立教育政策研究所教育課程研究センター（2004）：平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査（高等学校）ペーパーテスト調査集計結果及び質問紙調査集計結果．国立教育政策研究所教育課程研究センター，pp. 132-133．なお，この報告書は，次のサイトで見ることができる。
http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h14/index.htm
小林伸行（1992）：離散数学の教材化の意義．第 25 回数学教育論文発表会論文集，pp. 457-462.
小林伸行（1993）：離散数学の教材化に関する研究．兵庫教育大学大学院学校教育研究科修士論文.
志賀浩二・田中紀子訳（1998）：数学のひろば I，II．岩波書店．(Mathematical Circles, by Dmitri Fomin, Sergey Genkin and Ilia Itenberg, American Mathematical Society, 1996).
杉山吉茂・澤田利夫・橋本吉彦・町田彰一郎編（1999）：数学科教育．第 6 章 離散数学(室岡和彦)．学文社
津賀章二（2002）：高等学校数学科の離散数学教材導入に関する試み．広島大学大学院教育学研究科修士論文.
中本敦浩（1998）：高校数学から見た離散数学の世界．数学セミナー，8 月号，pp. 10-13.
根上生也（1997）：離散数学の発展 ―「個数の処理」を活かそう！ 三省堂高校数学情報 夏季特別号，pp. 5-8.
根上生也（1999）：離散数学で変わる数学教育．算数・数学カリキュラムの改革へ．日本数学教育学会編，産業図書，pp. 129-140.
根上生也・中本敦浩（2004）：基礎数学力トレーニング．日本評論社．
室岡和彦（1992）：離散数学教材の学習指導方法．筑波数学教育研究(11)A，pp. 11-18.
森村靖彦（2001）：組合せ論に関する基礎的研究 ―数えあげの手法と教材性を中心にして―．広島大学大学院教育学研究科修士論文.
和木 勲・萩田竜三（1999）：グラフ理論を教える ―授業報告と理論的な背景―．大阪高等学校数学教育会会誌 50 周年記念特集号，pp. 20-27.
J. A. Dossey (1990)：Discrete Mathematics and the Secondary Mathematics Curriculum. National Council of Teachers of Mathematics.
J. A. Dossey (1991)：Discrete Mathematics: The Math for Our Time. Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12, pp. 1-9. Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics.

M. J. Kenney and C. R. Hirsch (eds.) (1991): Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12. Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics.

S. B. Maurer (1984): Two meanings of algorithmic mathematics, Mathematics Teacher, No. 77, pp. 430-435.

S. B. Maurer and A. Ralston (1991): Algorithm: You cannot do discrete mathematics without them. Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12, pp. 195-206. Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics.

S. B. Maurer and A. Ralston (1998): Discrete Algorithmic Mathematics, 2nd ed., A. K. Peters, Ltd.

National Council of Teachers of Mathematics (1989): Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000): Principles and Standards for School Mathematics, Reston VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

J. G. Rosenstein, D. S. Franzblau and F. S. Roberts (eds.) (1997): Discrete Mathematics in the Schools. American Mathematical Society, National Council of Teachers of Mathematics.

The University of Chicago School Mathematics Project (1998): Precalculus and Discrete Mathematics, Scott Foresman Addison Wesley. http://social-sciences.uchicago.edu/ucsmp/

離散文献 II

幾多の専門書で，教師の皆さんが参考になると思われる基本的文献を挙げる。

（組合せ論一般）

N. Biggs (1989): Discrete Mathematics. Revised ed., Clarendon Press, Oxford.

P. Cameron (1994): Combinatorics; Topics, Techniques, Algorithms. Cambridge University Press, Cambridge.

N. Crisler, P. Fisher and G. Froelich (1999): Discrete Mathematics Through Applications, 2nd ed., W. H. Freeman.

M. Jr. Hall (1967): Combinatorial Theory. Ginn-Blaisdell. （岩堀信子訳「組合せ理論」吉岡書店，1971）.

J. H. van Lint and R. M. Wilson (1992): A Course in Combinatorics. Cambridge University Press, Cambridge.

P. フランクル・秋山 仁 (1987)：現代組合せ論．共立出版．

C. ベルジェ（野崎昭弘訳）(1973)：組合せ論の基礎．サイエンス社．

F. P. プレパラータ・M. I. シェーモス（浅野孝夫・浅野哲夫訳）(1992)：計算幾何学入門．総研出版．

S. スキエナ（植野義明訳）(1992)：Mathematica 組み合わせ論とグラフ理論．アジソン ウエスレイ・トッパン．

R. P. スタンレー（成嶋弘・山田浩・渡辺敬一・清水昭信訳）(1990)：数え上げ組合せ論 I (Enumerative Combinatorics, Volume I)，日本評論社．

J. マトウシェク/J. ネシェトリル（根上生他・中本敦浩訳）(2002)：離散数学への招待 上．シュプリンガー・フェアラーク東京．

J. マトウシェク/J. ネシェトリル（根上生他・中本敦浩訳）(2002)：離散数学への招待 下．シュプリンガー・フェアラーク東京．
C. L. リュー（伊理正夫・伊理由美訳）(1975)：組合せ数学入門 I, II．共立全書．
L. ロバッシュ（成嶋弘・土屋守正訳）(1993)：数え上げの手法．東海大学出版会．
L. Fejes Toth (1983)：配置の問題（樋口伊佐夫・種村正美訳）．みすず書房．
秋山 仁 (1990)：数学流生き方の再発見．中央公論社．
秋山 仁・占部正承 (1998)：初等離散数学．森北出版．
秋山 仁・R. L. Graham (1993)：離散数学入門．朝倉書店．
榎本彦衛 (1982)：情報数学入門．新曜社．
成嶋 弘 (2003)：数え上げ組合せ論入門．改訂版．日本評論社．
野崎昭弘 (1994)：組合せ論・グラフ理論．日本評論社．
野崎昭弘・田中公治 (1979)：情報数学入門．サイエンス．
平松豊一 (1997)：応用代数学．裳華房．
道脇義正 他(1991)：情報科学のための数学入門．東京図書．
山本幸一 (1983)：順列・組合せと確率．岩波書店．

（グラフ理論）

C. ベルジュ（伊理正夫・他訳）(1976)：グラフの理論 I, II, III．サイエンス社．
B. ボロバシュ（斎藤伸自・西関隆夫訳）(1990)：グラフ理論入門．培風館．
R. ディーステル（根上生他・太田克弘訳）(1996)：グラフ理論．シュプリンガー・フェアラーク東京．
L. ロバッシュ（秋山仁・榎本彦衛監訳）(1993)：グラフの構造．東海大学出版会．
L. ロバッシュ（秋山仁・榎本彦衛監訳）(1993)：グラフの不変数．東海大学出版会．
L. ロバッシュ（秋山仁・榎本彦衛監訳）(1993)：集合論的グラフ理論．東海大学出版会．
C. L. リュー（成嶋弘・秋山仁訳）(1978)：組合せ構造とグラフ理論入門．マグロウヒル．

（コンピュータサイエンス）

R. グレアム/D. クヌース/O. パタシュニク（有澤誠・安村通晃・萩野達也・石畑清訳）(1993)：コンピュータの数学（Concrete Mathematics, 1989）．共立出版．
N. コブリッツ（林彬訳）(1999)：暗号の代数理論，シュプリンガー・フェアラーク東京．
D. R. スチンソン（桜井幸一訳）(1995)：暗号理論の基礎．共立出版．
S. リプシュッツ（成嶋弘監訳）(1995)：離散数学．オーム社．
C. L. リュー（成嶋弘・秋山仁訳）(1986)：離散数学入門．マグロウヒル． オーム社(1995)．
赤間世紀 (1996)：離散数学概論 ―コンピュータサイエンスのための基礎数学―．コロナ社．
茨木俊秀 (2004)：情報学のための離散数学．昭晃堂．
尾関和彦 (2004)：情報技術のための離散系数学入門．共立出版．
柴田正憲・浅田由良 (1995)：情報科学のための離散数学．コロナ社．
仙波一郎 (1989)：組合せアルゴリズム．サイエンス社．
野崎昭弘 (1980)：離散系の数学．近代科学社．
藤原良・神保雅一 (1993)：符号と暗号の数理．共立出版．
守屋悦朗 (1992)：コンピュータサイエンスのための離散数学．サイエンス社．

（デザイン）
D. Raghavarao (1988)：Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments. Dover.
石井吾郎 (1972)：実験計画法/配置の理論. 培風館.
来安善一 (1980)：アダマール行列とその応用. 電子通信学会.

【資料】

I. 鳩の巣原理に限定して，その考え方を用いて解ける問題を提示する。
以下の 40 問題は，「次を証明せよ」である。

1. n 羽の鳩が $k<n$ なる k 個の巣に入るとすれば，2羽以上の鳩が入る巣は少なくとも1つある。
2. n 羽の鳩が $k<n$ なる k 個の巣に入るとすれば，$\lceil n/k \rceil$ 羽以上の鳩が入る巣は少なくとも1つある。ここで，$\lceil x \rceil$ は x 以上の最小整数を示し，切り上げ（上方整数部分）と言われる。
3. 3人以上のグループには，必ず同性の２人がいる。
4. 5人の若い工員が全員で 1500 ドルの賃金を手にした。全員各自1台 320 ドルの電子製品を買いたいと思っている。少なくとも1人は，次の賃金支払日まで買うのを待たなければならない。
5. 袋に赤と黒の２色のビーズがいくつか入っている。袋の中を見ないでビーズを取り出して，同じ色のビーズが２個手元にあるようにするには，最低いくつのビーズを取り出せばよいか。
6. 広島市には，必ず同じ髪の毛の本数をもつ人が，すくなとも８名はいる。ただし，広島市の人口を 120 万人とし，人間の髪の毛の本数は高々16 万本とする。
7. ある森に 80 万本の松の木が生えている。60 万本を越える松葉をもつ木は1本もないとすると，この森には，同じ数の松葉をもつ木が少なくとも２本存在する。
8. 25 個のリンゴ箱をもつ店に３種類のリンゴが配達された。さらに，それぞれの箱には同じ種類のリンゴが入っているとすると，少なくとも９箱には同じ種類のリンゴが入っている。
9. n 個のボールが m 個の箱に入っている，もし $n < m(m-1)/2$ ならば，同じ数のボールが入った箱が少なくとも２つある。
10. ある国には，サッカーチームが s 組あって，それぞれ 11 名の選手がいる。今，他国で行われる試合に参加するために，選手達は空港に集合している。しかし，彼らはキャンセル待ちの状態である。目的地に飛ぶ航空機は 10 便あるが，現在どの便にも s 人分の空席しかない。1人の選手がキャンセル待ちを避け自家用機で行くことになった。このとき，少なくとも1つのチームは，選手全員で試合に行ける。
11. 1辺の長さ２の正方形の中に５点があるとき，その中に距離が高々 $\sqrt{2}$ である２点が存在する。
12. 1辺の長さ２の正方形の中に９点があるとき，その中に三角形の面積が高々 1/2 である３頂点が存在する。
13. 1辺の長さが 70cm の正方形の形をした射撃の的があり，50 発の弾丸が的に当たったとする。このとき，弾丸が当たったある２点が存在して，それら２点間の距離は 15cm 未満である。ただし，弾丸の当たった所は点と見なし，２個の弾丸が同一の場所に当たった場合は，それらの２点の距離は０とする。
14. 1辺の長さが 70cm の正方形の形をした射撃の的があり，99 発の弾丸が的に当たったとする。このとき，弾丸が当たったある３点が存在して，それら３点を頂点とする三角形の面積は 50cm^2 以下である。ただし，弾丸の当たった所は点と見なし，２個の弾丸が同一の場所に当たった場合は，

それらの２点の距離は０とする。

15. １辺の長さ１の正六角形のダーツ盤に 19 本の矢が刺さっているとき，その中に距離が高々 $\sqrt{3}/3$ である２点が存在する。

16. １辺の長さ 60 の正方形の広場がある。この広場に 10 本の照明灯を立てるとき，どんな立て方をしても，少なくとも２本はその間隔が 30 以下になる。

17. 1ｍ 四方の正方形の中に 51 個の点が点在している。この中のある３点をカバーできる 20cm 四方の正方形が存在する。

18. １辺の長さ２の正三角形の中に５点があるとき，その中に距離が高々１である２点が存在する。

19. １辺の長さ３の正三角形の中に 10 点があるとき，その中に距離が高々１である２点が存在する。

20. 平面の格子点上に，５つの点があるとき，これらの格子点の中の適当な２つを取ると，この２点の中点もまた格子点となる。

21. ３次元ユークリッド空間内に９つの格子点が与えられているとき，これらの格子点の中の適当な２つを取ると，この２点の中点もまた格子点となる。

22. 1，2，3，...，2n の 2n 個の自然数の中から n+1 個を選ぶとき，その n+1 個の自然数の中に差が１である２つの数が必ず含まれる。

23. 1，2，3，...，4n の 4n 個の自然数の中から 2n+1 個を選ぶとき，その 2n+1 個の自然数の中に差が２である２つの数が必ず含まれる。

24. n 個の任意の自然数からなる数列 a_1，a_2，...，a_n に対して，その中の何項かの和(１項以上の和)は，n で割り切れる。

25. 次の式をみたす整数 a，b，c で，どれか１つは０でなく，かつどの絶対値も 100 万を越えないものが存在する：　$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$.

26. ２のべき乗の中で，その差が 2005 の倍数となる２つの数がある。

27. 10 進法で表したとき，全ての桁に表れる数が１だけという整数で，2003 で割り切れるものがある。

28. 10 進法で表したとき，最後が 001 で終わる３のべき乗で表される数がある。

29. ６人からなるどんな集団にも，互いに知り合いである(少なくとも)３人か，互いに知り合いでない(少なくとも)３人の，どちらか一方はいる。

30. ６点完全グラフを考える。すべての辺が赤か青のいずれかに塗らされているものとする。このグラフには，単色三角形(すべての辺が同じ色)が存在する。

31. どんな５人のグループでも，その中に友人の数が同じであるような人が少なくとも２人はいる。ただし，友人関係は相互的であって，自分自身は友人といわない。

32. どのような会合においても，その中に友人の数が同じであるような人が少なくとも２人はいる。ただし，友人関係は相互的であって，自分自身は友人といわない。

33. １以上 99 以下の自然数の中から勝手に 10 個選んだ数からなる集合 S が一つ与えられている。このとき，要素全部の和が等しい，空でない互いに排反である S の部分集合 X，Y が存在する。ただし，集合 X，Y が互いに排反であるとは，共通に含まれる要素がないことをいう。

34. 数学オリンピックで 10 人の生徒が全部で 35 題の問題を解いた。どの問題もちょうど１人の生徒だけに解かれている。また，１つの問題だけを解いた生徒，２つの問題を解いた生徒，３つの問題を解いた生徒が少なくとも１人はいる。このとき，５つの問題を解いた生徒が少なくとも１人はいる。

35. 3x3 の格子があり，それぞれのマス目に -1, 0, +1 のどれかが入っている。タテ，ヨコ，ナナメと和をとる取り方は8通りあるが，そのうち，2通りは和が等しくなる。

36. 100 人が丸いテーブルで囲んで座っているが，半分を超える人が女性である。テーブルの対角線上に座っている2人の女性がいる。

37. 15人の少年がどんぐりを100個集めた。このとき，同じ数のどんぐりを集めた少年がいる。

38. 1,2,...,9 を3つのグループに分ける。そのうちの1つのグループの中のすべて数の積は 71 を超える。

39. 半径の長さが1の円がある。この円周上に異なる7つの点 p_1, p_2, ..., p_7 を任意に取る。このとき，弦 p_ip_j ($1 \le i, j \le 7$; $i \ne j$) の長さが1より小さい点の組 p_i, p_j が少なくとも一対存在する。

40. 円周上に1から10までの数をランダムに並べる。このとき，円周上で隣り合う3つの数で和が17以上になるものが存在する。

II. 包除原理の考え方を用いて解ける問題を提示する。

41. 文字 A, B, C, D, E, F の順列の中で，文字列 BE も FAD も含まないものの個数を求めよ。

42. 1から9999までの9999個の数の中に，2で割っても，3で割っても，5で割っても割り切れない数は，全部で何個あるか。

43. オイラー関数 $\phi(n)$ とは，$n > m$ で n と互いに素な自然数 m の個数をいう。

(1) n が素数ならば，$\phi(n) = n - 1$.

(2) n が素数べき ($n = p^\alpha$) ならば，$\phi(p^\alpha) = p^\alpha(1 - 1/p)$.

(3) $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_c^{\alpha_c}$ (素因数分解) のとき，$\phi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \cdots (1 - 1/p_c)$.

44. ある人が n 人の友人に手紙を出すことにした。書いた手紙を秘書に頼んで，宛名書きのしてある封筒に入れてもらったが，どの手紙も正しい封筒に入っていなかった。このように，どの n 通の手紙も正しい宛名の封筒に入っていない組合せは何通りか（モンモールの封筒取違え問題)。

III. 他の興味深い問題を提示する。

45. ある宿泊所は7室あり，10人の客がいる。この10人の客にカギを，次の条件『10人のうちのどの7人を選んできても，その人たちがそれぞれ7つの異なる部屋に入ることができる』が満たされるように渡したい。このときカギは，最低，何個必要か。

46. 正 n 角形の n 個の頂点に対して，

(1) これらのうちの任意の3点を結んでできる三角形の総数を求めよ。

(2) 上の三角形のうちで鋭角三角形となるものの総数を求めよ。

47. n を自然数とするとき，次のことが成り立つことを証明せよ。

(1) $1111^n - 1109^n$ は 2 で割り切れる。

(2) $11^n - 8^n - 3^n$ は 24 で割り切れる。

(3) $2450^n - 1370^n + 1150^n - 250^n$ は 1980 で割り切れる。

48. 座標空間の点集合 S を次のように定める。

$S = \{(i, j, k) : 0 \le i, j, k \le 4$ なる整数$\}$

Sの各点に蜜が配置してある。点A(1, 1, 2)にいる蝶が125ヶ所に配置されている蜜をすべて吸って，再び点Aに戻る距離125のルートは存在するか。

49. 8x8 サイズの部屋に，畳半畳分（サイズ 1x1）のコタツを1個掘る。その後，この部屋を 1x3 サイズの変形畳で敷き詰めたい。どこにコタツを掘ればよいか。

50. M夫妻は最近，同伴でパーティに出席し，そこには他に５組の夫婦が同伴で出席していた。色々な人々の間で握手が交わされた。どの人も自分の同伴者とは握手せず，どの人も同じ人と２度以上は握手をせず，また当然だが，だれも自分自身とは握手をしなかった。握手をした後，M氏は，彼の妻を含めた各人に，他の人と何回握手したかと尋ねた。驚いたことに，どの人も異なる回数を答えた。さて，M夫人は何回握手をしただろうか。

高等学校へ導入する離散数学の教育課程への位置付け

正田　實
元文部省主任視学官・元滋賀大学教授
前国立教育政策研究所客員研究員

【要約】高等学校の学習指導要領の７回の改訂は，大きく３つにわけて考えることができる。第１期は，戦後の混乱期で昭和 26 年の改訂であり，指導しやすい形を求めたものである。第２期は，拡大期で昭和 30 年，昭和 35 年，昭和 45 年の改訂であり，数学教育の現代化の潮流などを追い風にして，新しい学習内容を取り入れたものである。第３期は，後退期で昭和 53 年，平成元年，平成 11 年の改訂であり，すべての生徒が履修する科目については思い切って負担を軽減するなどの原則的な制約が教科の要請を超えたところで課されるようになったものである。今後，高等学校数学の学習内容を時代の変化に対応して改善することが必要であり，離散数学という新しい内容を積極的に導入することによって，内容を充実し，微分・積分を頂点とする単頂型になりがちな高等学校数学を多頂型に変革するきっかけとすることができる。その際，離散数学の高等学校数学科の教育課程への位置付けとしては，現行の科目構成が継続すると仮定して，それらの内容を取り込むことを考える。

１．はじめに

高等学校・数学の学習指導要領は，進学率の上昇に伴う多様化対応，数学を将来直接的に必要とする生徒に対する学力水準の維持，数学及び数学教育の世界的な動向や経済社会の要請などの変化への対応を改訂のポイントとすることが求められてきたと考えられる。

しかしながら，現代化への批判を受け，軌道修正を迫られてからは，多くの制約を受けて萎縮せざるをえなくなった。

このため，変化への対応が十全にはなされず，停滞感が充満し，改善のポイントである「学び方」を身に付けさせるなど空文になりかねないと懸念されるようになっている。

改訂に伴って受けてきた制約について振り返り，世界的な潮流にも配慮できるような態勢つくりを図る必要がある。

２．学習指導要領の変遷

新制の高等学校が発足した昭和 23 年には，高等学校の教育内容は一種検定の教科書として，「解析Ⅰ」，「解析Ⅱ」，「幾何」の３科目，いずれも５単位が示され，いずれか１科目を選択し必修することとされていた。

以後７回の大きな改訂が行われている。

（１）昭和 26 年の改訂

学制改革に伴い早急に示さざるを得なかったため，実施の経験と調査研究に基づいて改訂する必要があった。

昭和 23 年から始めて，26 年５月まで審議し，11 月には，「中学校・高等学校　学習指導要領　数学科編（試案）」を公表している。

進学率が40%にも達したことを受けて，中学校の生活経験を中心とした学習を引き継ぐ「一般数学」を加えて，「一般数学」，「解析Ⅰ」，「解析Ⅱ」，「幾何」の４科目構成になった。これは，基本的な路線を変えるものではなく，実態に合わせることと，多様化への対応を図ろうとしたものであったが，「一般数学」はこの科目で数学の学習を終わるようになっていたので，十分に成果をあげることはできなかった。

（２）昭和30年の改訂

数学科としての系統的な指導を行いやすくするため，高等学校だけを改訂している。ここでは，科目選択を改め，統合型にしている。

必修として「数学Ⅰ」（６単位または９単位）（以下では単位数を数値のみで示す）をおき，続いて「数学Ⅱ」（３），「数学Ⅲ」（３・５）としている。また，職業を主とする専門学科に進む生徒には，「数学Ⅰ」に続いて「応用数学」（３・５）を選択できるようにしている。

「数学Ⅰ」には，「代数的内容」と「幾何的内容」をおき，教科書は「代数編」，「幾何編」として編集された。そして，それらを統合する数学的な考え方を「中心概念」としてあげている。

戦後の混乱期を抜け出して，学力水準を維持するためには，高等学校の学習内容を系統化する必要があるとの考えに基づき，系統化を図ったと見ることができよう。

（３）昭和35年の改訂

昭和33年に，小学校・中学校の学習指導要領が，基礎学力の向上と科学技術教育の振興を目指して改訂され，学習内容の系統化が図られた。これを受けて高等学校の学習内容を調整する必要があった。

ところで，進学率が58%にも達したことから，分岐を進めて前回改訂の趣旨をさらに徹底することをねらいとしている。

「数学Ⅰ」（５），「数学ⅡA」（４），「数学ⅡB」（５），「数学Ⅲ」（５），「応用数学」（６）をおき，原則として，「数学ⅡA」，「数学ⅡB」または「応用数学」のうちいずれか１科目を，履修することとしている。

「幾何編」の内容のかなりの部分を中学校へ移行したことから，「数学Ⅰ」では図形の扱いは軽減され，かわりに「数学と論証」をおいたが，指導しにくいといわれ効果的な対応はできなかった。

（４）昭和45年の改訂

世界的な傾向として，数学や科学技術のめざましい進展に対応するための数学教育の現代化が進められた。我が国においても，この方向に沿った研究が盛んになされ，このような動向に沿った改訂が，小学校は昭和43年，中学校は昭和44年，続いて高等学校でもなされた。

ところで，進学率は80%を超えたことから，さらに分岐を進めるとともに，前回の方向を引き継いで教育内容の現代化を図っている。

「数学一般」（６），「数学Ⅰ」（６），「数学ⅡA」（４），「数学ⅡB」（５）「数学Ⅲ」（５），「応用数学」（６）をおき，「数学一般」または「数学Ⅰ」のいずれか一方を，すべての生徒が履修しなければならないとしている。

「数学Ⅰ」の内容としては，

A	代数・幾何	(1)数と式	(2)方程式と不等式	(3)ベクトル	(4)平面図形と式
B	解析	(1)写像	(2)簡単な関数	(3)三角関数	
C	確率	(1)確率			
D	集合・論理	(1)集合と論理			

をあげていて，現代化を図り系統性を明示したものであり，程度の高いものである。

高等学校としては，「数学ⅡB」の「平面図形の公理的構成」は指導しにくいとされていたが，概ね歓迎されていた。

ところが，「小学校で集合論を教えている」「計算力が低下している」などの批判を招き，小・中学校の現代化は後退せざるをえないことになり，高等学校においても，その影響を大きく受けることになる。

（５）昭和53年の改訂

現代化の軌道修正をめざした改訂が小・中学校においては昭和 52 年になされ，続いて高等学校について改訂されている。

ここで，選択の機会を拡大するため，「４単位を超える科目は作らない」ことを原則としている。この原則を守りながら，数学を将来直接的に必要とする生徒の学力水準を維持する方策として，内容を精選して科目独立型へ移行している。

すべての生徒が履修する科目として「数学Ⅰ」（４）をおき，これに続いて，「数学Ⅱ」（３）「代数・幾何」（３），「基礎解析」（３），「確率・統計」（３），「微分・積分」（３）をおき選択して履修することとする。ただし，「微分・積分」は原則として「基礎解析」を履修した後に履修させることとしている。

（６）平成元年の改訂

時代の進展に伴い「情報化への対応」，論理的思考力の育成のため「平面幾何の重視」などの強い要請に応える必要があった。

さらに，進学率は95%を超えるようになったため，特に「すべての生徒が履修する科目については思い切って負担を軽減する」ことが求められた。

前回の改訂に続いて精選を進めたが，多くの要請を科目独立型を維持して継続するにはさらに科目を設定しなければならず，さらに多くの選択科目を履修しなければならないとすれば生徒の負担は増大することになる。

当然のことではあるが，「生徒の負担軽減を図る」こと「学力水準の維持を図る」ことは学校五日制への移行を意識しながら，改訂の重点目標とされていた。

このようなことから，科目統合型に戻し，一部の科目では項目を選択できるようにしている。

すべての生徒が履修する「数学Ⅰ」（４）に続いて「数学Ⅱ」（３）「数学Ⅲ」（３）をおき，原則として全内容を履修することとする。

一方，内容としては４単位分を用意するが，項目を選択して，概ね２単位分を履修する科目として「数学A」（２），「数学B」（２），「数学C」（２）をおいている。

（７）平成11年の改訂

完全学校週五日制への移行，総合的な学習の時間の確保などにより，「ゆとり」のなかで「生きる力」を培うことが求められた。

そのため，教科の時間は削減され，それを上回る内容を厳選することになった。これらの結果として，中学校の学習内容が大幅に高等学校に移されることになった。

縮小を迫るためにはやむなく取られる手法ではあろうが，今回の改訂においては教科の要望を入れないで枠組みを決定し，短時間の作業で仕上げざるをえないようなった。

さらに，「すべての生徒が履修する科目も選択できるようにし，それに２単位の科目を加える」ことを原則としている。

すべての生徒が履修する「数学基礎」（２）または「数学Ｉ」（３）をおき「数学Ｉ」に続いて「数学Ⅱ」（４），「数学Ⅲ」（３）をおいている。また，原則として，「数学Ａ」（２）は全内容を履修することとし，「数学Ｂ」と「数学Ｃ」については２単位ではあるが，前回のように，内容としては４単位分を用意し，項目を選択して学習することとしている。

３．離散数学の位置付け

（１）変遷からみられる原則的な制約の積み上げ

７回の改訂を大きく３つにわけて考えることができよう。

第１期は，戦後の混乱期である。（１）昭和26年の改訂がこれに当たる。敗戦によるショックと混乱のなかで，実態にあうように，指導しやすい形をひたすら求めたものである。

第２期は，拡大期である。（２）昭和30年，（３）昭和35年，（４）昭和45年の改訂がこれに当たる。戦後の復興のための経済界からの要請，世界的な数学教育の現代化の潮流などを追い風にして，新しい学習内容を取り入れ，時代の変化にともなって，精選すべきは削減したが，トータルとしては，拡大することになっている。この期においては，大きな制約を課されることはなく，教科の要請は尊重されたので，数学科としては都合のよいものと考えるのは当然である。

第３期は，後退期である。（５）昭和53年，（６）平成元年，（７）平成11年の改訂がこれに当たる。この期にあっては，原則的な制約が教科の要請を超えたところで課されるようになる。

・昭和53年の改訂では，　「４単位を超える科目は作らない」
・平成元年の改訂では，　「すべての生徒が履修する科目については思い切って負担を軽減する」
・平成 11 年の改訂では，　「すべての生徒が履修する科目についても選択できるようにし，それに２単位の科目を加える」

上のような原則的な制約は，それぞれの時点ではやむをえないものとして了承されたものといえようが，積み重なって適応してよいと考えることによって，規制緩和の流れと逆の事態を引き起こしているようである。

「規制緩和」を活性化の起爆剤としようするのであれば，検討しなければならない課題である。

例えば，今回の改訂において，「４単位を超える科目」については生かされているとみることができる。また，今回新に加わった「２単位で履修を終えられるように」も当然ではあるが，ほぼ生かされているとみることもでき，「数学基礎」をおくことになったのである。

ところで，「数学Ｉ」を４単位から３単位に縮小したことについては，前回に課題となった「すべての生徒が履修する科目」を援用しているように考えられる。実質的には近いともいえようが，「数学基礎」を設定しているわけだから，「数学Ｉ」はもはや「すべての生徒の履修する科目」ではないので，「思い切った負担軽減」はその必要がないともいえるのである。

いずれにしても，積み重ねられた制約については，検討し，大幅の規制緩和を図る必要がある。

（２）科目構成についての見通し

離散数学を独立した科目として導入するのであれば，他の内容についてもバランスを考えて科目独立型へ移行するのでなければなるまい。

しかしながら，科目独立型をとったのは，（１）の戦後の混乱期と（５）の現代化の批判を受けての緊急避難のときだけであり，（２），（３），（４），（６），（７）のいずれにあっても科目統合型をとっている。

これは，算術，代数，幾何，三角法とばらばらに扱っていた伝統的な中等教育の数学を批判して，ホワイトヘッドが「教育の目的」のなかで指摘しているように

「あまりに多くの科目を与えるな」

「教ゆべきことは徹底的に教えよ」

に取り組んできた成果であり，数学科としては大きな流れということができよう。

「Discrete Mathematics」を独立した科目のような形で紹介している事例も諸外国では多いようであるが，我が国の場合は，科目構成についての検討が積極的になされているわけではないので，現行の科目統合型のなかでそれを取り組むことを考えるのが現段階では適切といえよう。

（３）離散数学の取り組み

２で見てきたように，（５）昭和 53 年の改訂，（６）平成元年の改訂，（７）平成 11 年の改訂の３回にもわたり，変化の激しい時代にもかかわらず，高等学校の学習内容に情報化への対応を除けば大きな変化がないままに過ごしてきた。

これは，小・中学校を主体とした改訂を続けてきた結果であり，高等学校の活性化を阻んできたとも考えられ，世界的な潮流に取り残されるリスクも懸念される。

このようなことから，高等学校数学の学習内容を時代の変化に対応して改善することは必要であるといえよう。

その際に，数学の社会的な需要が増大してきていることを考え合わせると，数学が使える範囲を拡大しつつあることを示すことは学習意欲を喚起する上でも有効といえよう。

また，新しい内容を積極的に導入することによって，内容を充実し，微分・積分を頂点とする単項型になりがちな高等学校数学を多項型に変革するきっかけになれば，本来の趣旨が生かされることにもなる。

教材化を検討してきた項目について，現行の科目構成が継続すると仮定して，取り込んで位置付けることを考えよう。

現行のままでも可能であるともいえるのであるが，「数学基礎」の「（２）社会生活における数理的な考察」では，具体的で興味深い話題をとりあげることができよう。

「数学Ａ」「（２）集合と論理」は，論理的な思考力の伸長を一層図ることをねらいとして新設されたのである。「鳩の巣原理」を活用して補強して学習し易く組み直すこともできるのではなかろうか。

「数学Ｂ」の「（３）統計とコンピュータ」は，中学校の内容を移したことから，内容が貧弱な段階にとどまっている。また，「（４）数値計算とコンピュータ」は，選択される機会が少ないことにもよるのであろうが，旧態依然の内容で魅力が感じられない。できれば，簡単な統計については中学校で扱うことにしたり，情報科との連携を図ったりして大幅に改訂する必要がある。

その際に，「グラフ理論」，「数え上げ，組合せ論」などを取り扱うことが効果的といえよう。

「数学Ｃ」の「（１）行列とその応用」では，一次変換のような扱いをしないこととしているなど課題を残している。イメージをつかみやすくするため，「グラフの行列による表現」などを取り上げることもできよう。

Ⅱ．高等学校への離散数学の導入に関する講演記録

高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究

研究会における講演

本研究会で講演をいただいた年月日，演題は次の通りである。

本報告書では，講演者のご承諾を得て，講演時の資料かまたは講演後にまとめられた資料などをもとに，ここに講演記録を作成している。

1．2004 年 11 月 27 日（土曜日）

演題「離散数学カリキュラム化のポイント」

根上生也先生（横浜国立大学教育人間科学部）

2．2005 年 1 月 22 日（土曜日）

演題「高等学校数学教育と離散数学」

野崎昭弘先生（大妻女子大学社会情報学部）

3．2005 年 2 月 12 日（土曜日）

演題「離散数学とは？」

成島弘先生（東海大学福岡短期大学）

4．2005 年 6 月 18 日（土曜日）

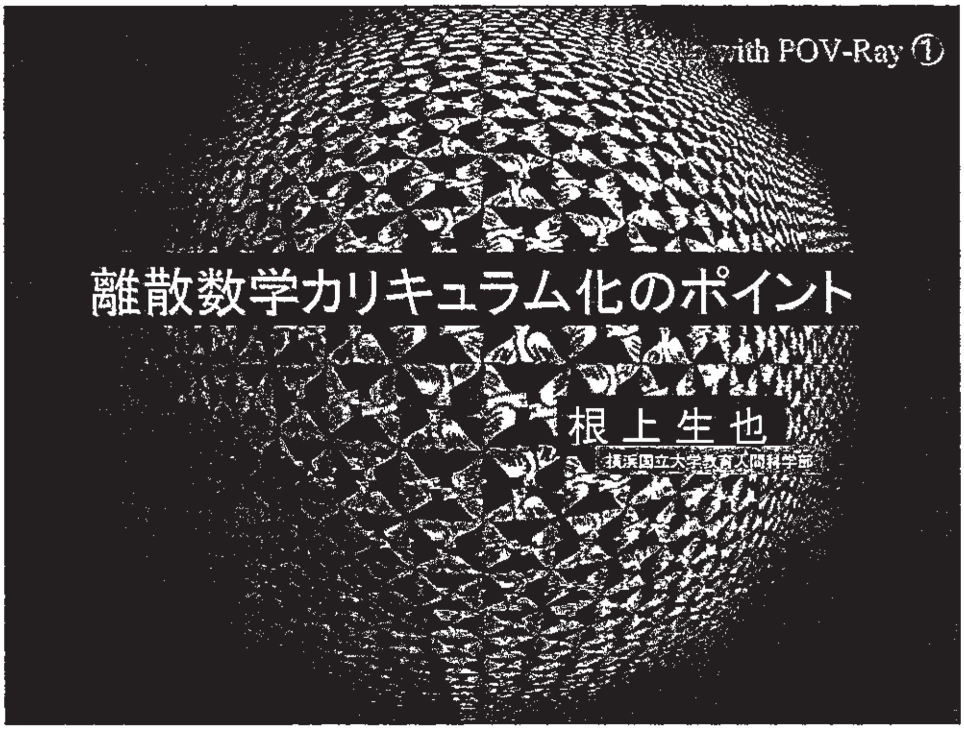
演題「コンピュータの分野から見たら・・・」

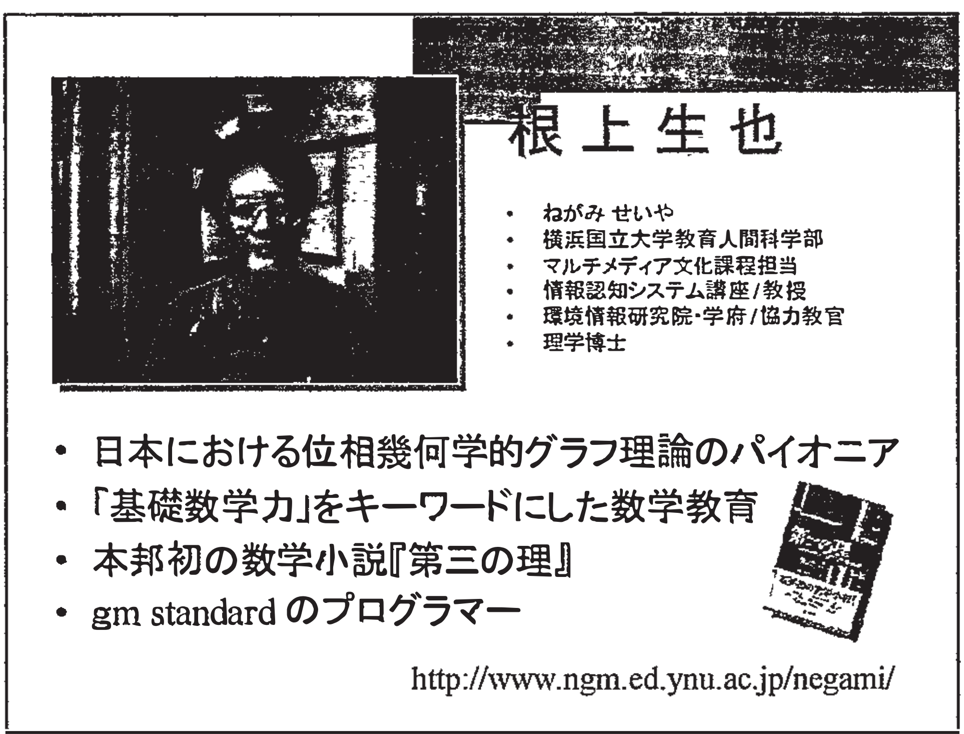
中木達幸先生（九州大学大学院数理学研究院，現：広島大学総合科学部）

5．2005 年 7 月 9 日（土曜日）

演題「離散数学を高校数学カリキュラムに導入すべし」

秋山仁先生（東海大学教育開発研究所）


with POV-Ray ①
離散数学カリキュラム化のポイント
根上生也
横浜国立大学教育人間科学部


根上生也
• ねがみ せいや
• 横浜国立大学教育人間科学部
• マルチメディア文化課程担当
• 情報認知システム講座/教授
• 環境情報研究院・学府/協力教官
• 理学博士
• 日本における位相幾何学的グラフ理論のパイオニア
• 「基礎数学力」をキーワードにした数学教育
• 本邦初の数学小説『第三の理』
• gm standard のプログラマー
http://www.ngm.ed.ynu.ac.jp/negami/

最悪のシナリオ

- 順列・組合せの計算を指導する．
- 数列の漸化式の計算を指導する．
- 母関数の計算を指導する．

- 結局，今までどおり，
  計算の指導に終始する．

●ビール缶，コロコロ

の数学⑥

問題1　500 ml の缶の縦と周囲（円周）とでは，どちらが長いでしょうか？

基礎数学力を鍛えておけば，
こんな問題は計算するまでもありません．

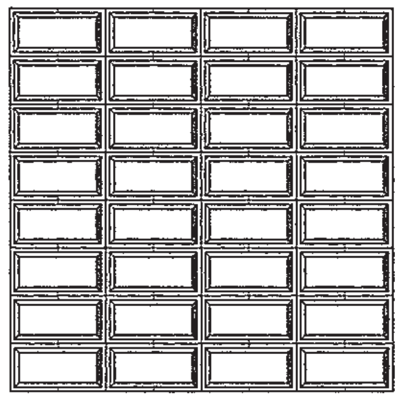
ほーら，周囲の方が長かった．

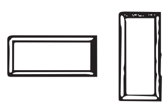
Nの数学②

●和室で一休み

問題1

8×8 の 32 畳の和室があります．
そこに畳を隙間なく敷き詰めてください．





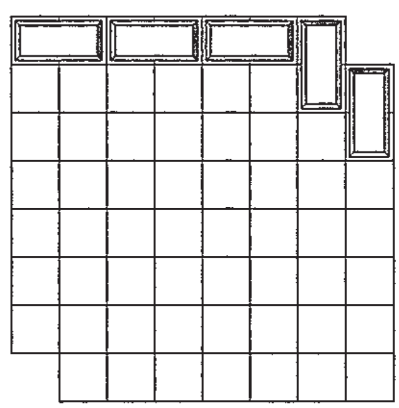
で敷き詰められるかな？

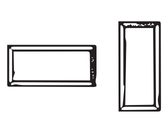
Nの数学②

●和室で一休み

問題2

8×8 の 2 つの向かい合う角の欠けた
31 畳の和室があります、そこに畳を敷
き詰めてください、
はたして，それは可能でしょうか？

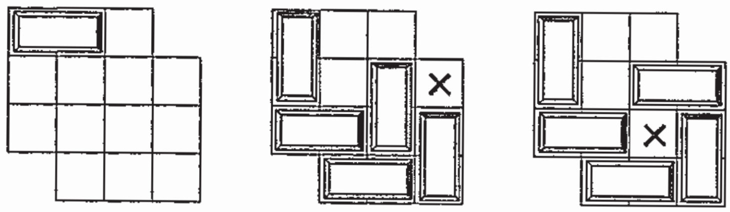


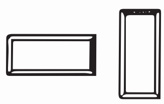


で敷き詰められるかな？

Nの数学2

●和室で一休み

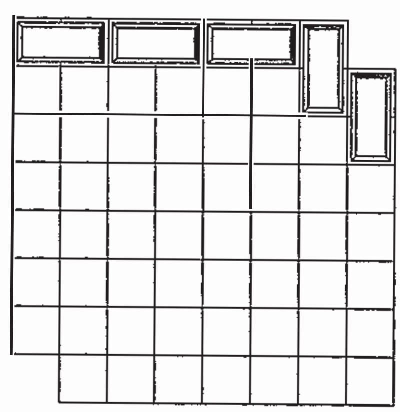


 で敷き詰められるかな?

答え NO!

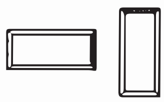
Nの数学2

●和室で一休み



問題2

8×8の2つの向かい合う角の欠けた31畳の和室があります．そこに畳を敷き詰めてください．
はたして，それは可能でしょうか?

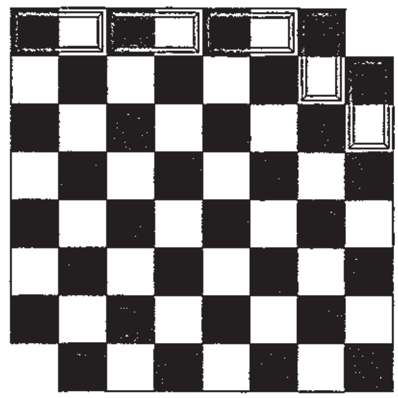
 で敷き詰められるかな?

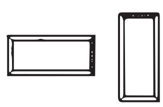
Nの数学②

●コーヒーブレイク

問題3

8×8の2つの向かい合う角の欠けたチェス盤があります．そこに2マス分のタイルを敷き詰めてください．
はたして，それは可能でしょうか？



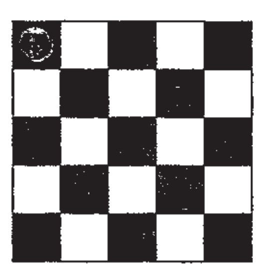
 で敷き詰められるかな？

Nの数学②

●見てわかったことを口にする

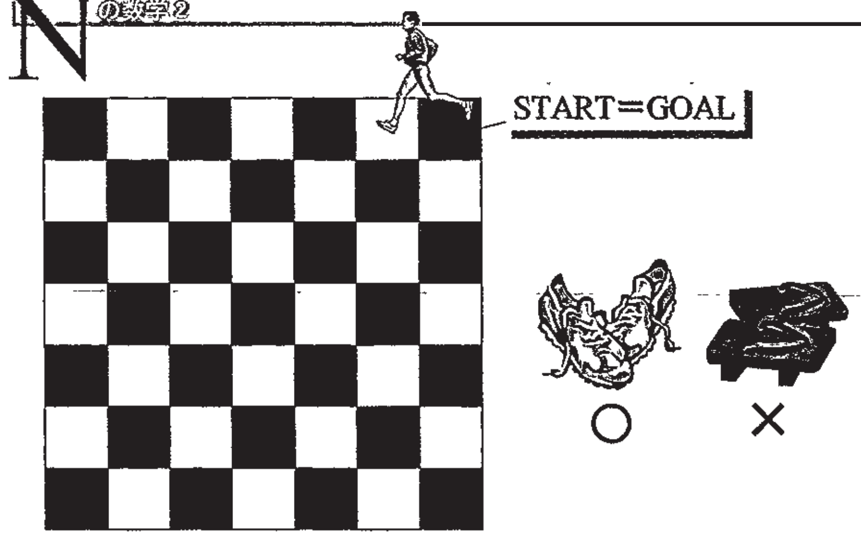
問題4

5×5のボードがあります．
そこにおはじきを1つ置き，上下左右のマスに移動させて，すべてのマスを1回ずつ通過して，最初のマスに戻ってくることができるでしょうか？



●見てわかったことを口にする

Nの数学②



すべてのマスを通って，スタートに戻ってこられるか？

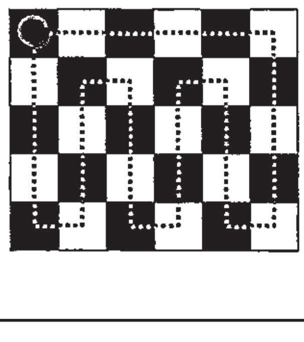
●見てわかったことを口にする

Nの数学②

問題５　$n \times m$ のボードがあります．
そこにおはじきを１つ置き，上下左右のマスに移動させて，
すべてのマスを１回ずつ通過して，最初のマスに戻ってく
ることができるのは，どういう場合でしょうか？

答え

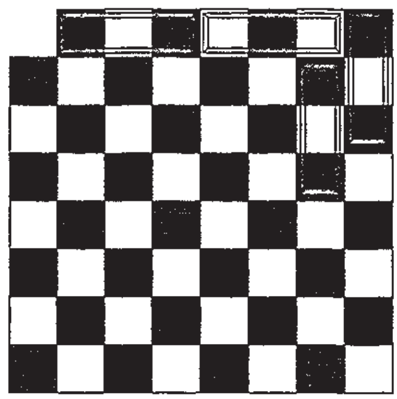
n と m のいずれも２以上で，
少なくとも一方は偶数のとき



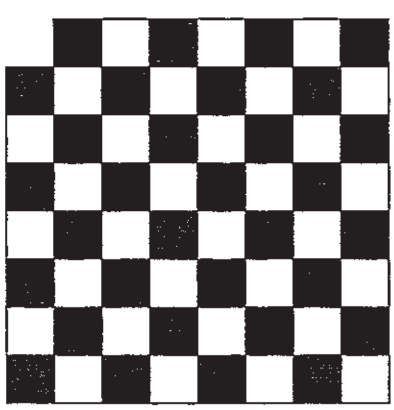
Nの数学⑧　●いちまつの不安

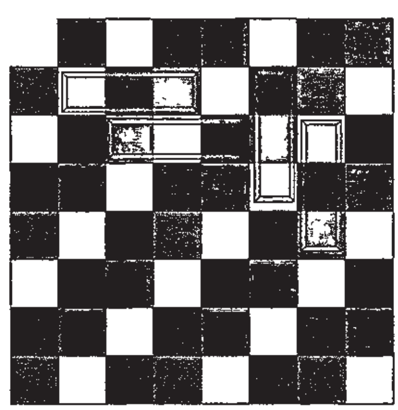
問題6

図のような1つ角が欠けたチェス盤があります．
1×3 のタイルを使って，
それを敷き詰めることができるでしょうか？



Nの数学⑧　●自由・平等・博愛の名のもとに





自分の理解を根拠にものを考えよう！

見てそれとわかること

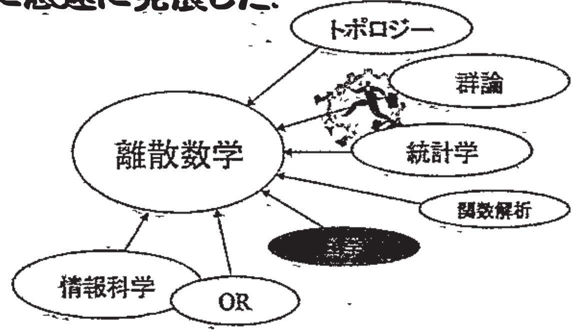
の数学①

●基礎数学力

- 基礎数学力とは…
  - 見てそれとわかる力
  - 人間にはじめから備わっている力
- 基礎数学力を培う
  - 人間に備わっている能力を自然に伸ばす.
- 基礎数学力を活用する状況を作る
  - 絵を描く, 簡単な計算をし, 言葉で考える.

離散数学とは…

- 有限で離散的な構造を対象に展開する数学
- 情報科学の基礎をなす数学の1つ
- 20世紀後半に急速に発展した.



- グラフ理論
- 数え上げ理論
- 組合せ最適化
- 離散幾何
- マトロイド理論
- デザイン理論
- ラムゼー理論

離散数学で何を教えたいのか...

- 絵を描いて，簡単な計算をして，言葉で考える.

- 原理や構造を感知する.
- 原理や構造に着目して，問題解決を図る.
- 原理や構造の違いを理解する.

- 自分の理解を根拠に，言葉で論証する.
- 自分の判断で，状況を改善していく.

離散数学の論証指導…

- 一対一対応
- 鳩ノ巣原理
- 偶奇性
- 双対性
- 二部グラフ化
- 二重の数え上げ

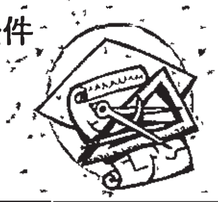
論証に使える原理・構造

- 同値関係，順序関係
- 最大・最小に目をつける
- 数学的帰納法
- 背理法
- オーダーの考え方

論証に使える手法

- 必要条件・十分条件
- 集合論の表記

論証に使える表現



N の数学④

●サイは投げられた

問題1 サイコロを1つ用意する．
まず，そのサイコロを握って，これから何回続けてサイコロを振るかを宣言する．もしその宣言した回数以内に同じ目が2回以上出たら，あなたの勝ち．そうならなかったら，あなたの負けとする．

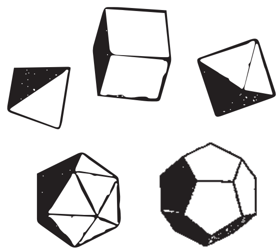
あなたは何回と宣言しますか？

答え 7回

- 必ず同じマークが出るようにするには，トランプを何枚引くか？
- 誕生月が同じ人がいるように人を集めるとしたら，何人呼んでくればよいか？
- 48人も人がいれば，出身都道府県が同じ人がいる．

Nの数学5

●二重の数え上げ



正多面体	頂点数	辺数	面数
正四面体	4	6	4
立方体	8	12	6
正八面体	6	12	8
正十二面体	20	30	12
正二十面体	12	30	20

1つの面に5本の辺があることに注目すると $\longrightarrow 5\times 12$

1本の辺が2個の面に接していることに注目すると $\longrightarrow 2E$

$$\therefore\quad 5\times 12 = 2E$$

グラフ理論の教材例

- ペテルセン・グラフの変形・復元
  - 構造に着目・言明する態度の育成
- 謎のグラフの同型判定
  - コミュニケーションの工夫
- 最小の交差数の決定
  - 方針を持って状況を改善する
- グラフ的な次数列の法則探し
  - 誰も正解はわからないけれど…

gm standard

離散数学に対する批判

- パズルのような陳腐な数学である．
- 体系化されていない．
- 何を習得できるのかがわからない．
- 現場が受け入れないのでは？
- 生徒には難しいのは？

時代錯誤，認識不足！

学校数学に対する疑問

- 論理的な思考 を身に付けさせているのか？
  - 論理的思考の育成には論証幾何が最適なのか？
  - 論証幾何以外の選択肢を知っているのか？
- 豊かな発想 を身に付けさせているのか？
  - 数式で見る世界は限定的ではないのか？
  - 人間本来の能力を引き出しているのか？

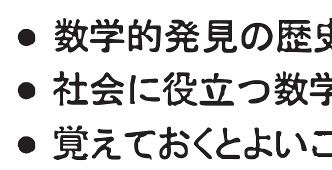
現状で実践すると…

- 優等生が無力化する．
  - 計算以外の解法を持っていない．
  - 知識をもとにしてしか行動していない．
  - 見てそれとわかることを活用しない．
  - 言葉で考えることができない．
  - 必要条件・十分条件の区別をしていない．
  - 命題の帰納法がわからない．

- 劣等生が活気づく．
  - 積極的に試行錯誤をして，解に早く到達する．

数学で学ぶべきこと

- 数学的原理や構造に気づく自己の存在を知る．
- 数学的現象に気づく自己の存在を知る．
- 数学が作られていくプロセスを理解する．
- 数学的発見の歴史的な意義を認識する．
- 社会に役立つ数学を知る．
- 覚えておくとよいことを学び，習熟する．



数学教育小委員会にて

自分の理解を根拠にものを考えよう！

見てそれとわかること

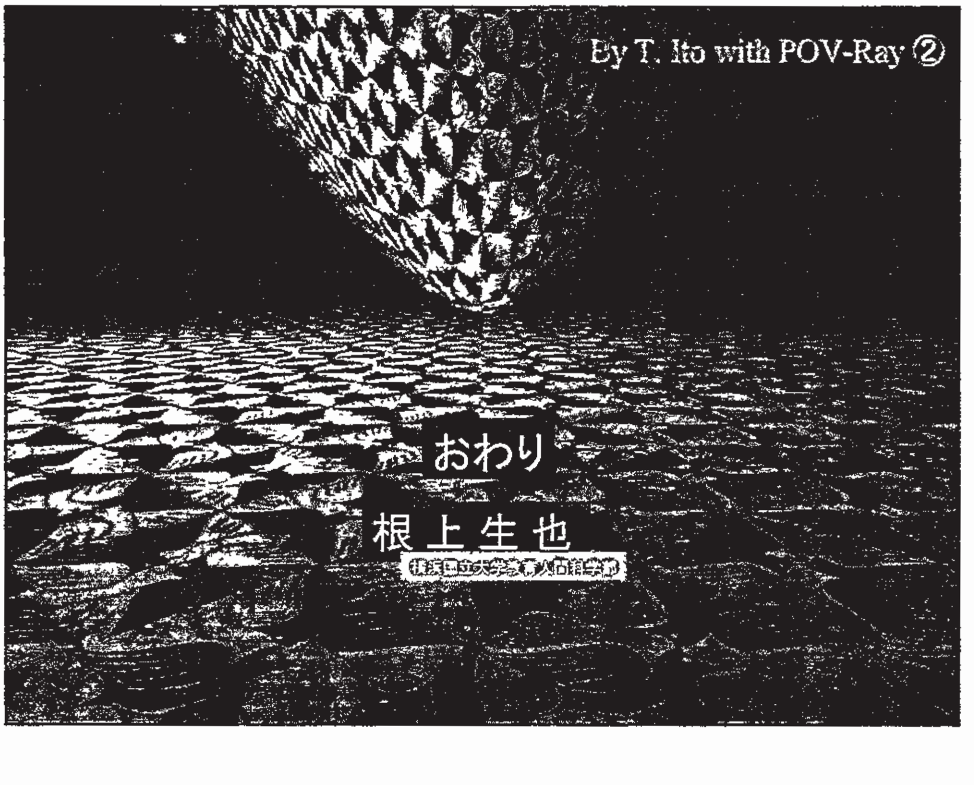
離散数学導入に向けて...

- 離散数学導入の理念を明確化する、
- 学校数学的観点で体系化を図る、
- テーマに応じた例題を豊富に作る、
- 例題を作るための技法を明確化する、

- 離散構造を動的に取り扱えるソフトウェアを開発する、
- そのソフトウェアを簡単に入手できる仕組みを作る、
- 教科書でそれを利用できるように制度を整備する、

離散数学導入における禁じ手

- 親学問の縮小版を導入しようとしない．
  - いるのではない！
  - 人間に備わっている能力（＝基礎数学力）の伸長を目的に！
- 数ばかり数えさせてはいけない．
  - 原理や構造に発見，活用を促す教材作りを！
  - 数列的な解法よりも，構造に着目した立式の指導を！
- 数式ばかりで表現させてはいけない．
  - 何でも四則演算で表現できるという誤解を解く！
  - 言葉や図を使って自由に表現する教材作りを！
- 自分で解くことばかりを強要しない．
  - 解法のおもしろさ，よさに注目する態度を育てる！
  - グループの協同作業による問題解決でもよい．



高校教育における離散数学の効用

野崎 昭弘

大妻女子大学社会情報学部

1．はじめに

離散数学には，予備知識なしに理解しやすい問題が多い。また古典的な数学につながりがあるものも多く，「興味を引きつけやすい，入り口」として利用できる題材が多い。パズルとしての難易度も，さまざまである。また根上生也さんが言われるとおり，証明の題材として，離散数学が適している。幾何学の場合，「位置だけあって大きさのない点」とか「幅がなく無限に伸びる直線」など直観に反するような定義に基づいて，直観的に当たり前のような定理を証明したりするため，一部の生徒には感情的に受け入れにくいところがあるように思う。その点，離散数学の証明は，「技術的な公理」でなく「常識的な事柄」に基づいて証明を進めるため，感情的な反発は少なくて済み，推論の核心部分（３段論法や背理法など）はしっかり含めることができる。たとえば「２値化」は，ある組み合わせが不可能であることを，単純な論法で明らかにしてくれるので，頭が柔らないうちに体験させておくと良いように思う。ついでながら「証明は苦手」と思いこんでしまった大学生の中には，証明問題に入ったとたんに興味を失ってしまうので，「２値化」のおもしろさがついに理解できなかった者がいる。

ここでは私の知識・経験の不足から，「離散数学を高校のカリキュラムに，どのように取り入れるか」という問題は扱えないが，「内容的に，このようなものは何らかの形で取り入れてよいのではないか」と思われる事項を，いくつか挙げてみたい。

2．離散数学の柱

すぐ思いつくだけで，次のようなテーマを挙げることができる（内容の説明は省き，そのかわりに参考書を挙げておく）。

ラムゼー理論（秋山仁「離散数学入門」）

数え上げ母関数の理論（クヌース他「コンピュータ数学」）

グラフ理論，整数論，線形差分方程式（野崎昭弘「離散数学」）

私の経験ではグラフ理論は，基礎的な用語を知っているだけでも，プログラミングの世界で役に立つ。また線形差分方程式の解法は，母関数の理論ほど強力ではないが，やさしくて応用が広い（フィボナッチ数列はこれで十分）。また整数論は，暗号理論で活躍することはよく知られているとおりである。「誕生日の，曜日を求める」話は，剰余計算の初歩的な応用で，誕生日は知っていてもその曜日は知らない場合がほとんどなので，興味をもつ生徒が多い。

しかしこれらの「理論」をまとめてとりあげるのは，時間の関係でむずかしいであろう。いろいろな場面で，個別的な話題として取り上げざるを得ないかも知れないが，それでも十分ではないか，と私は思う。

３．個別的な話題

3.1　あみだくじ

あみだくじの具体例を通して，次の事実を学ぶだけでもよい。

どんな対応づけでも，あみだくじで表せる。

これは

任意の置換は，（j，j＋1）型の互換の積で表せる

ということで，置換群論の基礎である。あみだくじに慣れていると，たとえば4次方程式や5次方程式の解法の分析でも，わかりやすくなる部分がある。

3.2　17番目の不思議

最初の数を生徒が自由に決め，2番目の数を先生が決める。そして次の規則で数列を作る。

前の2つの項の和の，繰り上がりを切り捨てた「下位の桁」を次の項とする。

すると第17項は，先生が指定した数だけで決まり，生徒が選んだ初項には依存しない。

いろいろな演出法があるが，タネは「文字の利用」（第17項を文字で表す）で解明でき，一般項を求める方法も，2次方程式の解法さえ知っていれば，理解可能である。

3.3　ベキ乗の計算法

電卓で1.01の100乗を計算したい。何回の乗算が必要だろうか？小学生なら99回の乗算を実行するだろうが，工夫すればわずか8回の乗算で答を出せる。一般にx^nは，nを十進法で表したときの桁数の6倍以下の乗算で求められる。

たとえばxの1億乗でも，32回の乗算で求まるのである。

3.4　暗号

十進2桁の数XYを，次の規則で暗号化してみよう。

ステップ1：その数に85を加える。

ステップ2：その結果を6倍する。

ステップ3：その結果を101で割った余りVWを求める。

最後の答VWが，XYを表す暗号である。この程度の暗号でも破れるのは，大学1年生120人のクラスで2〜3人であった。解読は，次のようにすればできる：

ステップ1：暗号VWに96を加える。

ステップ2：その結果を17倍する。

ステップ3：その結果を101で割った余りを求める。

その余りが，もとのXYに一致するはずである。このような例からはじめて，RSA暗号に話を進めるまでに，整数のいろいろな性質を学ぶことができる。

＜参考1＞RSA暗号では$s(p-1)(q-1)+1$が合成数になるような素数p，q（sは任意）を使うのであるが，説明用の小さな値としては$p=37$，$q=79$，

$$2\times36\times78+1=41\times137$$

などがある。

＜参考2＞RSA暗号では，非常に大きなnについて，x^nの値を計算しなければならない。3.3の方法は，そこでも役に立つ。

3.5　ベキ乗和の公式

1からnまでの，k乗の和を表す公式P_k（n）を求める。

①k＝1，2，3くらいまでは，幾何学的な（図形的な）方法で証明ができる。特に

$$P_3(n)=P_1(n)^2$$

については，みごとな証明が知られている___幾何学の透明性。

② 一般の場合，代数的な計算によって，何次であろうと公式を導くことができる___代数学の一般性。

③微積分学を使えば，不定積分によって，公式を次々と導くことができる。また母関　数の理論によれば，統一的な一般論を展開することもできる____解析学のパンチ力！

各段階①，②，③を，それぞれ教科書のどこかに埋め込み，しかも「それらをまとめて振り返る」機会があれば，数学の奥行きを感じ取ってもらえるのではないだろうか。

離散数学とは？

成嶋 弘
東海大学福岡短期大学

【要約】離散数学とのかかわりは約 40 年前の大学 2 年生のころであろうか？当時「離散数学」という言葉があったかどうかは定かではない．早稲田大学の野口先生のインフォーマルなセミナーに加わり，そのとき読んだオートマタに関する本の初っ端に「オートマタの数え上げに関する未解決問題」が載っていた．特に何を思うこともなくその問題を考え始めた．その問題を解く過程で得られた定理が，当時現代組合せ論のリーダー的存在であった MIT の Gian-Calro Rota 先生に送り，1974 年に J. of Combinatorial Theory (A) に掲載された論文「Principle of inclusion-exclusion on semilattices」の主定理であり，その後 30 年ほど「離散数学」の主分野の一つである「数え上げ組合せ論」を学び研究する道のりを定めたように思われる．さらに思いがけないことに，短大のマネージメントの役目を仰せつかり，「離散数学」の研究教育から離れざるを得なかった 1998 年と時を同じくして，その主定理がドイツの若き研究者 Klaus Dohmen の論文で採り上げられ，2003 年に彼の理論的展開の纏めとして出版されたれレクチャーノートで，いくつかの主要な位置の一つを与えられた．このような経緯・経験の中で「離散数学」に関する入門レベルの著・訳書やエッセイらしきものも書き著した（下記第一次資料）．それらの中で「離散数学」について感性的に捉えた「こと」を紹介し，講演に与えられた次の大変難しい課題に対する回答に代えたい．

［講演課題］

1）離散数学を高等学校の内容に取り入れるには，どのような内容を，どのような趣旨で取り入れるか？

2）子どもたちの数学離れ（数学に興味･関心をあまり持たない）の原因及び子どもたちに数学に対する興味･関心を持たせるには何が大切か？

［第一次資料］

1.「数え上げ組合せ論における二つの基本定理とのかかわり」，研究集会『半順序集合とアルゴリズ』(2004. 8. 23～25，東海大学高輪キャンパス）から一自己紹介を兼ねて
2.「コンピュータと数学教育」，教室の窓ー中学数学　新しい数学　(1986. 東京書籍 No.299 - 301)
3.「数え上げることそして組合せ論」，数学セミナー Vol.32(384:1993.9) pp.59-64
4.「ブックガイド　離散数学」，数学セミナー Vol.42(503:2003.8)，pp.46-47
5. 離散数学入門（C.L.Liu 著成嶋・秋山訳, McGraw-Hill Book Japan：1978･1986，オーム社：1995）のまえがき・序文・目次
6. ブール代数とその応用（成島・小高著,東海大学出版会,1983）の序文・目次
7. 離散数学（S.Lipschutz 著成嶋監訳, McGraw-Hill Book Japan：1984，オーム社：1995）の序文・目次
8. 数え上げの手法（組合せ論演習 1：L.Lovasz 著成嶋・土屋訳，東海大学出版会，1988）のプローローグ・謝辞・序文・目次・エピローグ

9. 数え上げ組合せ論 I （R.Stanley 著成嶋・山田・渡辺・清水訳，日本評論社，1990）のはしがき・序文・目次・あとがき
10. 数え上げ組合せ論入門（成嶋著，日本評論社，初版：1996，改訂版：2003）のまえがき・目次・表 2.1(写像 12 相の個数)
11. 「離散数学とアルゴリズム」，早稲田大学数学教育学会誌第 7 巻第 1 号(1989)，pp.13 - 18

I 離散数学の意味と位置づけ

ピタゴラスの定理で有名なピタゴラスは数学者であり，天文学者であり，占星術の大家でもあったと言われている．占星術のためには星の運行を知る必要があり，そのためには天文学が必要であり，天文学のためには数学が必要であったからである．上記第一次資料に感性的に述べられている共通的なことは，最も普遍的と思われる数学にも，時代的に大きな流れがあるということである．現代の教科書にはピタゴラスが占星術師であったとは書かれていないが，当時は占星術に数学が欠くべからざるものであったのである．

時代は進み，オイラーが活躍した，18 世紀の算法（アルゴリズム）の時代，カントール，ヒルベルト，ワイエルシュトラスなどによる 19 世紀後半から 20 世紀前半にかけての，「抽象代数」および無限や連続を扱うにあたっての数学の基礎付け・公理的アプローチとその結果としての「存在定理」王位の時代，そして 20 世紀後半から現在は，きわだって離散的で組合せ的性向のディジタルコンピュータの誕生・成長およびその社会のあらゆる分野への普及・浸透によって，すべての科学技術が離散アルゴリズム的傾向を帯びる時代に．すなわち，情報科学の立場からも，数(かず)本来の有限性や離散性そのものが重要な位置を占めるようになり，無限でなく有限そのものが，連続でなく離散そのものが研究対象として復活しつつある．同時に，無限的対象の有限的取り扱い，連続的対象の離散的取り扱いもその重要さを増している．このような時代背景を考えると，「離散数学」の誕生とその成長および現代社会における必要性について，ある程度頷けるのでは？ないかと思われる．

現象論としてではなく本質論として考えるならば，現代組合せ論の創始者ロータが 1969 年に書いたエッセーの中の次のような言葉が刺激的である．

「Nowhere more than in a combinatorial theory do we the fallacy of Kronecker's well-known saying that "God created the integers ;everything else is man-made." A more accurate description might be:"God created infinity, and man, unable to understand infinity, had to invent finite sets." In the ever-present interaction of finite and infinite lies the fascination of all things combinatorial.」

{有限} と {無限} あるいは {離散} と {連続} にかかわる問題は，古今東西を問わず，哲学，科学，数学の中心テーマであることに変わりはない．

数学では，{連続} を，人間の抽象的思考の産物？で本質的に離散的である {数} で把握しようとし，極限や切断の概念が形成され，19 世紀末から 20 世紀前半にかけて {公理主義と存在定理} 王位の時代を迎え，数学における無限の世界が我々に夢と希望と {幻想} を与えてくれた．さらには，{アルゴリズム} そのものの基礎付けもなされ，コンピュータサイエンスそのものに重要な基礎を与え，大きな影響を与えている．

1982 年に，国際数学者連合が情報科学の賞として Nevanlinna 賞を設置し，第 1 回目の賞を「組合せアルゴリズム論」で多くの業績をあげた R.E.Tarjan に授与した．これは現代の科学を象徴す

る出来事の一つである．なかなか厄介な時代になったものである．たとえていえば，宇宙に黄金の宝物が存在しているという｛存在定理｝を与えるだけでなく，その宝物を見つけ手に入れるまでの可能な時間と費用による手続き方法，すなわちアルゴリズムを示さなければならぬ時代となっている．最適解を与える有効なアルゴリズムの非存在が証明されているか未発見の場合，ヒューリスティックにベターな方法を示さねばならない．すなわち，情報・コンピュータ科学の立場からも，｛数｝本来の有限性や離散性そのものの性質が重要な位置を占めるようになり，無限でなく有限そのものが，連続でなく離散そのものが研究対象として復活しつつあることは、先に述べたとおりである．また，計算の概念が拡大し，単なる数値計算から記号・図画像・動画および学習や推論を含む知識処理に至っている．さらに，社会は高度情報化の歩みの度を急速に速めている．このような時代背景のもとに当然の帰結として，離散数学に関して，教育界や学界が様々な研究会やシンポジウム等を活発に開催し，現在に続いている．

このように現象論的に一部本質論的にながめると，離散数学には次の二つの意味と位置付けがあると思われる．

1．数学の基礎をも念頭に置き，有限離散を純理論的に研究する数学，

2．コンピュータリテラシー（コンピュータの理解と利用に必要な知識教養）のための数学．

より素朴に述べるならば，｛離散数学は，数学のより古典的かつ理論的分野と情報科学のような現代科学技術の中間的位置にあり，両分野と互いに補い合いかつ影響を与え合いながら，急速に発展し，その重要性が認識されつつある分野｝とも言える．

II　離散数学の分野・領域

離散数学に関する提言，小論，および｛離散数学｝または｛情報数学｝として出版されている本（先の第一次資料）などで扱われている内容を，I の考察に基づき整理すると，大きく分けて次の3分野になると思われる．

（1）基礎数学系の分野

有限離散的対象やその性質をやや原理的に明確にするために必要な分野で，大項目をあげれば次のようなものである．

1．論理：命題計算や述語の初歩を含み，有限離散的対象の論理的表現法や論理的法則を扱う．

2．集合・関係・関数：集合演算，同値関係や順序関係，有限集合とその性質，1 対 1 対応の概念などを扱う．

3．数学的帰納法，計算可能性，証明論の基礎など．

（2）組合せ論系の分野

有限離散の具体的内容を深く捉えるためにやや理論的に展開される分野で，二つに大きく分けられる．一つは，整数論の一部，グラフ，マトロイド，コード，ブロックデザイン，有限集合族など研究対象が明確な分野であり，もう一つは，数学はもちろんのこと科学技術の広い範囲にわたって必要な有限構造の数え上げを扱う分野である．

1．初等整数論：数の整除性，素数の分布，数の分割などを扱う．

2．集合の基数と数え上げ：和と積の法則，包含と排除の原理，具体的な有限集合の間の 1 対 1 対応の構成を扱う．

3．順列と組合せ：順列と組合せに関する公式を扱う．

4．グラフとネットワーク，順序集合，ブロックデザイン，有限集合族，離散確率など．

（3）情報・コンピュータ科学系の分野

やや実際的立場から，有限離散と最もシビアに対決しなければならない分野で，いわば｛与えられた問題を実際的に意味のある時間と空間で解くための解法に関する種々の問題｝を扱う分野である．

1．アルゴリズム：ソーティングおよび組合せ論やグラフに関する基本アルゴリズムの設計と解析，さらには計算量に関する種々の問題を扱う．
2．代数構造と符号：群，環，体などの抽象代数学系とその符号理論への応用を扱う．
3．ブール代数：論理演算の一般論としてのブール代数とその論理設計への応用を扱う．
4．言語とアートマトン：言語認識の基本システムおよび各タイプの文法とオートマトン並びにその関係を扱う．
5．人工知能：学習や推論の基礎的考察と具体的なエキスパートシステムを扱う．
6．誤差論：近似法と各種の離散的数値計算の誤差の問題を扱う．

これら（1）（2）（3）の三分野が，いわば｛原理｝｛理論｝｛応用(実際)｝として，互いに深くかかわりあっていることに留意する必要がある．さらには，｛数｝にまつわる壮大な歴史のなかに，数学のあらゆる手法が現れており，離散数学の手法もそこに含まれていることは言うまでもない．しかしながら，各手法に対する意識や重み付けは，時代，分野，立場によって異なることもまた事実である．離散数学において，特に目立つ手法を次に掲げておく．

1．原始的探索法，2．再帰法，3．組合せ論的手法，4．母関数と解析的手法，
5．抽象的構造を利用した手法

（各分野および手法等のより詳しい内容は第一次資料 11 を参照．）

III　教育課程

1971 年に国際学術専門誌「Discrete Mathematics」が，1979 年に「Discrete Applied Mathematics」が発刊された．その前までは｛離散数学｝ではなく，｛組合せ数学｝｛組合せ解析｝｛有限数学｝のような名称で，数学の主流的存在である「代数」「微積分」「幾何」の影でひっそりと生きてきた，大木の下に生える草木のような存在であったのではとも思われる．ここに改めて｛DM｝および｛DAM｝のスコープを書きとどめておく．

[DM]：組合せ数学とその関連分野，特に，グラフ理論と超グラフ論，ネットワーク論，コーディング論，ブッロクデザイン，束論，順序集合論，組合せ幾何，マトロイド理論，極値集合論，論理とオートマタ，行列，多面体とある．

[DAM]：その目的は，組合せ数学のコンピュータサイエンス，OR および科学技術の様々な分野への応用はもちろん，｛アルゴリズム的でしかも応用可能な離散数学｝も含めて，その様々な分野の研究論文を一堂に会させること，とある．

I およびII で述べたことも含め，伝統的な日本の教育課程の内容：

四則演算　文字式　方程式　関数　微分積分　平面幾何　（確率･統計）（線形代数）

に対して，離散系の教育課程および内容をどのように構築すればよいのであろうか？羅列するならば，次のような項目となるであろう．

2 値論理　集合　関係　写像　数え上げ
グラフ　ネットワーク　ブッロクデザイン　順序・束
組合せ幾何　マトロイド　極値集合

オートマタ・言語　多面体　・・・

CS・OR・科学技術の様々な分野への応用（アルゴリズム的側面）

Ⅳ　どのように整理し昇華し結晶化するか

｛離散数学｝の教育課程の実現には，多様な内容を｛どのように整理し昇華し結晶化するか｝の大いなる作業が必要になるであろう．一つの私見・指針を述べれば，次のようなことも考えられる．

1．基礎：２値論理　集合　関係　写像（特に｛関係｝は今までは忘れがちであるが重視する）

2．共通的内容：　有限性　離散性　無限連続性（数と集合をベースに）

3．個別的内容（選択）：先に挙げた内容（日常的で身近な応用例を多く）

Ⅴ　新たな取り組み（講演及び意見交換後のインスピレーション・感想のメール！）

2005年２月12日の研究会では大変おせわになりました．私の現在の現実的な仕事から離れ，２時間半ほど｛国の数学・科学教育｝にかかわる大変有意義な機会が与えられ，本当にありがとうございました．皆さんの熱い思いも感じることができました．準備不足，纏め不足で申し訳ありませんでしたが，多少なりともお役に立てれば幸いです．

何かインスピレーションが与えられ，伝統的な数学教育課程との対比で，離散数学の立場から「幼児から高校生まで」の今後の新たな「数学・科学教育」はどうあるべきか等，特に内容や方法について本格的に取り組んでみたいという思いにも駆られました．今後とも意見交換の機会があるよう願っています．

A型インフルエンザに罹り，
｛タミフル｝（5日分）なる変な？薬の最後の１カプセルを飲み終えて．

2006年２月１日

コンピュータの分野から見たら・・・・

中木　達幸
広島大学総合科学部

1. はじめに

本文は，平成17年6月18日の離散数学科研第6回会合での講演の内容を文章化したものです。

図書館などで離散数学の文献を調べると，「コンピュータ（サイエンス，情報）のための...」という題目や副題のものが目立ちます。これらは主として，

コンピュータサイエンスの専門家，離散数学の専門家，数学の関係者

などを対象として文献のように思えます。もし，高校数学に「離散数学」を導入した場合，離散数学とコンピュータとの関連性について気になる部分といえます。著者が以前所属していました九州大学の各図書館で「離散数学」と「コンピュータ（情報）」をキーワードにして文献を検索したところ，7冊が該当しました（破損などのために貸出不可能なものを除く）。本原稿では，それらの文献を調査した結果を報告するとともに，コンピュータとの関わりについて述べることを目的とします。

調査文献の前書きを見ると，離散数学とコンピュータサイエンスの係りについて，熱く語られています。以下にその一部を抜粋します。

- 離散数学という言葉が最近しばしば用いられているが，その領域の厳密な定義は知られていない。ただはっきりしているのは，コンピュータサイエンスの基礎となるべき数学であり，また，従来の数学（たとえば，微分積分学や線形代数学）の範囲外の内容を含む数学ということである。
- 情報学においては，「離散数学」がそのような基礎分野の一つであって，情報を学ぶ者の必須科目となっている。
- 本書はその目標を有限体の理解に絞った。その理由は，有限体が簡明な美しい構造をもっていること，それを理解することによって離散数学にかかわるさまざまな概念を身に付けることができること，そして，有限体が実際に種々の情報システムに応用されていること，などである。
- そのようなコンピュータサイエンスの領域において重要と思われる数学的概念や手法についての入門書たらんとして本書は書かれた。
- 「離散数学」は，数学のより古典的かつ理論的な分野と情報科学のような現代科学技術の中心的分野との中間位置にあり，両分野と互いに補い合いかつ影響を与え合いながら，急速に発展し，その重要性が認識されつつある。
- 現代は，ディジタルコンピュータの出現により，数学のみならず，あらゆる科学技術が離散アルゴリズム論的傾向をもつ時代となってきている。
- また，離散数学はコンピュータあるいは情報化社会に密接に関連している。例えば，コンピュータの機能拡大に伴って離散数学には新しい研究分野，新しい問題解決方法が生まれ，情報化社会ではそれらが身近なものとして扱われるようになってきた。

これらの文献は大学生以上を対象としているため，高校数学には必ずしも直結しないことはいうまでもありません。しかし，調査文献の著者は離散数学の重要性と情報との関わりを強調されているのは事実です。

調査文献の内容は，目次と本文を検討した結果，次のように分類できました。

(a) 数学基礎的な側面：集合，論理，写像，組合せ，確率

(b) 応用的な側面：有限状態機械，オートマトン，アルゴリズム，グラフ理論

(c) 他に，代数，整数論，漸化式，母関数

次章でこの内容と高等数学の関連について述べます。

2. 高校数学との関係

調査文献は大学の学部や大学院を意識した話だと思われます。離散数学の高校への導入をどのように考えるのかが重要になります。例えば，

1. 離散数学の基本的な概念や原理・法則を学ぶ
2. 離散数学の考え方を使い，数学的に考察し処理する能力の育成を行う
3. その他

これに関して，現行の学習指導要領や指導要領解説を参考にしたいと思います。その一部を以下に抜粋します（下線は著者による）。

- 数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる（学習指導要領，数学）。
- 事象を探究する過程を通して，自然科学及び数学における基本的な概念，原理・法則などについての系統的な理解を深め，科学的，数学的に考察し，処理する能力と態度を育て，創造的な能力を高める（学習指導要領，理数）。
- 身近な事象を取り上げそれを数学化し，数学的な課題を設定する活動を数学的活動ととらえている（指導要領解説，改訂の趣旨，p.36）。
- 身近な事象の例として，くじ引き，黄金比，フィボナッチ数列，折り紙，電車やバスなどの路線図に見られるネットワーク（指導要領解説，数学基礎，p.36）

将来，指導要領などがどのように改定されるか分からないが，仮に，「基礎的な概念，原理，法則」の部分が現行のままであるとしよう。調査文献の本文を検討した結果，「基礎的な概念，原理，法則」と比較すると，次のようになると思われます。

- 有限状態機械，オートマトン：内容は難しくはないが，抽象的と思われる。群論の初歩を学ぶのと同じ印象がありました。
- アルゴリズム：具体的な問題のアルゴリズムでないと面白くないと思われます。文献には抽象的なアルゴリズムのことが書かれておりますが，高校ではまずは身近な事象との関連性が必要と思われます。
- グラフ理論：基礎的な概念であると思われます。身近な事象との関連も可能だと思いますし，実際，上記にある「電車やバスなどの路線図に見られるネットワーク」が一例になります。
- 母関数：計算に終始したら，面白くないと思われます。
- 写像（単射，全射などの部分）：著者は大学で数学科の学生向けにこの内容を教えておりますが，彼らにとって難しい概念のようです。そのため，扱いは慎重にすべきだと思います。
- 代数，整数論：定義によりますが，これらを離散数学として扱って良いのか？ただし，ブール代数は離散数学に入れて良いと思われます。
- 他のものは，レベルは別にして，何らかの形で現行の高校数学には入っています（集合，論理，組合せ，確率：数学 A，漸化式：数学 B）

以上のことから，現時点での，著者の意見をまとめると次のようになります。

1. コンピュータサイエンスとの係りにこだわるなら，内容の選択を慎重にした方が良いであろう。
2. 離散数学を高校数学に導入する第1ステップとしては，コンピュータサイエンスのことを気にしないという選択肢もあると思われます。高校数学の目標と照らし合わせることが重要です。
3. 離散数学をコンピュータを使用して行うことも気にしなくても良いと思われます。

なお，コンピュータの扱いについて，現行では次のようになっております。

- 統計についての基本的な概念を理解し，身近な資料を表計算用のソフトウェアなどを利用して整理・分析し，資料の傾向を的確にとらえることができるようにする。
- ユークリッドの互除法，二分法，台形公式による面積の近似計算など。
- コンピュータ等の活用などによりいろいろな曲線をかき，観察する程度とする。
- コンピュータに直接かかわる内容としては，「数学B」の中に示されているが，この内容における取扱いだけでなく，各科目の内容の指導に当たって積極的にコンピュータや情報通信ネットワークなどを活用し，<u>学習の効果を高める</u>ようにすることが大切である（指導要領解説，p.122，下線は著者による)。

私は仕事柄，コンピュータを多用しております。教育的な側面からいえば，基本的に，手で容易にできることを，あえてコンピュータでする必要はないという考えです。ただし，生徒の興味を引くという目的なら話は別ですが。コンピュータが教育の場面で活躍するのは，次の状況だと思われます。

- グラフを描く。特に，定数の値を変えたときのグラフの変化を見るなどの発見学習の要素を含むもの。
- 手計算では面倒な単純計算をさせる。
- e-Learning
- その他

離散数学をコンピュータで行うことに関しては，現在，アイデアがありません。高校数学の離散数学の教材が具体化するのを待つべきで，当初からコンピュータを意識した教材作りをすることは慎重にすべきだと思われます。

3. 大学の数学関連学科でのコンピュータ

私は数学関連の学科に所属しております。他大学の知人を含め，私の周辺では，コンピュータを次のように使っているのが現状です。

1. 事務機器として（文章作成，メール，情報検索）
2. 手計算の代わり（数式処理，専用ソフト）
3. シミュレーション，証明の道具，その他

数式処理の能力は高く，嫌な計算も瞬時にします。部分積分や置換積分を含む積分計算も的確に行います。「２の１００乗は何桁でしょうか」という問題を解くためには対数を使うのが一般的だと思われますが，数式処理を使えばたちどころに２の１００乗の計算をし，あとは桁数を数えれば答えが得られます（このような解法が良いかどうかの議論があろうかと思います)。

コンピュータには「有限しか扱えない」という特性があります。これに起因して，次の問題があります。もし高校数学に導入できたら面白いであろうが，ハードルは高いと思われます（ただし，数学クラブなどでは扱いは可能でしょう)。

Jean-Michael Muller example　次で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。

$x_n=108-(815-1500/x_{n-2})/x_{n-1}$　$(n=3,4,\ldots)$

$x_1=4$,　$x_2=4.25$

この数列の極限を求めよ(出典：http://www.cs.princeton.edu/introcs/91float/)。

この問題はS. M. Rump教授(ドイツ，Hamburg University of Technology)に教えて頂きました。数学的に $\{x_n\}$ が5に収束することが証明できます。しかし，コンピュータや電卓で，$x_3, x_4, \cdots$ を計算すると，次のようになり，100に収束するように見えます(処理系により計算結果が若干異なりますので，ご注意下さい)。

```
x[ 1] =   4.000000000000000
x[ 2] =   4.250000000000000
x[ 3] =   4.470588684082031
x[ 4] =   4.644744873046875
x[ 5] =   4.770706176757812
x[ 6] =   4.859214782714844
x[ 7] =   4.983123779296875
x[ 8] =   6.395431518554688
x[ 9] =  27.632629394531250
x[10] =  86.993759155273438
x[11] =  99.255508422851562
x[12] =  99.962585449218750
x[13] =  99.998130798339844
x[14] =  99.999908447265625
x[15] = 100.000000000000000
x[16] = 100.000000000000000
```

この計算結果を示すと，次のような反応があります。

1. コンピュータの計算は信用できない。やめた方が良い。
2. コンピュータの計算を鵜呑みにせず，吟味が必要である。
3. なぜこのようになるのか，その理由を知りたい。
4. その他

このような問題を通して，数学に興味が湧けば面白いことだと思われます。なお，この謎解きを簡単にしますと，

- x_n が5に収束するのは数学的に正しい。ただ，収束の過程が非常に不安定で，少しでも収束への道筋から値が外れると，5に収束しなくなる。
- コンピュータや電卓での計算には，有限しか扱えないという特性に起因して，丸め誤差が混入します(例えば，1÷3×3=0.9999999となり，誤差が生じる)。そのため，「収束への道筋」から，ほんのわずかであるが，外れてしまう。
- 一方，100への収束は安定である。「5への収束の道筋から外れたもの」が100へ収束するルートに乗ってしまった。

収束が不安定であることは，数学的に表現できることはいうまでもありません。

同様のことに起因するものに「反発する浮きの問題」があります。日本テレビ系列で平成5年12月19日に放映された「教えてガリレオ」という番組で紹介されたもので，浮きの個数により，浮きの挙動が大きく変わるという問題です。自然現象では，常に摂動にさらされているため，不安定なものは(理論上存在しても)世の中では存在できないと考えるのが妥当です。浮きの個数により，安定性が変化し，その結果として動きが変わります。この事実を使って興味深い問題が作られております。他にも，同種のものには，振り子の問題があります(情報の指導要領解説 p.137によると，情報でも扱う問題です)。これらの問題は，

- 数学的に定式化して，方程式を立てます。
- 方程式を解かずに解の性質を調べます。その際，平面上の点の移動（数学C）などが必要となります。

により解析を行います。離散版で同じことをすると，漸化式が登場します。数列の値を数直線上の点で表現しましょう。点の動きを調べることが離散版の問題になります（専門用語を使えば，離散力学系)。数直線上の動きよりは平面上の点の移動が興味深いのですが，そうすると 3 項間の漸化式，または，連立の漸化式を扱うことになります。上の Jean-Michael Muller example はこの例になります。

4. 終わりに

文献を調査したところ，現時点では，主として，数学的に考察し処理する能力の育成のために，離散数学が導入できれば面白いと考えております。題材として，従来とは違ったものを扱うことができ，特に身近な事象を関連付けることが出来ようと思われます。また，高校段階では，コンピュータのこと（コンピュータや情報のための離散数学，コンピュータを使った離散数学）を意識するより，別のところに目的をおくのが良いかと思われます。もちろん，離散数学が将来，コンピュータや情報に関連することを伝えることはすべきだと思います。

補遺　本調査で調べた文献は次のとおりです（順不同)。

1. 赤間世紀，離散数学概論　ーコンピュータサイエンスのための基礎数学ー，コロナ社，1998 年（1996 年）
2. 柴田正憲，浅田由良，情報科学のための離散数学，コロナ社，2001 年（1995 年）
3. 茨木俊秀，情報学のための離散数学，昭晃堂，2004 年
4. 尾関和彦，情報技術のための離散系数学入門，共立出版，2004 年
5. 守屋悦朗，コンピュータサイエンスのための離散数学，サイエンス社，2003 年（1992 年）
6. C.L.Liu 著，成嶋弘，秋山仁共訳，コンピュータサイエンスのための離散数学入門，オーム社，平成 8 年（平成 7 年）
7. S.Lipschutz 著，成嶋弘監訳，離散数学 ーコンピュータサイエンスの基礎数学ー，オーム社，平成 15 年（平成 7 年）

離散数学を高校カリキュラムに導入すべし

秋山　仁
酒井　利訓
東海大学教育開発研究所

概要

1980年代の後半から，「日本の初等中等教育に離散数学（Discrete Mathematics, 以下，単にDMと記す）をもっと導入すべきである」と筆者は主張してきた[1,4,5]。それは社会がIT時代へ突入し，人々が必要とする数学の中心が微積からDMに移りつつあること，生活に直結し学び甲斐があると生徒たちが感じる数学しか本気で取り組もうとしない傾向が顕著になったこと，および，カリキュラムに従って教師が一方的に解説し，その後，生徒に問題を解かせるという従来のタイプの授業を成立させ難くなったことなどに起因する。その後，同様の意見を持つ人々も数多く現れたが，残念ながら現在に至るまでカリキュラムの中では大きな進展は見られていない。

そんな中，最近，景山三平氏，長尾篤志氏，長崎榮三氏を中心とする研究グループ（離散数学研究会）が将来の高校数学のカリキュラムに離散数学を導入することを真剣に検討を始めていることを知った。そこで，筆者は離散数学研究会において，いくつかの提言をさせていただいた。

本稿は，その際のレクチャーをもとに，以下のテーマについて論ずる。

(1) なぜ，これからの時代はDMが必要なのか，
(2) DMの研究分野とその応用領域，
(3) DMを学ぶことでどんな数理的能力が培われるか，
(4) DMを高校カリキュラムに導入した場合，どんな教育効果が期待できるのか，
(5) DMの導入と教育改革への道，
(6) 既にDMを高校に取り入れている米国での実践報告

1. なぜ，これからの時代は離散数学が必要なのか？

(a) コンピュータがその威力を発揮できる数学分野が尊重される，その代表例がDM

かつての日本は重工業，土木，建築などに優れた技術を有し，その開発にしのぎを削ってきた。また，これらを支える科学・技術の象徴として，微積分，力学や電磁気学，微分方程式や偏微分方程式，積分方程式があった。しかし，この数十年で，社会は大きく変わり，日常生活を合理的に生き抜くために必要とする数学の種類も変わってきた。

その主なる原因はIT時代の到来，すなわち，コンピュータが生活の中の隅々まで浸透してきたことによる。将来，微分方程式を解くことができるようになることを目的として，中学，高校で，その準備を延々としてきた。しかし，コンピュータの発展とともに微分方程式の解を求める必要が少なくなり，その代わりに，近似解をコンピュータに求めさせれば，それで用が済むようになった。すなわち，良し悪しは別として，微分方程式のガッチリした理論を学んだり，煩雑な微積計算を習得することより，計算の部分はコンピュータに任せて，知的エネルギーをさらに多方面に向けることが必要とされるようになったのである。その結果，コンピュータと共に働いて威力を発揮できる数学分野，微分方程式の場合だと，数理解析や有限要素法という離散的理論に焦点が当てられるようになったのは当然である。

(b) DMは誰にでも役に立つ数学

日常生活のレベルでしばしば遭遇する数々の問題を，筋道を立て，手際良く片づけることができるようになるための数学的リテラシーの重要性が増してきた。遠い将来，ひょっとすると役立つかも知れないという数学に魅力を感じる人々は昔も今も少ない。というのは，日常の中で頻繁に出会う疑問は，「全部でいくつあるのか？」，「どれが安いのか？」，「どうやったら効率的なのか？」，「楽してもうける方法はないのか？」，「どのように分配すれば他から文句は出ないのか？」などが大半である。そして，これらの疑問の背景にあるのは，連続や無限の世界ではなく，離散的で有限の世界であることが多い。このような事情から，これらの身近な事柄にズバリ解答を与えてくれる，最適化の問題，順序，半順序，数え上げ，対応，アルゴリズムの構成法，再帰的構造，グラフ論的手法などを学ぶ日常において役に立つ数学，すなわちDMに焦点が当てられてきたのである。

(c) DMは最も急速に発展している数学分野

DMとその応用は，数理科学の中で最も急激に発展している分野のひとつである。それは，DMで扱うモデルの構成や有限システムの解明が，経済，社会学，計算機科学，自然科学，物理科学，心理学，さらに数学自身の発展にとって最も重要だからである。

20世紀を代表する数学者のひとりであるポール・エルデスが1985年春にシュプリンガー社から出版された『グラフと組合せ』の創刊号[10]に寄せた祝辞を，ここに転載しておこう。

「七年前，私は『グラフ理論ジャーナル』の創刊号に祝辞を書きました。それから今日までに，グラフと組合せの2つの新しい専門誌が創刊され，そして今回，『グラフと組合せ』が創刊されることになったわけです。

私は，中国，日本，シンガポールを中心に編集されるこの『グラフと組合せ』の創刊

を歓迎するとともに，この新雑誌にいくつかの重要な論文を投稿したいと思っています。誇張ではなく，今日出版される組合せ理論の論文の数は，百年前の数学全体の論文の数より多いのです。この成長が量と質の双方で続き，また，グラフ理論や組合せ理論と数学の他の分野との新しい関係が発見されることを願っています。

グラフ理論と組合せ理論の急激な成長には，いくつかの理由があります。純粋に数学的な理由としては，次のようなものがあります。すなわち，多くの数学者が，組合せ理論には多くの興味ある問題があり，また数学の他の分野に対する応用も多いことを認識してきたことです。そして，グラフ理論の中からは，計算機科学に関係する多くの新しい分野，たとえばアルゴリズム理論や計算量の理論などが誕生してきたことです。

私はこの成長がすべての方向で続いていくことを願っていますが，この新しいジャーナルの誕生は，この発展に重要な役割を果たすことでしょう。

私が少年だったころ，数学者であった両親から聞いた次の言葉で，私の祝辞を終わりたいと思います。

『一人の人間が理解するには，数学はあまりにも大きな世界である』

私は，この言葉が間もなく，グラフ理論と組合せ理論においても真実になることを信じています」

エルデスの予見通り，グラフ理論や組合せ理論を含む離散数学は今や巨大な分野に発展したのである。

2. DMの研究分野とその応用領域

離散数学というのは，とびとびの離散的な要素を対象とした数学の総称で，1 つ，2 つ，3 つ，・・・と数えられるものが研究の主体である。一言で離散数学と云っても，研究分野は複雑多岐に分かれ，その分野は数十に及び，相互に関連しあっている。図 1 は離散数学の世界を大雑把に俯瞰したものである。

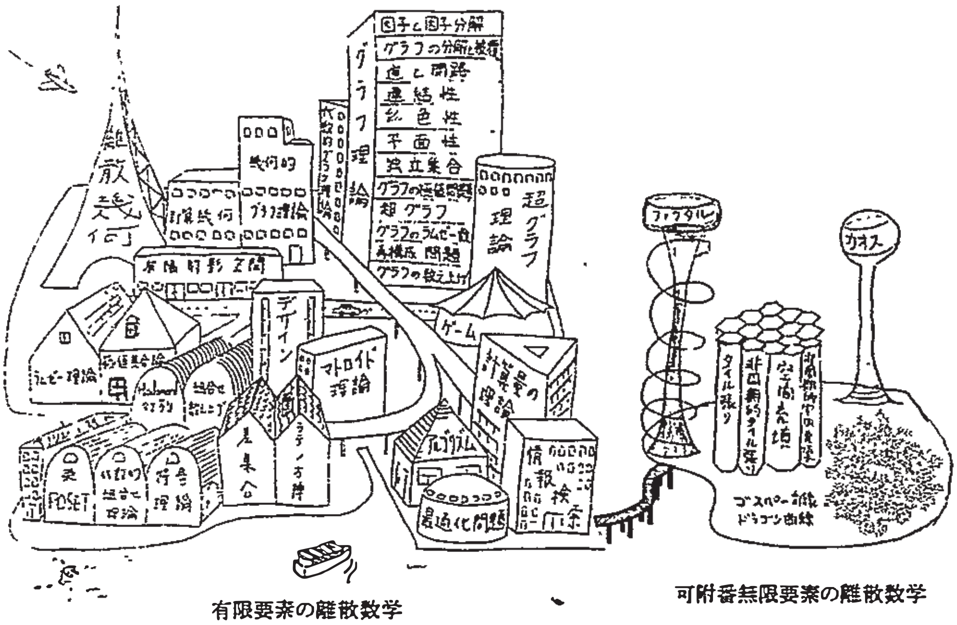


図1　（離散数学の世界）

DMの研究分野

グラフ理論	組み合わせ論
超グラフ理論	数え上げ理論
ネットワーク理論	ゲームの理論
マトロイド	計算量理論
離散幾何	アルゴリズム論
計算幾何	オートマトン
ラムゼー理論	最適化問題
デザイン	ダイナミック・プログラミング
実験計画法	線形計画法
ラテン方陣	情報検索
差集合	タイル張りの理論
符号理論	空間充填の理論
半順序集合論	ゴスパー曲線
束論	ドラゴン曲線
極値集合論	フラクタル
有限射影幾何学	カオス

DMが応用されている領域

キャッシュ・カードの暗証番号	化学的異性体の数え上げ
通信情報の暗号化	化学合成物の分類
ノン・パラメトリック検定	結晶群，準結晶群
論理回路の設計	釣り合い不完備型ブロック計画
再帰納的な原子構造	シュタイナー計画
ボロノイ図形の設計	釣り合い一対型ブロック計画
ゲーム理論	人工衛星マリーナの映像処理
コンピュータの多重処理	アダマール符号
自動車の経路選択	ラテン方格
仕事最適割り当て	直交配列
通信符号の構成	アソシエーション・スキーム
通信回路網の信頼性	差集合
ORにおける経営戦略	ルーム・スクエア
電気回路の設計	ハウエル計画
AD変換器の設計	オーベルウルバッハ計画
正方形の正方分割	均等分割問題
データ構造の設計	可視性問題
検索システムの設計	

3 DMを学ぶことでどんな数理的能力が培われるか

(a) 知識に頼らず，自力で考える力

教師独演型の教え込み授業は破綻をきたしている。ものごとの本質を頭の随から理解し，それを使いこなせる応用力を身につけさせるためには，「生徒自らが自発的に問題に取り組み，作業や実験を通し，創意や工夫，ときには試行錯誤を繰り返す …（*）」学習法が重要であると多くの指摘がなされている。以下の問題は，微積とDMのそれぞれの分野の典型的な問題である。上述の主旨に適った学習（*）を行うために，DMの分野の問題が最適であることは，以下の例からも明らかであろう。

例1 $y=x^3-3x^2+2x$ $(0 \leqq x \leqq 4)$ の最小値を求めよ。

例2 （[7,9]より）スミス郡の7つの小さな町が図2に示されるように道路で接続されている。これらの道路は舗装されてはいない。図において，長さの単位はキロメートルである。いくつかの道路を舗装して，どの町からどの町へも舗装された道路を通って直接的あるいは間接的に到着できる（全域木）ようにしたいが，予算が限られているので舗装する道路の長さの総和を最小にしたいと考えている。ど

のように舗装すればよいか。

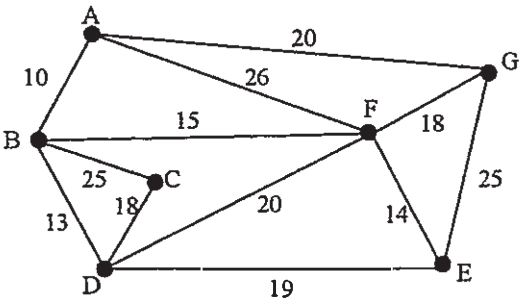


図2

例1，例2とも最小値を求める問題である。例1に対し，自力で解を求めよと要求したとき，微分を知らない生徒が自力で「微分を考え出す」ことは，Fermat や Newton なみの頭脳をもっていない限り，不可能である。定義域の $0 \leqq x \leqq 4$ の範囲の数値を 0.1 刻みで代入して関数の値を求めていったところで，この区間には無限（実数の濃度）の解の候補があるわけなのだから，焼け石に水である。すなわち，この問題が解けるかどうかは，“微分し，関数の増減表を完成する”という解法のパターンを習得しているかどうかであって，思考レベルとしてはあまり深いものを必要としていない。

一方，例2では知識量に関係なく，生徒たちはいろいろと試行錯誤を開始するだろう[9,6]。たとえば，なるべく数値の小さい辺から選んでいこうとするのは，自然な発想である。その方法で閉路を作らないように順次辺を選ぶと，AB，BD，EF，BF，CD，FG といった具合にでき上がる。

ある生徒は次のように考えるかも知れない：はじめにスタート地点を決め，そこから順に，接続する辺のなかから数値が最小である辺を選んでいく。例えば A をスタート地点とすると，まず AB が選ばれる。順次 BD，DC と選ぶことになるが，この方法ではここで止まってしまう。すなわち，次に選ぶべき辺は CD しかなくなり，その辺を選択すると，BCD が閉路を形成してしまう。そこで今まで通過した点の中から，まだ通過していない点への最小辺（BF）を探し出し，この方法を続ける。このようにしていくと AB，BD，DC，BF，FE，FG となる。

慎重派の生徒は逆の発想をするかもしれない。すなわち先の見えない方法で辺を選んでいくと，最後になってどうしても数値の大きい辺を選ばざるを得なくなり，総和が大きくなってしまうかもしれないと心配する。その不安を取り除くために，与えられたネットワークから数値が最大の辺を外す。そして，次に大きい辺を，その次に大きい辺も，…という具合に，順次数値の大きい辺から外してゆき，もしある辺を取り除くとグラフが非連結になってしまう場合を除き，数値の大きい順に辺を外していき，題意の全域木にたどりつく。

生徒たちに数学的な試行錯誤をさせながら，真実に近づけさせることが大切である。生徒は図2以外のいくつかの道路網についても，自分で考えた方法が首尾良く機能するかを試した後，一般の道路網に対して成り立つであろうアルゴリズムを探し出す。最終的には，自力で考えたアルゴリズムが一般的に通用することをしっかりと証明することになる。

実は上述のいずれの方法で構成しても，でき上がる全域木の総和は同じで，最小の値をとることを，中高校生のレベルで十分に証明できる。最初の生徒の考え方は，クルスカルのアルゴリズムと呼ばれる方法である。

クルスカルのアルゴリズム

I. 辺の数値が最も小さいものを選び，それを e_1 とする。

II. 辺 $e_1, e_2, \ldots, e_i$ が選び出されたとき，$E(G) \setminus \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ から辺 e_{i+1} を次のような方法で選ぶ。

（1）$\{e_1, e_2, \ldots, e_{i+1}\}$は閉路をもたない，

（2）（1）の条件をみたす辺のうちで，数値の最も小さい辺を e_{i+1} とする。

III. 段階IIをもはや実行しえないとき止める。

(b) 本質を抽出する力，表現する力

式や関数を用いると，複雑な状況や関係を簡潔に表現できるので，問題の本質を浮き彫りにする効果がある。DMの中には，グラフ的表現法を始めとし，根付き木，ハッセ図，有限状態モデルなど何種類もの効果的な表現方法がある。それらを用いることによって，社会の中の多くの有限システムをモデル化することができる。モデル化したり，図式化することは，すなわち，視覚化することである。視覚化は分析力，洞察力，発想を刺激し，最終的に問題解決力につながる。以下に示す例は駿台模試[2]の問題であるが，諸々の関係をグラフ的に表現することの重要性を示唆している。

例3　6人の人がいて，

条件① 各人は他の5人のうちの3人とは互いに知り合いで，2人とは互いに知り合いではない

が成立しているとする。

(1) この6人のうちに，互いに知り合いである2人の組はいくつあるか。

(2) この6人のうちから無作為に2人を選んだとき，その2人が互いに知り合いである確率を求めよ。

(3) この6人から2人を選んだら，その2人が互いに知り合いであったとする。残り4人から無作為に2人選んだとき，その2人が互いに知り合いである確率を求めよ。

さらに，上の条件①のほかに，

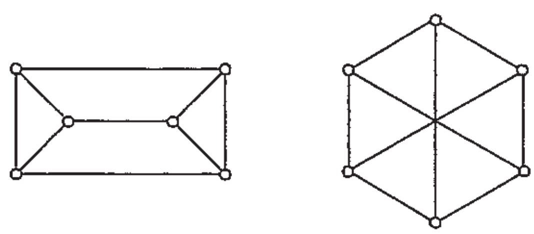
条件② この6人のうちのある3人は，そのうちのどの2人をとっても，
互いに知り合いである

が成立しているとする。

(4) この6人から無作為に3人を選んだとき，そのうちのどの2人をとっても，互いに知り合いである確率を求めよ。

(5) この6人から無作為に3人を選んだとき，そのうちに互いに知り合いである2人の組が1つしかない確率を求めよ。

[解説] 6人の各人を点(∘)で表し，2人が互いに知り合いである場合，また，そのときに限り，対応する点どうしを線分で結ぶことにする。すると，条件①をみたす“知り合い”関係を表す2つの異なる状態が存在しうることがわかる（図3(a), (b)）。



(a)　(b)

図3

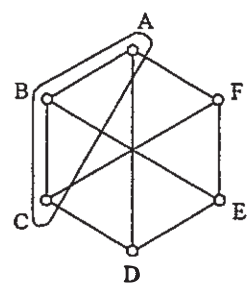


図4

しかし，これら2つのうちで，条件②をみたすものは図3(a)に示されるものだけである。なぜならば，図3(b)に示す人間関係においては，“どの3人を選んでも，そのうち少なくともある2人は，互いに知り合いではない”からである。

たとえば，6人をA, B, …, Fとして，この6人の知り合い関係が図3(b)と同じ構造をもつ図4のようになっているとき，A, B, Cの3人に注目すると，AとB，BとCは互いに知り合いであるが，AとCは互いに知り合いではない。

[解答] (1) 知り合い関係の個数は，図3の線分の本数（9本）に一致する。よって，互いに知り合いである2人の組は全部で**9組**である。　… (答)

(2) 6人から2人選ぶ選び方は15通りある。(1)より互いに知り合いである2人の組は，9組である。よって，求める確率は 9/15 = **3/5**　… (答)

(3) 最初に選ばれた2人をA, Bとする。点A, Bに接続している線分は合計5本であるから（図5），残りの4人の間で使われている線分は，9 − 5 = 4［本］である。

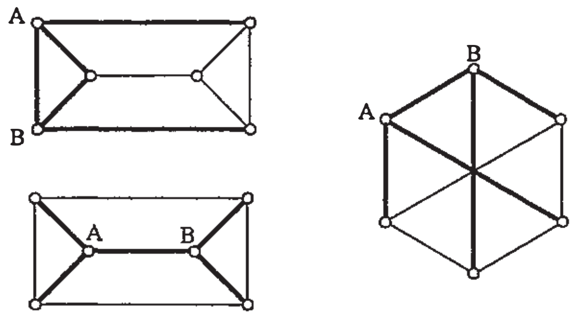
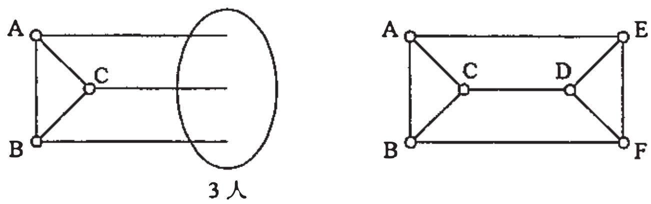


図 5

ゆえに，残りの 4 人のうち，互いに知り合いである 2 人の組は，4 組である。4 人から 2 人選ぶ選び方は，6 通りだから，求める確率は，$4/6 = \mathbf{2/3}$　…（答）

(4) 条件②をみたす 3 人を A, B, C とする。



(a)　　(b)

図 6

点 A，B，C に接続している線分は合計 6 本あるので（図 6(a)），残りの 3 人（D, E, F とする）の間で使われている線分は$9-6=3$［本］である。したがって，この 6 人の間の知り合い関係は図 6(b)のようなものでしかあり得ない。すなわち，3 人すべて知り合いどうしであるグループが 2 つ存在する。6 人から 3 人を選ぶ選び方は，20［通り］である。よって，求める確率は，$2/20 = \mathbf{1/10}$　…（答）

(5) 3 人選んで知り合いの組が 1 つであるのは，一方の 3 人の知り合いどうしのグループから 2 人，他方のグループから，その 2 人のいずれとも線分で結ばれていない 1 人（この人は前の 2 人によって一意的に決まる）を選んだ場合である（たとえば，図 7 における A, B, D の 3 人）。そのような選び方は，$2 \times {}_3C_2 = 6$［通り］である。よって，求める確率は，$6/20 = \mathbf{3/10}$　…（答）

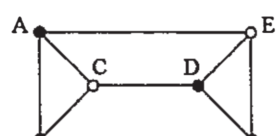


図 7

(c) 予測，推理および段取り

社会での諸々の現象は離散数理モデル(再帰的構造，半順序集合，樹木型構造等々)で表現できることが多く，構造を踏まえ大局的に考えることができることは前にも言及した。また，実験やシュミレーションを行い，結果を予測するという数学的な発想体験を

行うことができる。さらに，離散数学では，離散量を対象とするので，少数例で観察し，帰納的に推論することもできる。このような理由から，問題解決のために理路整然と筋道を立て，手順，手続き，段取りを立てる能力も培われる。さらに，社会生活や個人生活の中で遭遇する問題は離散的な問題がほとんどなので，離散数学を学ぶことによって身近な問題を数理的に分析することが習慣化されるのである。

例4　6人が円陣をつくってすわり，次のゲームをする。

(1) 最初，交互に赤と白の帽子をかぶり，隣り合う2人ずつの3つの組をつくる。各組でジャンケンをし，負けた人は勝った人と同色の帽子をかぶる。

(2) 6人が同色の帽子にならない場合，隣り合う異なる色の帽子をかぶった2人ずつが組をつくり，各組でジャンケンをし，負けた人は勝った人と同色の帽子をかぶる（両隣が自分と同色の帽子の人はジャンケンをしない）。

(3) ゲームは，6人の帽子が同色になれば終了とし，それまで何回か (2) を繰り返す。

このとき，n回までにゲームが終了する確率を求めよ。ただし，ジャンケンでは，一方が勝つ確率は$\frac{1}{2}$で，勝負がつくものとする。（京都大文系）

[解説] 題意の状態を図に描いてみよう。円周上に帽子の色（赤，白）を描くことにより，円陣をつくっている6人の帽子の状態を表す（図8）。　で囲まれているペアが，ジャンケンをする。

1回目のジャンケンをした結果，おこり得る可能性のある帽子の色の組合せは，座っている位置に適切な回転をすれば，図9の4つのタイプのいずれかになる。

（赤の帽子の人数，白の帽子の人数）を記号 $(i, 6-i)$ で表すことにする。

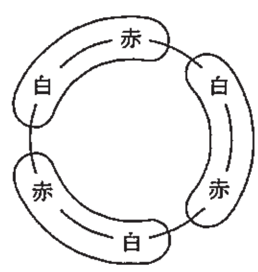
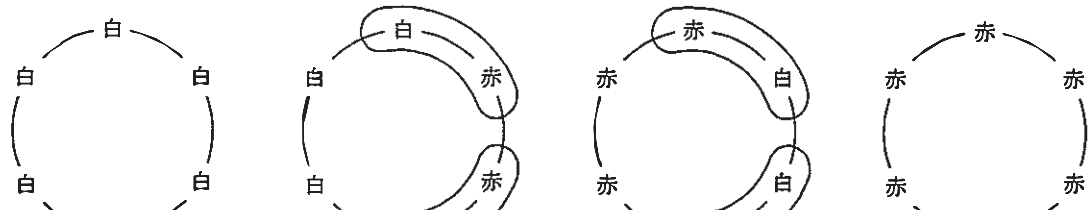


図8　初期状態

タイプ2　タイプ3　タイプ4　タイプ5



(0, 6)　(2,4)　(4,2)　(6, 0)

図9

1 回目のジャンケン終了後，状態がタイプ 2 またはタイプ 5 になったら，このゲームは終了する。タイプ 3 やタイプ 4 の状態になったら，2 回目のジャンケンをする。この操作が繰り返され，いろいろな状態がおこり得る。タイプ 3 とタイプ 4 の状態が交互に繰り返されて，このゲームは永遠に終了しないこともあり得る。

この無限ループを含む無数の場合を，図を使って上手に表すことが，この問題を解決するためのカギである。

図 8, 9 に示す 5 つのタイプの状態の移り変わる様子を図で表現すると図 10 のようになる。

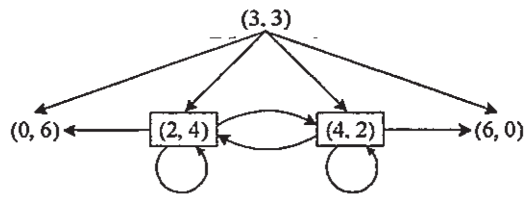


図 10

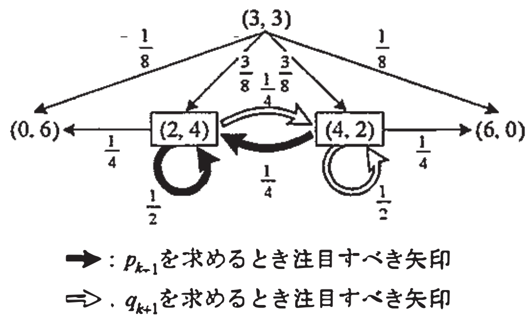


図 11

k 回ジャンケンした直後に (2, 4) または (4, 2) という状態にある確率をそれぞれ記号 p_k，q_k で表すことにする。p_n+q_n は，n 回ジャンケンをした直後に (2, 4) または (4, 2) である確率である。すなわち，p_n+q_n は，“n 回ジャンケンをしても，ゲームが終了していない確率”である。

よって，n 回までにゲームが終了する確率を p とすると，p は，

$$p=1-(p_n+q_n) \qquad \cdots (*)$$

で与えられる。

図 11 より，$k \geqq 1$ に対して，次の関係式が得られる。

$$p_{k+1}=\frac{1}{2}p_k+\frac{1}{4}q_k \quad \cdots ①, \qquad q_{k+1}=\frac{1}{2}q_k+\frac{1}{4}p_k \quad \cdots ②$$

また，$p_1=\frac{3}{8}$，$q_1=\frac{3}{8}$ である。①＋②より，$p_{k+1}+q_{k+1}=\frac{3}{4}(p_k+q_k)$ だから，数列 $\{p_n+q_n\}$ は初項 $p_1+q_1=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$，公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列であり，したがって，$p_n+q_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n$ である。これを（＊）へ代入して，

$$p=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n \qquad \cdots (答)$$

4. DMを高校数学カリキュラムに導入した場合，どんな教育効果を期待できるのか

(a) 学ぶことが机上の空論ではなくなる！

日常の中で，生徒たちが，興味を持っている事柄の中の多くがDMの問題に関係している。たとえば，効率的な作業スケジュール，夕食の献立の組み合わせ，ダンスパーティーのパートナー選び，部活間に不公平感が生じない体育館の利用時間配分法，理科実験での班分け法，同意が得られやすい学級委員の選出法，トーナメントの試合の結果の処理のしかた，みんなの納得がいく学級予算の公平な分配法，…。そのため，DMを学ぶことによって日常の問題を科学的に考察する力や習慣を身につけることができる。また，学んだことをすぐに生活で役立たせることができる。

(b) 過去になまけていても，今から頑張ればなんとかなる！

数学を学ぶことによって培いたい能力を列挙すると，以下のものが挙げられよう：

(a) 知識，(b) 計算力，(c) 理解力，(d) 論理性，(e) 応用力，(f)分析力，(g)観察力

しかし，現実には，従来の中学，高校の数学のカリキュラムに従った学校の数学の授業では，概念や理解の積み重ね（階層構造）が多くあり，次から次へと様々な定義や公式が登場し，上述の(a)，(b)，(c)レベルの基本的な問題を押さえることで手一杯というのが現状であった。また，入試に備えての“数学の問題を解くための勉強”というものも，自分で一題一題ジックリ考えて数学的考え方を養うというものではなく，手取り早く入試に頻出される問題の解法を覚え，覚えた解法パターンに当てはめて問題を処理するというものになっている。しかしながら，上述の“数学を通して身につけるべき”とされているいずれの能力も，ひとつの問題について自分の頭でジックリ考え，様々な角度から分析するプロセスなくしては培い得ない。したがって，従前の階層的カリキュラムの中では，数学を通して身に付けるべき真の能力をあまり獲得できず，数学は点取りのための無味乾燥な暗記科目になってしまった。

これに対し，離散数学は，個々のテーマが独立であることが多く，それ故，予備知識をほとんど必要とせず，その気にさえなれば，ただちにその問題の本質に迫ることができるのが特徴である。この主張を裏付けるものとして，IMO（国際数学オリンピック）での出題実績がある。「各国の教育事情の違いによる知識量の差に左右されずに，生徒たちの数学的思考力が存分に発揮できるような問題を選ぶ」という主旨のもと，毎年6題の問題が出題される。代数学や幾何学の分野とともにDMの分野からは必ずI題が選ばれているのは，DMの問題が思考力を鍛えるのに適していることの証左でもある[3]。

(c) 理工系を目指す生徒だけでなく，誰にも必要な数学！

数Ⅱ，数Ⅲ，数B，数Cなどは将来，理工系を目指す高校生にとって，大学での学びの基本となる重要な科目であるが，そうでない生徒には無味乾燥で，学び甲斐を感じさせない。しかし，そういう生徒にも数学的リテラシーは不可欠である。DMは問題の解き方のみならず，他人との意思の疎通，推理，結果の説明の方法に至るまで身につけるので，将来の進路に関係なく，誰でも授業に興味，関心をもって参加でき，自分で考え，知的行動を行い判断することができるようになる。その結果，生徒たちは「タメになった」という学び甲斐を感じ，達成感を感じ，自信やさらなる学びへの挑戦へつながる。

(d) 知識より知恵が尊重される

解決のための統一的方法が確立されていないので，問題解決の方法が個々について異なる傾向が強い。その結果，その都度アイディアを絞り出し，試行錯誤しながら解決しなければならないので，生徒は思考を活発に行うことになる。また，自力で解法を編み出すので，知的満足感を得やすい。

(e) 発見の喜びを体感できる

対象が離散的なので，少数例で実験したり，シミュレートし予想を立てたり，発見した事実を，さらに一般化することが可能なこともある。そのため，問題を自分で発見したり，結果を拡張したりするなど，生徒の探究心や問題発見の意識が高まる。

5. DMの導入と授業改革への道

(a) 教える数学から自ら学ぶ数学へ

DMが数学的能力を育むための最適な題材であっても，教師による知識注入型の授業を行っては，顕著な効果は期待できない。グラフとは何か，半順序とは何か，グリーディー・アルゴリズムとは何かなどと次々と定義や定理を教え込むことを避け，生徒にすべて気づかせるようにするため，調べ学習やグループ学習を主体とすべきである。そうすれば，問題解決力，他人との意見交換，推理，予測，結果の説明，批判などの方法を自ずと身につけるはずである。生徒たちに，自分の能力を伸ばすために自分で努力をすることが必須であること，また，DMはその努力を報わせる題材であることを自覚させるべきである。

(b) 学び手のニーズに適した題材を準備せよ

DMの題材は数限りなくあるが，学ぶ対象者によって題材を選択させることも大切である。たとえば，将来ビジネスを学ぼうと考えている生徒には社会的選択論や最適化問題，オペレーションズ・リサーチにおける経営戦略などに焦点を合わせるべきだし，一

方，計算機科学を志す生徒にはアルゴリズム論や計算量の理論などの基本になる題材を取り上げるとよい。

(c) 思考のマンネリを防ぎ，生活への有用性に気づかせよ

DM の授業は，実際の世の中のアップ・デートな出来事をモデル化することから始められる。よって，数学を学ぶ過程が，また同じ事の繰り返しだと思わせないようにできる。たとえば，先日，現実に行われた問題だが，2012 年のオリンピックの開催地をどのような方法で決めれば公平かなどの問題を取り上げれば，生徒達は数学が人間の意思決定の過程に役立つという自明の理に気付くはずである。すべての問題にすぐ答が見つかるという訳でもないし，答のない問題もありうるということにも気付くことにもなる。このようなことに気付くという事実が，生徒達が将来，個人的或いは職業的な生活の中で，数学を活かしていくための道筋を示すことにもなるのである。

6. 既に DM を高校カリキュラムに取り入れている米国での実践報告

「離散数学を高校数学に取り入れよう」という動きは米国でも随分前から起きていて，'90 年代の中頃から実践する高校が出現し始め，年々増加している。米国の高校でテキストとして使用されている『応用を通した離散数学（Discrete Mathematics Through Applications)』[8] の第 2 版の序文とはしがきの文章が，その実践の様子を端的に伝えているので，参考のため，以下に紹介しよう：

「応用を通した離散数学」の初版は 1994 年に刊行された。この第 2 版の目的は，前の版と同じであって，離散数学と，現代社会におけるその重要性を生徒諸君に紹介する事にある。初版を執筆してから，この本を使ってくださった多くの先生方からお手紙をいただいた。その反響は，圧倒的に好意的であった。先生方は，生徒達がこの本が興味深く，読みやすく，且つ意欲をそそるものがある，と感じていると報告して下さったし，又，ある生徒は，生まれて初めて，数学の授業が楽しいと思うようになったと言っているというコメントもあった。

初版を執筆している間，我々がこの本の対象として，どんな読者が適切であろうかと予想したのは，主として，我々自身の経験に基づくものであったが，それは，的外れではなかったようである。この本を教科書として使用した先生方の殆どが，教えた離散数学の授業を取った生徒は，大学に進学し，ビジネス，教育，社会科学，法律などを専攻したいと考えている者が多いが，数学，自然科学，工学などの分野で職業を持ちたいと考えている生徒も数多くこの授業を選択したと述べられている。実際，離散数学の授業は，しばしば，大学で離散数学や有限数学を必要とする専攻に入ることを希望する生徒たちを援助する事を目的として，開かれている。

離散数学の授業を開こうと努力された方々の多くが，この科目の内容とその重要性に

ついて，人々を教育することが必要だと感じられたということは，疑いない事実のようである。

（中略）

離散数学を重要視することが増える傾向にあるという事実は，人間社会の性格の変化に起因するということが出来よう。20 世紀初期におけるアメリカ合衆国は，自然科学と工学を通して，世界の中での地位を確保したが，微分積分学は，そのための最も重要な数学的手段を与えた。しかし，今日においては，数学は，社会科学における重要な問題にも応用されるし，さらに，計算機の設計に関連して起こる問題にも，勿論応用されている。そのような応用の殆どは，離散数学がかかわっている。その上，離散数学の対象となる事柄の多くは，そのような問題の重要性を理解するのに（伝統的に，数年間の準備を必要としてきた微積分学とは極めて対照的に），特別なバックグランドをあまり必要としないので，離散数学で扱う話題が，多様な背景を持つ生徒たちにとって取り付きやすいものであるということが，教育者たちに認識されてきている。

アメリカ国内の学校において離散数学の授業を導入するということを支持する動きはいくつかの団体によって示されてきた。1989 年に，全米数学教育研究団体（NCTM）は，その「数学科目と成績評価の基準」と題する報告の中で，離散数学的項目について，かなり注目した取り扱いをしている。それ以降，各州のカリキュラム検討機構が，離散数学の項目をカリキュラムに含めることを奨励してきた。又，離散数学の話題であまりよく知られていない事柄を教えるために必要な知識や技術を，先生方が勉強しやすいようにと企画されたセミナーが，Rutgers 大学，Boston 大学や，数学大統領賞受賞者機構などによって，開催されてきた。

本書の著者たちは，離散数学の題目をカリキュラムに導入するための指針を検討するNCTM の特別委員会の委員であった。実際この本の内容は，その委員会で検討された結果に啓示を受けたものである。我々が，この本の初版を出版することが出来たのは，長期間にわたって，数学のカリキュラムに離散数学を導入することに賛同されてこられた，非営利団体である「数学とその応用のためのコンソーシアム」（COMAP）が，適切な教科書を作ることに対して，気前の良い財政的援助の申し出をして下さったことによるところが大きい。その COMAP と W. H. Freeman 社から，この本の第 2 版を出すようにとの要請を受けたことは，我々にとって大きな喜びである。

教師として，離散数学を教えるということに，多大の満足感を見出してきたが，又，著者として，この本を使われた人々から，同様な経験をされたとの報告を受けたことも大きな喜びである。この教科の応用の広さは，明らかで，生徒たちが，「これを勉強して，なんの役に立つの？」というような質問をすることは，まずない。数学は，現実の問題から出発しているのだというのは，まさにその通りではなかろうか。

（以下略）

7. 結び

社会や時代の変化につれ，若者たちに期待される数学的能力は変化する。本稿で議論したように，離散数学を初等中等教育に取り込むべき時は既に到来している。筆者らは1日もはやく，この科目を『数学基礎』のように独立した1科目としてカリキュラムに取り込むべきと考える。また，十分に配慮しさえすれば，DMの導入は今までの数学教育を大きくかえる原動力になり得ると確信している。本稿が「DM導入」の議論の高まりの一助となれば幸甚である。

謝辞

本稿をまとめるに当たって，直接的，間接的にお世話になった次の先生方に感謝申し上げる：伊藤雄二氏，景山三平氏，長尾篤志氏，長崎榮三氏，離散数学研究会のメンバーの先生方。

参考文献

[1] 秋山仁，有限離散の数学，三省堂高校数学ぶっくれっと No.9 (1988) 1-17

[2] 秋山仁，数学の視覚的な解きかた（発見的教授法による数学シリーズ 講義4，駿台文庫，1989）

[3] 秋山仁，問題作りも難問「数学五輪」，日本経済新聞文化欄 1990年7月27日付

[4] 秋山仁，占部正承，初等離散数学（森北出版, 1998）

[5] 秋山仁, R. L. Graham，離散数学入門（朝倉書店, 1993）

[6] ラスロウ・ロバース他著，秋山仁，ピーター・フランクル翻案，入門組合せ論（共立出版, 1985）

[7] A. F. Coxford et al., Contemporary Mathematics in Context (Everyday Learning, 1998)

[8] N. Crisler, P. Fisher, G. Froelich, Discrete Mathematics Through Applications 2nd ed. (W. H. Freeman, 1999)

[9] National Council of Teachers of Mathematics, Principles and Standards for School Mathematics (2000)

[10] P. Erdős, Graphs and Combinatorics 1 (1985)

『教育開発（Educational Development）』創刊号　掲載

Ⅲ. 高等学校への離散数学の導入に関する
数学者の考え

離散数学の高等学校への導入に関する数学者の意見

平成 17 年に数学者 30 数名あまりの方を研究会でリストアップし，「離散数学の高等学校への導入」に関してのご意見をお伺いした。これらの数学者の方は，離散数学の専門家の方とそうではない方で構成されていた。それは，離散数学の高等学校への導入に関しては，わが国の数学者の間では意見が分かれており，したがって，本研究会としてもこれに関する賛否両論の意見を集め考察の対象としたかったからである。その結果，下記の 13 名の数学者の方々から貴重なご意見をいただくことができた。ご関係の方々には心から感謝の意を表します。

ここでは，まず，13 名の数学者の方々のご意見を，氏名の五十音順に挙げ，次にそれらの意見を研究会でまとめたものを挙げてある。また，ご意見をいただく際に皆様にお送りした依頼状を最後に資料として掲載してある。

「離散数学の高等学校への導入」にご意見をいただいた方々とその標題

江川　嘉美	離散数学の高等学校への導入について
太田　克弘	離散数学の高等学校導入について
大森　博之	離散数学の高等学校への導入について
岡部　恒治	離散数学について
加納　幹雄	離散数学の高等学校への導入について
栗木　進二	ゆとりある数学教育
斎藤　明	離散数学の高等学校への導入について
神保　雅一	離散数学の導入は論理思考の訓練に最適
寺垣内　政一	鳩ノ巣原理とグラフ理論の導入
原田　昌晃	離散数学の高等学校への導入
藤重　悟	離散数学とアルゴリズム
宗政　昭弘	論理的トレーニングとしての離散数学
森田　康夫	高等学校に離散数学を導入することに対する私見

離散数学の高等学校への導入について

氏　名　江川　嘉美
所　属　東京理科大学理学部第一部数理情報科学科
専門分野　グラフ理論

現在の高等学校の数学教育は，計算技術の修得が大部分であって，論証の訓練がほとんどなされていないという点が，最大の問題点であると思われる。したがって，論証の訓練を行うことを目的として離散数学を導入することは，十分に意義があることである。論証の訓練は，抽象代数学や位相空間論の初歩を用いてもできることであり，私としては，特に離散数学にこだわるつもりはないが，学生にとって取っ付きやすいという観点からは，離散数学が最も適切であろう（離散数学が取っ付きやすいという点からは，上記の目的とは別に，いわゆる「数学離れ」を防ぐことを目的として離散数学を導入することも，考えられる)。

離散数学を導入する際に注意しなければならないのは，よく言われるように，離散数学が「麻薬のような魅力をもっている」という点であろう。これは，上で述べた「取っ付きやすい」という性質と表裏一体をなすものである。現実に，大学の１，２年次において離散数学の魅力に取りつかれ，伝統的な数学の学習をほとんどしなくなってしまう学生を，よく見かける。一方，伝統的な数学の学習が重要なのは，論をまたないところであろう。伝統的な数学の基礎としては，抽象代数学，位相空間論，ルベーグ積分論，複素関数論の４分野がよく挙げられる。これらのうち，抽象代数学以外は，離散数学と直接関係はなさそうに見える。しかし，これまで大学院生を指導してきた経験からみると，（例外的な人もいるが）上記の４分野をしっかりと学習してきた人のほうが，離散数学の学習に専念してきた人よりも，離散数学の理解が正確であるようである。したがって，教育の早い段階において離散数学を導入する際には，将来数学を専攻しようとしている学生が伝統的な数学に対する興味を失ってしまわないようにすることが，肝要であると思われる。

離散数学の高等学校導入について

氏　名　　太田　克弘
所　属　　慶應義塾大学理工学部数理科学科
専門分野　グラフ理論

離散数学を高等学校カリキュラムへ導入する意義は，計算能力をつけることのみに終始している現在の教育に対して，論理的思考を身に付けることを重視する点にあると思われます。微分積分の計算能力よりも，離散数学で扱われるような対象を数学的に扱う手法を身につけておくことは，はるかに重要であると言えます。社会におけるいろいろな問題を単に経験的法則だけを原理として考えるだけでなく，より数学的に捉えて本質的解決策を見出す際に，離散数学のバックグラウンドがあることは，計り知れない価値があると思います。

しかし，現実にそのような趣旨のもとで離散数学を高等学校教育に導入するには，以下に挙げるような問題点が考えられます。

（1）証明に重点が置かれている従来の単元としては，初等幾何があります。初等幾何で扱う道具は，三角形や円などという，小学校の頃からなじみの深い題材ですが，離散数学で扱うものについてはどうでしょう。基本となるのは集合ですが，集合の記法・概念は従来から理解しづらい一面がありました。もちろん，集合と論理をちゃんと扱えるようにする教育が大事であることは言うまでもありませんが，教育効果が上がるかどうかには疑問があります。

（2）離散数学には，生徒の興味を惹くような話題やエレガントな証明はたくさんありますが，初等幾何の証明における補助線のように，証明のテクニックを単に知識として伝えることで終わってしまう危険があるかもしれません。

（3）ちゃんとした証明をしようと思うと，意外にたくさんの道具が必要になります。たとえば，線画が一筆書きできるための条件として，「奇数本に分岐している点が高々２点である」ことが必要条件になっていることは簡単に説明できますが，十分であることの証明はそれほど易しくありません。（実際この条件だけでは十分でなく，連結性に関する仮定が必要です。）

以上のような問題点がありますが，初等幾何の道具が小学校からおなじみのものであるように，離散数学の道具を高等学校（あるいはもっと初等教育の方がいいかもしれませんが）で導入することは重要であると思いますし，情報科学の基礎として，木構造などの組合せ的構造についての学習は，情報の教育とも関連して，必要であることは間違いないと思います。

離散数学の高等学校への導入について

氏　名　　大森　博之
所　属　　愛媛大学教育学部数学教育・情報基礎科学
専門分野　デザイン論

1．以前，数学の現代化（高校数学に集合などを取り入れた時期）を導入したときの経験を生かし，その時に生じた問題点を検討し，参考にする。

2．大学１～２年次に行われる共通教育改革の一環として行なわれた，専門教育を初期段階に導入するいわゆる「くさび型教育」があります。くさび型教育は専門性の意識や興味を出来るだけ早く高めるねらいがあります。専門性の高いと思われる離散数学を起こすことはくさび型教育を高校数学に導入することのように思えます。今回の問題提起をこのように解釈することが適切かどうか分かりませんが，離散数学の導入は高校生にとって数学の内容の選択肢を増やすことになると思われます。その事による影響を注意深く検討する必要があると思います。

3．その他

（a）　高校教員の離散数学に対する認識，関心や指導力の問題（専門家による講演などのキャンペーンの実施）

（b）　離散数学研究者の把握の急務と他分野の数学者の離散数学に対する理解と賛同

（c）　離散数学に関する入試問題作成の困難性

（d）　高校数学にある従来の内容と関係あるような内容の厳選（例えば，行列について，ベクトルの項で出る行列よりは，組合せ数学によく出る行列（結合行列）のほうが生徒には自然に受け入れられる？）

離散数学について

氏　名　　岡部　恒治
所　属　　埼玉大学大学院経済科学研究科
専門分野　トポロジー

1．一口に「離散数学」といっても，いろいろな意味で使われています。私の承知しているところでは，広い解釈では，「グラフ理論」，「組合せ論」，「アルゴリズム」などパズル的要素の強いものから，「順列・組合せ」，「整数論」，「数列」を含むと伺っております。

しかし，「順列・組合せ」，「整数論」，「数列」は，すでに一部入っていますから，ここでお尋ねになっているのは，狭い範囲の「グラフ理論」，「組合せ論」，「アルゴリズム」などパズル的要素の強いものについてのご質問と解釈しました。以後，断らない限り「離散数学」を狭い意味で用います。

2．私自身，『自分で考える算数の本』などを出しており，パズルが大好きで，以下の「離散数学」の効用については異論がありませんし，きわめて効果的と考えております。小学校の出前授業では，M.ガードナーが紹介した帯の裏返しパズルを用いて好評です。

・数学を身近なものとしてとらえることができる。
・自分から数学の活用について考えようとする。
・数学への関心が高まる。
・問題の視覚化など，問題解決のための手がかりを得る方法を学ぶ。
・解答の説明をさせる(パズルなら喜んでする)ことで，論証的能力が高まる。

一方では，筋書きにない解法もあるので直観的な思考力も養われる。

3．しかしながら，前回のカリキュラムの中で，数Ｉの「(3)　個数の処理」の，「ア　数えあげの原則，イ　自然数の列」は，それを狙ったもののようでしたが，数列との関係がいまいち理解されず，現場にはかなりの不評でした（少なくない現場では数列の中に組み入れ，飛ばされたと聞いております）。

4．現在の，大学の教育との関連で言いますと，微分積分の一応の完成を到達点とするカリキュラム自体には，不満はありません（変更希望の圧力は少ない）。また，現行のカリキュラムはこれだけでも手一杯です(一次変換の完全復活や数Ⅱの微積での x^n($n>3$)の微分や体積の復活要求も強いです)。

ですから，今のカリキュラムの一部を削って離散数学を入れても，それに対しての理解は得られにくい状況です。また，大学側の教員の能力からいっても，その問題を出題する大学は限られてしまうでしょう。そうなると，学習指導要領の科目に入れても，「ア　数えあげの原則，イ　自然数の列」と同じような運命をたどることが考えられます。

5．2．で述べた効用を生かすためには，各単元で「離散数学」を用いた導入教材を開発したり，課題学習・総合学習などで「離散数学」を活用するさまざまな例示をあげて，現場に供給していくことが実際的と考えております。

離散数学の高等学校への導入に関する数学者調査

氏　名　　加納　幹雄
所　属　　茨城大学工学部情報工学科
専門分野　グラフ理論，計算幾何，応用暗号理論

計算機とその利用は現代社会で不可欠のものです。従来高校数学の後半は解析を中心に組み立てられてきましたが(統計なども含め)，これらは物理・各種工学への重要な応用がその採用の基本的な理由になっていると思います。これらの重要性は今後も変わらないでしょう。しかし，この分野は計算機の利用においては，残念ながら有効ではありません。解析では「有限個の物の処理は自明にできる」といった考えがあり，計算機処理の問題の理解を困難にするとか，意識させない問題があります。

計算機能力の限界が物理的な速さだけでなく，アルゴリズムによることをある程度は理解しておく必要性が増していると思います。

離散数学においても，やはり計算機科学などでの応用が明確な話題を中心するのが良いと思います。

ある案

グラフとその利用
木の定義，最小重みの木，最短経路問題，オイラー回路，根付き木
数列以外での帰納法とアルゴリズムもわかる

有限体とその簡単な応用
Z_pにおける　和，積など　原始元

計算幾何学の話題とか，デザインなどの話題もありますが，これらは高校では不要と思われます
「関係とか集合」は簡単にとどめる方が良いと思います。

つまり，数学的な内容が少なく，理論構成上の興味とか言語としての価値しかないものは中心に組み込まない方が良いと考えています。

高校の数学について特別な教育経験も理解はありませんので，この程度の提案にとどめます。

補足：
情報工学科では離散数学は必須科目であり，現在私の学科では，離散数学ⅠとⅡ,グラフ理論，組合せ理論を合わせて８単位の科目を教えています。非常勤により計算幾何２単位も教えています。解析は１年生のみで，偏微分，重積分くらいです。線形代数は１年間の講義。このほか専門で線形計画法なども教えています。

ゆとりある数学教育

氏　名　　栗木　進二
所　属　　大阪府立大学大学院工学研究科
専門分野　統計，組合せ論

高校生が数学の面白さを体感するのに２つの場合があると思います。１つは，ある問題が解けて，試験の成績が良かった場合でしょう。ここでいうある問題とは，たとえば，微分を用いて，不等式を証明するような問題のことです。もう１つは，ある問題，あるいは，自分で考えた問題が解けた場合です。自分で考えた問題とは，とにかく，自分で何かに疑問を持ち，自分で考えた問題で，たとえ，結果的に，その問題がどこかの問題集に載っていても構いません。

確かに，数学のいろいろな公式，定理を駆使して，問題を解くことは大切でありますが，もう１つ大切なことがあります。それは，常に疑問を持ち，自分なりに物事を考え，問題を解決するために自分なりに工夫をすることです。このことは高校生だけでなく，大学生，大学院生，さらに，我々自身も常に意識しなければならないことです。日頃から，学生には，どんな小さいことでもいいから，自分で問題を見つけ，自分で考え，自立するように言っているのですが，なかなかそのようにはなりません。まるで，彼らは人ごとのように思っています。

話を元に戻します。「自分で考えた問題」を考えやすい状況が離散数学の「数え上げ，デザイン」の分野にあると考えています。その意味で，「数え上げ，デザイン」が高等学校の授業内容に取り入れられることを望みます。元来，「数え上げ，デザイン」はゲームなどの身の回りのことを問題にし，高校生が自分のこととして考えやすいように思います。また，「数え上げ，デザイン」の分野においては，定理がほとんどなく，順列，組合せといった公式（考え方）を使うことしかできません。ですから，自分なりの考え方で問題を整理することが必要となり，自分なりの工夫を編み出さなければなりません。その努力が，将来，彼の日常の問題（数学の問題ではない問題）に対しても生かされるものと思っています。

高等学校の数学教育全般については，教材を幾分少なくして（むずかしいことだと思いますが），２つの流れを作ったらどうでしょうか。

１つは数学の基礎事項を，いわゆる，教える。このことも高校生の将来には必要でしょう。もう１つは問題の考え方を訓練する。高校生が自分なりに物事を捉え，自分なりに問題を解決する。さらに，その先の問題を自分で考える。その方法は彼ら自身に任せ，教員はその手助けをする。決して，問題解決に誘導しない。その教材の提供を「数え上げ，デザイン」がしてくれると考えています。また，「数え上げ，デザイン」以外に，グラフ論の話題もこの教材にふさわしいのではないでしょうか。これが本来のゆとりある数学教育だと理解していますが，数学をとおして，高校生が創造性を養い，考え方の面で自立してくれればと願っています。

離散数学の高等学校への導入について

氏　名　　斎藤　明
所　属　　日本大学文理学部情報システム解析学科
専門分野　グラフ理論

1．離散数学をどのように捉えているか

質問の趣旨が良く分からないので，２つの切り口から答えます。

もしこの質問が私にとっての「離散数学」の定義を尋ねているのであれば，離散は稠密の反対語と捉え，「数学で非常に使い勝手の良い稠密性を利用できない状況を扱うための数学」と答えたいところです。ただ世の中では「有限数学」とほぼ同義語のように使われているので，より狭く「(数学において使い勝手の良い）無限性を利用できない状況を扱うための数学」が定義だと捉えます。

もしこの質問が「高校で教えられる可能性のある離散数学」を尋ねているのであれば，マトロイドのような公理を前面に押し出す数学，束論のようにある概念の抽象化を扱う数学，デザイン理論のように大学級の知識を仮定しないとほとんど進めない数学は除外されます。この場合にはグラフ理論，数え上げ（の初歩）や離散幾何のように，あまり予備知識を仮定せずともアイデアだけである程度面白いところまで進めるような有限の対象を扱う数学，となります。以後ここでは「離散数学」といえばこの後者の意味で話します。特にグラフ理論を念頭におきます。

2．離散数学を高等学校に導入する意義はあるのか

離散数学はあまり深い体系化がなされていません。無限性や稠密性のような良い性質が使えないこと，問題があまり高い抽象化を受け付けないことなどがその理由として考えられます。グラフ理論のある分野のように，研究レベルですら帰納法程度の道具しか使えない，ということもしばしばあります。離散数学の醍醐味は，こうした道具の少ない状況で他の知識に頼らず，すべて自分の力だけで問題解決を行なうところにあると思います。このため離散数学はあまり深い理論に深化しない欠点を持つと同時に，問題の解の中にむき出しの着想が見える良さを持っています。難しい問題が１つの着想で鮮やかに解かれるところに面白さがあり，もし離散数学を高等学校教育に導入するのであれば，この着想を教えることになるでしょう。初等平面幾何における補助線に相当する雰囲気だと思います。

こうした特性から，離散数学は問題解決の面白さを味わうには格好の題材になり，その意味で導入に意味はあると思います。しかし，後述するように，決して高等学校教育の大きな単元にするべきではないと考えます。

3．どのような構成が可能か

後で理由を述べるように，高校教育では離散数学を大きく取り上げるべきではないと考えます。そこで構成としては，必須内容ではなく，発展題材として取り上げるべきだと思います。「グラフ理論」，「離散幾何」のように，深い予備知識がなくても着想１つで問題解決に至る学問もある，という程度のことを１年間で2~3時間教えることが望ましいと思います。

4．長所と短所は何か

高等学校で離散数学を教えることの長所は，ほとんど予備知識を仮定せずに研究レベルの問題とその解決を教えられるところです。最近の理科離れの理由の１つに，学生に問題解決の面白さが伝わらないことが挙げられます。離散数学は，つらい予備知識獲得の勉強を伴わずに学問の面白さを伝えることができる分野です。手軽に面白さを伝えられるので，学生の数学離れ，理系離れを食い止める可能性を持ちます。

一方こうした手軽さはそのまま欠点にもつながります。離散数学にはアイデア１つでそれまで手もつけられなかった問題が鮮やかに解決される面白さがあります。それは数学の特質の一面を伝えますが，全てではありません。数学には長い時間をかけて発展してきた体系化の側面があります。離散数学はこの側面を伝えるには不向きです。アイデアだけで問題解決に至る離散数学の面白さを強調することは，知識獲得の努力を軽んじる傾向を生み出すかも知れません。手軽に問題解決に至る離散数学の問題を強調しすぎると，学生は長期的な視野を持った勉強を敬遠するかも知れません。現在の教育は知識偏重であると言われますが，離散数学はアイデア偏重の傾向を持ちます。

また離散数学のアイデア偏重の側面は，学校教育に適しているのか，という点にも疑問を持ちます。現在の学校教育は知識に重点を置いていると良く言われます。しかしアイデアを得る力は，現在の数学教育に割り当てられた時間で養えるとは思えません。知識獲得にかかる時間の個人差に比べ，発想力の強化にかかる時間の個人差ははるかに大きいと思います。学校のような集団教育の場で発想力強化の学習を行うと，その個人差ゆえに混乱が発生する可能性があります。ある人にとって全く自明なアイデアが別の人には信じられないほど難しく感じる，といった状況もあるでしょう。

5．弱点を克服するにはどうすべきか

前述した弱点を克服する方法は幾つか考えられます。まず離散数学の手軽さのみに惹かれる可能性に関しては，あまり離散数学を強調せずに伝えることが対策になると思います。集団教育の場はどうしても知識偏重になりがちです。その弊害を減らすために，トピックス的に離散数学の内容を伝え，「このような分野もあるのだ」と知らせます。問題がアイデア１つで鮮やかに解かれる様子を見せることは，理科における実験のように学生に良い印象を残すでしょう。

また，こうした発想力を成績によって評価しないことも大切だと思います。発想力は個人差があり，学校教育の時間的制約の中でその個人差を埋めるほどの教育を施すことはできないでしょう。あくまでも数学の面白さを伝える目的に限定して離散数学を使う方が効果的だと思います。評価に使わない題材なので，発展内容とするべきです。

6．まとめ

以上のように，離散数学を高校教育に導入することには賛成ですが，成績評価の対象とすることには反対です。学生の数学離れを防ぐため，数学の面白さを伝える話題の１つとして活用することが良いと考えます。

離散数学の導入は論理思考の訓練に最適

氏　名　神保　雅一
所　属　名古屋大学大学院情報科学研究科
専門分野　離散数学，組合せ論，統計的実験計画

私は，離散数学の高校の数学教育への導入に賛成です。もちろん，取捨選択は必要ですが，“離散数学は論理思考を養う良い題材”であり，実社会では離散数学が必要となる機会がますます多くなっているように思われます。

グラフ理論の基本概念を学ぶことにより，交通，ネットワークなど実社会の様々な概念がグラフで表現できることを知り，グラフを通して抽象的に物事を整理する能力を養うのは重要だと思われます。特に木や二部グラフの概念，マッチングなどは，現実的な応用も多く重要であろうと思われます。2 部グラフ，マッチングなどは関数や関係の項目に追加して学習させればさほど学習時間も圧迫しないのでは？

また，鳩の巣原理のような単純な概念に帰着して解決できる問題が多々あることを実感させることも必要だと思います。

昔から高校では，ある線形制約条件の下で ax+by の最大値を求めることも学びますが，2 変数の場合の線形計画法としてその論理展開を理解すれば，より一般性がある考え方を学ぶことになるでしょう。このように，様々な形で，離散数学の内容が高校教育にちりばめられていてほしいと願っています。

大学教員の立場から，大学入試で論理思考を問えるような入試問題を出したいと思うことが少なくありません。そのような場合に離散数学の問題は格好のテーマです。実際，論理的思考能力が優れた生徒を入学させたいと思って，そのような問題を出そうとしても出題文の作成に困惑することが多々ありました。グラフなどの言葉で書けば数行で収まるものが，具象的な表現になるために問題文が長くなり，結局出題をあきらめざるを得ないこともあるでしょう。もちろん，高校教育は大学入試のために存在するのではありませんから，これは，大学の教員の勝手な理屈かもしれませんが，要するに，抽象化の能力と論理思考を磨く題材として離散数学の導入を望みたいと思います。

一方，離散数学の導入により，既存の履修内容に過大な負荷が生じるとすれば，既存の内容の何がしかを削減しなければならないかと思われますが，その場合には，高校での“統計教育”はその 1 つの候補ではないでしょうか。私は，数学会の統計分科会に属しており，統計教育の重要性は十分認識しているつもりですが，高校での統計学の記述は，高校生にとってその論理基盤が十分に理解できるものばかりではなく，逆に統計が嫌いな生徒を増やしているように見受けられます。データの整理法や中心極限定理などの概念を教える必要があるのであれば，数学ではなく「情報」という科目の中でコンピュータを用いて直観的に教育するのが良いのではないでしょうか？高校では，実データを計算機で解析する面白さを身に着け，大学で微積分の基礎を学んでから統計学の基礎理念を学ぶ方が良いだろうと思います。実際，大学での統計教育は，従来の教養教育としての統計概念の教育から徐々にデータ解析の感性を養う教育に移行し始めていると思われます。

鳩ノ巣原理とグラフ理論の導入

氏　名　　寺垣内　政一
所　属　　広島大学大学院教育学研究科
専門分野　トポロジー

私の専門分野はトポロジーである。より正確に述べれば，結び目理論及び3次元多様体論を研究分野としている。従って，研究分野そのものは，離散数学の対極に位置する連続数学といってよいだろう。しかし，この十数年の研究課題において，曲面上のグラフを組合せ的に分析する手法を主に用いており，一概に連続数学と言い切れないのは，おそらくどんな分野でもありえる状況である。そういった必要に迫られて，グラフ理論に興味をもち，教育学部4年生を対象に半期の講義として5，6年にわたり講義した経験をもっている。また，教育学研究科の大学院生を対象に，離散・組合せ幾何の話題をここ数年，講義している。従って，本稿では，グラフ理論と離散・組合せ幾何の話題を高等学校へ導入することに制限し，出張講義などの実践に基づいて意見を述べたい。特に，鳩ノ巣原理の導入を推奨する。

グラフ理論や離散・組合せ幾何の入門的な話題を，教育学部や教育学研究科で講義できる大きな理由は，深入りしないのであれば，予備知識をほとんど必要としないことにある。その上，学生たちが好む表現をとれば，イメージをもちやすい。視覚化も容易である。彼らにすれば，抽象的な位相空間論や群論とは大違いというわけである。大学生といっても，1年次の微積分や線形代数，2年次以降の群論，位相空間論，関数論などといったものをふまえて，グラフ理論の理解に達するわけではない。確かに，高校生と違い，現代数学にふれた経験から，数学に対する感性が是正されていることは多少あるだろうが，高校生では理解不可能であるとは到底思えない。日常の事象をグラフで表現する話題やパズル的な話題も多く存在し，とりわけ後述する鳩ノ巣原理など，高校生にこんな数学もあるのかという体験を与えることができ，高校数学全体に対する動機の高揚も期待できると思われる。

大学1年生向け教養科目の授業をオムニバスで担当した際，何度か4色問題を90分間で講義している。4色問題の歴史から始めて，地図をグラフ化する手順を説明する。一度きりの講義だから，グラフの定義を与えることはしない。地図にふくまれる国と国の間の隣接関係という情報を表現する図として述べれば，十分に理解してもらえている。まず，オイラーの握手補題を証明し，連結グラフになることを注意したのち，オイラーの公式を帰納法で証明する。次に，単純グラフにしてよい根拠を隣接情報の翻訳の観点から述べ，次数5以下の頂点が存在することを，握手補題とオイラーの公式を使って，背理法で証明する。この時点で，どんな地図も6色塗り分け可能であることを証明できる。最後に5色塗り分け可能であることを，ケンペ鎖のアイデアを使いながら証明するという流れである。理系の学生対象の授業であるが，帰納法と背理法といういわば証明のための論法を除いて，予備知識を一切必要としないといってよい。実際，同じ内容の講義を，公立高校2年生を対象とした出張講義の機会に行ったことがある。ただ，帰納法を未習のものがおり，高校で講義する際の注意点であることを後に気づいた。大学生には，自分の出身県の市町村地図をグラフ化して塗り分ける課題を与えているが，関心をもって取り組んでくれる。高校で講義した際は，子供むけキャラクターのぬり絵を4色で塗り分けるという課題を与えた。

小学校，中学校との関連でいえば，正多面体に対するオイラーの公式は，小学6年生の立体の単

元において，暗にそれを意図した展開が行われていることがある。むろん，中学１年において正多面体の学習がある。オイラーの公式について，中学２年生向けの講義を行った経験がある。正多面体であるがゆえに成立するわけではなく，球面に埋め込まれた連結グラフに対する公式であることを述べ，オイラー標数が不変量であることを，グラフ理論の手法を用いて実際に証明した。50分の講義だったため，さすがに生徒たちにはつらかったという印象を受けた。離散数学というわけではないが，不変量という極めて重要な概念が学校数学に登場しないため，オイラーの公式の授業の前に，まず 50 分，不変量についての講義を行ったので，連続した講義に疲労したこともあったであろうか。

次に，鳩ノ巣原理は，現在の学習指導要領の枠組みにこそないが，離散数学で用いられてきた代表的な論法の一つであり，同時に中高校生が理解可能な教材を与えるものであると考える。ロシアの中学生，高校生向けの数学問題集「数学のひろば」（岩波書店）第１巻では，鳩ノ巣原理に一章が割かれており，鳩ノ巣原理で証明されうる様々な問題が収録されている。たとえば，１だけを使ってかかれる数 1，11，111，1111，…の中には，2007 で割り切れるものがみつかる。（私の計算が正しければ，1 を 666 個ならべたものがそうである。黙示録に登場する著名な数 666 の出現は印象的である。）実際，2007 である必要はなく，5 で割り切れない奇数であればなんでもよい。鳩ノ巣原理から導かれる整数の話題は，特に予備知識を必要とせず，公立高校 2 年生 20 数名を対象とした出張授業で話したことがある。新鮮な数学に対して驚きを受けたという感想を多くもらった。

既存の学習内容である数列，極限，微積分，三角比，ベクトル，確率，行列など，どれをとっても重要なテーマであることに異議はないが，上述したようなグラフ理論の入門的な話題や鳩ノ巣原理と系統性を持たせることは困難であるかもしれない。これまで，高校数学における内容としての位置づけが定まらず，導入に踏み切れていないのかもしれないが，私が実際に講義し，接してきた中高校生，大学生，大学院生の反応をみる限り，受け手にとって重要な要素は，必ずしも系統性だけではなく，たとえ話題の転換が極端であっても，話題そのものに楽しみを見出せることであり，加えて背後に価値のある数学的な思考をともなうことが保障されているのであれば，恐れることなく導入すべきであろう。

最後に，雑感を述べたい。毎年４月，教育学部の新入生に有理数とは何かと問うことにしている。高校の教科書に記載されているような定義を述べられるものはまずいない。分数という答えが最も多い。そう答えたものには，$1/\sqrt{2}$ は君にとって分数かと問うことにしている。また，異なる２つの有理数の間には有理数が存在することを示せとたずねても，即答できるものはそういない。なぜなのか。個別の数を扱うことには慣れていても，数体系として，つまり集合として意識することを極端に避けてきていることが一因にあると思う。定義をいえないが計算はできる。微分係数の定義はいえないが，与えられた関数の微分は機械的にできる。原理を知らなくても携帯電話や電子レンジが使えることと，同じであってはいけない。

離散数学の高等学校への導入について

氏　名　　原田　昌晃
所　属　　山形大学理学部数理科学科
専門分野　代数的組合せ論

高等学校の数学教育に関して非常に興味を持っていますが，残念ながら大学での教育経験も豊富ではないこともあって，離散数学の高等学校への導入についてある種の信念を持っている訳ではありません。したがって，ここでは，大学で離散数学を教えた経験で得たことを書いてみたいと思います。

通常の理学部の数学系の学科では，微分積分と線形代数を１年次で習ったのち，抽象的な数学の授業がカリキュラムとして並ぶと思われます。所属する山形大学理学部数理学科において，３年生を対象とした授業で，代数的符号理論の入門を何度か行ないました。理学部の数学系の学科で離散数学の授業があるのは全国的に見て，標準ではないと思います。ここの学生に限ったことかもしれませんが，数学（数理科学）を専門に勉強をするという希望で入学した学生でさえ，抽象的な数学の連続で少々疲れてしまっている学生を目にすることが度々あります。代数的符号理論の入門と言っても内容はほとんど有限体上の線形代数です。有限集合（有限体）を扱うことで，今まで線形代数の理解に苦労していた学生が何かを得たように線形代数の内容を理解していく姿が見えることがあります。また，他の抽象的な数学が苦手な学生の中にも，離散系の授業を機会に元気を取り戻して数学に取り組むようになった学生も居ました。もちろん，基礎的な抽象数学が重要であることは言うまでもありませんが，ある種の刺激として，離散数学の授業が役に立つのではないかと考えています。もちろん，離散数学を教えること自体にも意味があり，単なる刺激に終わってしまうとは思ってはいません。

さて，本題である高校数学についてですが，高校数学の段階ですでに数学に疲れ切っている高校生も少なくないと想像されます。上に述べたような大学での教育経験から考えて，離散数学の中から，特に手で扱える対象を選び高校数学のカリキュラムに導入することで数学への興味を取り戻す高校生が少しは居るのではないかと感じています。特にカリキュラムの半分以上を微積分が占める現状を考えると，多種多様な分野があることは望ましいことだと思っています。

離散数学とアルゴリズム

氏　名　　藤重　悟
所　属　　京都大学数理解析研究所
専門分野　数理情報

I.「離散数学」について

1．17 世紀から今日まで著しい進展を見せてきた伝統的な「数学」は世界の数学の天才達が完成した精密で精緻な理論体系になっています。したがって，微分積分学や解析学を学ぼうとする学生はその出だしで，無限・連続・極限を始めとする諸概念を正確に理解することに頭を悩ませ，真面目に考えようとする学生ほど，そこで躓いてしまことが多い。一方，1960 年代から急速に発展してきた「離散数学」では，本来的に有限なものを扱うため，その概念の導入において理解が困難になる状況はほとんどなく，単純にそのモデルを示して曖昧さなくその概念を教えることが可能です。その意味で，「離散数学」を低学年（高専の 1 年）から教えることが可能であると思われます。

2．微積分学を始めとする伝統的な「数学」を実際の問題に適用する場合に，理論的，解析的にうまく解けることは少なく，実際にはコンピュータを使って問題を解くことが必要となります。有限な資源を使うコンピュータでは，与えられた問題のデータを有限長の数値で表現し，微分や偏微分を差分などで近似し，あるいは，空間的な広がりも離散的なサンプル点で代表して，というような離散化の手続きを経てコンピュータで計算可能になります。誤差解析や精度保証を伴うこのような「数値計算法」もここでいう「アルゴリズム」の一つの重要な技法であり，オーソドックスな「数学」を「使える数学」にするための重要な役割を果たしています。

3．「離散数学」では，扱うものが基本的に有限ですから，解の存在判定や最適解を見出す問題は，単純に全てを調べれば（有限時間内に）分かるという意味で，数学的には自明であると考えられます。しかしながら，実用上問題となる有限は，天文学的に大きな有限であって，単純に虱潰し的に調べようとすると現在の最高速なコンピュータを使っても（例えば何十年，何百年もかかるという意味で）実用に耐えられなくなります。したがって，純粋数学的には自明な問題でも，実用上「使える数学」の観点からは，極めて自明でない難しい問題となります。如何にして高速に実時間内に解を見出すかということが「離散数学とアルゴリズム」のテーマであると言えます。

4．「離散数学」の世界は基本的に有限な世界であるので，解決が難しかった問題でも，解決に至るには天才の力が必要であるが，手品の種明かしのようなもので，言われてみれば（私のような）凡人でも余り苦労せずになるほどと理解できるということが少なくありません。そういう意味でも「離散数学」の教育を低学年から始めることが十分に可能であると思います。

II.「アルゴリズム」について

5．「離散数学」を「使える数学」とするために，「(離散）アルゴリズム」は重要な役割を果たしています。以下に，いくつかの実例をあげましょう。

(a) 多項式の計算（計算の手順を工夫すると積の回数が減る（Horner 法））

(b) 最短路問題（始点から各点への最短路が効率よく見つけられる（Dijkstra 法））

(c) 最小木問題（木の族の有するマトロイド構造から効率よく解ける（貪欲法））

(d) 巡回セールスマン問題（効率よく解くことが難しい代表的問題；近似解法による）

(e) 大規模連立１次方程式（ブロック上三角行列に分解して解く（DM-分解））

これらの代表的な問題を始めとして，離散的，組合せ的な問題に対して高速に（良い）解を見出す努力がなされています。例えば，今，問題のサイズを n として，$100n^2$ステップで解を見つけるアルゴリズム A と 2^nステップを要するアルゴリズム B があったとしましょう。そこで，１ステップに 10^{-6} 秒かかるとすると，n＝20 なら，アルゴリズム A で 0.04 秒，アルゴリズム B で１秒で解が求まりますが，ちょっと増やして n=50 とすると，アルゴリズム A では 0.25秒で済むのに，アルゴリズム B では 35 年もかかってしまうというような劇的な違いが見られます。したがって，多項式時間アルゴリズムと呼ばれる $O(n^k)$（k；定数）ステップ数のアルゴリズムでベキの k がなるべく小さくなるものをみつける努力がなされているわけです。

6．アルゴリズムには，厳密な最適解を高速に見出す（多項式時間）アルゴリズムの他に，次のようなアルゴリズムも研究されています。厳密な最適解を見出すことが困難な問題に対して，最適解からの劣化の割合が何パーセントかを事前に保証する精度・品質保証付きのアルゴリズムの研究が近年盛んに行われています。さらに，このような精度保証はないが，実用上，十分に満足のいく精度の近似解を高速に求めるメタヒューリスティック・アルゴリズム（局所探索法，遺伝アルゴリズム，・・・）の有効性が示されています。また，必ず厳密な最適解を見つけるというわけにはいかないが，ある一定の正の確率で最適解を見出すようなアルゴリズム，確率的アルゴリズム，の研究もあります。

7．最適化問題の中で最も基本的である線形計画問題に対して，従来から広く用いられてきたシンプレックス法より 50 倍早いとされる内点法と呼ばれる新しいアルゴリズムが 1984 年に Karmarkar によって提案されました。当時，50 倍速いというだけで世界をあっと言わせましたが，その後，特許申請され，日本においても特許が認められ，アルゴリズム研究が改めて注目されることになりました。現在，アルゴリズム特許が産業的にも非常に重要になってきています。日本は，物作りにおいては世界のトップを切って走っている分野がたくさんありますが，アルゴリズム特許を始めとしてソフトの面では多少遅れているように思います。

8．最近，富士通を始め，コンピュータ関連会社では，その企業活動の重点をハードからソフトへシフトして，ソリューション・サービスに力を入れています。ソリューション・サービスの中身は，ここで説明しています離散アルゴリズムが基幹となるもので，「離散数学とアルゴリズム」の教育の重要性が益々増してきていると言えると思います。また，文部省の科研の特定領域（B）で，京都大学の茨木先生が代表で私も参加しております「アルゴリズム工学」の共同研究が平成 10 年度から 3 年計画で進められています。この共同研究の成果によって「アルゴリズム」の有用性，重要性が広く認識されるようになると期待されています。「アルゴリズム工学コース」のようなものが情報関連の学科にあっても良いのではないかと思われます。

Ⅲ．「離散数学とアルゴリズム」の教育について

9．アルゴリズムについてまとめると次のようになります。

〈アルゴリズム〉

連続--------数値計算法，誤差解析

離散アルゴリズム

- 離散数学
  - 離散構造
    - 組合せ論
    - グラフ，ネットワーク
    - 有限代数系，有限幾何
    - 計算幾何学，トポロジー
  - 離散最適化
    - データ構造，アルゴリズム
    - 数理計画
    - 計画数学
    - OR（オペレーションズ・リサーチ）

また，情報数学の教育として，「離散数学」と「アルゴリズム」の中身の詳細およびこれら二つを結ぶテーマについては，以下のようなものが考えられます。

〈離散数学〉

古典的組合せ論

順列，組合せ，包除，反転公式，母関数，・・・

グラフ・ネットワーク，マトロイド

木，道，マッチング，フロー，劣モジュラ関数（離散凸関数），・・・

代数

群，環，体，有限体，ブール代数，半順序，束，有限幾何，・・・

計算の理論

オートマトン，チューリング機械，P，NP，NP-完全

数理論理学

命題論理，1階述語論理，・・・

〈アルゴリズム〉

データ構造（リスト，ヒープ，・・・）

基本アルゴリズム（ソーティング，最短路，マッチング，・・・）

離散最適化，組合せ最適化

ネットワーク計画，整数計画，線形計画，凸多面体，凸解析，OR，ゲーム理論，動的計画，・・・

計算幾何学（地理情報処理，画像処理，CG，・・・）

計算代数(Gröbner 基底, ・・・)
符号，暗号，乱数，シミュレーション, ・・・
実験計画，ブロックデザイン，統計，データ解析

---

10. 色々欲張ると時間がなくなってしまいますが，これは全体として一つの，例えば，アルゴリズム工学の数学カリキュラムの体系の提案だと考えていただければ良いかと思います。高専の5 年間では個々のテーマが表面的にしか教えられないかも知れませんが，全体として一貫した「離散数学とアルゴリズム」の体系あるいは思想が伝えられるような教え方が可能であると思います。そのためには，全体を見通せる教育者の存在が前提となりますが。

（文部省主催『平成11年度　高等専門学校教員研究集会報告書（第二班)』17～20頁．より転載)

論理的トレーニングとしての離散数学

氏　名　　宗政　昭弘
所　属　　東北大学大学院情報科学研究科
専門分野　離散数学

高校における離散数学の教育は，「場合の数と確率」という名で行われている。問題なのは，離散数学の基礎となる（有限）集合の取り扱いがされず，「かつ」，「または」の違いなど極めて重要な論理が「場合の数と確率」で表に出ない形でしか扱われていないことである。

高校での数学教育は，論理的トレーニングの側面が軽視され，計算技術が重視されている。計算技術の方が，大学入試においては学力の評価が正確にしやすいという理由もあろう。計算機が発達した今，計算技術を過度に磨くことよりも，数学の勉強を通して論理的トレーニングを積む方が学生にとってより重要であると思う。

離散数学はその題材として，現在高校数学で重視されている他の題材に比べてはるかに適していると考える。

高等学校に離散数学を導入することに対する私見

氏　名　森田　康夫

所　属　東北大学大学院理学研究科

専門分野　数学（整数論，数論幾何学，数学基礎論）および数学教育（入学試験を含む）

「離散数学をどのようにとらえているか」との質問がありましたが，離散的な対象を扱うには連続を扱うのとは別の手法が必要となり，そのようなものを扱うのが本来の「離散数学」であると考えています。ただし，通常「離散数学」と言う場合には，離散的な数学対象の中で一番中心的な存在である整数に関する事は除くのが普通であり，計算機の基礎理論を学ぶために必要な「集合の理論やその背景にある論理学から始まり，グラフ理論までを教えるもの」とされている様です。

現在の高等学校の数学では，集合と論理の極く初歩は教えていますが，この部分は高校生には非常に難しく，集合と論理についてはほとんどの高校生は良く理解できていないのが現実であると考えています。離散数学を高等学校に導入する場合には，このことがネックとなると思います。つまり，高等学校で離散数学を導入するためには，「小学校・中学校の算数・数学の教育を今よりもっと論理的に教え，全生徒の抽象的・論理的思考能力を高めて置く」ことが前提となり，それでなければ，導入しても殆どの生徒が理解できない科目となってしまうと思います。

また，高等学校の教科「数学」では，週 5 日制を実行することから来る時間不足の上に，「総合的学習」や教科「情報」を導入するためにも時間が削減され，現在でも，時間が足りなくて論理的に数学を教えることが難しくなっており，ほとんどの高等学校では「公式を丸覚えさせ，その上で公式の使い方を教える」ことで手一杯の状態にあります。したがって，もし離散数学を高等学校に導入するとするなら，その場所としては，時間が不足している教科「数学」ではなく，教科「情報」で対応することが必要と思われます。

いずれにしろ，離散数学を学ぶことでメリットを受ける専門分野は，理系の学問の中でも数学や情報科学などに限られます。そのような小集団のために，文系に進む生徒は言うまでもなく，理系に進む生徒全体に教えることは非効率であると思います。また，数学・情報・電気系の学科で学ぶ大学生であっても，離散数学を理解するのは簡単でないのが現実であると思います。

私は，「教育内容はその教育を受ける人の成熟度に応じて教えるべき」と思っていますが，日本の教育の実情を考えると，離散数学は高等学校で教えるには適していないと思います。また，中途半端な内容を聞きかじらせても得るものは少なく，むしろ他の既に選ばれた内容を分かりやすく教えることの方が，はるかに重要であると思います。

以上

離散数学の高等学校への導入に関する数学者の意見

数学者 13 名の方々から「離散数学の高等学校への導入」に関してご意見をいただいた。

数学者には，離散数学の高等学校への導入に関しては，反対論から賛成論への幅があり，反対論だけではなく賛成論の場合にも問題点や課題が指摘されている。それらの意見を大まかにまとめる次の通りである。

1．離散数学とは何か

離散数学とは何かの主なものは次の通りである。

（1）「離散数学」といっても，いろいろな意味で使われる。広い解釈では，「グラフ理論」，「組合せ論」，「アルゴリズム」などから，「順列・組合せ」，「整数論」，「数列」を含む。しかし，「順列・組合せ」，「整数論」，「数列」は，すでに高等学校に一部入っているから，ここでは，狭い範囲の「グラフ理論」，「組合せ論」，「アルゴリズム」などと解釈する。

（2）この質問が私にとっての「離散数学」の定義を尋ねているのであれば，離散は稠密の反対語と捉え，「数学で非常に使い勝手の良い稠密性を利用できない状況を扱うための数学」と答えたい。ただ世の中では「有限数学」とほぼ同義語のように使われているので，より狭く「（数学において使い勝手の良い）無限性を利用できない状況を扱うための数学」と捉える。

この質問が「高校で教えられる可能性のある離散数学」を尋ねているのであれば，マトロイドのような公理を前面に押し出す数学，束論のようにある概念の抽象化を扱う数学，デザイン理論のように大学級の知識を仮定しないとほとんど進めない数学は除外される。この場合にはグラフ理論，数え上げ（の初歩）や離散幾何のように，あまり予備知識を仮定せずともアイデアだけである程度面白いところまで進めるような有限の対象を扱う数学，となる。

（3）17 世紀から今日まで著しい進展を見せてきた伝統的な「数学」は世界の数学の天才達が完成した精密で精緻な理論体系になっている。したがって，微分積分学や解析学を学ぼうとする学生はその出だしで，無限・連続・極限を始めとする諸概念を正確に理解することに頭を悩ませ，真面目に考えようとする学生ほど，そこで躓いてしまことが多い。一方，1960 年代から急速に発展してきた「離散数学」では，本来的に有限なものを扱うため，その概念の導入において理解が困難になる状況はほとんどなく，単純にそのモデルを示して曖昧さなくその概念を教えることが可能である。

（4）離散的な対象を扱うには連続を扱うのとは別の手法が必要となり，そのようなものを扱うのが本来の「離散数学」であると考えている。ただし，通常「離散数学」と言う場合には，離散的な数学対象の中で一番中心的な存在である整数に関する事は除くのが普通であり，計算機の基礎理論を学ぶために必要な「集合の理論やその背景にある論理学から始まり，グラフ理論までを教えるもの」とされている様である。

2．離散数学の高等学校への導入に関する反対論

離散数学の高等学校への導入に関する反対論の主なものは次の通りである。

（1）離散数学を学ぶことでメリットを受ける専門分野は，理系の学問の中でも数学や情報科学などに限られる。そのような小集団のために，文系に進む生徒は言うまでもなく，理系に進む

生徒全体に教えることは非効率である。

（2）高等学校で離散数学を導入するためには，小学校・中学校の算数・数学教育で今よりもっと論理的に教え，全生徒の抽象的・論理的思考能力を高めて置くことが前提であるが，集合と論理についてはほとんどの高校生はよく理解できていない。

（3）中途半端な内容を聞きかじらせても得るものは少なく，むしろ他の既に選ばれた内容を分かりやすく教えることの方が，はるかに重要である。

（4）大学の教育との関連で見ると，微分積分の一応の完成を到達点とするカリキュラム自体には，不満はないので，高等学校で今のカリキュラムの一部を削って離散数学を入れても，それに対しての理解は得られにくい。

3．離散数学の高等学校への導入の意義

離散数学の高等学校への導入の意義の主なものは次の通りである。

（1）実社会では離散数学が必要となる機会がますます多くなっている。情報科学の基礎としても重要なものとなっている。

（2）離散数学は抽象化の能力と論理思考を磨くよい題材であり，論証の訓練を行うことを目的として離散数学を導入することは，十分に意義がある。

（3）離散数学で扱われるような対象を数学的に扱う手法が重要である。

（4）あまり予備知識を仮定せずともアイデアだけである程度面白いところまで進め，その上，イメージをもちやすく，視覚化も容易である。離散数学の醍醐味は，こうした道具の少ない状況で他の知識に頼らず，すべて自分の力だけで問題解決を行なうところにある。

4．離散数学の高等学校への導入の具体的な方策

離散数学の高等学校への導入の具体的な方策の主なものは次の通りである。

（1）鳩の巣原理のような単純な概念に帰着して解決できる問題が多々あることを実感させる。

（2）グラフ理論と離散・組合せ幾何の話題を導入する。

（3）「数え上げ，デザイン」以外に，グラフ理論の話題もこの教材にふさわしい。

（4）計算機科学などでの応用が明確な話題を中心とするのがよい。数学的な内容が少なく，理論構成上の興味とか言語としての価値しかないものは中心に組み込まない方がよい。

（5）各単元で「離散数学」を用いた導入教材を開発したり，課題学習・総合学習などで「離散数学」を活用するさまざまな例示をあげて，現場に供給していくことが実際的である。

（6）「グラフ理論」，「離散幾何」のように，深い予備知識がなくても着想 1 つで問題解決に至る学問もある，という程度のことを1年間で2~3時間教えることが望ましい。

5．離散数学を高等学校に導入しようとする時の問題点や課題

離散数学を高等学校に導入しようとする時の問題点や課題の主なものは次の通りである。

（1）数学には長い時間をかけて発展してきた体系化の側面があるが，離散数学はこの側面を伝えるには不向きである。教育の早い段階において離散数学を導入する際には，将来数学を専攻しようとしている学生が伝統的な数学に対する興味を失ってしまわないようにする。

（2）証明のテクニックを単に知識として伝えることで終わってしまう危険がある。

（3）きちんとした証明をしようと思うと，意外にたくさんの道具が必要になる。

６．離散数学を高等学校に導入しようとする時の将来的な課題

離散数学を高等学校に導入しようとする時の将来的な課題の主なものは次の通りである。

（１）専門性の高いと思われる離散数学の導入は高校生にとって数学の内容の選択肢を増やすことになる。その事による影響を注意深く検討する必要がある。

（２）高校教員の離散数学に対する認識，関心や指導力の問題がある。専門家による講演などのキャンペーンの実施が必要である。

（３）発想力を成績によって評価しないことが必要である。

（４)離散数学研究者の把握の急務と他分野の数学者の離散数学に対する理解と賛同が必要である。

（５）大学側の教員の能力からいっても，離散数学に関する入試問題作成の困難性がある。

（６）離散数学を高等学校に導入するなら，時間が不足している教科「数学」ではなく，教科「情報」で対応することが必要である。

（７）高等学校の数学教育全般については，教材を幾分少なくして２つの流れを作る。１つは数学の基礎事項を教える。もう１つは問題の考え方を訓練する。

離散数学の高等学校への導入に関する数学者調査への
ご協力の依頼

関係各位殿

前略

私ども国立教育政策研究所の研究員を中心とする研究グループでは，現在，日本学術振興会の科学研究費補助金を得て，「高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究」の問題に取り組んでおります。現在の我が国の高等学校の数学教育においては，離散数学やフラクタルやカオスなどの新しい数学についての教育価値は認められつつも，学習指導要領の高等学校数学の内容としての位置づけが十分でなく，その教材開発は個々の教員の興味等に基づいて小規模に行われてきているだけです。一方，欧米諸外国においては，これらの内容は，高等学校の数学で，国家段階の教育課程だけではなく教科書や教室段階までも積極的に取り入れられていることが明らかになっております。

そこで，所内外の数学教育研究者，数学者，高等学校教員，教育行政関係者等約 20 名の研究メンバーによる研究組織によって，我が国の高等学校の数学教育において離散数学を中心とした内容の導入に関する研究を進めているところです。

しかしながら，限られたメンバーの研究には，当然限界があります。そこで，この研究に一層の広がりと深さをもたせるために，大学において，離散数学に関心をもっておられる方々，及び，高等学校の数学に関心をもっておられる数学者の方々に，自由で率直なご意見を承ることを計画致しました。

研究メンバーの方々のご推薦に基づいて，ご意見を伺う有識者として約 60 名の方々をリストアップさせていただきました。

つきましては，先生が，離散数学をどのようにとらえているのか，離散数学を高等学校に導入する意義はあるのかないのか，あるとするとどのような内容や構成が可能か，またどのような長所・短所があるのか，短所を克服するにはどうすればよいのかなどなど，あるいは，より一般的に，将来の高等学校の数学教育はどうあるべきなのか等，積極的なご意見等を頂ければ幸いです。

お寄せいただきましたご意見等は，私どもの研究資料としてそのまま収録し，活用させていただくとともに，関係機関に配付したいと考えております。

お忙しい中，勝手なお願いをして誠に恐縮に存じますが，高等学校の数学教育のよりよき発展のために，特別の協力を賜りますように重ねてお願い申し上げます。

なお，ご執筆に際しては，誠に恐縮に存じますが，次の諸点についてご留意くださいますようお願い申し上げます。

ご意見等は，同封の原稿用紙を使うか，又は，ワープロ，テキストエディッターで，お願いいたします。ワープロを使われる場合には，横書きにて，40字40行をめどとし，1頁目には，「表題」，「お名前」，「専門分野」，「所属」を付けていただければ幸いです。テキストエディッターでは，1行を40文字程度で書かれ，最初に，「表題」，「お名前」，「専門分野」，「所属」を付けていただければ幸いです。

なお，甚だ失礼ではございますが，書式や送り仮名など些細な訂正を要する個所がある場合には，皆様方にお断りすることなく，私どもで訂正し，収録させていただきますので，あらかじめご了承くださいますようお願いいたします。

ご意見等は，誠に勝手ではございますが，

本年平成17年4月末までに，

同封の返信用封筒をご利用の上，お送りくださるようお願い申し上げます。

なお，ワープロまたはテキストエディッターで作成される場合は，メールで，下記のアドレスにお送りいただいても結構です。

nagao@nier.go.jp

なにとぞ，よろしくお願いいたします。

平成17年3月15日

国立教育政策研究所　長尾篤志
広島大学大学院教育学研究科　景山三平
ほか

この件につきまして，ご質問等がありましたら，下記宛にお問い合わせくださいますようお願い申し上げます。

〒100－0013　東京都千代田区丸の内2－5－1
国立教育政策研究所教育課程研究センター　長尾篤志
電話　03－3519－8758
メール　nagao@nier.go.jp

Ⅳ. 高等学校への離散数学の導入に関する諸外国の動向

離散数学に関するアメリカの研究動向

―NCTMの「スタンダード」ならびに「1991年報」を中心に―

山口 武志
福岡教育大学

【要約】本稿の目的は，離散数学に関するアメリカの研究動向について概観することにある。特に，本稿では， NCTMの「スタンダード」と「1991年報」を参照しながら，離散数学を学校数学に導入するに至った史的経緯について概観した。それとともに，離散数学を学校数学に導入することの意義について，目的や内容という視座から検討した。アメリカでは，1960年代における離散数学の台頭とともに，離散数学を学校数学のカリキュラムに位置づけようとする試みが徐々になされるようになった。その後，1989年に刊行された「スタンダード(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)」においては，「内容」に関する１つの重要な「基準」として，第９学年から第12学年のカリキュラムに離散数学が位置づけられることとなった。さらに，2000年に刊行された「スタンダード2000(Principles and Standards for School Mathematics)」においても，離散数学を強調する姿勢は基本的に受け継がれている。

1．はじめに

本稿では，離散数学の教材化に関するアメリカの研究動向を史的に概観するとともに，離散数学を学校数学に導入することの意義について，目的や内容等の視座から考察してみたい。なお，本稿では，主として，次の３つの文献を参考にしながら，考察を進めることとする。

①National Council of Teachers of Mathematics(1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

②National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

③Kenny,M.J. & Hirsch, C.R. (1991), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12: 1991 Yearbook*, Reston VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

2．アメリカにおける離散数学カリキュラムの台頭：史的概観

アメリカにおいて，離散数学カリキュラムに関心が向けられるようになった背景については，Dossey(1991)が詳述している（pp.3-4)。ここではまず，Dosseyの論考に基づきながら，学校数学の教材として，離散数学がアメリカにおいて注目されるようになった経緯について概観しておきたい。

離散数学が独立した学問分野として1960年代に台頭してきたことを契機として，1970代始めまでに，まず，大学生を対象とする優れた離散数学に関する教科書が出版されようになったという。その後，離散数学が一層注目される契機になったものが，1981年にアメリカ数学協会によって示された「一般数理科学プログラムに対する勧告(Recommendations for a General Science Program)」（Alan Tuckerが編集）といわれる。この勧告では，大学における数学科学生用のカリキュラムに離散数学に関する学習プログラムを含めるべきであるとの強い指摘がなされている。この勧告を契機にして，離散数学の視座から，大学におけるカリキュラムの改革が本格化していったといわれている。例え

ば，この勧告では，大学学部の数学科学生向けに２種類のシラバス案が提案されており，双方に離散数学が組み込まれている。その内容には，グラフ理論(graph theory)，組合せ理論(combinations)，包除（inclusion/exclusion），回帰関係（recurrence relations）などが含まれていた。

「一般数理科学プログラムに対する勧告」の影響を受けて，1980年代には，大学のカリキュラムだけではなく，それ以前の学校段階から，離散数学の考え方を教えるべきであるという勧告がなされるようになっている。例えば，数理科学協議会（The Conference Board of the Mathematical Science）の報告書「数理科学カリキュラムK-12：何が今も基礎で何がそうでないか(The mathematical sciences curriculum K-12: What is still fundamental and what is not)」（1983）や，NCTM（全米数学教師協議会）の報告書「計算と数学：中，高校カリキュラムへの影響(Computing and mathematics: The impact on secondary school curricula)」（Fey,1984）は，当時なされた勧告の代表的なものであった。両方の勧告とも，学校の数学カリキュラムに離散数学を組み入れる必要があると指摘している。

その後も，アメリカでは，こうした報告書やいくつかの学校数学カリキュラム改革案（例えば，Hirsch,1985; Ralston,1985; Sandefur,1985 など）を基盤にしながら，NSF（全米科学財団）による「教師の職能強化計画」をはじめとして，最新の離散数学の知見やその応用を教師に指導する特別なプロジェクトも活発になっていった。こうしたプロジェクトを通じて，離散数学に関する教師自身の知識が向上したこと，また，市販の教科書にも離散数学の話題が徐々に登場するようになったこと，さらに，NCTM の『数学教師(Mathematics Teacher)』誌に離散数学に関する論文が掲載されるようになったことなどによって，離散数学への評価や関心が一層高まっていったという。

そして，1989 年に NCTM から刊行された「学校数学カリキュラムおよび評価基準（以下，「スタンダード」）」(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics）では，中学校ならびに高等学校段階における「スタンダード（基準）」の１つとして，離散数学を含めるべきことが指摘されることになった。このことが大きな推進力となって，学校数学のカリキュラムに離散数学を取り入れる方向で本格的な検討が始まり，今日に至っていることになる。

3. 離散数学にかかわる目的：NCTM「スタンダード」の場合

Dossey によって指摘されているように，アメリカにおける離散数学に対する関心の高まりにおいて，前述の「スタンダード」（NCTM,1989）の影響は大きいと考えられる。2000 年には，1989 年に刊行された「スタンダード」の改訂版である「Principles and Standards for School Mathematics（以下，スタンダード 2000）」(NCTM,2000）も刊行されており，今日でもかなりの影響力をもっていると思われる。

1989 年版「スタンダード」では，第９学年から第 12 学年において，下記のような 14 の「基準（スタンダード）」が示され，その１つとして「離散数学」が取りあげられている。

「問題解決としての数学」「コミュニケーションとしての数学」「推論(reasoning)としての数学」「数学的結びつき(connections)」「代数」「関数」「総合的な視座からの幾何」「代数的視座からの幾何」「三角比」「統計」「確率」「離散数学」「微積分の基礎」「数学的構造」

なお，「スタンダード 2000」においては，第９学年から第 12 学年の「基準」の中に「離散数学」は明示されてはいない。しかしながら，それは離散数学の後退を決して意味するわけではない。むしろ，重要な現代数学の考え方として，幼稚園就学前から第 12 学年にわたるすべての学年のカリ

キュラムの中に，離散数学の考えを浸透させるべきことが次のように指摘されている。

《1989年のCurriculum and Evaluation Standards for School Mathematicsでは，第9学年から第12学年にわたって，離散数学を導入していた。Principles and Standardsでは，離散数学の主要なトピックが導入されている。しかし，それらは個別に独立して扱われるのではなく，「基準（スタンダード）」のいたるところに配置されており，幼稚園就学前から第12学年までの各学年にまで広がっている。ビジネスや産業において幅広く利用されている現代数学の活気溢れる一分野として，離散数学は学校数学のカリキュラムの必要不可欠な部分となるであろう。そして，これらのトピックは，数学の他の領域のいたるところで自然な形で見いだされることになる。》(NCTM,2000,p.31)

実際，「スタンダード2000」では，例えば「幾何」と題する「基準」を説明する文脈において，「いくつかの都市を結ぶ道路に関する最小距離」に関する問題が取り上げられている。このように，「離散数学」の話題は，「内容」に関する基準の中に盛り込まれる形で，引き続き強調されているとみることができる。

さらに，「スタンダード2000」においては，学校数学において重視すべき離散数学のトピックについて，次のような指摘もなされている。

《離散数学に関する3つの重要な領域がこれらの「基準（スタンダード）」の中に統合されている。それら3つの領域とは，「組合せ論(combinatorics)」「反復と再帰(iteration and recursion)」「頂点-辺グラフ(vertex-edge graphs)」である。これらの考えは，幼稚園就学前から第12学年までにわたって，系統的に発展させ得ることができる。加えて，行列(matrices)は，第9学年から第12学年において取り扱われている。》(NCTM,2000,p.31)

さて，1989年版「スタンダード」(NCTM,1989)では，「離散数学」に関する学習を《可算個の要素をもつような集合や系の数学的性質に関する学習》(p.176)ととらえている。その上で，第9学年から第12学年における「離散数学」の目的や内容については，次のように説明されている。

《第9学年から第12学年では，すべての生徒が次のようなことができるように，数学のカリキュラムは，離散数学のトピックを含むべきである。

○有限グラフ（頂点と辺からなる構造），行列，数列，再帰的関係といった離散構造を利用しながら，問題場面を表現すること。

○行列を利用しながら，有限グラフを表現し，分析すること。

○アルゴリズムを作成し，分析すること。

○列挙問題や有限な確率の問題を解決すること。

さらに，大学進学を希望する生徒は，次のようなことができるようになるべきである。

○線形計画や差分方程式を利用しながら，問題を表現し，解決すること。

○コンピュータによる妥当化やアルゴリズムの応用にかかわって生じる問題場面を探究すること。》（p.176；括弧内筆者註）

また，これらの補足として，以下のように，「焦点(Focns)」と題する解説も加えている。

《焦点：21世紀に向けて，情報とその伝達は少なくとも物の生産と同様に重要になってきている。物理的世界あるいは物質的(material)世界は，連続数学，すなわち微積分学や，代数学，幾何学，三角法から導かれた前提となる考えによってモデル化されることが多い。これに対し，情報処理に関する非物質的世界は，分離した（非連続の）数学の使用を必要としている。コンピュータ技術も，数学の創造と活用の面で，次第に大きな影響を及ぼすようになっている。コンピュータは本質的に有限の分離した機器である。したがって，コンピュータを利用しながら問題を

解決する上で，離散数学の手法はきわめて本質的である。これらの事実に照らしながら，生徒全員が離散数学の概念と手法を経験することは，とても重要である。》(p.176)

この引用においては，コンピュータに関する言及がみられるけれども，《推薦されるトピックは，コンピュータ科学への応用が可能であるという理由で包括的に選択されたわけではなく，すべての生徒たちにとって，ますます重要になると思われる，有用な数学的アイデアの表現手段であるという理由で選ばれた》(p.176;下線は筆者)ことを強調している。この点は，「スタンダード」における離散数学の位置づけ方の特徴として注目される。

前述のDosseyも，1991年報において，1989年版「スタンダード」との関連に触れながら，離散数学を学校数学に導入することの意義について，次のように述べている。

《離散数学の問題においては，方程式を書いたり一般的な公式を適用するやり方では直接アプローチすることのできないユニークな問題状況に生徒を取り組ませることができる。生徒は，あるモデルあるいは別な形式の表現を作り出しながら，その状況を視覚化することが求められる。他の場面では，特別な場合の分析や事例数の少ない単純な問題を考えることによって，解法を生み出すことが求められる。離散数学の理論では，数多くの定義や定理を暗記する必要はないが，鋭い探究心は必要になる。離散数学の内容を深め，現在の学校カリキュラムに結びつけ，問題に対する連続数学と離散数学のアプローチとの関連性を強めるならば，生徒はNCTMの「スタンダード（基準)」が目標とした世界にずっと近づくだろう。このことは21世紀の職業を担う若者たちにとって，必要なものである。》(Dossey,1991,p.8;下線は筆者)

こうした離散数学の意義について，1991年報の編者であるKenneyは，「序文(preface)」の中で，年報に所収されている論文の背景にある統一見解として，次の３点をあげている(Kenny,1991,p. iv)。これら３点は，離散数学の意義を指摘したものである，と考えられる。

①離散数学は「数学的結びつき(mathematical connection)」をつくることを促す。

②離散数学は「現実世界への応用をともなった問題解決(problem solving with real-world applications)」のための場面を提供する。

③離散数学は「批判的思考(critical thinking)」や「数学的推論(mathematical reasoning)」を促進する。

以上,「スタンダード」やDossey，Kennyの指摘にもあるように，アメリカでは，次の４つの視座から，離散数学を学校数学に導入することの意義が検討されてきたと考えられる。

1）既有の知識に比較的左右されず，その問題に応じて解法を考えるなど，いわゆる「数学的な考え方」(例えば，特別な場合の分析や単純な問題を考えるといった帰納的推論，批判的思考，数学的推論など）を育成することができる。

2）離散数学の話題には，実生活の話題を取り扱ったものが多い。

3）問題の本質を抽出し，それを表現するなど，「数学的な表現」のよさを感得させることができる。

4）モデル化や数学化を典型とするように，「数学的活動」を体験させることができる。

4. 離散数学の教材化

(1)教材化にあたっての視点

さて，「スタンダード」の刊行を受けて，NCTMは，1989年に，離散数学に詳しい教師の協力を得ながら，特別プロジェクトを組織し，中学校および高等学校に離散数学を導入するための指針づくりに着手している（NCTM,1990)。この指針では，離散数学の内容の中でも，①アルゴリズム的

思考(algorithmic thinking)，②批判的推論(critical reasoning)，③数えること(counting)，④離散確率(discrete probability)，⑤行列(matrices)，⑥グラフ理論(graph theory)，⑦反復(iteration)と再帰(recursion)，の７つの内容が特に重視されている。

また，カリキュラムにおける離散数学の位置づけについては，(a) 代数を正式に学習する前のレベル，(b) 代数的な問題と結びつけるレベル，(c) 幾何学的な問題と結びつけるレベル，という３つのレベルと関連させながら，上述の７つの内容の導入を提案している。３つのレベルの各々に対して７つの内容が位置づけられることから，合計 21 種類の教材化が図られることになる。その一例としては，表１のような教材が紹介されている(Dossey,1991,pp.6-7)。日本の高等学校における教材としての適否については検討を要するとしても，教材化のための視点の一例として，こうした枠組みは参考になると思われる。

表１　NCTM(1990)の教材例 (Dossey,1991,pp.6-7)

問　題	代数の学習前	代数と結びつけて	幾何と結びつけて
アルゴリズム思考	長距離電話をかけるさい必要な指示の詳細なリストを作成する。	電卓で多項式を評価するための枝分け法(nesting method)を使用する。	分割法または二分法など，ルートを発見するアルゴリズムに関する幾何学を分析する。
批判的思考	分類活動に「および」，「または」，「でない」，「もしそうなら」の意味を当てはめる。	2次不等式や絶対値に関する場面に対する解を考える際に論理分析を使用する。	データ表におけるパターンを空間的な関係に結びつけて認識する：有限グラフについてオイラーの公式，全域木の数など…。
個数	個数を数える状況でモデルを作るため行列を使用する。たとえば服装を色別するための行列。	個数問題を解くために樹形図を応用する。たとえばベッドに左から右へ赤，青，黄の枕を並べる方法はいくつあるか。	同じ物の集合を数えるのに２種の異なる方法を使用し，この個数を用いて１つの関係を確定する。たとえば 12 面体の１点の面の数を使用して辺の数を知る。
確率	ある結果に対して，ある標本空間を使用するゲームが公平なゲームであるかどうかを決定する。	二項展開を使用しながら，二項的な事象の確率を計算する。	モンテカルロ法を使用して，ある図形の面積をシミュレートする。すなわちシミュレーションを使用して下図の面積を知る（図は略）。
行列	在庫行列を使用しながら，ある店の在庫発注の決定を行う。	逆行列を求める際のガウスの消去法に似た方法で，列と行の操作を適用する。	あるグラフにおいてそのグラフの隣接行列を与えられたとき２点間の道の数を決定する場合における行列の意義を知る。
グラフ理論	PERT チャートで表現された図を見ながら，ある公演の最新開始日を発見する。	木横断法(tree transversal method)を使用しながら，代数表現における演算の順序を分析する。	グラフ着色法を利用しながら，委員間で生じている委員会日程の重複を最小限にする。
反復および再帰	数列の最初の７項を書く。たとえば $2,4,7,\cdots,n+2^{n-1}$	第１項を a，公比を d とする幾何学的数列の最初の n 項の合計について，帰納法を利用して発見する。	「円は n 割線でいくつに区分できるか」といった幾何学的パズルを解く。

このプロジェクトの報告書では，表１の枠組みに基づく単元構成の具体例として，２年間にわたって代数を学習した生徒のための単元構成の一例を示している。例えば，表２は，１学期分の単元構成例として，提案されたものである。

表２　代数の学習後の学習プログラム例（１学期分）(Dossey,1991,pp.7-8)

Ⅰ．社会的決定をする（４～５週間）
　Ａ．公平な分割の問題
　Ｂ．選挙手続き（ランクづけの方法，ランクづけに関する Arrow の公正基準および不可能定理，投票の逆理，重みづけ投票と指数）
　Ｃ．割り当て（割り当ての方法，割り当ての逆理，Balinski と Young の不可能定理）
Ⅱ．グラフ理論（３～４週間）
　Ａ．プログラム評価と見直しの技術（PERT）法
　Ｂ．最小限の全域木（Prim のアルゴリズムと Kruskal のアルゴリズム）
　Ｃ．グラフの構造（基本概念，表現［ダイアグラム，隣接行列，隣接リスト］，幅と深さ－第１次調査）
　Ｄ．回路とパス（Euler 回路アルゴリズム，Hamilton の回路と Hamilton 道，巡回セールスマン問題，最短の道のための Dijkstra のアルゴリズム）
　Ｅ．グラフの着色
　Ｆ．木の構造
Ⅲ．個数計算法（４～５週間）
　Ａ．論理，集合，ベン図（分離と和集合，結合と共通集合，否定と補集合，包除の原則）
　Ｂ．和と積の原則
　Ｃ．順列と組み合わせ
　Ｄ．Pascal の三角形
　Ｅ．離散確率および応用（排反的事象と和の規則，独立的事象と積の規則，条件つき確率，期待値）
Ⅳ．行列モデル（１～２週間）
　Ａ．Markov 連鎖
　Ｂ．人口分布のための Leslie モデル
　Ｃ．経済に関する Leontief 投入-産出モデル
Ⅴ．反復の数学（３～４週間）
　Ａ．１階(first-order)再帰関係の反復
　Ｂ．反復の応用（算術的数列と幾何学的数列，指数的増加，金融の数学，人口力学）
　Ｃ．１階(first-order)線形再帰関係の閉型（closed form）を発見する。
　Ｄ．２階(second-order)差分方程式（フィボナッチ数列）の反復

(2)教材の事例:「行列表現のよさ」に関する教材

離散数学における教材の一例として，「有限グラフ」（頂点と辺からなる構造）に関する「行列表現のよさ」を取り扱った教材が取りあげられている（例えば，NCTM,1989,pp.176-177; Thompson, Senk & Viktora,1991,pp.108-110）。例えば，以下の事例は，表１の「行列」のうち，「(c) 幾何学的な問題と結びつけるレベル」の教材例にあたるものである。

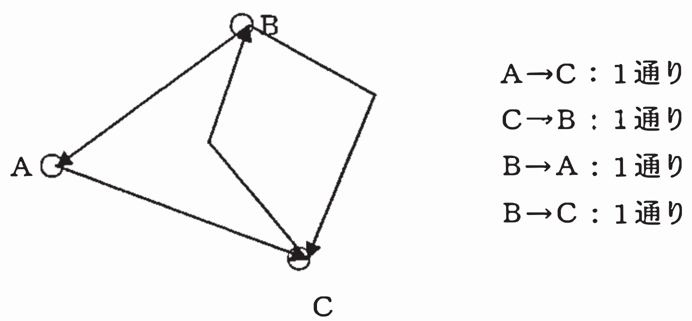


図１　Ａ，Ｂ，Ｃの３地点をつなぐ経路

図１は，Ａ，Ｂ，Ｃの３地点をつなぐ「経路」を示したものである。まず，1つの経路だけを通って，ある地点から別の地点へ移動することを考える。例えば，図１において，１つの経路だけを通って，地点Ａから地点Ｃへ移動する場合の「道筋」の数はただ１つである。

いま，ある地点からある地点まで移動する際の道筋の数を行列Ｓのように表現するものとする。

$$S=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

行列Ｓにおいて，ｉ行ｊ列の要素r_{ij}は，次の道筋の数をそれぞれ表している。

r_{11}：Ａ→Ａ　r_{12}：Ａ→Ｂ　r_{13}：Ａ→Ｃ
r_{21}：Ｂ→Ａ　r_{22}：Ｂ→Ｂ　r_{23}：Ｂ→Ｃ
r_{31}：Ｃ→Ａ　r_{32}：Ｃ→Ｂ　r_{33}：Ｃ→Ｃ

このとき，２つの経路を通って，ある地点からある地点に移動する道筋の数は，行列Ｓの積Ｓ×Ｓ，つまりS^2によって求めることができる。

$$S^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

この手続きはどのようなグラフにも一般化することが可能である。つまり，ｎ個の「経路」を通って，ある地点からある地点に移動する「道筋」の数は，S^nによって表される。

上述の事例は「行列」に関する教材の一例であるが，離散数学における「行列」の一般的価値について，Thompson ら(Thompson, Senk & Viktora,1991)は次のようにまとめている。

《①行列によって，離散数学における基本的な概念を導入することができる。
②行列は，数多くの現実的な適用をモデル化するものである。
③行列は，新たな文脈において，算術的あるいは代数的な計算のための機会を提供する。
④行列の性質や演算は，重要な理論的結果を導く。》(p.116)

上述の事例のように，地点間の道筋の数を行列によって表現し，いくつかの経路を経るような道筋の数を行列の積によって簡便に求めるという考え方は，生徒にとっても興味深いものであろう。それとともに，そのような教材化は，行列に関する現行の学習に新たな視座を与えると思われる。この事例のように，現行の高等学校の教材を離散数学の視座から見直し，新たな教材としての価値を提案することも重要ではないかと考える。

5. 結語にかえて

表１に示した21種類の枠組みは，離散数学の教材化を図るための１つの指針になるように思われる。４節（２）で取りあげた「行列表現のよさ」に関する教材は，21種類の中の一例を示したものである。離散数学の教材化にとって，その他の種類に関する教材とその指導計画を具体的に検討することが有益ではないかと考えている。

［引用・参考文献］

Conference Board of the Mathematical Science(1983), *The Mathematical Sciences Curriculum K-12: What Is Still Fundamental and What Is Not*, Report to the NSB Commission on Precollege Education in Mathematics Science and Teclmology, Washington,D.C.:CBMS.

Fey,J.T.(ed.)(1984), *Computing and Mathematics: The Impact on Secondary School Curricula*, Reston VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

Hirsch,C.R.(ed.)(1985), *The Secondary School Mathematics Curriculum; 1985 Yearbook*, Reston VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

Kenny,M.J. & Hirsch, C.R. (1991), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12: 1991 Yearbook*, Reston VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

この年報に所収されている論文のうち，本稿では，下記の論文を特に参照した。

①Kenny,M.J., *Preface*, pp.vii-viii.

②Dossey,J.A., *Discrete Mathematics: The Math for Our Time*, pp.1-9.

③Gardiner, A.D., *A Cautionary Note*, pp.10-17.

④Thompson,D.R., Senk,S.L. & Viktora,S.S., *Matrices at the Secondary School Level*, pp.104-116.

なお，これらの年報の考察にあたっては，長崎栄三先生から提供していただいた上記年報の訳稿を参考にさせていただきました。この場をお借りして，厚く御礼申し上げます。

National Council of Teachers of Mathematics (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (1990), *Discrete Mathematics and the Secondary Mathematics Curriculum*, Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

Ralston,A.(1985), The Really New College Mathematics and Its Impact on the High School Curriculum, Hirsch,C.R.(ed.), *The Secondary School Mathematics Curriculum; 1985 Yearbook*, Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics,pp.29-42.

Sandefur,J.T.,(1985), Discrete Mathematics: A Unified Approach, Hirsch,C.R.(ed.), *The Secondary School Mathematics Curriculum; 1985 Yearbook*, Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics, pp.90-106.

Tucker,A.(ed.)(1981), *Recommendations for a General Science Program*, Report of the Mathematical Association of American Committee on the Undergraduate Program in Mathematics, Washington,D.C.: MAA.

アメリカの高等学校への離散数学の導入例－UCSMP－

二宮　裕之
愛媛大学教育学部

【要約】アメリカの高等学校への離散数学導入の事例として，本節ではシカゴ大学学校数学プロジェクト（UCSMP）により刊行された高校3年生向け教科書『Precalculus and Discrete Mathematics（解析基礎と離散数学）』を紹介する。最初にプロジェクトの概要，並びにこの教科書の目次全体を概観した上で，特に離散数学と銘打った所以でもある単元「第11章　グラフと回路（Graphs and Circuits）」について詳細に見ていきたい。単元の内容をそのまま把握できるよう，必要と思われる例題などを交え，元のテキストにある内容を漏れなく訳出した。

1．シカゴ大学学校数学プロジェクト

シカゴ大学学校数学プロジェクト（The University of Chicago School Mathematics Project，UCSMP）は1983年に設立された。高度情報化，ハイテクなどの社会状況を受け，単なる計算技能の向上のみを求めるのではなくより洗練された数学理解を志向している。このような理念のもと，UCSMPでは幼稚園から第12学年までの教科書を開発した。これらの教科書は，子どもたちの現実世界を教室に取り入れようとするものである。特に，問題把握(読み)，問題解決，日常への適用，電卓・コンピュータなどの機器の活用，を強調している。不必要な繰り返しや復習は極力排除することで，かつては一部の優秀な生徒のみが学ぶことができたような高度な内容を，勤勉な平均的生徒(the diligent average student)でも高校卒業時までに習得することができるとしている。

シカゴ大学学校数学プロジェクトの成果の一端として，以下にあげる中学・高校生向けの教科書が刊行されている。

数学入門　(Transition Mathematics, Year 1：中学1年)
代数　(Algebra, Year 2：中学2年)
幾何　(Geometry, Year 3：中学3年)
上級代数　(Advanced Algebra, Year 4：高校1年)
関数・統計・三角法　(Functions, Statistics, and Trigonometry, Year 5：高校2年)
解析基礎と離散数学　(Precalculus and Discrete Mathematics, Year 6：高校3年)

2．シカゴ大学学校数学プロジェクトの離散数学

離散数学との関連では，第5年次（高校2年）に「統計」がきちんと位置付いている点も注目に価するが，この中では特に第6年次（高校3年）の教科書にある「離散数学(Discrete Mathematics)」というタイトルに注目したい。

第6年次の教科書『解析基礎と離散数学』の目次は次のようになっている。

第７章　帰納的推論と数学的帰納法（RECURSION AND MTHEMATICAL INDUCTION）
7-1 漸化式と陽関数式（Recursive and Explicit Formulas）
7-2 総和記号（Summation Notation）
7-3 数学的帰納法の原理（The Principle of Mathematical Induction）
7-4 数学的帰納法の要素（Factors and Mathematiceal Induction）
7-5 不等式と数学的帰納法（Inequalities and Mathematical Induction）
7-6 幾何級数とゼノンのパラドックス（Geometric Series and the Resolution of Zeno's Paradox）
7-7 強形の数学的帰納法（Strong Mathematical Induction）
7-8 整列のアルゴリズム（Algorithms for Sorting Lists）
7-9 アルゴリズムの有効性（Efficiency of Algorithms）

第８章　極座標と複素数（POLAR COORDINATES AND COMPLEX NUMBERS）
8-1 複素数の歴史と基本性質（History and Basic Properties of Complex Number）
8-2 極座標（Polar Coordinates）
8-3 複素数平面の幾何（The Geometry of Complex Numbers）
8-4 極方程式とグラフ（Polar Equations and their Graphs）
8-5 ローズカーブと螺旋（Rose Curves and Spirals）
8-6 複素数のべき乗（Powers of Complex Numbers）
8-7 複素数の根（Roots of Complex Numbers）
8-8 多項式におけるゼロ（The Numbers of Zeros of a Polynomial）
8-9 実数係数の多項式における虚数のゼロ（Nonreal Zeros of Polynomials with Real Coefficients）
8-10 離散的な力動的システム（Discrete Dynamical Systems）

第９章　微分と導関数（THE DERIVATIVE IN CALCULUS）
9-1 差分係数と変化率（Difference Quotients and Rates of Change）
9-2 微分係数（The Derivative at a Point）
9-3 導関数（The Derivative Functions）
9-4 加速と減速（Acceleration and Deceleration）
9-5 グラフを分析するための導関数の使用（Using Derivatives to Analyze Graphs）
9-6 指数関数の微分（Derivatives of the Exponential Function）

第10章　組み合わせ論（COMBINATORICS）
10-1 どのようにして正確に数えるか（What Exactly Are You Counting?）
10-2 樹形図と積の法則（Possibility Trees and the Multiplication Counting Principle）
10-3 順列（Permutations）
10-4 組み合わせ（Combinations）
10-5 二項定理（The Binomial Theorem）
10-6 数え上げと二項定理（Counting and the Binomial Theorem）
10-7 重複組み合わせ（Combinations with Repetition）
10-8 多項係数（Multinomial Coefficients）

第11章　グラフと回路（GRAPHS AND CIRCUITS）
11-1 グラフを用いたモデリング（Modeling with Graphs）
11-2 グラフの定義（The Definition of a Graph）
11-3 握手の問題（Handshake Problems）
11-4 ケーニッヒベルグの橋の問題（The Konigsberg Bridge Problem）
11-5 行列の累乗とグラフの道筋（Matrix Powers and Walks）
11-6 マルコフの連鎖（Markov Chains）
11-7 オイラーの公式（Euler's Formula）

第12章　ベクトル（VECTORS）
12-1 平面ベクトル（Vectors in a Plane）
12-2 ベクトルの加法と減法（Adding and Subtracting Vectors）
12-3 平行ベクトルと直線の方程式（Parallel Vectors and Equations of Lines）
12-4 内積とベクトルのなす角度（The Dot Product and the Angle Between Two Vectors）
12-5 3次元座標（Three-Dimensioual Coordinates）
12-6 空間ベクトル（Vectors in 3-Space）
12-7 空間ベクトルの直線と平面（Lines and Planes in 3-Space）
12-8 3変数1次方程式の幾何（The Geometry of Systems of Linear Equations in Three Variables）

第13章　積分（THE INTEGRAL IN CALCULUS）
13-1　離散から連続へ（From the Discrete to the continuous）
13-2　リーマン和（Riemann sums）
13-3　定積分（The Definite Integral）
13-4　定積分の性質（Properties of the Definite Integral）
13-5　放物線に囲まれた面積（The Area Under a Parabola）
13-6　回転体の体積（Volumes of Surfaces of Revolution）
13-7　微積分の基本定理（The Fundamental Theorem of Calculus）

各単元の中身を詳細に見てみると，その大半は「解析初歩(Precalculus)」に関わるものである。アメリカにおける「解析初歩」は言わば高校数学の最高峰であり，日本の数学教育では数学Ⅲの微積分にも相当するであろう。その中で，離散数学そのものとも言える「グラフと回路（Graphs and Circuits)」が第11章に位置づいている。

この章では，ケーニッヒベルグの橋の問題を導入とした上で，グラフの定義，様々な概念の導入，行列との関連，マルコフ連鎖，そして最後にはグラフの考えを用いてオイラーの公式（V－E＋F＝2）の証明を行っている。前半の概念規定辺りは従来の「数学学習」とあまり大差なく淡々と話が進んでいる印象であるが，後半のマルコフ連鎖やオイラーの公式の証明辺りでは，前半に学んだ多くの概念が有機的・機能的につながりを持つようになり，高校生ならずとも読んでいて大変おもしろいものであろうと推察される。ただし，アメリカの数学教科書に多く見られるように，話の筋道に穴があったり，最後のクライマックスに至るまでの前置きが長すぎるなど，改善すべき点も若干見受けられる。

試みに，この単元を教員養成学部4年の学生数名とフィリピンからの留学生を対象としてやってもらった。大学生は全員，小学校の教員を希望する数学教育専修の学生である。元々の英語のテキストのままセミナーを行ったため，英文で若干の困難があったようであるが，皆大変興味をもって取り組んでいた。以下に，一部学生からのコメントを転載する。

> 内容が，身近なわかりやすいもので例題として示されていて，とても理解しやすかったです。それもあってか，私が高校のときに学んだ内容に比べて，（簡単なものしかやっていないからかもしれませんが）簡単だったように感じます。また，例として用いられていた内容は，日本のものと比べて身近すぎない，銀河とか青いバラとか，興味がわくような内容で解いていておもしろかったです。
>
> 他の高校数学の内容に比べて，グラフ理論はあまり難しくなかったので，非常に取り組みやかった。現実にある橋の問題を考えたり，一筆書きという遊びに似たことを行ったりすることは，高校生の興味・関心を引くように思う。また，高校数学の内容は理解することに必死で数学する楽しさを感じにくいように思う。だが，グラフ理論は理解するのにそれほど難しくはないため，数学の世界を楽しむきっかけになるのではないだろうか。

文献

The University of Chicago School Mathematics Project (1998), *Precalculus and Discrete Mathematics*, Scott Foresman Addison Wesley
プロジェクトのホームページ　http://social-sciences.uchicago.edu/ucsmp/

第 11 章　グラフと回路

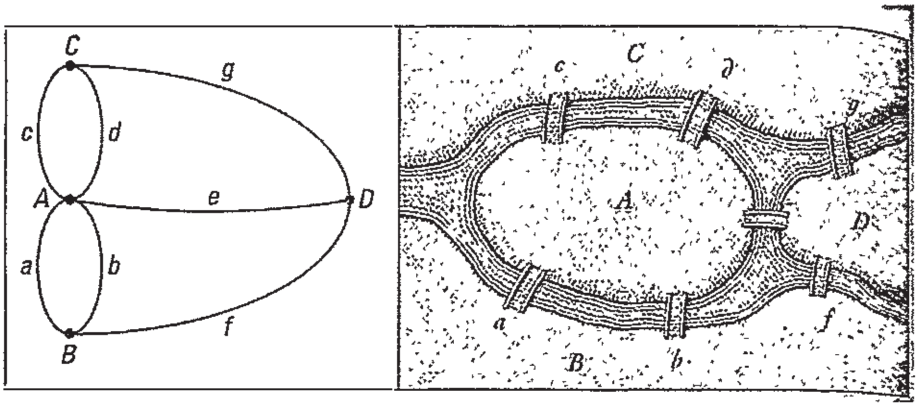
ーケーニッヒベルグの橋の問題についての説明があってからー

ケーニッヒベルグの橋の問題を解くために，オイラーはグラフと呼ばれるシンプルで有用な幾何的モデルを構築した。彼の論文は，グラフ理論の始まりとして知られている。（ちなみに，ここで言う「グラフ」とは，関数のグラフや表とグラフのグラフとは違います）オイラーの解答から 2 世紀半が過ぎ，グラフは様々な問題の解決に使われてきた。この章では，このような問題について学習する。

11−1　グラフを用いたモデリング

グラフの辺を動く

（ケーニッヒベルグの橋の問題について）



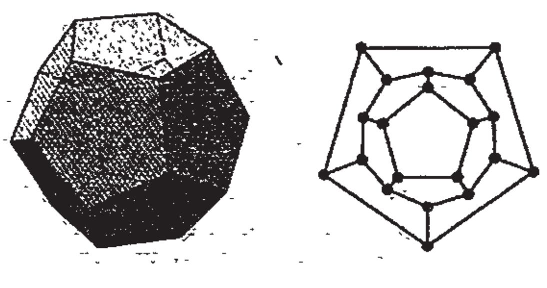
左図のような幾何的モデルと「グラフ」と呼ぶ。4 つの点はグラフの「頂点(vertices)」，7 つの円弧はグラフの「辺(edges)」と呼ばれている。このようなグラフを用いると，ケーニッヒベルグの橋の問題は，次のように言い直すことができる。

> 鉛筆を紙の上から離すことなく，このグラフ上の全ての辺を 1 回だけ通り，同じ場所からスタートして同じ場所に戻ることができるか？

この問題に対するオイラーの解答は，11-4 節で詳しく述べることにする。

グラフの頂点を動く

正十二面体は 12 個の正五角形を面に持ち，30 の辺と 20 の頂点がある。ハミルトンは，それぞれの頂点に都市の名前をつけ，全ての都市を 1 回だけ訪問する道筋について解くパズルを考えた。小さな針をそれぞれの頂点から出せば，その針に糸を巡らすことでそれぞれの都市を訪問したことが分かる。



ハミルトンのパズルは，次のようなグラフの問題に置き換えることができる。

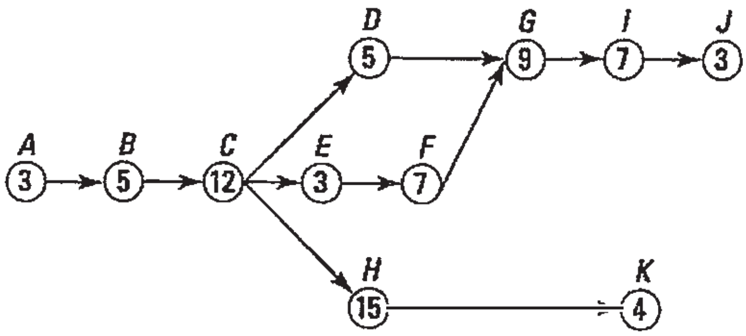
鉛筆を紙の上から離すことなく，このグラフ上の全ての頂点を1回だけ通り，同じ場所からスタートして同じ場所に戻ることができるか？

図形以外の例

家を建てる際の段取りが次のようになっている。

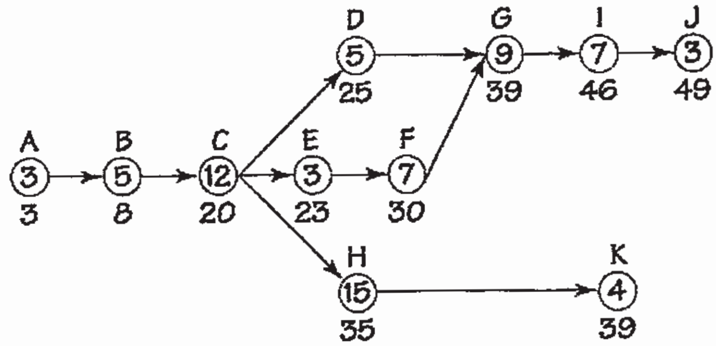
手　順	日数	事前に済ませること
A　家を設計する	3	特になし
B　基礎打ち	5	A
C　柱を立てる	12	B
D　水道の配管	5	C
E　電気配線	3	C
F　冷暖房の設置	7	E
G　断熱材・壁の処理	9	D，F
H　外装	15	C
I　内装	7	G
J　じゅうたん	3	I
K　庭つくり	4	H

それぞれの手順を順番に進めていくと，全部で73日かかってしまう。しかし，グラフを使ってより効率的な作業手順を考えることができる。それぞれの手順を頂点で示し，それぞれにおいて必要な日数を円の中に書く。矢印は辺に相当する。頂点Aから頂点Bへの矢印は，手順Bを始める前に手順Aが終わっていなければならないことを意味する。



例2）

上のグラフを用いて，この家を完成させるための最小日数を求めなさい。



手順 J と K が終了した時点で，作業は完成する。手順 J が終了するまでにかかる日数は 49 日，手順 K が終了するのに 39 日かかるので，作業は最低 49 日で終了する。

確率の樹形図

例 3）

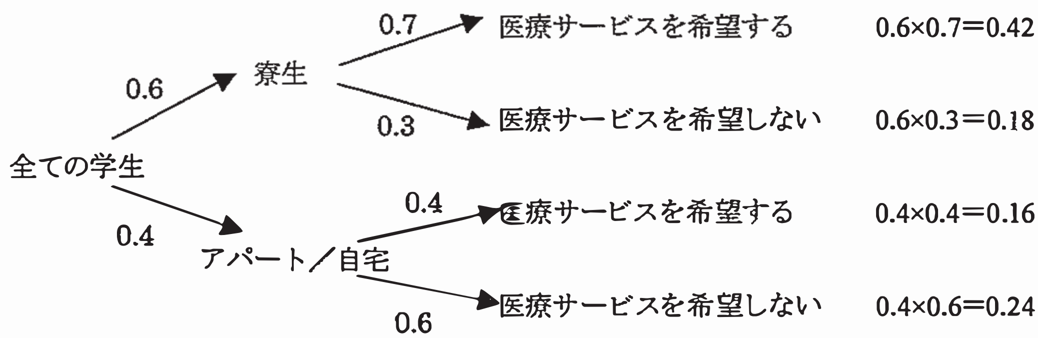
　ある大学の学生のうち 60%は大学内の寮に住んでいる。寮生の 70%は，授業料が多少高くなっても医療サービスを受けることを希望している。アパートや自宅に住んでいる学生の場合，医療サービスを希望するのは全体の 40%である。以下の問いに答えなさい。

a. 医療サービスを希望する学生は，全体ではどのくらいか。

b. 医療サービスを希望する学生のうち，寮生の割合はどのくらいか。

解答

a. それぞれの人数の割合に従ってグラフを書くと，次のようになる。



全ての確率の合計が 1 になる点に留意しなさい。医療サービスを希望する学生の割合は，

0.42＋0.16＝0.58　で，全体の 58%である。

b. 58%の学生が医療サービスを希望しているのに対して，寮生で医療サービスを希望している学生は全体の 42%である。従って，医療サービスを希望している学生の中で寮生の占める割合は 42／58 ≒ 0.72 で，およそ 72%である。

11−2　グラフの定義

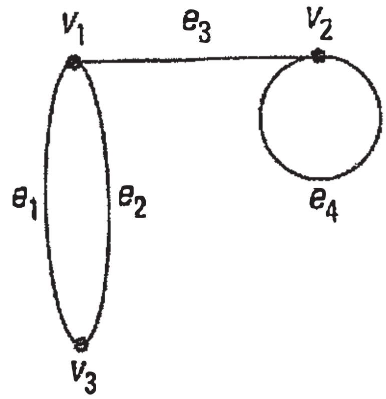
グラフとは何か？

頂点 v_1，v_2，v_3

辺　e_1，e_2，e_3，e_4

各辺の終点は次の表の通り

辺	終点
e_1	$\{v_1, v_3\}$
e_2	$\{v_1, v_3\}$
e_3	$\{v_1, v_2\}$
e_4	$\{v_2\}$



定義

グラフ G は，次の要素から成り立つ。

1．有限個の頂点

2．有限個の辺

3．各辺とその終点（1 点ないし 2 点）を対応づける「辺ー終点関数」

グラフに関する用語

グラフの辺の両端は頂点である。辺はその終点においてつながっているが，途中の経路の形状は問題としない。辺によってつながっている２つの頂点を「隣接する頂点(adjacent vertices)」と呼び，共通する終点をもつ２つの辺を「隣接する辺(adjacent edges)」と呼ぶ。例えば，上述の e_3 と e_2 は隣接する辺である。

頂点 v_1 と v_2 は複数の辺によってつながっている。このような状態を「平行(parallel)」と呼ぶ。また，e_4 のように v_2 から v_2 自身へとつながっている状態を「ループ(loop)」と呼ぶ。

例 1）

次のように定義されるグラフ G を描きなさい。

頂点の集合 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

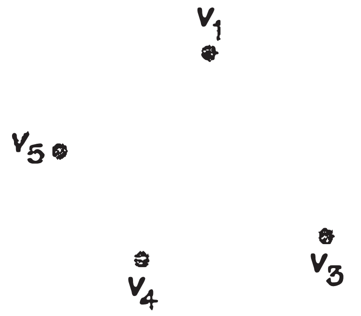
辺の集合 $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

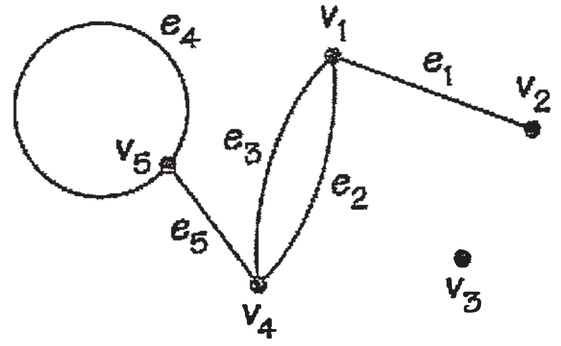
各辺の終点は次の表の通り

辺	終点
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_1, v_4\}$
e_3	$\{v_1, v_4\}$
e_4	$\{v_5\}$
e_5	$\{v_4, v_5\}$

解答

最初に５つの頂点を描いてから，「辺ー終点関数」に従って辺を描き込んでいく。

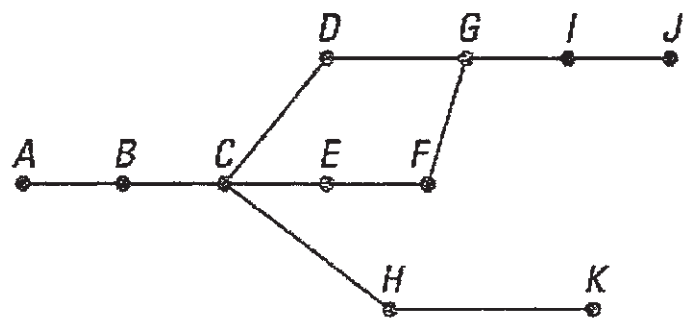




例1にあるv_3のように，どの辺の終点にもなっていない頂点を「孤立点(isolated)」と呼ぶ。全ての辺には終点が伴うが，頂点は必ずしも辺の終点であるとは限らない。

シンプルなグラフ

11-1に示した「家を建てる段取りの問題」は以下のように図示できる。



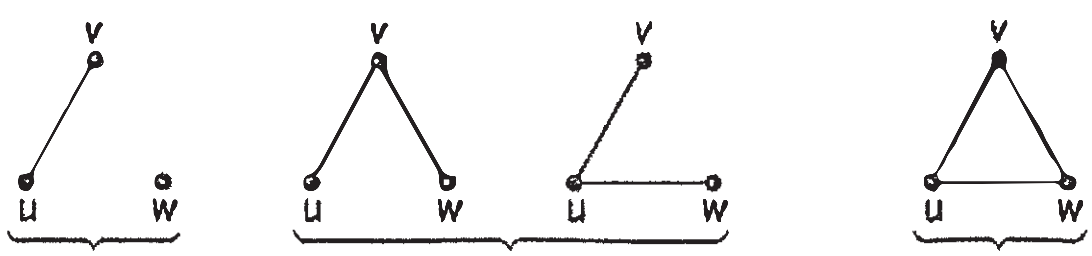
このグラフには，平行な辺やループは一つもない。このようなグラフを「シンプル(simple)」なグラフと呼ぶ。

定義

グラフにループが無く，かつ平行な辺が一つも無いとき，そのグラフは「シンプル(simple)」である。

例2）

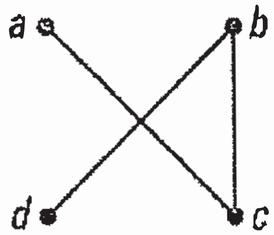
頂点 {u，v，w} において，一つの辺が {u，v} であるグラフを描きなさい。

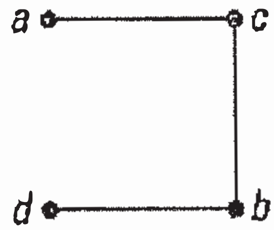


{u，v} が唯一の辺　　　他にもう一つ辺がある　　　他に２つ辺がある

頂点 a,b,c,d において {a,c} {b,d} {b,c} の辺をもつグラフの例

左図のように交わっている状態を「交差(crossing)」と呼ぶ。交差を無くすと右図のようになる。

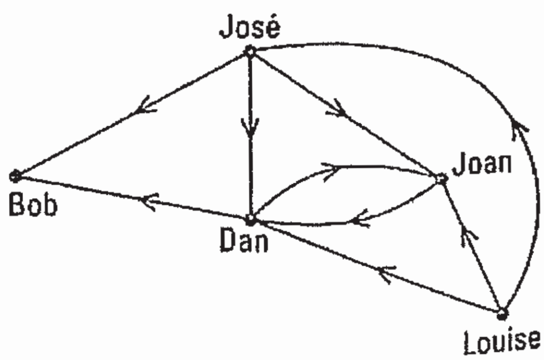




有向グラフ

11-1 で述べたグラフにおいて，その辺に方向をつけると便利なときがある。そのようなグラフを「有向グラフ(digraphs)」と呼ぶ。一般的なグラフとの違いは，辺が矢印になっているところである。有向グラフの定義は，辺ー終点関数が方向を持つ頂点の組になっている以外は，普通のグラフと同様である。

例えば，集団行動の研究では，他者からの影響を表すソシオメトリーなどを示す時に用いられる。



グラフを示すための行列

定義

$v_1, v_2, \cdots v_n$ を頂点とするグラフの隣接状態は，i 行 j 列の数が v_i から v_j への辺を示す n×n 行列によって表すことができる。

例 3)

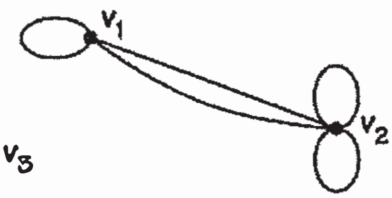
上にある対人関係を表す有向グラフを示す行列を書きなさい。

$$
\begin{array}{r|ccccc|}
 & \text{Bob} & \text{José} & \text{Dan} & \text{Joan} & \text{Louise} \\
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
\text{Bob} = v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\text{José} = v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\text{Dan} = v_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\text{Joan} = v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\text{Louise} = v_5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

例4）

次の行列により示されるグラフ（方向を持たない）を描きなさい。

	v_1	v_2	v_3
v_1	1	2	0
v_2	2	2	0
v_3	0	0	0



11－3　握手の問題

古典的な握手の問題

n 人がパーティーに参加し，全ての人が互いに 1 回ずつ握手をすると，全員で何回握手することになるのか。このような典型的な「握手の問題」をグラフに示すと次のようになる。n 人に対して n 個の頂点をつくり，2つの頂点を結ぶように辺でつなぐと，その一つ一つの辺が 1 回の握手に相当する。それぞれの人と 1 回ずつ握手をするので，それぞれの頂点のペアはちょうど1 つだけ辺を持つことになる。このような特徴をもつグラフを「完全なグラフ(**complete graph**)」と呼ぶ。

グラフの次数

異なる握手の問題の例

47 人がイベントに集まった。それぞれの人がぴったり 9 人の人と握手するような場合を想定することができるか？

定義

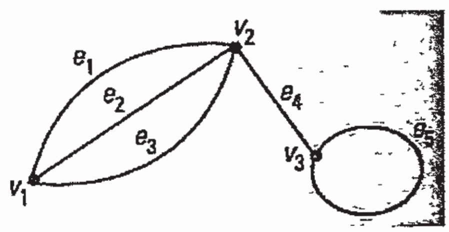
グラフ G の頂点に v おいて，v の次数（**deg(v)**と書く）とは，v を終点とする辺の数である。ループがある場合，2つとして数える。

右の図では

$\deg(v_1)=3$

$\deg(v_2)=4$

$\deg(v_3)=3$



グラフの次数の総和

グラフの次数の総和とは，全ての頂点の次数を合計したもの。

定理（グラフの次数の和）

グラフの次数の総和は，グラフ中の辺の数のちょうど 2 倍である。

補助定理

1．グラフの次数の総和は偶数：どんなグラフでも，次数の総和は偶数である。

2．奇点(odd vertices)の数は偶数：どのグラフでも，次数が奇数である頂点の数は偶数個である。

例1）

47 人がそれぞれちょうど 9 人の人と握手をすることは可能か？

解答

不可能である。それぞれの人が頂点となるグラフを考えると，それぞれの辺は 1 回の握手に相当

する。47 個の頂点をもち，それぞれの頂点が辺が９つもつグラフを想定することになるが，これは奇点が奇数個存在することになる。これは上述の補助定理２に矛盾するため，前提が不可能との結論になる。

任意の次数をもつ頂点を伴うグラフの描き方

例２）

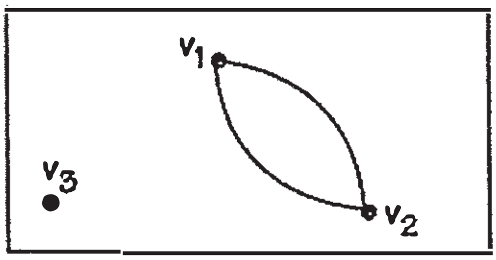
次の条件を満たすグラフを描け。

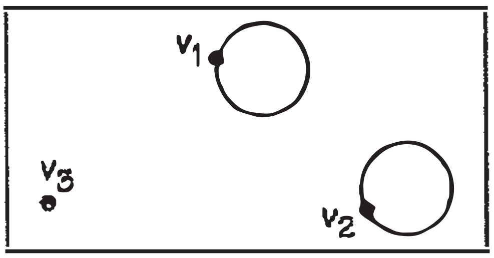
a. ３つの頂点の次数が，２，２，０

b. ３つの頂点の次数が２，２，０ となるシンプルなグラフ

解答

a.



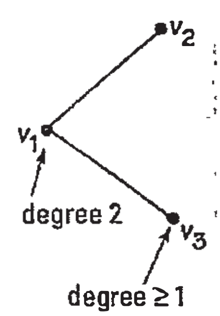


b. 上述のどのグラフもシンプルではない。

証明

３つの頂点の次数が２，２，０ となるシンプルなグラフが存在すると仮定する。

次数が２の頂点を v_1，v_2，次数が０の頂点 v_3 とする。v_1 の次数が２で，このグラフはループや平行な辺をもたないので（なぜならこのグラフはシンプルである），v_1 から v_2，v_3 へそれぞれ辺を結ぶ。一方，v_3 の次数は０でなければならない。ここで矛盾が起こる。このようなシンプルなグラフが存在するという仮定が誤りであり，そのようなグラフは存在しないことが示された。



例２b の結果は，握手の問題に適用できる。人が 3 人いて，お互いに 1 回だけ握手をすると仮定すると，そのうち 2 人が 2 人と握手をして，残りの 1 人が全く握手をしない，といった状況は起こりえない。

11－4　ケーニッヒベルグの橋の問題

ケーニッヒベルグの橋の問題に戻ると

この章の最初で，ケーニッヒベルグの橋の問題は以下のように示された。

> ケーニッヒベルグの街中を，全ての橋を 1 度だけ渡ってスタート地点と同じ場所に戻ることができるか。

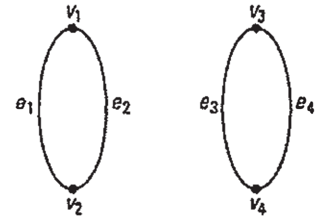
この問題を授業では，このグラフがオイラー回路であるかを問うものとして扱う。

オイラーの解答
オイラー回路の定理

グラフがオイラー回路であれば，頂点は全て偶点(次数が偶数)である。

連結グラフ

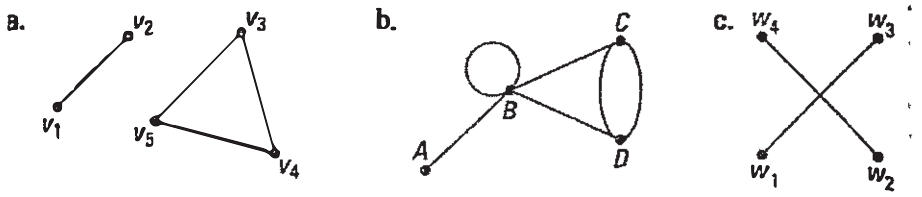
オイラー回路の定理の逆，つまり，全ての頂点が偶点ならそのグラフはオイラー回路と言えるのだろうか。図のような場合，v_1，v_2，v_3，v_4 の全てが偶点ではあるが，このグラフはオイラー回路ではない。



定義

２つの頂点ｖとｗにおいて，ｖからｗへの筋道がグラフＧの中にある場合，これら２つの頂点は連結している。グラフ中の全て頂点に対して，それぞれ全ての頂点への筋道がある場合，そのグラフは連結グラフである。

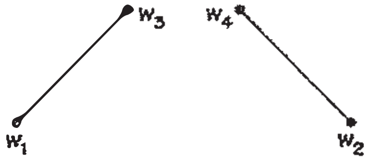
例１）　次のグラフは連結グラフであるか。



a．例えばv_1からv_3への筋道が無いので，このグラフは連結していない。

b．どの頂点からでも，全ての頂点への筋道があるので，このグラフは連結している。

c．このグラフは次のようにも表せるので，連結グラフではない。



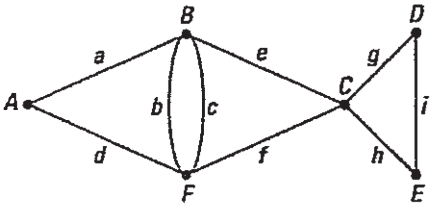
どのような時にグラフはオイラー回路になるのか
定理（オイラー回路になるための要件）

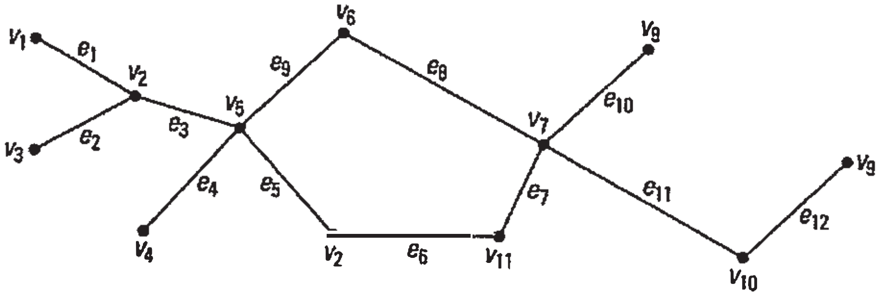
連結したグラフで，全ての頂点が偶点のとき，そのグラフはオイラー回路である。

例２）

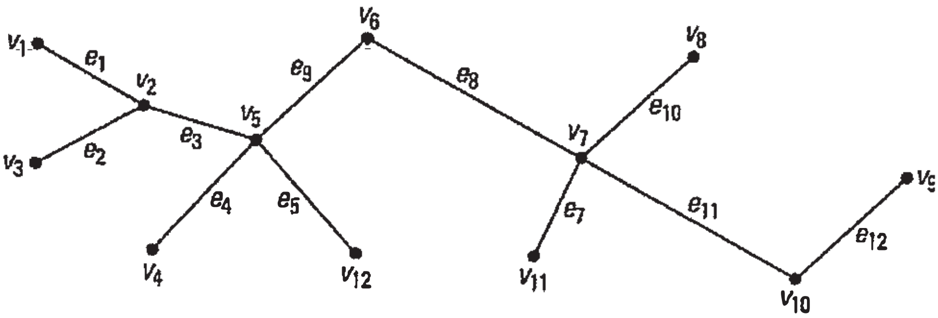
次のグラフはオイラー回路か。もしそうであれば，一筆書きの筋道を見いだしなさい。

このグラフは連結していて，deg(A)＝deg(D)＝deg(E)＝２，deg(B)＝deg(C)＝deg(F)＝４，と，全ての頂点が偶点である。従ってこのグラフはオイラー回路であると言える。一筆書きの筋道の一例として，abcegihfd がある。





上のグラフには, e_9 e_5 e_6 e_7 e_8 という回路(閉路)がある。この回路から辺を一つ取り除いてみる。例えば e_6 を取り除いてみたとき，このグラフは連結グラフだろうか。

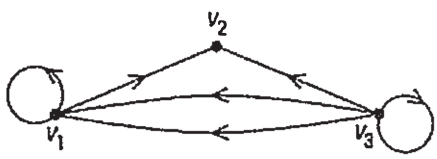


定理（回路と連結性）

連結グラフの中に回路(閉路)があり，その辺を一つ取り除いても，そのグラフは連結である。

11－5　行列の累乗とグラフの筋道

以下のグラフは次のような行列で示すことができる。

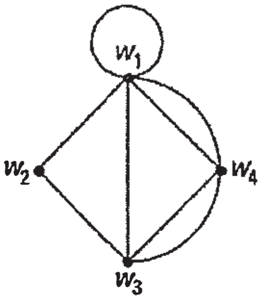


$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

筋道の長さ

筋道の長さは，その筋道中にある頂点の数によって規定される。上のグラフの行列で， $a_{33}=1$ というのは， v_3 から自分自身へと戻る筋道が１つ存在するということである。

次に，方向を持たないグラフを考えてみる。行列は a_{ii} を軸に対称になる。



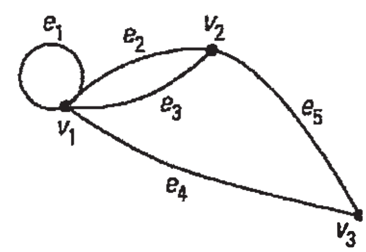
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

main diagonal

例１）

図のグラフにおいて，v_1からv_3へ至る，長さ２の筋道はいくつあるか。

解答



v_1からv_3へ至る長さ２の筋道には，必ずその途中に立ち寄る頂点が存在する。v_2を中間点とする筋道は２つある。（e_2e_5とe_3e_5）v_1を中間点とする筋道は１つある。（e_1e_4）v_3を中間点とする長さ２の筋道は無い。従って，v_1からv_3へ至る長さ２の筋道は全部で３つである。

長さ２の筋道

筋道の長さの概念は，行列と密接に関連している。

例１のグラフの行列は次のように表せる。

ここでa_{ij}は，頂点v_iからv_jへの長さ１の筋道の数を示している。

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

行列Ａに対して，A^2を計算すると次のようになる。

ここで，A^2の１行３列の数値は３である。これは，例１で考えた「v_1からv_3へ至る長さ２の筋道」の数と同じである。同様に，$a_{22}=5$なので，v_2からv_2へ至る長さ２の筋道は全部で５つあるはずである。これら５つの道筋を探してみよう。

（e_2e_2, e_2e_3, e_3e_3, e_3e_2, e_5e_5の５通り）

$$A^2 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

長さｎの道筋

定理

v_1, v_2, $v_3 \cdots$ v_mのm個の頂点を持つグラフと，正の整数ｎを考える。行列Ａがグラフ Ｇの関係を表すとき，行列A^nのa_{ij}の数値は，v_iからv_jへ至る「長さｎの道筋」の個数を示す。

例２）

例１に示したグラフにおいて，v_1とv_2との間にある「長さ３の道筋」の個数を求めよ。

解答　A^3は次のようになる。

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 15 & 15 & 9 \\ 15 & 8 & 8 \\ 9 & 8 & 5 \end{bmatrix} \text{ and so } a_{12} = 15.$$

$a_{12}=15$ なので，v_1 と v_2 との間にある「長さ３の道筋」は全部で 15 個ある。

確認

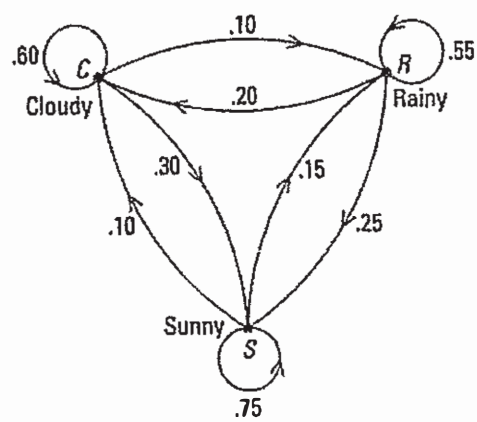
$e_1e_1e_2$	$e_1e_1e_3$	$e_2e_3e_2$	$e_3e_2e_3$	$e_2e_2e_2$	$e_3e_3e_3$	$e_1e_4e_5$
$e_2e_5e_5$	$e_3e_5e_5$	$e_4e_4e_3$	$e_4e_4e_2$	$e_2e_2e_3$		

ここに示すのは，15 個ある道筋のうちの 12 個である。残りを探しなさい。

11−6　マルコフ連鎖

天気予報におけるマルコフ連鎖

ある町の気象データから，翌日の天気が晴れ(S)，曇り(C)，雨(R)になる確率を，次のように方向をもつグラフに示した。



例えば点 C について，ループのところに「.60」とあるのは，曇りの日に引き続きその翌日も曇りとなる確率が 60%であることを示している。点 C から点 R へ至る辺にある「.10」は，ある日が曇りのときその翌日が雨になる確率が 10%であることを示す。点 C から点 S への辺の「.30」は，曇りの日の翌日に晴れる確率が 30%であることを示している。

今日の天気が曇りだったとして，２日後の天気はどのように予測できるか。

翌日の天気を表す行列 T を次のように示すことができる。

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} C & S & R \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ S \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 0.60 & 0.30 & 0.10 \\ 0.10 & 0.75 & 0.15 \\ 0.20 & 0.25 & 0.55 \end{pmatrix} \end{array} = T$$

行列の各要素は全て正の数であり(確率を表すので)，それぞれの行･列の和が１になっている(その翌日は必ず晴れ,曇り,雨のいずれかなので)点に留意したい。このような行列は確率行列と呼ばれ，ある状態が次の状態へと推移する際の遷移確率を示している。

ここで，T^2 を計算すると次のようになる。

$$T^2 = T \cdot T = \begin{bmatrix} .60 & .30 & .10 \\ .10 & .75 & .15 \\ .20 & .25 & .55 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} .60 & .30 & .10 \\ .10 & .75 & .15 \\ .20 & .25 & .55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .410 & .430 & .160 \\ .165 & .630 & .205 \\ .255 & .385 & .360 \end{bmatrix}$$

T^2 もまた確率行列である。T^2 の最初の行は，ある日が曇りだった時に，その２日後も曇りである確率が 41%，２日後が晴れる確率が 43%，２日後に雨の降る確率が 16%であることを示している。

４日後の天気の確率は，T^4 を計算することで求められる。一般に T^k は，k 日後の天気がどのような確率であるかを示すものである。

$$T^4 \approx \begin{bmatrix} .27985 & .50880 & .21135 \\ .22388 & .54678 & .22935 \\ .25988 & .49080 & .24932 \end{bmatrix}$$

$$T^8 \approx \begin{bmatrix} .24715 & .52432 & .22853 \\ .24466 & .52544 & .22990 \\ .24740 & .52295 & .22965 \end{bmatrix}$$

$$T^{10} \approx \begin{bmatrix} .24612 & .52458 & .22930 \\ .24563 & .52474 & .22962 \\ .24628 & .52426 & .22946 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} .25 & .52 & .23 \\ .25 & .52 & .23 \\ .25 & .52 & .23 \end{bmatrix}$$

T^{10}の３つの行はほぼ同じ数値になっている。このことは，今日の天気がどうであれ，10 日後の天気が曇りになる確率が 25%，10 日後が晴れになる確率が 52%，雨になる確率が 23%であることを示している。

実際の天気には様々な要因があるが，この事例では，翌日の天気は今日の天気にのみ左右されると仮定している。ある状況が有限個の状態のみ(この場合,曇り,晴れ,雨,の 3 通り)で規定され，ある状態になる確率がその１つ前の状態にのみ影響されている場合，そのような状況はマルコフ連鎖の事例となる。

確率行列の２乗は確率行列である

一般に，確率行列をｋ乗したとき，その行列も確率行列になっている。

$\begin{bmatrix} x & 1-x \\ y & 1-y \end{bmatrix}$, where $0 \leq x \leq 1$ and $0 \leq y \leq 1$. Its square is

$$\begin{bmatrix} x & 1-x \\ y & 1-y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 1-x \\ y & 1-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+y-xy & 1-x^2-y+xy \\ xy+y-y^2 & 1+y^2-y-xy \end{bmatrix},$$

定理（累乗の収束）

行列Ｔをｎ×ｎの確率行列とし，その要素に０はない。ここで，T^kのｋをｋ→∞とすると，その行列はｎ個の等しい行を持つ確率行列になる。

生物学におけるマルコフ連鎖

例)

バラの花の色に，大きく青と赤があるとする。青い花からとれる種の 60%が青い花の種で，40%は赤い花の種である。赤い花からとれる種の 30%が青い花の種で，70%は赤い花の種である。何世代かを経たときに，赤い花と青い花の割合はどのようになっているか。

解答

バラの花の種の遷移を示す行列は次のようになる。

$$\begin{array}{ccc} & & \text{種} \\ & & \begin{array}{cc} \text{青} & \text{赤} \end{array} \\ \text{花} & \begin{array}{c} \text{青} \\ \text{赤} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{T}$$

定常化した状態における青い花と赤い花の分布の割合をそれぞれａ，ｂとする。青と赤以外の花の

色は考えないことにするので，a＋b＝1 である。ここで，ある世代の次世代の花の色が青である確率は，0.6 a ＋0.3 b である。ところで，この世代における花の色の分布は既に定常化しているので，次世代の花の色が青である確率は a であるはず。従って，0.6 a ＋0.3 b ＝ a　という方程式ができる。つまり，次の連立方程式を満たすことになる。

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 0.6a + 0.3b = a \end{cases}$$

これを解くと，a ≒0.43，b ≒0.57 となる。つまり，花の色が定常化した際には，その 43%が青で，57%が赤になる。

確認 1

同様に，定常化した時の青い花に着目すると，0.4 a ＋0.7 b ＝ b　これを用いても同様の答えになる。

確認 2

この結果は，Tの累乗をしていった時の数値と同じになる。例えば T^{10} を計算すると

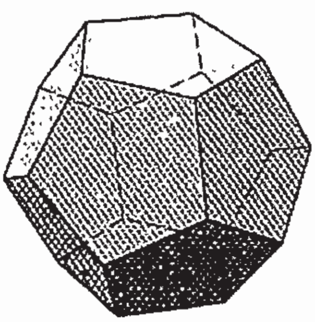
$$T^{10} \approx \begin{bmatrix} .42857 & .57143 \\ .42857 & .57143 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

マルコフ連鎖は，多くの科学の分野で適用されている。

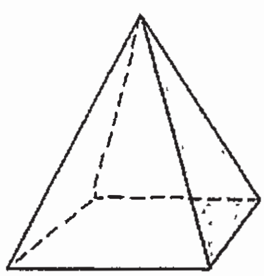
11−7　オイラーの公式

多面体の頂点，辺，面

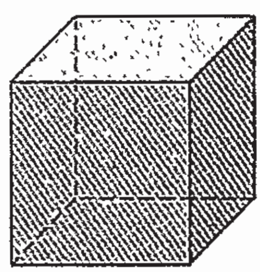
多面体の頂点，辺，面の数をそれぞれ，V，E，F で表すことにする。例えば正十二面体の場合，V＝20，E＝30，F＝12 である。



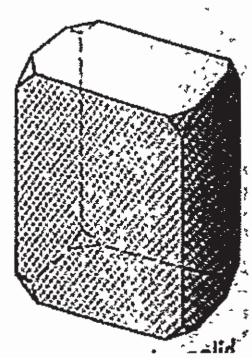
正十二面体



正四角錐



直方体



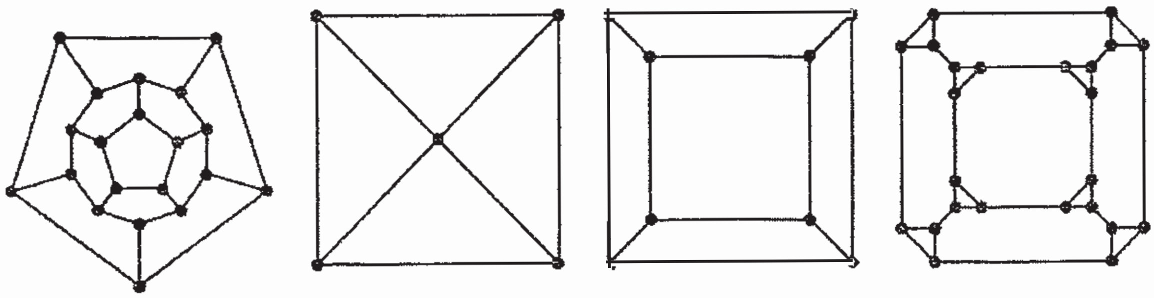
角を落とした直方体

多面体	頂点	辺	面
正十二面体	20	30	12
正四角錐	5	8	5
直方体	8	12	6
角を落とした直方体	24	36	14

ここで，どの多面体においても　V－E＋F＝2が成り立っていることが分かる。

多面体のグラフ

11-1 節では，正十二面体を下のようなグラフにして示した。ある1つの面を取り除きそこに穴を作ってから，穴の周りを引っ張って平らにすることで，このような変形を行うことができる。



正十二面体　　正四角錐　　直方体　　角を落とした直方体

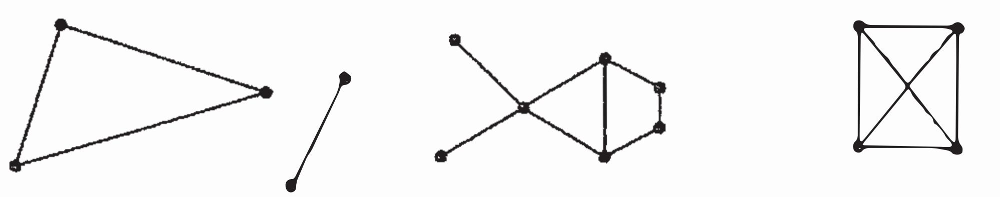
グラフにおけるV，E，F

多面体の面に相当する部分は，グラフでは辺に囲まれた所にあたる。このような部分をグラフの面と呼ぶことにする。多面体をグラフへと変形する過程において，頂点，辺，面の数に変わりは無いので，変形されたグラフにおいても V－E＋F＝2の関係は成り立つ。(紹介者注：面の数が 1 つ足りないと思っていましたが，辺に囲まれた部分全体の外側を1つの面として数えると理解すると納得できる。)

変形されたグラフは，シンプルかつ連結しており，交差する箇所や次数が3より小さい頂点は無く，全ての辺が回路の一部となっている。元の多面体が凸の状態(多面体のどの2点を結ぶ直線も立体の内部を通らない状態)の時には，グラフに交差する箇所は生じない。

それでは，全てのグラフにおいて V－E＋F＝2の関係は成り立つのか。そうでない例を以下に示す。

連結していないグラフ　　回路の一部になっていない辺がある　　グラフが交差する



$V=5$ $E=4$ $F=2$　$V-E+F=3$

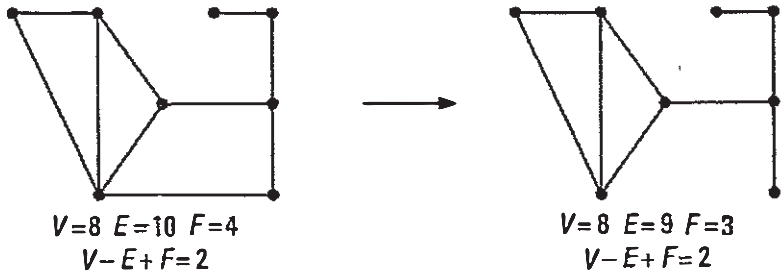
$V=7$ $E=8$ $F=3$　$V-E+F=2$

$V=4$ $E=6$ $F=5$　$V-E+F=3$

V－E＋F＝2の関係を変えずにグラフを変形する

オイラーの公式 V－E＋F＝2が成り立つのは，連結していて交差の無いグラフである。この公式を以下にある手順を踏んで変形する。

最初に，V－E＋Fの値を変えずに変形することを考える。例えば以下のように変形する場合，辺と面がそれぞれ1つずつ減っているので，V－E＋Fの値は変わらない。

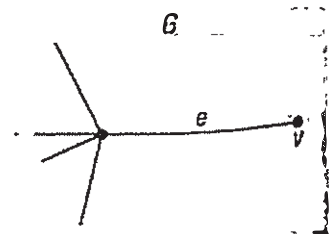


定理☆

連結していて交差の無いグラフGを考える。V，E，Fをそれぞれグラフの頂点，辺，面の数とする。ここで，グラフGに以下のような変形をしても，V－E＋Fの値は変わらない。

(1) 次数１の頂点と，その頂点に連なる辺を取り除く

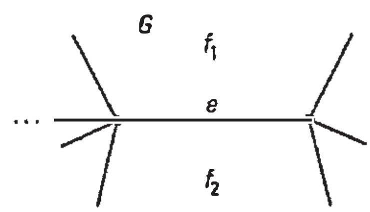
(2) 回路の一部となっている辺を取り除く



証明

(1) ｖを次数１の頂点とし，ｖから延びる辺をｅとする。ｖとｅとを取り除くことで，ＶとＥの数値がそれぞれ１ずつ減る。従って，Ｖ－Ｅ＋Ｆの値は変わらない。

(2) 辺ｅを回路の一部をなすものとし，ｅによって区切られている２つの面をf_1，f_2とする。ｅを取り除くことで，f_1とf_2は１つの面になる。頂点の数Ｖは変わらない。ＥとＦの数値がそれぞれ１ずつ減るので，Ｖ－Ｅ＋Ｆの値は変わらない。

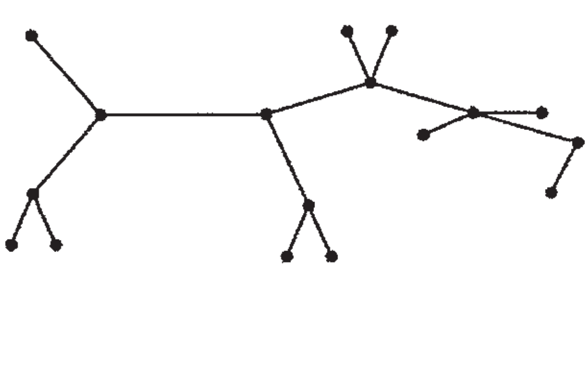


定理★

辺が少なくとも１つはあるグラフGを考える。もしGに回路が無ければ，そこには次数１の頂点が必ず存在する。

証明

次の手順でグラフG上を移動する。次数が１より大きな頂点に来たときには，来た時とは別の辺から次の頂点へ向かう。(このもう一方の辺はこれまでに通ったことの無い辺のはずである。もしそうでなければ，そのグラフには回路が存在している。）ここで，頂点の数は有限で，どの頂点も２回以上繰り返しては通らない（回路になっていない）ので，この移動は最後には必ずどこかで終わる。最後に移動が終わった頂点の次数は１である。なぜなら，もしそうでなければ更に先への移動が可能だから。



オイラーの公式の証明

上述の２つの定理を用いて，オイラーの公式を証明しよう。

定理（オイラーの公式）

連結した交差の無いグラフＧがあり，Ｖ，Ｅ，Ｆをそれぞれグラフの頂点，辺，面の数としたとき，Ｖ－Ｅ＋Ｆ＝２が成り立つ。

証明

数学的帰納法を用いて証明する。ｎ個の辺を持つグラフにおけるオイラーの公式をＳ(n)とする。

第一に辺が全く無い場合におけるオイラーの公式S(0)について。これは単に頂点が１つだけが存在するグラフである。また，頂点の周りに広がる面が１つだけ存在している。従ってこのグラフは，V＝1，E＝0，F＝1 であり，Ｖ－Ｅ＋Ｆ＝２を満たす。

ここで，k 個の辺を持つ場合のオイラーの公式 S(k)において，Ｖ－Ｅ＋Ｆ＝２が成り立つと仮定する。その時，k+1 個の辺を持つグラフ G を考える。そのグラフに回路が含まれている場合と，そうでない場合とに分けて考える。

グラフ G に回路が含まれている場合，回路の一部になっている辺を取り除いてみる。前述の定理☆の(2)より，このことによって Ｖ－Ｅ＋Ｆ の値は変わらない。この新しいグラフもまた連結していて（11-4　回路と連結性の定理より），ここには k 個の辺が存在することになる。上述の仮定よりこの新しいグラフでは Ｖ－Ｅ＋Ｆ＝２が成り立つ。また，回路の一部となっている辺を取り除く前のグラフＧと新しいグラフとの間でＶ－Ｅ＋Ｆの値は変わらないことから，S(k＋1)の場合においても Ｖ－Ｅ＋Ｆ＝２が成り立つことがわかる。

グラフ G に回路が含まれていない場合，定理☆の(1)を用いる。定理★より，グラフ G には必ず次数１の頂点が存在する。そこで，その次数１の頂点とそこから延びる辺を取り除いてみる。この場合も，定理☆の(1)よりＶ－Ｅ＋Ｆの値は変わらない。従って同様に，S(k＋1)の場合においてもＶ－Ｅ＋Ｆ＝２が成り立つことがわかる。

以上より，数学的帰納法を用いて，オイラーの公式Ｖ－Ｅ＋Ｆ＝２は証明される。

アメリカの高等学校への離散数学の導入例

－Pollak の考え，CPMP－

西村　圭一
東京学芸大学附属大泉中学校

【要約】学校数学における離散数学のあり方についての示唆を得るために、第一に、学校数学における数学的モデル化研究の第一人者であるHenry O. Pollakの、数学的モデル化と離散数学との関係に関する主張をまとめた。第二に、米国の数学科カリキュラム開発プロジェクトCore-Plus Mathematics Projectにおける離散数学の位置づけやその扱いについて分析した。その結果、離散数学をカリキュラムに導入する価値や適切な問題に関して、数学的モデル化の視点からの示唆を得るとともに、離散数学の学習指導では抽象化やアルゴリズム開発の過程を大切にし、教科書もそのように構成することが求められることがわかった。

1　はじめに

本稿では、学校数学における離散数学のあり方についての示唆を得るために、第一に、学校数学における数学的モデル化研究の第一人者である Henry O. Pollak の、数学的モデル化と離散数学との関係に関する主張をまとめる。第二に、数学的モデル化を重視している米国の数学科カリキュラム開発プロジェクト Core-Plus Mathematics Project（以下、CPMP）の離散数学の位置づけやその扱いについてまとめる。

はじめに、Henry O. Pollak（2003）に従い、数学的モデル化とは何かを述べておくことにする。

① 私たちは、現実世界において、私たちが知りたい、したい、理解したいと思う何かを同定する。その結果は、現実世界における1つの問いとなる。

② 私たちは、現実世界の問いにおいて重要と思われる「対象」を選び、それらの間の関係を同定する。その結果は、現実世界の状況における重要な概念の同定となる。

③ 私たちは、その対象やそれらの相互関係について、保つべきことは何か、無視すべきことは何かを決定する。私たちは、すべてのことに注意を向けることはできない。その結果は、もとの問いの理想化版となる。

④ 私たちは、この理想化版を数学的な用語に訳し、理想化された問いの数学的な定式化を得る。これが「数学的モデル」と呼ばれる。

⑤ 私たちは、そのモデルに関連のある数学の分野を同定し、これらの分野に関する直観や知識を働かせる。

⑥ 私たちは、数学的な方法や洞察を使い、結論を得る。この段階から、新しい技法や興味深い例、解決、近似値、定理、算法（アルゴリズム）が生じるかもしれない。

⑦ 私たちは、これらの結論すべてを採用し、現実世界へ訳し戻す。私たちは、いま、理想化された問いに関する理論を得たのである。

⑧ そこで、現実さによる検査となる。言われていることを信じるか。その結論は現実的か。その答

えは妥当か。その結果は受け入れられるか。

a）もし「はい」ならば、現実世界の問題解決は成功した。私たちの次の仕事は潜在的な使用者に伝えることであり、それは、難しいが、とりわけ重要である。

b）もし「いいえ」ならば、私たちは、はじめに戻る。その結論はなぜ非現実的なのか、あるいは、その答えはなぜ妥当でないのか、その答えはなぜ受け入れられないのか。それは、モデルが正しくないからである。私たちは、何が誤っているかを調べ、何が原因かを突き止めようとし、再び始める。

①から⑧の全過程が数学的モデル化である。ただし、必ずしも、実際の過程は、1から8の段階を連続的に従うわけではなく、絶えず、行きつ戻りつする。

2　『数学的モデル化と離散数学』

Henry O. Pollakは、『数学的モデル化と離散数学』（2003）で、「数学を数学外の分野と関連づけることは数学教育において不可欠な要素」とした上で、離散数学は、学校数学における数学的モデル化の効果的な舞台を提供するとしている。なぜなら、数学的モデル化を行なうには、教師の側に、数学以外の数多くの分野に関する多大な知識が要求されることが多いが、モデルに関連する数学の分野が離散数学の場合、既有の知識や経験、直観が役立つことが多いからである。

では、離散数学に関する問題であれば、どのような問題でもよいのだろうか。Pollakは、「現実らしく装っているが、実際には起こりえないような文章題」は、数学的モデル化の問題としてふさわしくないとしている。例えば、次のような問題である。

「ある扇風機の広告では1分間に3,375立法フィートの空気を動かす能力があるとされている。この扇風機が27フィート×25フィート×10フィートの寸法を持つ部屋の中の空気をそっくり入れ換えるのにどれくらいの時間がかかるか？」

この問題では27×25×10を計算してその積を3375で割る、という解法が想定されている。しかし、それには、その部屋が完全に密閉されており、扇風機が空気を完全に排除するまで、新しい空気が部屋に入ってこないことが前提条件となる。これはきわめて非現実的な前提である。離散数学に関する問題においても、「現実らしく装っているが、実際には起こりえない」ような問題にならないよう、適切な問題を設定することが求められよう。

ただし、次のような「真面目に受け取ってはいけない文章題」に対しては、その価値を認めている。それは、例えば、「三角形内の特定の2点にミツバチと角砂糖があり、ミツバチは最短距離で角砂糖まで飛んでいきたいと思っているが、その途中で三角形の全ての辺に接触するという条件を付けられている。」というような問題である。もちろん、このような行動を取るミツバチが実際にいるわけはない。しかし、この問題では、数学外の分野との関連づけにねらいがあるのではなく、奇抜な文脈を設定することで、数学の学習に、軽妙さやユーモアを加味することにねらいがある。したがって、「現実らしく装っているが、実際には起こりえないような文章題」とは異なるのである。離散数学に関する問題に対しても、この区別は大切にしたい点である。

最後に、Pollakは、数学的モデル化と離散数学の教育上の共通点に言及している。数学的モデル化では、唯一の正しい方法や正解、妥協の余地のない真理といったものが提供されるわけでない。離散数学の問題でも、同様のことが起こりやすい。例えば、公正分配ないし最適位置に関する問題などでは、ある人の見解では公正なものでも、別の人にとっては公正でないかもしれない。最適化

問題において、人命と金銭のように対立する指標が本質的に異なった単位で測定されている場合、両者の不一致は不可避的である。このような点が数学的モデル化の教育を普及する上での１つの障害となっており、離散数学に対しても同様のことが起こりうると指摘している。カリキュラムに導入した後の問題として留意しておく必要がある。

3　Core-Plus Mathematics Project（CPMP）について

２では、Pollak の、数学的モデル化と離散数学との関係に関する主張をまとめた。ここでは、数学的モデル化を重視している米国の数学科カリキュラム開発プロジェクト CPMP での離散数学の位置づけやその扱いについて、西村他（2004，2005）をもとにしながらまとめる。

3-1　CPMP の理念

CPMP は、9 年生から 12 年生を対象としたカリキュラムである。その理念は、次の通りである。

「わかることとしての数学（mathematics as sense-making）というテーマにもとづいている。生徒は，現実世界の文脈を探求することを通して，彼らにとって意味があり、それによって，新しい場面や問題の意味をわかるようにする重要な数学について、深く豊かに理解するようにする。」

すなわち、現実世界の文脈に埋め込まれた問題の探求を通して，生徒にとって意味のある数学を提供し，その数学を学ぶことによって見なれぬ事象を理解し解明する力を身につけさせることを理念としている。そして、この理念を、次の①ー⑥の６つの柱を設けて具現化しようとしている。

①数学的モデル化の重視

②テクノロジーの利用の前提

③内容の統合

内容の統合には２つの意味合いがある。ひとつは、代数・関数，幾何・三角法，確率・統計，離散数学の４つの領域（STRANDS）ごとの統合である。もうひとつは、対称性，データ解析，曲線の当てはめ、観察、帰納的な思考、パターンをみつけて説明する、予測して検証する、多様な数学的表現を用いて推論する、数学を作り出す、確信を持って議論し証明する、といった数学的な見方や考え方での統合である。すなわち、数学的な内容面での共通性や発展性を示すとともに、数学的な見方や考え方の共通性や発展性を示すことによって、生徒の数学に対する理解を促進することが図られている。

④近づきやすく挑戦しがいのある数学

より多くの生徒が、より多くの数学に接するようにする。かつ、もっとも有能な生徒も挑戦しがいのあるようにする。そのため、生徒の達成度や関心の違いには、追究する主たる内容の抽象度や，応用の性格や難易度によって，宿題やプロジェクト課題に関する選択の機会を与えることによって、対応している。

⑤活動的な学習

次のような、活動的な教授と学習を行う。問題場面を小グループで協同的に探求し、その後、教師が、分析や抽象化、基本的な数学的な考えのより進んだ応用へとつなげるようなクラス全体でのまとめをする。生徒は、探求し，推論し，確かめ，一般化し、適用し，証明し、数値を求め，数学的なアイデアを評価し、コミュニケーションすることを行う。

⑥多面的な評価

NCTM の評価のスタンダードにもとづいて，数学的過程，内容，態度の３つの側面を，図１のような観点で評価する．そのための評価の方法としては，次のようなものがある．

教科書によるもの：問い，観察

生徒が作るもの：数学の道具（mathematics Toolkits)，ジャーナル，ポートフォリオ

補助教材によるもの：章末問題，クラス試験，宿題，プロジェクト，評価 CD-ROM，定期テスト

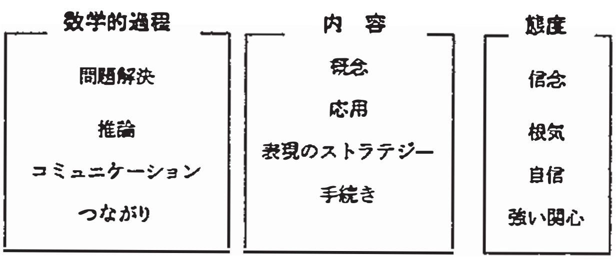


図１ 評価の枠組み

3-2 CPMP のカリキュラム構成

カリキュラム構成は、表１の通りである。単元は、数学的内容で分けるのではなく、「事象」を軸にして分けていることがわかる。例えば、代数・関数領域で言えば、「１次関数」「１次方程式」のような分け方ではなく、「線形モデル」として分けられている。それは、事象を捉える際には、関数や方程式といった数学的内容で別々に捉えるよりも、「線形性」という数学的な見方で統一的に捉える方が当然かつ有効という立場に基づくからである。

表1 カリキュラム構成

	ストランズ			
	代数・関数	幾何・三角法	確率・統計	離散数学
コース1				
単元1			データのパターン	
単元2	変化のパターン			
単元3	線形モデル			
単元4				グラフモデル
単元5		空間のパターンとその視覚化		
単元6	指数モデル			
単元7			シミュレーションモデル	
コース2				
単元1	行列モデル			行列モデル
単元2	位置・形・大きさのパターン	位置・形・大きさのパターン		
単元3			相関と回帰	
単元4	べき乗モデル			
単元5				ネットワークの最適化
単元6		図形とその働き		
単元7			起こりやすさのパターン	
コース3				
単元1	多変数モデル	多変数モデル		
単元2			世論のモデル化	世論のモデル化
単元3	シンボルセンスと代数的推論			
単元4		形と幾何学的推論		
単元5			分布のパターン	
単元6	関数族	関数族		
単元7	変化の離散モデル			変化の離散モデル
コース4				
単元1	変化の割合	変化の割合		
単元2	運動のモデル化	運動のモデル化		
単元3	対数関数とデータのモデル		対数関数とデータのモデル	
単元4				数え上げのモデル
単元5			二項分布と統計的推測	
単元6	整関数と有理関数			
単元7	関数と記号的推論	関数と記号的推論		
単元8		空間幾何学		
単元9				情報数学
単元10	問題解決、アルゴリズム、スプレッドシート		問題解決、アルゴリズム、スプレッドシート	

そして、コース１からコース３は全生徒が全単元を学習する。コース４では、大学で学ぶ数学や統計学を理解するために必要な数学に焦点が当てられ、生徒の進路希望別に次のような履修すべき単元と順序が推奨される。

数学，物理学，生物学，工学などに進学する生徒：
1→2→3→6→7→4→5, 8 または 10
社会学，経営学，保健科学，人文学などに進学する生徒：
1→2*→3→4*→5→9→10　　(*は縮減して扱う)

いわゆる非理数系以外の生徒にも、学ぶべき数学が用意されていること、その内容として、微分・積分の考え（単元１）やベクトル（単元２）、対数関数（単元３）、統計的推測（単元５）、アルゴリズム、スプレッドシート（単元９）などが位置づけられていることが注目に値する。なお，大学進学のために AP 微積分，AP 統計が必要な生徒は，コース４の後でそれらを履修することが想定されている．

3-3　CPMP の離散数学領域について

3-3-1　単元構成とねらい

離散数学領域に位置づけられている単元とそのねらいは、表２の通りである。「行列モデル」「変化の離散モデル」は代数・関数の領域にも、「世論のモデル化」は確率・統計の領域にも位置づけられている。

また、それぞれの単元の数学的内容を表３に示す。○印はその数学的内容が重点的に指導される単元を示し、△印はその数学的内容がその単元以外で重点的に指導されているが、その単元でも関連づけて指導されていることを示している。グラフ理論、フラクタル、選挙の投票方法等に関わる世論の決定、暗号理論など、日本では扱われていない、豊富な内容を含んでいる。特に、グラフ理論については、コース１の単元「グラフモデル」で、オイラー回路、グラフの彩色、スケジュール管理などを、さらに、コース２の単元「ネットワークの最適化」で、最小全域木、最短路、ハミルトン閉路などを扱っている。これらの内容については、次の 3-3-2 で詳しく述べることにする。

表２　各単元のねらいと構成

コース	単元	単元名	ねらい	単元構成	
				課	タイトル
1	4	グラフモデル	計画づくり、衝突への対処、効率的な経路の検索といった有限個の要素間の関係を含む現実世界の場面を表現し分析するために頂点-辺グラフを使う力を身につける。	1	慎重な計画
				2	衝突への対処
				3	大きなプロジェクトのスケジュールづくり
				4	振り返ろう
2	1	行列モデル	いくつかの領域にある重要な数学的考えを繋ぎ合わせる一方、様々な現実事象の問題を表現し、解決するために、行列や行列の演算を用いる能力を身につける。	1	行列モデルの作成と利用
				2	行列の積
				3	行列と線形連立方程式
				4	振り返ろう

2	5	ネットワークの最適化	グラフを使って、最小全域木や最短路を含むネットワークの最適化に関係する現実事象の問題を表現し、分析できる能力を身につける。	1	最適なネットワークの発見
				2	最短路と最短閉路
				3	振り返ろう
3	2	世論のモデル化	選挙やサンプル調査を含む、世論を測定する方法を理解する。	1	投票モデル
				2	調査と抽出
				3	サンプルの分布
				4	信頼区間
				5	振り返ろう
3	7	変化の離散モデル	逐次的な変化や再帰的な変化を伴う状況を表現、分析して、問題を解決する能力を身につける。	1	漸化式を用いた逐次的変化
				2	関数モデルの離散的見方
				3	関数の反復
				4	振り返ろう
4	4	数え上げのモデル	場合の数を体系的に数え上げる方法を学び、数え上げの問題を解決できるようにするとともに、数学的帰納法を理解し、証明に使うことができるようにする。	1	数え上げの方法
				2	数学における数え上げ
				3	数学的帰納法
				4	振り返ろう
4	9	情報数学	アクセス・安全性・正確さの基本的な論点に焦点を当てながら、情報処理に関わる数学を理解する。	1	アクセスー検索エンジンの数学
				2	安全性ー暗号
				3	正確さーID 番号と誤り検出法
				4	振り返ろう

表３　各単元の数学的内容

		コース1	コース2		コース3		コース4		
		グラフモデル	行列モデル	ネットワークの最適化	世論のモデル	変化の離散モデル	数え上げのモデル	情報数学	問題解決とアルゴリズム・スプレッドシート
		単元4	単元1	単元5	単元2	単元7	単元4	単元9	単元10
グラ	グラフ	○	△	○		△	△		
	有向グラフ	○	△	△					
	隣接行列	○	○	△					
	オイラー路、オイラー回路	○							
	グラフ彩色	○					△		
	クリティカルパスとスケジュール	○							
	木、最小全域木			○			△		
	最短路			○					
	ハミルトン路、ハミルトン閉路			○					

		コース1	コース2		コース3		コース4		
		グラフモデル	行列モデル	ネットワークの最適化	世論のモデル	変化の離散モデル	数え上げのモデル	情報数学	問題解決とアルゴリズム・スプレッドシート
		単元4	単元1	単元5	単元2	単元7	単元4	単元9	単元10
再帰と反復	NOWとNEXTを使った表現	△	△			○	△		△
	線形関数の式					○			△
	指数関数の式					○			△
	再帰方程式(差分方程式)					○	△		△
	フラクタル	△				△	△		△
	関数の構成					△			△
	数列					○	△		
	関数の反復					○			△
	有限差分					○			
	固定点					○			
	グラフ上の反復					○			
行列	隣接行列	○	○	△					
	行列モデル	△	○	○		△			
	列の和と行の和	△	○	△					
	行列の和		○			△			
	行列のスカラー倍		○			△			
	行列の積		○			△		△	
	単位行列		○			△			
	逆行列		○			△		△	
	行列による連立方程式の解		○			△			
	行列の性質		○					△	
	変換行列								
	散布図行列								
世論決定	優先順位付投票				○				
	認定投票				○				
	投票分析方法					○			
	アローの定理						○		
アルゴリズム	最適化	○		○					
	アルゴリズムによる問題解決	○		○		△	△	△	△
	アルゴリズムの設計とプログラミング			△	△			△	△
	アルゴリズムの分析と比較			○					△
組合せ論	樹形図						○		
	場合の数の積の法則	△		△	△		○		△
	場合の数の和の法則	△		△	△		○		
	鳩ノ巣の原理						△		
	順列			△			○		
	組合せ						○	△	
	重複のある選択						△		
	パスカルの三角形						○		
	二項定理						○		
	組合せ論的推論						○		
情報論	集合の演算						△	○	
	論理(ブール)演算							○	
	ベン図							○	
	剰余計算							○	
	対称鍵暗号システム							○	
	RSA公開鍵暗号システム							○	
	プロトコル							○	
	誤り検出コード							○	

3-3-2 単元の概要と教材例

（1）「グラフモデル」（コース１・単元４）

本単元では、オイラー回路やオイラー路、グラフの彩色、有向グラフなどを扱う。次のような特徴がある。

① 具体的な問題場面を解決していくことを通して、グラフの有用性について考えさせる。

② グラフの辺と頂点が何を表しているのかを問いながら，グラフをかかせる。また，友達のグラフと比較をさせ，共通点や相違点を話し合わせながら、問題場面の構造に目を向けさせる。

③ 様々な分野への豊富な応用例を取り上げる。

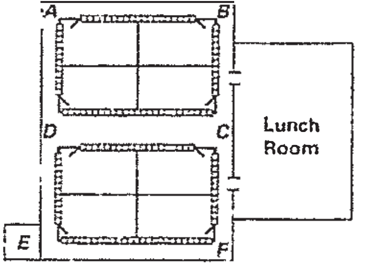
ここでは、中心となる教材を挙げながら、教科書の流れを示すことにする。

Lesson1 慎重な計画

Investigation1 効率のよい経路を計画する

次の問題を通して、「グラフ」を導入する。

右図のようなロッカーにペンキを塗る際の，最も効率のよい方法を考えよう。



First-floor Lockers

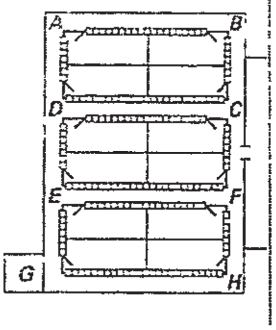
1．仕事の報酬は時間給ではないので、できるだけ効率的に，そして迅速にロッカーにペンキを塗りたい。最初にどの列から塗ればよいか？ また，その選択は１つだけか？ 最後に塗るのはどの列か？ その理由は？

2．次のプランⅠ，Ⅱ，Ⅲのどれが最もよいか，またその理由は？ 自分で最もよい方法を考え，友達の考えと比較、検討しなさい。また，最もよい方法かどうかを決定する基準を挙げなさい。

Ⅰ ＥからＦへ、ＦからＣへ、ＣからＤの片側へ、ＤからＥへ、ＤからＡへ、ＡからＢへ、ＢからＣへ、ＣからＤの残りの片側へ

Ⅱ ＡからＢへ、ＢからＣへ、ＣからＤの片側へ、ＤからＡへ、ＤからＣの残りの片側へ、ＣからＦへ、ＦからＥへ、ＥからＤへ

Ⅲ ＥからＤ へ、ＤからＡへ、ＡからＢへ、ＢからＣへ、ＣからＦへ、ＦからＥへ、ＤからＣの片側へ、Ｃからの残りの片側へ、

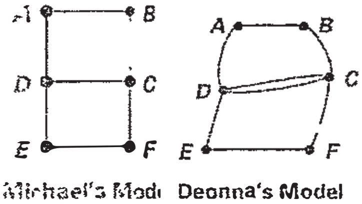


3． ２階は、右図のように塗る場所が増えます。２で設定した基準をもとにして考えなさい。

4．１階、２階の図を見直し，問題の解決には，必要ないものを挙げなさい。

5．何人かの生徒によって描かれた数学的モデルを吟味しなさい。

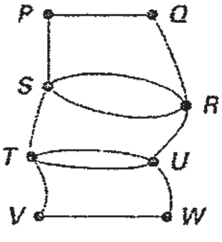
マイケルのモデルは，本質的な特徴をすべて描いているか？ デオナのモデルはどうか？



Michael's Model Deonna's Model

6．２で考えた最もよい方法を、自分の図でたどりなさい。そして，確認しなさい。次にデオナのモデルを用いてたどりなさい。点が線分か円弧でつながれているかが重要かどうか考えなさい。

7．右図に対応する学校内の平面図を書きなさい。

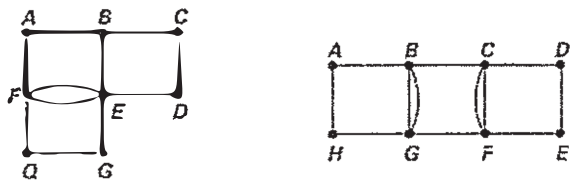


Investigation 2　回路を作る

オイラー回路に焦点が当てられる。オイラー回路とは,「グラフのそれぞれの辺を一度だけ通り,かつ始まりと終わりが同じ点になる路」である。具体的には,次のように展開される。

①歩道に沿って設置されているパーキングメーターを管理するという場面において,グラフがオイラー回路であるかどうかを知ることは,なぜパーキングメーターの管理者にとって有用かを考える。

②一筆書きのパズルをもとにしてオイラー回路を考える。



East Town Model　　West Town Model

③たどらないでオイラー回路であるかどうかを見分ける方法を考える。その際,オイラー回路とオイラー回路でないものを比較させて違いを見つける。また,オイラー回路を持つグラフの特性を推測させ,その推測がなぜ正しいのかを説明する。

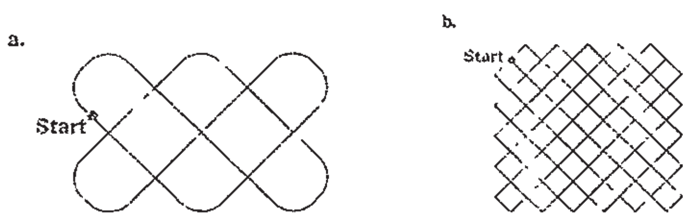
④図を与え,オイラー回路を持つかどうか,またその路はどれかを考える。

⑤オイラー回路を見出す効率の良い方法を考える。

⑥これまでの規則を見出すという活動を通して,アルゴリズムの意味を示す。

Investigation 3　点から点へと図形をたどる

オイラー路について取り上げる。オイラー路とは,「グラフのそれぞれの辺を1回だけ通り、たどることのできる路」のことである。オイラー回路はオイラー路の特別な場合である。次のような問題を扱う。

> コンゴの Bushoong の子どもたちは,スティックで砂に図形を描くというゲームを伝統的に行うという。それは、始まりの点と終わりの点は一致していないが,「一度もペンを紙から離さない,同じ線は2度通らない」という規則を保つ。下の図形をかくことができるか。
>
> 
>

Investigation 4　グラフと行列

グラフに含まれる情報をどのように表に表現するかを探求する。グラフを行列に表した場合を例示し,そこに記されている数字の意味を考えさせた上で,グラフから行列を作り出す活動を行わせる(右図)。

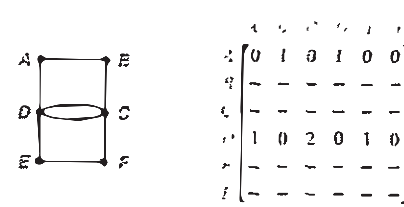


図　グラフとその隣接行列の一部

他に、特徴的な問題に次のような航路に関する問題がある。

> 南アラスカのいくつかの町は海や山に囲まれて孤立しています。これらの地域間を移動するには、ボートか飛行機に乗らなくてはなりません。下のリストは、ローカル路線のルートです。
>
> a．飛行ルートのグラフモデルを作りなさい。
>
> b．あなたのグラフモデルは、どのような点が地図と似ていますか。どのような点が違い
>
> Routes between:
> Anchorage and Cordova
> Anchorage and Juneau
> Cordova and Yakutat
> Juneau and Ketchikan
> Juneau and Petersburg
> Juneau and Sitka
> Petersburg and Wrangell
> Sitka and Ketchikan
> Wrangell and Ketchikan
> Yakutat and Juneau
>
> 
>

ますか。

c．定期航空路の調査官は、それぞれのルートの飛行機の運行状況を評価したいと思っています。それぞれ一方向を飛ぶだけで十分です。調査官は、ジュノーから出発して、すべてのルートを一回だけ飛び、ジュノーに戻ってくることはできますか。

d．c で答えたルートがあるかどうかを、グラフの隣接行列で示すにはどうしたらよいでしょうか。

Lesson2　衝突への対処

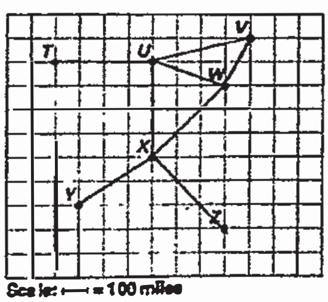
Investigation1　モデルの作成

グラフの彩色について、次の問題を通して導入する。

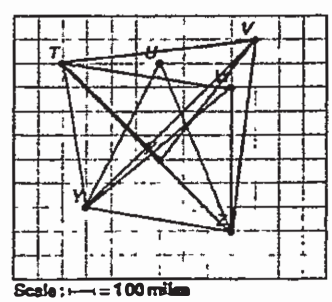
FCC（The Federal Communications Commission）は，あるラジオ局からの電波が、他のラジオ局からの電波に影響しないように調整している。こうしたことは，それぞれの局に適切な周波数が割り当てられているから可能となっている。局の送信機の性能や地理的な状況を考慮すると，お互いの局が 500 マイル以内である場合には，異なる周波数を割り当てなければならないと仮定できる。7 つの局が必要とする周波数はいくつか？　もっと局が多かった場合はどうするか？

次の２つのグラフを示して、有用かつ簡単なのはどちらかを考えさせる。a）を採用した上で、辺で結ばれた点同士が異なる色になるように、かつ、使う色の数をできるだけ少なくなるように色分けをする。このときの使った色の数が、求める周波数の数となる。

a）500 マイル以内の局を結んだ



b)500 マイルより遠い局を線で結んだ



Investigation 2　色づけ、地図づくり、スケジュールづくり

グラフの彩色に関する応用問題を扱う。例えば、次のような問題である。

右の表のように、いくつかのクラブに重複して所属している生徒がいる。週に１回、ミーティングを行いたいが，生徒は同じ日に 2 つのクラブに行くことはできない。ミーティングを行う曜日が、全体で、なるべく少なくなるようにしたい。

Clubs and Members

Club	Students belonging to more than one club
Varsity Club	Christina, Shanda, Carlos
Math Club	Christina, Carlos, Wendy
French Club	Shanda
Drama Club	Carlos, Vikas, Wendy
Computer Club	Vikas, Shanda
Art Club	Shanda

生徒は、この問題において頂点・辺・色が何を表しているのかを決め、グラフをかく。

他に、1980 年の南アフリカの地図を提示し、隣接する国が同じ色にならないように塗り分ける方法や、任意の地図を塗り分ける場合に必要となる色の最小数について考えさせる。最後には、これまでの問題において，どういった場合に辺が結ばれるのか，色は何を意味するかなどを問いかけ，まとめをする。

Lesson 3　大きなプロジェクトのスケジュールづくり

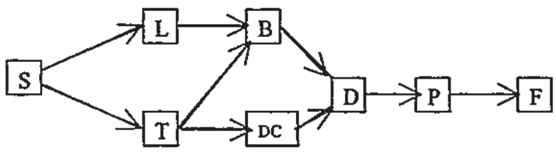
グラフを用いて、効率のよいスケジュールづくりについて考える。

Investigation1　モデルの作成

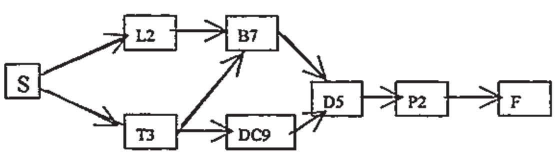
次のダンス大会の計画を立てる問題で、右下図のような有向グラフをかいて考える。

> あなたと何人かのクラスメイトは、春に行われるダンス大会の企画を手伝うことになりました。あなたは、ダンス大会の１月前に、学校周辺に、ダンス大会を宣伝するポスターを貼ることにしました。しかし、ポスターを作る以前にやらなければならない仕事が数多くあります。他の仕事と、それをするために前もってやっておかなければならないことは次の通りです。
>
> ・バンドまたはＤＪを予約する（B）　←　L、T
> ・場所を選択し、予約する（L）
> ・テーマを選択する（T）
> ・ポスターを作る（D）　←　B、D、C
> ・ポスターを貼る（P）　←　D
> ・装飾を考える（DC）　←　T
>
> どの仕事から、どのような順で行えばよいでしょうか。

Investigation 2（最短終了時間を見つける）



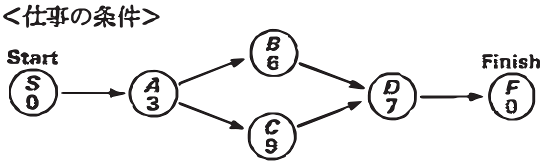
下図のグラフのように、仕事を終わらせるのにかかる時間や日数を入れて、仕事全体を終わらせるための最短時間を考える。(最短時間を与える路を「クリティカルパス」と言い、下図では、S−T−B−D−P−F である。)



Investigation 3（プロジェクトのスケジュールづくり）

下のような表を作り、クリティカルパスを見つけるための方法について考える。

<仕事の条件>



Task Analysis

Task	EST	LST	EFT	Slack Time	Critical Task?
A	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
B	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
C	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]
D	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]

EST= earliest start time

LST=latest start time

EFT=earliest finish time

Slack Time= LST-EST

Critical Task=クリティカルパス上の仕事

（２）「行列モデル」（コース２・単元１）

本単元は，コース２（10年生）の最初の単元であるので，行列の学習を，日本より，早い時期に位置づけていることがわかる。次のような特徴がある。

① 初期の段階で，行列の意味を読み取る活動を重視している。

② ０－１表現の行列を頻繁に扱っている。

③ 行列の和や積については，演算の仕方を天下り的に与えるのではなく，現実場面の題材を用いて、生徒に必要感を持たせながら，構成的に扱っている。

④ 行列の累乗を計算することの意味づけが、０－１表現やマルコフ過程に関わる題材を使うことでうまくなされている。

⑤ 行列を用いた連立方程式の解法を重視している。(逆行列を求める際に，グラフ電卓等を用いることを前提にしている。)

特徴的な２つの問題を紹介する。

例１）ソシオグラム

人間関係の調査結果を表す際に行列を用いる。例えば，５人のクラスメイト間で，いっしょに映画に行きたい人と５ドルを貸してもよい人を挙げさせ，その結果を右のような行列に表す。(前者は親しみ，後者は信用を表していると捉える。)行列は，横に見る。すなわち，A は B,C,D,E のいずれとも映画に行きたいと考えていることを表している。このような行列の意味を読み取る。

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & A & B & C & D & E \\
A & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
B & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
C & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
D & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
E & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

さらに，２つの行列を見ながら，「友達と考えているが信用はしていないのは誰か」などを考えさせる。その後，２つの行列の和を求め，同様のことを考えさせ，行列を加えることのよさに目を向けさせる。(例えば，「２」は，「友達であり，信用もしている」ことを意味する。)

例２）購入する靴のメーカの変動

現在自分が履いている靴のブランドと次に買うブランドの変化に関するデータを題材とした問題である。

	ナイキ	リーボック	フィラ
ナイキ	40%	40%	20%
リーボック	20%	50%	30%
フィラ	10%	20%	70%

１年間の購入者数がナイキ 700，リーボック 500，フィラ 400 だったとしたときの，その翌年の購入者を求めるという文脈で，行列の乗法を導入する。行列の２乗，３乗，・・・を求め，さらに先の購入者を予測する活動も行う。その際には，グラフ電卓を用いている。

（３）「ネットワークの最適化」（コース２・単元５）

最適化、アルゴリズムによる問題解決、木、最小全域木、最短路、ハミルトン路とハミルトン閉路、巡回セールスマン問題などについて学習を進める。次のような特徴がある。

① アルゴリズムを自ら作り出す活動を行わせた上で、既存のアルゴリズムを紹介し、比較、検討させる。

② 広範な分野からの題材を取り上げるとともに、問題場面を工夫し、解決の必要性が感じられるようにする。

ここでは、（１）と同様、中心となる教材を挙げながら、教科書の流れを示すことにする。

Lesson1　最適なネットワークの発見

グラフを用いて、最適なネットワークを求める。

Investigation1　コンピュータネットワークの最適化

次のような問題で導入する。

６台のコンピュータが直接あるいは間接につなげるようにしたい。互いに直接つなぐことのできるコンピュータと必要なケーブルの長さは、下の行列の通りである。このとき、必要最小限のケーブルの長さを求めなさい。

$$\begin{array}{c}
 \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\begin{bmatrix}
- & 9 & - & - & - & 3 \\
9 & - & 8 & - & 8 & 11 \\
- & 8 & - & 3 & 5 & - \\
- & - & 3 & - & 6 & 11 \\
- & 8 & 5 & 6 & - & 9 \\
3 & 11 & - & 11 & 9 & -
\end{bmatrix}
\end{array}$$

この問題での「最適」とは、互いのコンピュータをつなぐケーブルの長さがもっとも短い場合のことである。点と辺のグラフに表す、かつ、長さを抽象化（図上で比例配分しなくてもよい）するという発想が自然に出てくる問題設定である。

さらに、自分の求め方をアルゴリズム化させた上で、次のことの真偽について考えさせる。

a. 6台のコンピュータをつなぐのに必要なケーブルの長さが最小になるような答えは1通りだけである。
b. 与えられた状況に対する最短なネットワークは複数存在しうる。
c. 最短なネットワークを見つけるアルゴリズムは複数ある。
d. 最短なネットワークは連結していなければならない。
e. すべての点がネットワークに加わっていなければならない。
f. 最短なネットワークは、閉路を持たない（閉路になっている部分はない）。

次に、木（閉路のない連結なグラフ）、最小全域木（すべての点を含む総長が最小の木）を定義した後、次のクルスカルのアルゴリズムを紹介し、各自が作成したアルゴリズムと比較させる。

i)　すべての点をかく
ii)　閉路にならないような辺の中で、最短の辺を書き加える。そのような辺が複数あるときは、どれか1つを選ぶ。書き加える辺は、それ以前に書き加えた辺と連結している必要はなく、同じ長さの辺があるときは、その長さを繰り返し選んでよい。
iii)　閉路にならない辺を書き加えることができなくなるまで ii を繰り返す。

さらに、次の nearest-neighbor アルゴリズムを取り上げ、その対比を通して、効果的なアルゴリズムとは何かについて検討させる。

i)　辺をうすくしてグラフを書く
ii)　スタートの点を1つ選ぶ。
iii)　その点から、閉路にならないような最短の辺をかく。
iv)　すべての点にたどり着くまで、iii を繰り返す。

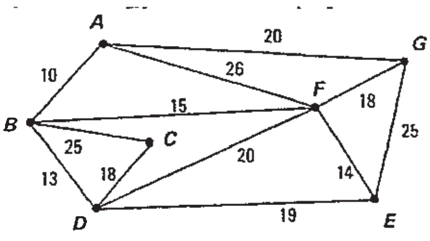
後の演習の中で、このアルゴリズムを修正したものとして、プリムのアルゴリズムを取り上げている。それは、上の iii を次のように修正したものである。

iii)　すでにできた木の中の点を持つ辺をすべて見つける。その辺の中から、閉路にならないような最短の辺をかく。そのような辺が複数あるときは、どれか1つを選ぶ。

Investigation 2　道路網の最適化

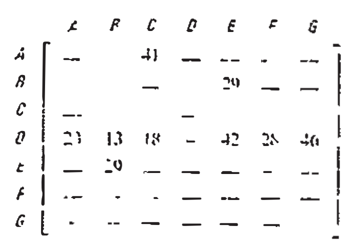
右図のように砂利道で結ばれた7つの町があり、このうちの何本かの道を舗装する計画がある。次の条件を満たす舗装道路網を求めなさい。

・いずれの町からいずれの町へも、直接あるいは別の町を経由して、舗装された道路だけを使って行くことができる。
・舗装する道路の総距離が最小になるようにする。



辺上の値は町間の距離

さらに、舗装後の各町間の距離を行列に表させ、列の和の意味や、道路網上での中心的な町と孤立している町について考えさせる(（右図)。



他に、興味深い題材として、次のようなものがある。

・コンピュータネットワークで、ケーブルの長さではなく、コスト

について考える。

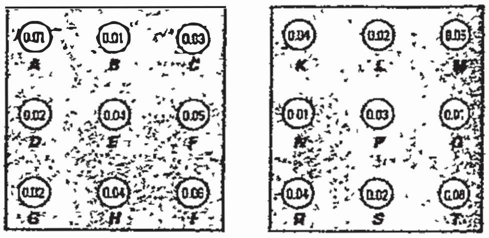
・除雪道路網

・電話連絡網（国際電話を含む）

・銅の採掘場所を試しぼりの結果から決定する。（右図）

（２地点の含有量の差の絶対値を辺上の値とし、最小全域木の長さで、密集している場所を判断する。）

・レストランの電灯の配線

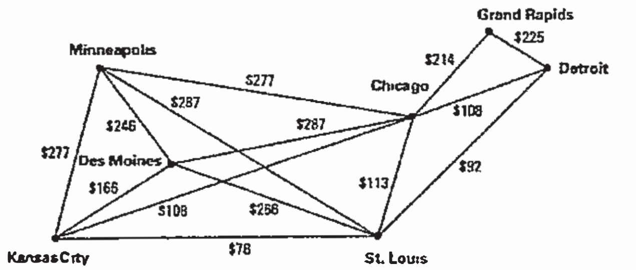


Lesson2　最短路と最短閉路

グラフを用いて、最短路や最短閉路を求める。

Investigation1　最短路

下の図のいくつかの都市間を移動するとき、航空運賃を最も安くする方法について考える。



他に、組み立てや除雪の作業時間を最短にする手順について取り上げたり、Lesson1 の Investigation 2 の舗装道路網の最短路を、行列を利用して見つけるグラフ電卓のプログラムを作ったりする。

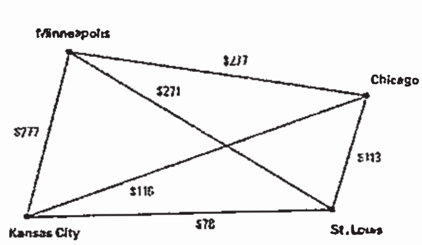
Investigation2　グラフゲーム

ハミルトン閉路（すべての頂点を 1 度ずつ通る閉路）に関する、次の２つのゲームを取り上げている。

世界周遊ゲーム：正十二面体の辺に沿って各頂点（都市）をちょうど１回ずつ通って、出発した都市に戻るような順路を見つける。

knight's tour 問題：$n \times m$ のチェス板のすべてのマスを、「騎士」が１回ずつ通って、出発したマスに戻るような順路を見つける。

Investigation3　巡回セールスマン問題



あるセールスマンが､図の各都市をそれぞれ１回ずつ訪ねて、出発した都市に戻りたい。可能なルートうちで、移動総経費が最小になる順路を見つける。

次の best-edge アルゴリズムを用いて考えさせるとともに、ii の２つの条件がなぜ必要かを考えさせる。

i)　辺をうすくしてグラフを書く

ii)　次の条件を満たす、まだ使っていない最短の辺を濃くする。

　✧　すべての点が含まれる場合を除いて、閉路にならないようにする。

　✧　３つの濃くした辺が出ている点がないようにする。

iii)　できる限り ii を繰り返す。

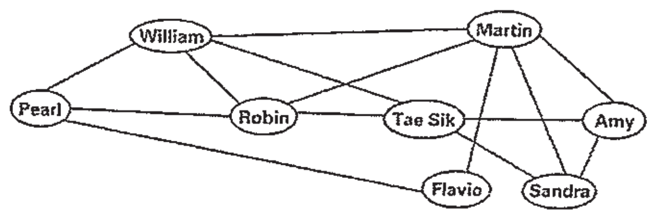
他に、興味深い題材として、次のようなものがある。

- コンピュータなどに使われているプリント基板には、数千個もの小さい穴を開ける。超高速の専用の機械を使うが、穴は原則的に１個ずつドリルで開ける。どういう順序で開けていくとドリルの移動時間を最短にできるか。
- グレイコードは、次の性質を持つ0-1の「続き」のリストを持つ。このとき、長さ３（３桁）の場合のリストを作成しなさい。
  - ➢ 与えられた長さのどの「続き」も、リストの中にある。
  - ➢ リストの中のどの「続き」も、その直前の「続き」と１カ所だけが異なる。
  - ➢ 最初と最後の「続き」も１カ所だけが異なる。

  ＊自然数が計算機の中で 2 進法により表現されている。しかし、それ以外にも自然数の '0' と '1' の 列としての表現で有用なものが存在する。それが、グレイコードと呼ばれているものである。2 進法は 0, 1, 10, 11 と始まるがグレイコードは、0, 1, 11, 10 と始まる。一般に、2 進法では n 桁のコードを生成するのに n 桁目を 1 にしてそこまでのコード を繰り返していたのに対し、グレイコードでは、n 桁目を 1 にしてそこまでのコードを逆の順番に用いている。例えば、 2進法では、 0111 の後は 1000 という具合に、1を加えることにより、多くの文字が 同時に変化する時がある。しかし、グレイコー ドでは、必ず1文字しか変化しない。

数	2進コード	グレイコード
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111

- 航空運賃を抑えるための営業所の位置の決定
- 新聞発行の手順の決定
- 右図の７人（互いに知り合いの２人が辺で結ばれている）を、円卓に、隣同士が知り合いになるように座らせる席順の決定

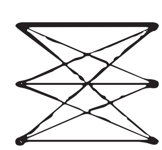


- 右の、４人がテニスの試合をしたときの結果を表している行列を、グラフに表して、ハミルトン路(すべての頂点を 1 度ずつ通る路)を見つけなさい。そして、４人の順位との関係を説明しなさい。(「行列モデル」でも扱った行列のべき乗との関係についても考察させる。)

Tournament Results

$$\begin{array}{r c} & \begin{matrix} J & S & F & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Josh (J)} \\ \text{Simon (S)} \\ \text{Flavio (F)} \\ \text{Bill (B)} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- 「ハミルトン路をもつ木はあるか」、「完全グラフはハミルトン閉路をもつか」、「右の２つの完全2部グラフ（２つの点集合V1, V2に分割したとき、V1同士・V2同士の点間には辺が存在しない（２部グラフ）が、V1とV2間の任意の2点間に辺が存在するグラフ）のどちらがハミルトン閉路を持つか」等について探究する。



- 次のダイクストラ法を示し、最短路を求めさせる。
  - i) スタート点を選び、〇をつける。スタート地点なので、そのとなりに「0」と書く。
  - ii) スタート点を通るすべての辺の中から最短のものを選び、濃くする。その辺の終点に〇をつける。その点のとなりに辺の長さを書き、その値に〇をつける。この値はスタート点からの最短距離である。

iii) ○のついた点から○のついていない点への辺に、その辺の長さと辺の端点に書いた丸数字の値の和を書く。もっとも小さい値の辺を濃くし、その辺の終点に○をつける。そして、点の横に、その値を書き、○をつける。その他の和は消す。

iv) ○のついた点から、○のついていない点への辺がなくなるまで繰り返す。

- 最小全域木を見つけるのに用いたnearest-neighborアルゴリズムを、巡回セールスマン問題に適用し検討する。
- コラム的に、Leonard M. Adleman（DNAコンピュータを用いたハミルトン閉路問題の解決）とFan Chung（ネットワーク論）の２人を取り上げる。

（４）「変化の離散モデル」（コース３・単元７）

本単元では、等差数列、等比数列、その他の数列、漸化式、差分、関数の反復や固定点を含む関数の反復について学習する。したがって、数学的には、日本の内容と大きく異なるわけではない。しかし、本単元のねらいは、逐次的で帰納的な変化を伴う状況を、表現し、分析し、問題を解決する能力を伸ばすことにあり、上記の数学的内容は、実世界における逐次的な変化をモデル化し、解析するための道具として位置づけられている。次のような特徴がある。

① 漸化式型の表現である NEXT-NOW（例えば、NEXT=0.6NOW+1500）を先に扱う。そして、テクノロジーを利用して、具体的な項を求める。漸化式から一般項を求める、いわゆる漸化式を解くことは扱わない。

② 「関数モデルの離散的な見方」として、１次関数や指数関数で表される問題場面を、主として表をもとにして、離散的に考察する活動を通して、等差数列や等比数列を導入している。さらに、ある区間の関数値の和を求めるという文脈で数列の和を導入したり、表から関数式を求める１つの方法として階差を取り上げたりしている。

③ 関数の反復（iterate）を、数列の応用として扱っている。関連して、カオスについても取り上げている。

特徴的な２つの問題を紹介する。

例１）マスの管理

野生生物の管理が重要になってきている。その例として、マスの数の管理を考える。

a. 池にいるマスの数を管理するのに必要な要素をできるだけあげよ。

b. 現在のマスの数をどうやって見積もるか。

c. なぜマスの数の年ごとの変化を予想することは役に立つか？

例えば、次のように仮定して考えていく。

・最初の数を約 3000 匹。

・毎年およそ 20%減る。

・1000 匹加えられる。

さらに、これらの仮定の値を変えたときの変化の様子も考察する。

例２）スカイダイビング

スカイダイバーが降下する。次の表は、10 秒ごとに、降下した距離を表している。

Skydiving

Time n (in seconds)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distance Fallen D_n (in feet)	16	48	80	112	144	176	208	240	272	304

a. 3秒間に降下した総距離は何フィートか。
b. D_nはどのような数列か。
c. 20秒間に降下した総距離を求めなさい。

（5）「数え上げのモデル」（コース４・単元４）

コース１ー３で、すでに確率を学習しているが、そこでは$_nP_r$, $_nC_r$を発展内容としてしか扱っていない。本単元で、これらを統一的にまた論理的に学習する。扱い方は日本に似ている。次のような特徴がある。

① 電話番号の桁を増やす状況やコンピュータやATMのパスワードの設定の状況など、今日的な内容が取り上げられる。

② 丁寧で細かい学習のステップを踏んでいる。例えば、階乗「！」の表記法を導入したあと、それが順列の求め方とどのように関連するか、順列の数が！を使ってどのように表されるかを考えさせる。次に、求めた式が正しいかを具体的な数値で確認し、最後に式で証明する。

③ パスカルの三角形や二項定理の扱いでは、多様な見方・考え方をするという意図が見られる。例えば、$_nC_k={}_nC_{n-k}$を単に代数的に証明するだけではなく、組合せの選び方による組合せ的推論を用いても説明することを要求している。パスカルの三角形から読みとれる性質$_6C_2={}_5C_1+{}_4C_1+{}_3C_1+{}_2C_1+{}_1C_1$についても同様である。

（6）「情報数学」（コース４・単元９）

本単元では、アクセス・安全性・正確さに焦点を当てながら、情報処理に関わる数学を扱う。次のような特徴がある。

① インターネット上での検索エンジンの使い方をもとに、AND,OR,ANDNOTの意味や、集合の記号の用い方やベン図の意味について学習する。これ以外の集合論の用語（補集合・部分集合・真部分集合・空集合・排反）は、純粋数学的な文脈で説明される。

② インターネット上で情報を安全に送るための技術としての暗号を取り上げる。対称鍵暗号形式と公開鍵暗号形式、ROT13やシーザーの暗号（置換暗号）、ヒルの暗号（行列操作を使った暗号）、RSA方式等をもとに、暗号化と解読方法を学習する。

③ 情報を正確に伝えることの重要性の観点から、バーコードを読み取る際に、誤りを検出し、修正する方法について学習する。その上で、郵便番号（ZIP）と商品番号（UPC）のIDナンバーの仕組みについて学習する。

4　おわりに

本稿では、学校数学における離散数学のあり方についての示唆を得るために、第一に、Henry O. Pollakの、数学的モデル化と離散数学との関係に関する主張をまとめた。第二に、米国の数学科カリキュラム開発プロジェクトCPMPの離散数学の位置づけやその扱いについてまとめた。日本の高等学校において、数学的モデル化はほとんど扱われていないと思われる。Pollakの述べるように、また、CPMPの教材例を見てもわかるように、離散数学は、数学的モデル化を扱うことに対する「敷居」を低くする。したがって、数学的モデル化の視点から、離散数学をカリキュラムに取り入れる価値や、そこで扱う適切な問題について検討することも大切であることがわかった。また、CPMPでは、離散数学の学習指導において、抽象化やアルゴリズム開発の過程を大切にし、教科書もその

ように構成されている。このことは、カリキュラム導入後の指導のあり方を考える上での示唆となる。

引用・参考文献

Arthur F.Coxford et al (1998) “Contemporary Mathematics in Context a Unified Approach”. Course1~4. McGraw−Hill. 1998

Arthur F.Coxford et al (1998) “Implementing the Core-Plus Mathematics Curriculum”. McGraw−Hill. 1998

Henry O.Pollak(1997) ”Mathematical Modeling and Discrete Mathematics”, Discrete Mathematics in the Schools. AMS & NCTM. pp.99-104.

Henry O.Pollak(2003) ”A History of the Teaching of Modeling”, A History of School Mathematics Volume1.NCTM

西村圭一（研究代表）(2004)『中等教育数学科カリキュラムの開発に関する基礎的研究ー米国の教科書の分析及び授業実践を通してー』, 東京学芸大学附属学校研究会プロジェクト研究成果報告書, 564pp

西村圭一・植野美穂・松元新一郎・田中賢治・清野辰彦・本田千春・細矢和博・指田昭樹・中本信子（2005）「中等教育段階の数学カリキュラム開発に関する基礎的研究－米国の Core-Plus Mathematics Project の分析を通してー」, 日本数学教育学会誌『数学教育』第 87 巻第 3 号, pp.2-11

アメリカの高等学校への離散数学の導入例－SIMMS－

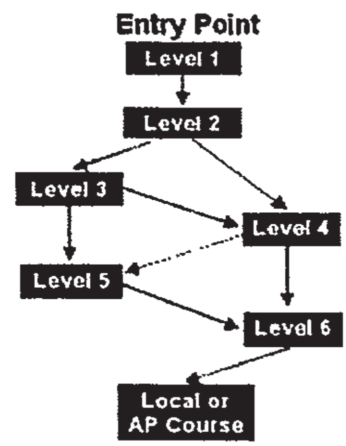
高橋　広明

千葉県立松戸六実高等学校

【要約】本稿では，SIMMS カリキュラムに準拠した教科書の離散数学分野，特にグラフ理論に関わる内容を概観した。この教科書では，現実的な場面をもとに統合的に数学が扱われており，日本の教科書にはない特徴を持っている。またその中では考察すべき視点が明示されており，発問という観点からも示唆に富むものがある。

1. Systemic Initiative for Montana Mathematics and Science Project (SIMMS) について

SIMMS は NCTM のスタンダードに準拠し，テクノロジーを用いたモデル化過程を取り入れた第 9 学年から第 12 学年までのカリキュラムである。これらのカリキュラムの中には，代数，幾何，確率や統計のような伝統的な内容とともに，グラフ理論やゲーム理論，カオス理論のような内容も含まれている。



SIMMS カリキュラムに則って策定された教科書が Integrated Mathematics: A Modeling Approach Using Technology（以下 SIMMS-IM）で，これは Level 1(第 9 学年), Level 2(第 10 学年), Level 3,4(第 11 学年)，Level 5,6(第 12 学年）と分かれており，各 Level は約 15 単元で構成されている。これらの単元は，現実世界(real world)の問題から数学的内容に発展するように構成されている。右図のように，Level 1 と Level 2 は必修で，それ以降は主に Level3 と Level4，および Level5 と Level6 の選択となる。その選択方法としては，将来理数系へ進む者は Level4 と Level6 を選択し，それ以外の者は Level3 と Level5 を選択するのが一般的である。

各単元の流れは，まずその単元の主課題となる「活動」(Activity)が3つから5つ用意されている。これは主に解決する問題の状況を示したものである。各「活動」が提示された後，自力解決としての「探究」(Exploration)，集団検討としての「議論」(Discussion)と続く。これらにおいては「活動」で提示された内容に関連した，解決すべき問題の形式で提示されている。また，「探究」や「議論」の中で「数学ノート」(Mathematics Notes)が盛り込まれており，そこでは数学的な定義や概念が紹介されている。そして各「活動」の最後には，生徒が家庭で学習するための「課題研究」(Assignment)と，さらに発展的な内容の「調査プロジェクト」(Research Project)が用意されている。

2. SIMMS-IM における離散数学

SIMMS-IMの特徴は，統合(Integrated)という名が示すとおり，各単元には考察すべき主要な数学的テーマがあるのだが，それに付随した様々な数学的な内容がその単元に散りばめられている。したがって与えられる状況は異なっても，同じ数学的内容がいろいろなLevelのいろいろな単元に重複して存在することもある。すなわち，数学的な内容や系統性を中心に据えるのではなく，現実

的な状況から数学化する中でいろいろな数学的内容を学習する構成になっている。

このSIMMS-IMのLevel1からLevel6の中で，離散数学に関わる単元を抜粋したのが次の表である。ここで，例えば1-10と記してあるのは，それがLevel1の第10単元であることを示している。

数え上げ	1-10	1-11	3-4	4-11		
数列	1-13	2-14	3-13	6-9	6-10	
反復と再帰	2-15	6-15				
行列	2-1	2-7	3-1	5-4		
離散確率	1-8	2-5	3-6	5-4	5-6	6-11
グラフ理論	1-11	3-11	4-1	5-3		
アルゴリズム	1-11	2-15	5-3	5-10		
社会的決定	2-4	3-8				
論理	3-9	4-9	5-9			
ゲーム理論	5-12					
剰余	6-4					

各項目における具体的な指導内容は以下の通りである。

数え上げ

1-10	ベン図（共通部分，和集合，空集合），集合の要素の個数，樹形図，積の法則
1-11	樹形図，積の法則
3-4	積の法則，順列，組合せ
4-11	積の法則，順列，組合せ，パスカルの三角

数列

1-13	数列，等差数列と等比数列，漸化式と一般項
2-14	漸化式と一般項，算術級数と幾何級数，極限
3-13	フィボナッチ数列，黄金比
6-9	階差数列，差分
6-10	数学的帰納法

反復と再帰

2-15	再帰的定義
6-15	フラクタル，カオス，ロジスティックモデル

行列

2-1	行列，行列の和・差・スカラー倍・積，要求行列(requirement matrix)
2-7	線形計画法における連立方程式の係数行列，逆行列
3-1	線形計画法における連立方程式の係数行列，逆行列，単位行列，行列式
5-4	遷移図，マルコフ過程，遷移行列

離散確率

1-8	経験的確率と数学的確率，標本空間，期待値，公平なゲーム

2-5	経験的確率と数学的確率，排反事象，独立事象
3-6	条件付き確率，排反事象，独立事象，二項定理，反復試行の確率，期待値，確率分布
5-4	反復試行の確率
5-6	大数の法則，確率変数，確率分布，期待値
6-11	条件付き確率，確率分布，パスカルの三角形，二項定理，二項確率，期待値

グラフ理論

1-11	グラフ，重み付きグラフ，道と回路，ハミルトン回路，有向グラフ
3-11	グラフ，単純グラフ，完全グラフ，道，閉路，回路，ハミルトン回路，有向グラフ
4-1	グラフの彩色，彩色数，グラフの平面性
5-3	ネットワーク，PERT，クリティカルパス

アルゴリズム

1-11	力ずく(brute force)アルゴリズム，貪欲(greedy)アルゴリズム，nearest neighborアルゴリズム，cheapest linkアルゴリズム
2-15	アルゴリズム，フローチャート
5-3	nearest neighborアルゴリズム，cheapest linkアルゴリズム
5-10	走査変換(scan-conversion)アルゴリズム

社会的決定

2-4	割り当てにおけるJefferson法，Webster法，Hamilton法，Huntington法
3-8	公平分割におけるcut-and-choose法，continuous-knife法，還元(reduction)法，bid-and-divide法

論理

3-9	選言と和集合，連言と共通部分，否定と補集合，真理値表
4-9	真理値，仮定と結論，全称命題と存在命題，真理値表，命題の逆・裏・対偶，直接証明と間接証明
5-9	論理と真理値表，集合と論理

ゲーム理論

5-12	ゲーム理論における利得行列，鞍点

剰余

6-4	剰余計算，合同式

3. SIMMS-IMにおける単元の具体例

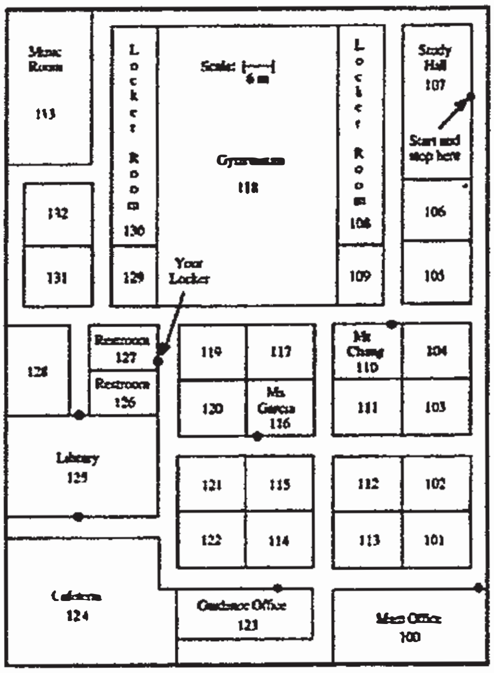
ここで実際に，SIMMS-IMでの単元の内容を紹介する。ここでは主に各「活動」の「探究」と「議論」についてまとめる。なお，文中の鎖線枠は教師用資料を参考に筆者の考えを示している。

(1) Level 1・単元 11（Going in Circuits）

この単元の「活動1」ではまず，校舎内のいろいろな部屋を効率的に回るためにはどうしたらよいかという問題の解決を目標とし，重み付きグラフを導入し，各点を一度だけ通るハミルトン回路としての最適経路決定問題としてモデル化している。さらに「活動2」「活動3」では全国ツアーを

するロックバンドのマネージャーという立場でこの最適経路決定問題を考え，その中でnearest neighbor法とcheapest link法の2つのアルゴリズムを紹介している。

まず状況提示として，右図のような校舎の平面図が与えられており，ある生徒が次の6つの作業をこなすことを考える（ただし（　）内は各作業の所要時間を示している)。



- 事務室：新しい生徒手帳への記入（7分）
- 教育相談室：カウンセリングの予約（1分）
- 116 教室：科学の試験についての質問（10分）
- 110 教室：フランス語の履修についての質問（15分）
- 図書館：英語の本を探す（15分）
- ロッカー：ノートを取ってくる（1分）

これらを行う条件として次の3つを要求している。

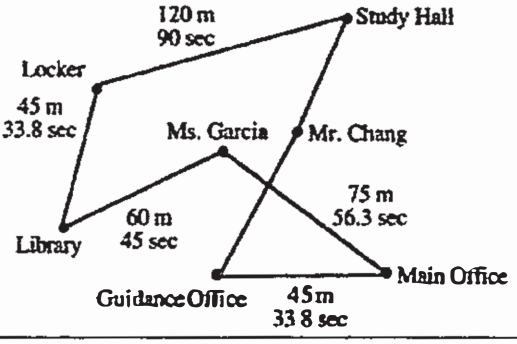
- 自習室 107 教室から出発し，またそこに戻る
- 上記すべての部屋を回り，作業を完遂する
- 授業時間 55 分以内に自習室に戻る

これらの教室を回り自習室へ戻ってくる効率的な経路をどのように見つけることができるだろうか，という問題を提起して「活動 1」へと続く。

活動 1

この問題を解決するために，右図のようなグラフを導入している。このグラフをもとに「探究」「議論」が行われる。なお，このグラフの数学的な定義等については「探究」や「議論」の途中で「数学ノート」として与えられている。

探究



a. 距離が未記入の箇所について縮尺を用いて測定し，歩速度を 4.8km/h として所要時間を求めよ。さらに経路全体を歩く所要時間と，作業を行う時間も含めた総所要時間を求めよ。

数学ノート
ここでグラフ，および重み付きグラフについて定義している。

b. 先のグラフで示した経路よりも所要時間の少ない経路を見つけグラフで表し，総所要時間を求めよ。

この探究ではいろいろな経路を実際にグラフ表現してみて，その中から最適と思われる経路を探るという活動中心の探究である。

議論

a. 探究で考察したグラフの中でどれが最適と思われるか考えを述べよ。
b. 最適な経路とはどのような経路であるか。
c. それが最適な経路であるということはどうすれば確かめることができるか。

<u>数学ノート</u>
ここで道(path)，回路(circuit)およびハミルトン回路について定義している。

d. グラフの頂点は何を表しているか。
e. グラフの辺は何を表しているか。
f. 「探究」でのグラフはハミルトン回路であるだろうか。

ここで b.の反応例としては「総所要時間が少ない経路」という程度であり，また c.についても最適であることを証明することを求めているわけではなく，「すべての経路について調べればよい」という反応を期待したものである。
後半の d.～f.はグラフ表現の方法およびハミルトン回路の定義についての確認と考えられる。

活動 2

ここではロックバンドのマネージャーという立場で諸問題の解決に当たる。

<u>探究</u>

マイアミにいるバンドがロサンゼルスまで行くことを考える。マイアミ発の飛行経路はシカゴ行きとカンザスシティ行きの 2 系統あり，シカゴおよびカンザスシティからはデンバー行き，ソルトレイクシティ行き，ラスベガス行きがそれぞれあり，デンバー，ソルトレイクシティ，ラスベガスからはすべてロサンゼルスへの直行便がある。
a. 各辺に向きが定められたグラフを有向グラフという。飛行経路を表す有向グラフを描け。
b. マイアミからロサンゼルスまでのすべての経路を樹形図で表せ。
c. マイアミからロサンゼルスまでの飛行経路は何通りあるか。

<u>議論</u>

a. マイアミからロサンゼルスまでの経路の数をどのように求めたか述べなさい。
b. もっと都市の数が増えたときもあなたのその方法でうまくいくだろうか。
c. 数え上げの基本原理とは，実行される作業の総数を求める方法である。ある事象が起こるのが m 通りで，それに引き続いてある事象が n 通り起こるとき，2 つの事象が起こるのは $m \cdot n$ 通りである。マイアミからロサンゼルスまでの経路の数を求めるのに，どのように数え上げの基本原理を用いたのか述べなさい。

活動 2 での「探究」と「議論」では，飛行経路をグラフ表現することでモデル化し，その飛行経路の場合の数を樹形図をもとに考察することが目的である。しかし都市の数が多くなると樹形図ですべてを書き出すことは容易ではない。そこで数え上げの基本原理を導入し，樹形図の枝の伸び方からその数え上げの基本原理をどう適用しているのかを議論させている。

活動 3

この活動では，効率的なツアーの回り方，すなわち時間や費用を最小に抑える経路の決定を目標

としている。

探究

コンサートの開催地は，マイアミ，シアトル，シカゴ，ニューヨーク，そしてカンザスシティである。下の表はこれらの都市間の距離を km で示したものである。

	シアトル	カンザスシティ	シカゴ	ニューヨーク
マイアミ	4400	1997	1912	1757
ニューヨーク	3875	1765	1147	
シカゴ	2795	667		
カンザスシティ	2424			

a. (「活動 2」の課題研究のなかで力ずく(brute force)アルゴリズムが紹介されている。力ずくアルゴリズムとはすべての可能な解を試すアルゴリズムで，可能な解をすべて書き出すのに樹形図が用いられる。)
力ずくアルゴリズムを用いずに，マイアミから出発しそこに戻り，各都市を 1 回だけ周り，できるだけ少ない距離で回るツアーを計画しなさい。

数学ノート
ここで貪欲アルゴリズムの一つとして最近傍(nearest neighbor)アルゴリズムが紹介されている。それは以下のステップを踏むアルゴリズムである。
1. 任意の頂点から始め，最も近い頂点に向かい辺を引く。
2. この頂点から，まだ訪れていない頂点に対して最も近い頂点に向かい辺を引く，というプロセスを，すべての頂点を訪れるまで続ける。
3. ハミルトン回路となるように，最初の頂点へ戻る。

b. 最近傍アルゴリズムを用いて，表の 5 都市のそれぞれを出発点と終着点とする重み付きのハミルトン回路を描け。
c. 5 つのグラフを比較し，どのぐらふが総距離が最も少ないか求めよ。
d. このアルゴリズムを用いて見つけた経路と a.で見つけた経路を比較せよ。

この最近傍アルゴリズムは総距離が少ない経路を容易く見つけてはくれるが，最適ではない。このことに気づかせるための発問である。

議論

a. 最近傍アルゴリズムと力ずくアルゴリズムの利点をそれぞれ考えよ。
b. 問題解決において最近傍アルゴリズムが適切な手法であるような状況を考えよ。
c. 問題解決において力ずくアルゴリズムが適切な手法であるような状況を考えよ。

最近傍アルゴリズムは最適ではないが容易に総距離が比較的小さい経路を与えてくれるのに対し，力ずくアルゴリズム（樹形図を描くことなど）は，すべて書き出せば必ず最適な経路を見つけることはできるが，膨大な経路を考えなくてはいけないこともある。したがって問題 a.〜c.ではそれぞれの特徴をよく理解させ，状況に応じて使い分ける必要があることを主張しているものと考えられる。

この単元はこれで終了だが，「活動 3」の「課題研究」でグラフの重みが距離ではなく経費であるようなときのアルゴリズム，最小費用連結（cheapest link）アルゴリズムを紹介している。これは最近傍アルゴリズムとほとんど同じである。

(2) Level 3・単元 11（Our Town）

この単元では，Our Town という街を舞台にし，グラフ理論の初歩について学習することを目標としている。「活動 1」では，街の会合に出席し，住民と握手することを想定して握手定理を理解することを目的としている。その中でグラフ理論における基本的な定義を与えている。「活動 2」では，街にある橋を渡ることを考え，ハミルトン回路やオイラー回路について考察し，「活動 3」では隣接行列を用いて，グラフの行列表現と行列のべき乗について学ぶ。

活動 1

Owr Town という街では，今新しい橋を建設すべきかどうか議論しているという想定である。その会合で出席者同士が握手をするという状況を設定している。

探究

議論を円滑に行うために小グループに分かれることになった。グループのメンバーはお互いに握手を交わし，簡単な自己紹介を行った。

a. 小グループの人数が 2 人の場合，握手の回数を求めよ。

b. 1 人増え，人数が 3 人になったとき，グループの人すべてがお互いに握手をするとき，握手の総回数を求めよ。

c. グループの人数が，4 人，5 人，6 人，7 人，10 人のとき，すべての人が交わす握手の総回数をそれぞれ求めよ。

ここまでの探究で，人数と握手の回数との間にある何らかの規則性を発見させようとする意図がある。

数学ノート

ここで頂点，辺およびグラフを定義している。さらにループを持たないグラフとして，単純グラフも定義している。

d. c.の 6 人の場合で，その状況をモデル化したグラフを描け。その際，頂点は人を表し，辺は握手していることを表すものとする。

e. グループの人数が 100 人の場合，握手の総回数を求める方法を見つけよ。

f. n 人のグループでの握手の総回数を導き出す公式を考えよ。

握手の状況とグラフとの関連について，次の議論で確認している。

議論

a. 探求 d.のグラフにおいて，頂点と辺の数は，人数と握手の回数とどのように関係しているであろうか。

b. すべての可能な握手の様子がグラフに表されているかどうかを，どうすれば判断できるであろ

うか。

c. クラスの他の生徒のグラフとあなたのグラフを比べてみなさい。違ったように見えるが，同じ状況をモデル化しているグラフの例を２つ述べなさい。

d. 探求 f.で求めた公式をグラフによってどのように裏付けしますか。

この議論で，まだ定義していないが，すべての握手の状況を表すグラフは完全グラフになっていることを気づかせる意図がある。握手の状況を完全グラフとして視覚化することによって，探究 f.での公式を説明することが可能である。

数学ノート

ここで異なる２頂点がすべて１本の辺で結ばれている単純グラフを完全グラフとして定義しており，さらに，各頂点から出ている辺の本数を次数として定義している。さらに次数の偶奇により奇次数，偶次数を定義している。

この後に「課題研究」が続くが，その中の「数学ノート」で，道(path)，連結(connected)，閉道(closed path)，回路(circuit)，ハミルトン回路(Hamiltonian circuit)が定義されている。

数学ノート

どの辺も２回以上現れない頂点の列を道という。

どの２頂点にも道が存在するとき，そのグラフは連結であるという。

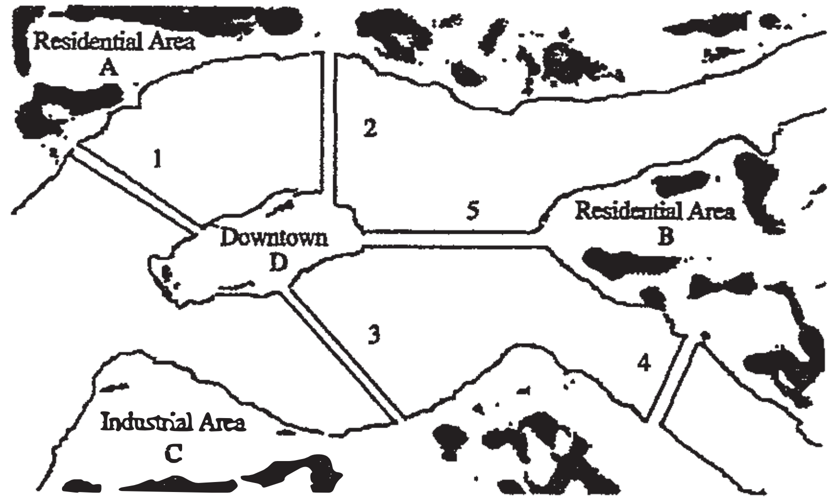
始点と終点が同じ頂点である道を閉道という。

どの頂点も２回以上通らない閉道を回路という。

グラフのすべての頂点を一度だけ訪れる回路をハミルトン回路という。

活動２

Owr Town の街の様子を表した下の図をもとに探究が始まる。



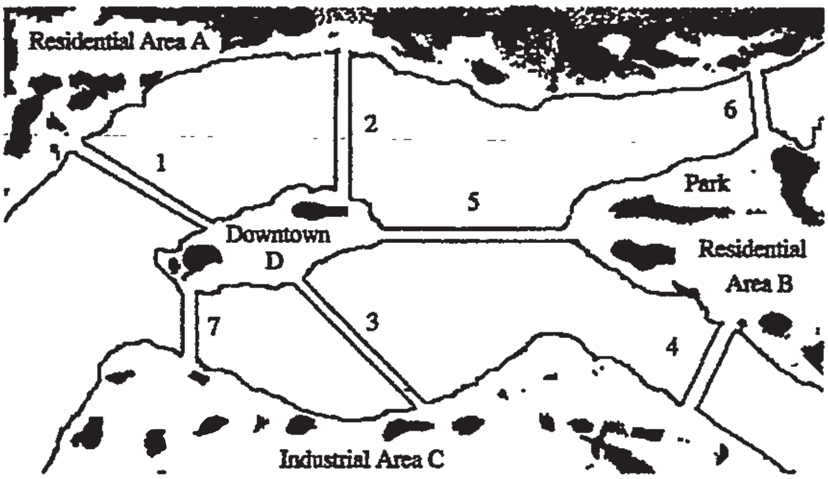
探究１

この街に住む学生が，出発点を選びそこからすべての橋を１回だけ使ってもとの場所に戻る道を探そうとしている。

a. Our Town の地図を表すグラフを描け。

b. 出発点として地域を選びなさい。この地点から始めて，すべての橋を 1 回だけ通るような閉道は存在するだろうか。存在するならその道を図示せよ。そのような道が存在しないのであればなぜ存在しないのか説明せよ。

c. Our Townの人口の増加に対応するために，都市計画者はさらに2つの橋を建設することにし，橋は全部で 7 本となった。これらの橋（6,7 と表示してある）を次の図に示してある。7 本すべての橋を含むように街の地図をグラフで表し，b.の問題を考えてみよ。



グラフ化することで，これらの問題は一筆書きが可能かどうかの問題と同一であることを認識させる意図がある。

<u>議論 1</u>

a. 探求 1 で描いたグラフは単純グラフであるか。考えを説明せよ。

b. それぞれの橋を 1 回しか通らないような閉道を探る活動で，橋の数はどのように関係しているか。

c. 探究 1 でのグラフに完全グラフはあっただろうか。またともに連結グラフであっただろうか。

<u>数学ノート</u>
すべての辺を 1 回だけ通って周回できる連結グラフを周遊可能(traversable)であるという。

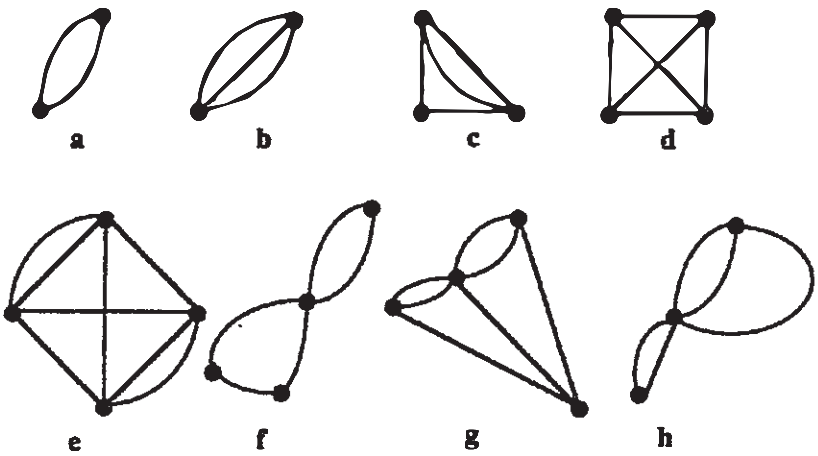
d. ハミルトン回路を持つグラフはすべて周遊可能か。

e. すべての周遊可能なグラフはハミルトン回路を持つであろうか。

ハミルトン回路と周遊可能なグラフは混同しやすいが，これらの議論を通して，グラフが周遊可能であることとハミルトン回路を持つこととは必要条件でも十分条件でもないことを確認している。

<u>探究 2</u>

この探究では，グラフが周遊可能であるための必要十分条件を与えたオイラーの方法について考察している。そのために次の 8 つのグラフを考察することから始めている。



a. それぞれのグラフについて，各点の次数を求め，周遊可能な道が存在するグラフがあれば，それを求めよ。

b. 上の問題に答えるために，次の表を完成せよ。

グラフ	奇次数の頂点の数	偶次数の頂点の数	周遊可能かどうか？
a			
b			
c			
d			
e			
f			
g			
h			

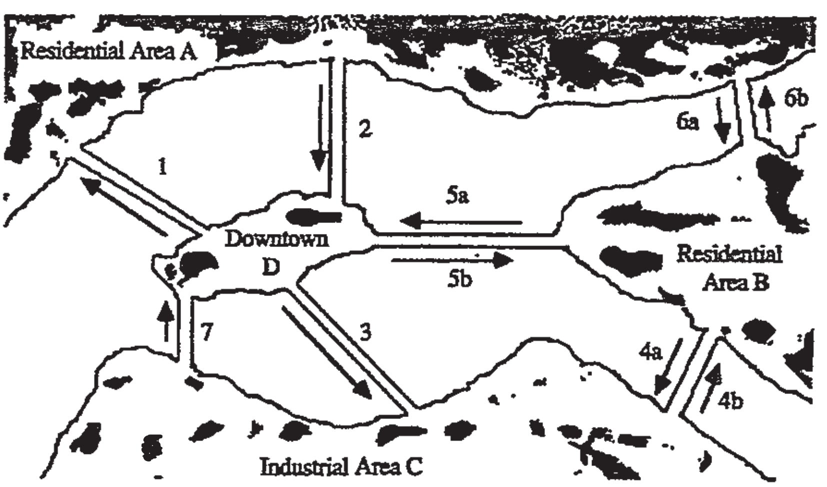
c. 上の表から，グラフが周遊可能となるための規則性を見つけよ。

議論 2

a. グラフが周遊可能であることと，そのグラフの頂点の次数との関係は何か。

b. a.で考えた関係を用いて，Owr Town での 5 本の橋の場合と 7 本の橋の場合のグラフは周遊可能であるか答えよ。

活動 3



Our Town の交通の流れをよくするために，都市計画者は街にある橋で運行を制限した。次の図に示すように，1,2,3,7 の橋は一方通行となった。4,5,6 の橋は対面通行である。橋への交通が規制されたので，他の地域へ行く場合にかなり影響がある。本活動では，障害を避けるルー

トを決定するのにグラフを用いる。

探究

Our Town の高等学校は，繁華街(downtown)の島にある。ある日の学校から自宅への帰り道，繁華街地区にかかっている自宅から最寄の橋が，事故で封鎖されていた。できるだけ早く自宅へ帰るのに使える別ルートはどれだろうか。この探求で，可能なルートを探るのに行列を使うことになる。

> 数学ノート
> 各辺が一定の方向を持っているようなグラフを有向グラフまたはダイグラフという。

a. 地図から，可能な通行の方向を示す，橋の有向グラフを描け。

b. 1 本橋ルートとは，ある地域から別の地域へ行くのに，一つの橋だけ使うルートのことである。次の表は，Our Town の各地域から他の地域へ行く 1 本橋ルートの行列の一部を記入したものである。例えば，A 行 B 列は A から B への 1 本橋ルートが 1 つあることを示している。有向グラフを使いながらこの表を完成せよ。

へ

から	地域	A	B	C	D
	A	0	1	0	1
	B		0		
	C			0	
	D				0

c. 橋 5 が補修のため閉鎖されているとする。この場合，D 地域から B 地域へ直接行くのは不可能である。橋の番号を使って， D から B へ行くとき，2 本橋を使う場合と 3 本橋を使う場合のすべてのルートを記述せよ。

d. 橋 5b が閉鎖されているとする。このとき，a.で描いた通行の方向を表している有向グラフから，5b の辺を取り除き，b.のように，1 本橋のルートを表す行列を作成せよ。

e. d.での有向グラフを用いて，Our Town の各地域間で，2 本橋を使うルートの数を答えよ。これらの数値を活用して，2 本橋ルートを表す行列を求めよ。注意：2 本橋ルートとは，ちょうど 2 本の橋を使って行けるルートのことである。この 2 本は同じ橋を使ってもよい。
さらに，2 本橋の行列で，D から B へ向かうルートの個数を表している要素を答えよ。この数値と c.での解答を比較するとどうだろうか。

f. d.で作った行列を 2 乗せよ。この行列と e.で作った行列とを比較せよ。

g. d.で作った行列を 3 乗せよ。さらに 3 乗した行列の D 行 B 列の要素を答えよ。この数値と c.の 3 本橋の数値を比べるとどうなっているだろうか。

議論

a. 1 本橋ルートの行列を 2 乗すると，どんな情報が得られるだろうか。

b. 1 本橋ルートの行列を 3 乗すると，どんな情報が得られるだろうか。

c. 1 本橋ルートの行列を n 乗すると，どんな情報が得られるだろうか。

d. 探求 g で，橋 5b が閉鎖されたときの 1 本橋ルートの行列を 3 乗した。この行列の要素は，橋 5b が閉鎖されたときの 3 本橋ルートの個数を表している。これらのルートも道であるか。

行列については第9学年での Level 2 ですでに扱われているが，グラフの行列表現はここで初めて扱われる。グラフを行列で表現することによって，行列の積の有用性が改めて認識できるのではないだろうか。

4. おわりに

今までグラフ理論の内容を中心に，単元を概観した。内容の構成としては，モデル化過程を重視しているにもかかわらず現実の場面ではなく，現実的な場面を想定していることに疑問を感じるところはあった。しかし，統合数学(Integrated Mathematics)の名の通り，与えられた状況をもとに，様々な数学的内容が散りばめられており，日本のカリキュラムと比較すると非常に新鮮であった。このようなアプローチも参考にすべきではないだろうか。

また，先に紹介した Level 1・単元 11（Going in Circuits）での主題は最適化であり，その中でアルゴリズムの考え方に触れている。最適化は目的が明確であるので学ぶ意義を感じやすい内容であると考えるが，我が国ではあまり扱われていない。このような内容の教材についても大いに参考になる。さらに Level 3・単元 11（Our Town）では，グラフで表現することとそれを行列で表現することが扱われている。特に“グラフで表現する”ことに関しては日本の高等学校数学で扱われることはほとんどない。しかしグラフで表現することによって視覚的に物事の関係を把握することができる。実際の授業でグラフ理論にまで踏み込んで指導することは困難であっても，“グラフで表現する”活動は是非とも取り入れたい内容である。また，グラフと行列を関連付けることによって，例えば行列の積の意義を，新たな視点で感じ取ってもらうこともできるであろう。

わずか二単元を概観したに過ぎないが，以上のように，そこからはいろいろな示唆を得ることができる。我が国もこのような内容を積極的に導入すべきではないだろうか。

【参考文献】

Montana council of teachers of mathematics *SIMMS INTEGRATED MATHEMATICS: A MODELING APPROACH USING TECHNOLOGY LEVEL 1～6 STUDENT EDITION*

Montana council of teachers of mathematics. *SIMMS INTEGRATED MATHEMATICS: A MODELING APPROACH USING TECHNOLOGY LEVEL 1～6 TEACHER EDITION*

イギリスの高等学校における離散数学

長崎　栄三
国立教育政策研究所

【要約】イギリスの高等学校においては，離散数学は，非理数系の「数学の利用」として扱われている。離散数学の主な内容は，アルゴリズム，グラフ理論，ネットワーク，マッチング，クリティカルパス分析，線形計画法，動的計画法，ゲーム理論である。この内容に即したある教科書は，それぞれのアルゴリズムや原理の詳しい説明や例で手順を理解し，それらの手順を問題によって身に付けていくようになっており，生徒が発見的にそれらを見出すという構成にはなっていない。

1．はじめに

イギリスの高等学校の数学教育は，「一般教育証明書」(GCE : General Certificate of Education) の試験のための細目（試験細目）によって規定されている。その試験細目は，試験委員会 (Awarding body) が，資格・教育課程機関 (QCA : Qualifications and Curriculum Authority) が作成する「一般教育証明書」の「教科規準」に基づいて作成する。そして，教科書は，試験要目に沿った試験内容に即して作成されている。GCE には，前期上級段階（AS レベル : Advanced Subsidiary level）と上級段階（A レベル : Advanced level）があり，数学の試験細目は，純粋数学，力学，統計学，応用数学などからなっている。そして，前期上級段階には，GCE の数学を受ける生徒を増やす目的で，「数学の利用」(Use of mathematics) が加わっている（長崎，2003)。

「数学の利用」においては，生徒は，数学が自分の学習や自分の周りの世界の状況を意味あるものにするために，どのようにして数学を応用するかを学ぶ。「数学の利用」の試験細目は，オックスフォード・ケンブリッジ・RSA (Royal Society for the Encouragement of Arts, Manufactures. and Commerce)（OCR）,エデクセル（EDEXCEL)，評価・資格連合（AQA）の 3 つの試験委員会によって作られている。

2．離散数学の試験要目の内容

離散数学は，数学の応用を学ぶための「数学の利用」に含まれている。イギリスの離散数学は，理系の数学というよりも，非理系のための使う数学の中にあると言えよう。

「数学の利用」の試験要目を作っている 3 つの試験委員会とも，2004 年からの指導の対象となり 2005 年からの評価に使われる離散数学は，「意思決定の数学（Decision Mathematics)」または「意思決定（Decision)」という標題にしており，いずれも 2 つの構成要素（「構成要素」はモジュールまたはユニットと言われている）の D1，D2 から構成している。「意思決定の数学」または「意思決定」のそれぞれの内容構成は，各試験委員会によって若干異なるが，概ね，次の内容によって構成されている。

アルゴリズム，グラフ理論，ネットワーク，マッチング，クリティカルパス分析，
線形計画法，動的計画法，ゲーム理論

各試験委員会の 2005 年の評価からの離散数学の試験要目の内容構成は，次の通りである。

（1）オックスフォード・ケンブリッジ・RSA（OCR）の「意思決定の数学」

「意思決定の数学　1」（Decision Mathematics 1：D1）

アルゴリズム，グラフ理論，ネットワーク，線形計画法

「意思決定の数学　2」（Decision Mathematics 2：D2）

ゲーム理論，ネットワークの中の流れ，マッチングと配分問題，クリティカルパス分析，動的計画法

（2）エデクセル（EDEXCEL）の「意思決定の数学」

「意思決定の数学　1」（Decision Mathematics 1：D1）

アルゴリズム，グラフのアルゴリズム，通路探索問題，クリティカルバス分析，線形計画法，マッチング，ネットワークの中の流れ

「意思決定の数学　2」（Decision Mathematics 2：D2）

交通問題，配分問題，巡回セールスマン問題，ゲーム理論，動的計画法

（3）評価・資格連合（AQA）の「意思決定」

「意思決定　1」（Decision 1：D1）

アルゴリズムの簡単な考え，グラフとネットワーク，全域木問題，マッチング，ネットワークの中の最短経路，通路探索問題，巡回セールスマン問題，線形計画法，数学的モデル化

「意思決定　2」（Decision 2：D2）

クリティカルパス分析，配分，動的計画法，ネットワークの流れ，線形計画法，ゼロ和ゲームのためのゲーム理論，数学的モデル化

3．オックスフォード・ケンブリッジ・RSA（OCR）の「意思決定の数学」の内容

離散数学に関する試験要目の詳しい内容を，オックスフォード・ケンブリッジ・RSA（OCR）の要目を例に取り示すことにする。OCR の「意思決定の数学」は，次のように「序」と各内容から成っている。

（1）「意思決定の数学　1」（Decision Mathematics 1：D1）

序

モジュール C1（コア数学 1），C2（コア数学2）の内容の知識が前提となっており，受験者は D1 の問題に答えるのにそのような知識を示す必要があろう。

このモジュールの内容は，実生活の場面をモデル化する文脈で理解されるべきであり，試験問題は，相応しいところではモデルと実在の間を様々に解釈することを含んで，注釈や解釈を求めるかもしれない。

アルゴリズム

受験者は，次のことができるべきである：

（a）アルゴリズムの定義を理解すること。

（b）問題解決へのアルゴリズム的なアプローチが特定の方法に一般的に望ましいのかの理由を理解し，アルゴリズム的な方法の限界を理解すること。

（c）アルゴリズムのオーダーの意味を理解し，標準的なネットワーク問題のためのアルゴリズ

ムを含んで，簡単な場合で与えられたアルゴリズムのオーダーを決定すること.

（d）流れ図で定義されるか，言葉のリストとして与えられた簡単なアルゴリズムを解釈し応用すること.

（e）並べ替えや詰め込みに関する簡単なアルゴリズムに慣れていることを示すこと。これには次のことを含む。

（i）バブル・ソートとシャトル・ソート.

（ii）ファースト・フィット法（ファースト・フィットとファースト・フィット・ディクリージング）.

グラフ理論

受験者は，次のことができるべきである：

（a）「弧」（または「辺」），節点（または，「頂点」），「道」，「木」，「閉路」という用語の意味を理解すること.

（b）グラフがオイラー的か，半オイラー的か，それとも両者ではないかどうかを決定するために，グラフの中の節点の次数を使うこと.

（c）有向または無向の平面グラフを含む簡単な問題を解くこと.

ネットワーク

受験者は，次のことができるべきである：

（a）ネットワークはそれぞれの弧に「重み」が割り当てられたグラフであることを思い出し，数学的モデルとしてネットワークを使うこと。

（b）最小全域木を見つけるために，最小コネクタ問題を解く中で，プリムのアルゴリズムとクルスカルのアルゴリズムを応用すること（プリムのアルゴリズムの行列表現を使うことを含む）。

（c）簡単な場合で巡回セールスマン問題の解を見つけ，そして，他の場合に次のことを行うこと。

（i）最近隣法を使うことで上限を決めること.

（ii）上限を改良することができるところでは，近道を使うこと.

（iii）下限を決めるために還元ネットワーク上で最小コネクタ法を使うこと.

（d）ダイクストラのアルゴリズムを使うこと.

（e）偶点のすべての可能な組を考えることで，高々6 つの偶点の通路探索問題の簡単な場合を解くこと.

線形計画法

受験者は，次のことができるべきである：

（a）言葉で提出された実世界の問題を代数的手法で定式化すること. 関連した変数，制約条件，目的関数の特定を含む.

（b）「不等式制約条件，変数≥0 の形の自明制約条件を前提として，目的を最大化（または，最小化）する」という形式で線形計画の式を立て，自明制約条件とともに不等式制約条件を等式に変換するためにスラックス変数を使うこと。

（c）2 変数問題にグラフ的解法を行うこと。整数解が必要な場合を含む。

（d）目的関数を最大化するために単体法を用い，単体法の各段階における変数の値と目的関数

の値とを解釈すること。

（２）「意思決定の数学　2」（Decision Mathematics 2 : D2）

序

モジュール C1（コア数学 1），C2（コア数学 2），C3（コア数学 3）C4（コア数学 4），D1（意思決定の数学 1）の内容の知識が前提となっており，受験者はD2の問題に答えるのにそのような知識を示す必要があろう。

このモジュールの内容は，実生活の場面をモデル化する文脈で理解されるべきであり，試験問題は，相応しいところではモデルと実在の間を様々に解釈することを含んで，注釈や解釈を求めるかもしれない。

ゲーム理論

受験者は，次のことができるべきである：

（a）ゼロ和ゲームの考えと，利得行列によるその表現を理解すること。

（b）プレイ・セーフ戦略と安定解を確認すること。

（c）優越の議論を用いて行列を変えること。

（d）安定解がないゲームに対して，次の方法で，最適混合戦略を決めること。

（i）n=1,2,3 のとき，$2 \times n$, $n \times 2$ ゲームに対してグラフ理論的方法を使うことによって。

（ii）高次ゲームを単体法を使って解くことができる線形計画法問題に変えることによって。

ネットワークの中の流れ

受験者は，次のことができるべきである：

（a）流れの問題を有向弧のネットワークによって表現し，ネットワーク図を解釈すること。

（b）与えられた制約（問題は上方・下方の両方の容量を含むであろう）を前提にして，ネットワークの中の最適な流れ率を見つけること。

（c）カットの値の意味を理解し，最大フロー・最小カット定理を使い，それがどのように働くのかを説明すること。

（d）2つ以上の入口か出口があるネットワークでの過剰入口か過剰出口を導入し，制限容量の頂点を適当な流れによる非制限容量の頂点の組と置き換えること。

（e）流れを増大させネットワークの中の最大フローを決めるために，それぞれの方向にどの程度の流れがあるかを示す矢印でもって，ラベリングの手順を使うこと。

マッチングと配分問題

受験者は，次のことができるべきである：

（a）マッチング問題を2部グラフで表現すること。

（b）交互道の作成によって極大マッチングを見つけるためにアルゴリズムを使うこと。

（c）配分問題を最小コスト・マッチング問題として解釈すること。

（d）ダミーの行や列を使うこと含んで，配分問題の解を見つけるためにハンガリアン・アルゴリズムを使うこと。マッチングが極大かどうかを調べるためにカバリング法を使うこと。そして，修正されたコスト行列を増加させ解釈すること。

クリティカルパス分析

受験者は，次のことができるべきである：

（a）弧の上の活動を使って，活動ネットワークを作り解釈すること。

（b）最早開始時刻・最遅開始時刻と終了時刻，または早期・遅期イベント時刻を決めるために，前後通行を行うこと。

（c）クリティカル活動を特定し，クリティカルパスを見つけること。

（d）カスケード図と資源ヒストグラムを作り解釈し，資源ラベリングを行うこと。

動的計画法

受験者は，次のことができるべきである：

（a）部分最適化で逆向きに考えて，動的計画法の概念を理解すること。

（b）段階変数，状況変数，活動と費用を使うこと。

（c）動的計画法の表を作り，最小，最大，最小最大，最大最小を見つけることを含む問題を解くのに使うこと。

４．離散数学の教科書

評価・資格連合（AQA）の要目に準拠した『AQA のための離散数学』（Stan Dolan. Discrete Mathematics For AQA. Cambridge University Press. 1:2000, 2:2001）を簡単に紹介する。なお，この教科書は，「離散数学」という標題や 2000 年，2001 年という発行年が示すように従前の試験要目に拠った版ではあるが，2005 年にはまだ発売されており内容は「意思決定の数学」と同じと見ることができる。なお，執筆者のドラン氏は，イギリスの著名なカリキュラム開発プロジェクトである「学校数学プロジェクト（SMP)」の中心メンバーの一人である。

（1）『AQA のための離散数学』の目次

『AQA のための離散数学１』，『AQA のための離散数学 2』の目次をまとめると，次の通りである。２（３）で示した AQA の試験要目の内容に沿ったものとなっている。

『AQA のための離散数学１』の目次

5 マッチング

5.1 はじめに　5.2 マッチング増加アルゴリズム　5.3 最大マッチング・最小被覆

6 通路探索

6.1 巡回可能性　6.2 中国郵便配達人アルゴリズム　6.3 奇点を組み合わせること

7 巡回セールスマン問題

7.1 古典的な問題　7.2 1つの難問　7.3 最近隣アルゴリズム　7.4 下限　7.5 旅行の改善

8 線形計画法

8.1 最適化　8.2 不等式をグラフ的に表現すること　8.3 線形計画問題　8.4 混合問題　8.5 整数解

『AQA のための離散数学 2』の目次

1. 配分

1.1 はじめに　1.2 ハンガリアン・アルゴリズム　1.3 非正方形配列

2. ネットワークの流れ

2.1 いくつかの重要な用語　2.2 最大フロー・最小カット定理　2.3 ラベリング手順　2.4 拡張

2.5 最小容量

3. クリティカルパス分析

3.1 活動ネットワーク　3.2 最早開始時間と最遅開始時間　3.3 クリティカル活動　3.4 カスケード図　3.5 資源レベリング

4. 動的計画法

4.1 負の辺の重み　4.2 用語　4.3 最小化問題

5. 単体アルゴリズム

5.1 単体法　5.2 表形式　5.3 単体アルゴリズム　5.4 ネットワーク問題

6. ゲーム理論

6.1 ゼロ和ゲーム　6.2 プレイ・セーフ戦略　6.3 安定した解　6.4 混合戦略　6.5 $2xn$ ゲーム　6.6 mxn ゲーム

（2）『AQA のための離散数学 1』の最初の部分の抄訳

『AQA のための離散数学 1』の第 1 章は「アルゴリズム」であるが，この最初に「離散数学とは何か」という説明がある。それを訳出すると，次の通りである。

1　アルゴリズム

この章では「離散数学」の意味を調べ，いくつかのアルゴリズムを導入する。この章を終えたとき，あなたは，

・アルゴリズムとは何かを知っているであろう，

・バブル・ソート，シャトル・ソート，シェル・ソート，クイック・ソートを応用できるようになるであろう，

・正確性，適合性，一般性，停止条件の意味を知るであろう。

1.1　離散数学とは何か

あなたは，統計で，連続的データと離散的データの区別にすでに出会っているであろう。連続的データは数値範囲のどんな値でも取ることができる。身長，体重，時間の測定は，すべて，連続的データを作り出す。離散的データは，互いに厳密に分離した値しか取ることができない。家族の子どもの数や手紙の中の単語の数の測定は，全数（注：whole-number，0以上の整数）の値しか取ることができない離散的データである。

17世紀，アイザック・ニュートン卿やその他の一流の数学者たちは，微積分の発展に取り掛かり始めた。微積分は，連続的データと一般には滑らかなグラフを特に扱うものである。離散数学は，微積分の連続的な方法を使わない数学の部門を扱うものである。

しかしながら，連続的と離散的の区別は，しばしば曖昧になる。例えば，コンピュータは，本質期に離散数学を扱う。なぜなら，コンピュータは，1と0の列を使った数を持っており，そこで，有限の量の情報しか持つことができない。しかしながら，高度なコンピュータは，非常に高い程度の正確性で作業をすることができ，連続数学への大変よい近似をすることができる。コンピュータは，それがなければ解くことができないような方程式に近似的な解を与えることができる。

コンピュータの画面は，画素（この言葉は，「絵画の要素」の短縮形である）に分割することができる。そこで，コンピュータやテレビの画面は，本質的には離散的な装置である。しかしながら，離散的な画素は大変小さいので，画面上の像は連続的に見える。

しかし，これらすべては，離散数学の定義のほんの一部分である。離散数学は，20世紀に主として発展した数学の部門であるということが，また広く（ただし普遍的ではないが）受け入れられている。その重要性と応用が，コンピュータの発展と歴史の同じ時代に起こったというのは，偶然の一致ではない。

コンピュータでの作業という部分は，ある問題を解くための手順の考え，または，「アルゴリズム」である。2つの数の乗法の筆算の答えを求めることができるアルゴリズムは多分知っているであろう。アルゴリズムは，離散数学の実質的な部分を形成する。この流れにおいては，ほとんどのアルゴリズムは，時間や資源の最良の使用に関係した話題となる。これらは，工業，商業，コンピュータ計算，軍事関連に応用を持っている。

（3）『AQAのための離散数学1』の教科書の構造

この教科書の一般的な単元構造は，「ある場面からのアルゴリズム・原理などの説明」（または，新しい用語の説明），「例」，「練習問題」，「演習問題」から成っている。節は，原則として「説明」からなり，「例」や「練習問題」は，複雑な「説明」の場合に付いており，「演習問題」は各章末にある。節は，それぞれ独立したものとなっており，連続した節で1つの概念を理解していくというようなものではない。

説明は興味・関心を惹くようになっており，また，具体的で詳しく，練習問題や演習問題が豊富にある。説明や例で手順を理解し，手順を問題によって身に付けていくようになっている。また，証明はほとんどまったくない（1，2の2冊の中で，1の「3.6 プリムのアルゴリズムの正当化」だけが証明のようになっているが，証明ではなく正当化（Justification）となっている）。全体として，生徒が，問題を解きながらアルゴリズムなどを発見していくというような構成にはなっていないし，また，そのような発見や生徒の数学的探究活動を促すような発問はほとんどない。アルゴリズム等

を説明にしたがって理解し，それに慣れていくというような形式になっている。

注：

試験要目の内容は，資格・教育課程機関（QCA）及び各試験委員会のサイトで見ることができる。それぞれのホームページアドレスは次の通りである。

GCE の「数学の利用」に関しては，資格・教育課程機関（QCA）のサイトで見ることができる。

http://www.qca.org.uk/downloads/3270_intro_to_asl_use_of_ma.pdf

オックスフォード・ケンブリッジ・RSA（OCR）

http://www.ocr.org.uk/OCR/WebSite/docroot/index.jsp

エデクセル（EDEXCEL）

http://www.edexcel.org.uk/home/

評価・資格連合（AQA）

http://www.aqa.org.uk/

参考文献

長崎栄三（2003）「イギリス　一般教育証明書（GCE）の数学について」『世界の高等学校の数学教育　I』国立教育政策研究所科研研究成果報告書．pp.35-36.

Ｖ．高等学校等における離散数学の指導の実践例

高等学校等における離散数学の指導の実践例

研究授業の立案は授業者が行い，学習指導案の検討等を研究会で行った。そして，授業者以外の研究メンバーが研究授業（または公開授業）を参観し，授業後に研究授業の検討会を行った。この全体の過程を踏まえて，授業者が記録をまとめた。

それぞれの研究授業の主題，対象学年，実施年月は，次の通りである。

活動を中心とした離散教材の開発
ー再帰的思考の活用とアルゴリズムの構成ー
対象学年　高等学校普通科 1 年
授業者　高橋　広明
実施年月　2005 年 10 月

離散的なものの見方・考え方の重要性
ー鳩の巣原理による単元の構成ー
対象学年　高等学校普通科 3 年
授業者　津島　久美
実施年月　2005 年 10 月～11 月

「グラフ理論」の単元による指導
ー活動や議論を中心とした授業への転換を目指してー
対象学年　高等学校電気科 3 年
授業者　横澤　克彦
実施年月　2005 年 11 月

「グラフ」の学習指導に関する研究
ー自ら考え有用性を感得する教材に焦点を当ててー
対象学年　中学校 2 年（選択授業）
授業者　西村　圭一
実施年月　2005 年 11 月～2006 年 1 月

ラムゼー定理を主題とした授業
ーラムゼー定理のゲーム化によってー
対象学年　高等学校理数科 2 年
授業者　萩原　季弘
実施年月　2005 年 12 月

活動を中心とした離散教材の開発

—再帰的思考の活用とアルゴリズムの—

高橋　広明

千葉県立松戸六実高等学校

【要約】身近な題材をもとにした離散数学の教材から，その教材が生徒が主体的に活動し考えることができるものであるか否かの可能性を探るとともに，再帰的思考の仕方とアルゴリズム的表現がどのように表出するのかを考察した。その結果，離散数学の教材は生徒が十分意欲的に取り組み，主体的に考えることのできるものであることが確認できた。一方で再帰的思考やアルゴリズム的表現については，十分な指導がなされなければ生徒が自力で活用あるいは工夫するには困難であることが認められた。

1　はじめに

本稿は，次の離散数学に関わる課題をもとに授業を行った実践報告である。

課題

1 枚の細長い紙を，右端が左端に重なるように次々に折っていく。このとき，左から数えてある番号の折り目が山折りか谷折りかは折った回数に依らないことの根拠を探ろう。また，左から 30 番目および 300 番目の折り目は山折りだろうか谷折りだろうか。

この実践を通して，以下の生徒の実態を明らかにしたい。すなわち，

- 意欲的に活動し，主体的に問題解決しようとするか。
- 再帰的思考を有効に活用することができるか。
- 求める手続きを明確に伝えるアルゴリズム的表現はできるか。

の 3 点である。これらの観点から離散数学教材の可能性を探っていきたい。

2　離散数学における再帰とアルゴリズム

本教材において，任意の番号における折り目を決定する方法を探究する活動は，**アルゴリズムを構成する**活動と見なすことができる。離散数学におけるアルゴリズムの扱いにおいてはスタンダードにも以下のように述べられている [NCTM(1989)] *1。

> アルゴリズムの開発と分析は，コンピュータを手段とする問題解決の中心に据えられる。したがって，第 9 学年から第 12 学年のカリキュラムを通して，アルゴリズム的な視点から数学を構成する機会を生徒に提供できるよう不断の努力がなされるべきである。生徒は定められたアルゴリズムをただ実行するのではなく，自分自身のアルゴリズムを開発したり分析したりすることを奨励されるべきである。

*1 NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* National Council of Teachers.

ここで特に，アルゴリズムにおいて重視すべきはそれを実行するのではなく開発（すなわち構成）すべきであるということに注目したい。これに関して Maure は，アルゴリズムを扱うアルゴリズム数学 (algorithmic mathematics) を 2 つの意味に区別している [Maurer(1984)] *2。

伝統的な(traditional) アルゴリズム数学	アルゴリズムを実行することを指す。（アルゴリズムの適用）
現代的な(comtemporary) アルゴリズム数学	アルゴリズムの構築や，問題解決や理論展開のためのアルゴリズムに関する思考全般を指す。（アルゴリズムの構成）

この中で Maurer は，現代的なアルゴリズム数学の観点から，例えばホーナー法のようなアルゴリズムも発展性のある豊かな題材になることを紹介している。言うまでもなく，スタンダードにおけるアルゴリズムの捉え方はこの現代的なアルゴリズム数学と一致する。したがって，離散数学におけるアルゴリズムの位置づけを考えるとき，我々もこの現代的なアルゴリズム数学，すなわちアルゴリズムの構成をもっと重視すべきであろう。

また，アルゴリズムにおいて重要な側面の一つに，考えを伝えるということも挙げられる。これについて Maure と Ralston はアルゴリズムについて「数学的な考えを伝えるときに使われる最も重要な実在の一つ」と述べている [Maure, Ralston (1998)] *3。その前置きとして，次のようにも述べている。

> 数学には，正確な思考 (thought) と正確な語法 (language) の両方が必要である。自分で数学をするときには，おそらく正確な思考だけで十分であろう。しかし他人と数学のコミュニケーションを行うときには，正確な語法が必須である。

学校数学の中で，問題解決過程を表現し伝える活動はよく行われているであろう。しかしこれは推論の過程を積み重ねて表現するものである。一方でアルゴリズムを表現するということは，実行すべき手続きを段階的に述べることである。すなわち，問題解決過程を表現することは，相手に分かってもらうための表現であるのに対し，アルゴリズムを表現するということは，相手に実行してもらうための表現である。このような表現も，学校数学においては重要であろう。ここで注意しなければならないのは，アルゴリズムの表現というとフローチャートのようなものを連想しがちであるが，決してそうではない。もちろんそこまで到達できればそれに越したことはないが，相手に伝えたときその相手が伝えられた手続きを実行できれば，アルゴリズムの表現として認めてよいと考える。

このようなアルゴリズム的な考え方と並んで大切なのが，再帰の考え (recursive thinking) である。ところで，NCTM(1989) において離散数学はコンテンツ・スタンダードの一つに掲げられているが，NCTM(2000) *4では離散数学について「学校数学のカリキュラムにおいて不可欠な要素」としてさらにその重要性を認め，区分的な取り扱いをせず，スタンダード全般に分散させている。その離散数学の重要な 3 つの領域として，「組合せ論 (combinatorics)」，「グラフ理論 (vertex-edge

---

*2 Stephen B. Maurer. (1984). "Two Meanings of Algorithmic Mathematics". *Mathematics Teacher*. Vol.77. No.2.

*3 Stephen B Maurer. Anthony Ralston. (1998). *Discrete Algorithmic Mathematics,2nd ed.*. A K Peters,Ltd.

*4 NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

えも学校教育で重視すべきものである。ここで再帰とは,

> 一般的に再帰とは,与えられた問題を,それと同じ構造でより解きやすくした一つまたはそれ以上の下位問題に変えていくストラテジーを用いた問題解決の過程

である [Kenney, Bezuszka (1993)] *5。しかし実際のカリキュラムにおいて再帰が用いられると敢えて言えるのは,漸化式で定義された数列の各項をコンピュータ等を用いて求める場合くらいではないだろうか。しかもそれは,再帰を適用するに過ぎず,再帰構造を見抜きそれを活用するという場面はない。後述のとおり,本教材においては再帰の考え方が用いられるが,このように再帰構造を認め,活用するような機会を積極的に与えることも重要ではないだろうか。

3 教材研究

本課題の解決を試みるとき,まず考えられるのは折り目がどのようについていくのか帰納的に考察することであろう。

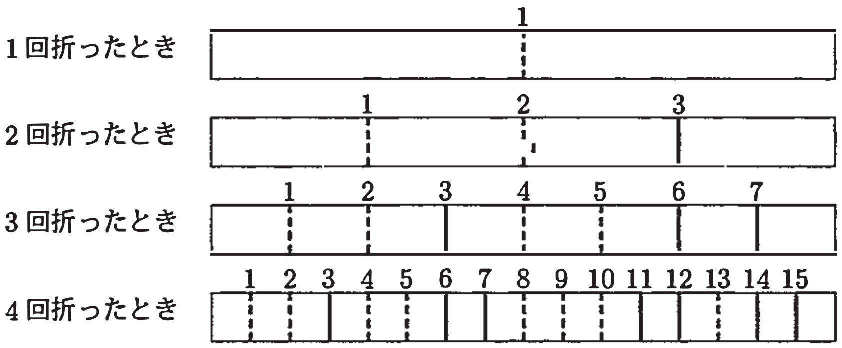


表1 4回まで折ったときの折り目の様子

表1は紙を4回まで折ったときの様子を表したものである。ここで,点線は谷折り,実線は山折りを表している。これから直ちに30番目や300番目の折り目を推測することはできないが,注意深く見てみると紙の中心線の番号は2のべき乗となっていることに気付く。さらにその左半分についての中心線も2のべき乗,さらにその左半分の中心線も2のべき乗となっている。そしてそれらはすべて谷折りである。その根拠を探ってみる。

次の図は,順次折っていったときの一番下にある部分の紙の折り目を示したものである。黒丸は新たに生じた折り目,白丸はすでに折られている折り目を表している。右端を左端に重ねるように折っていくので,図の黒丸および白丸はすべて谷折りになるのは明らかである。さらに,この一番下にある紙の折り目は,1回折るごとにすでにある折り目の間に1つずつ新たに折り目がつくので,番号がすべて2のべき乗になることも分かる。

*5 Margaret J.Kenney, Stanley J.Bezuszka (1993). "Implementing the Discrete Mathematics Standards: Focusing on Recursion", *Mathematics Teacher*, Vol.86, No.8.

これで一つ構造が明らかになった。すなわち

$\boxed{\text{構造 I：2 のべき乗となる番号の折り目はすべて谷折りである。}}$

という事実である。

さらに注意深く表 1 を見ると，中心線を軸に山折りと谷折りが対称になっていることに気付く。さらに左半分だけを見てみると，この部分も中心線を軸に対称となっており，さらにその左四半分でも中心線を軸に対称となっている。この事実もほぼ明らかである。何回か折ったものを一度広げてみる。それを中心線を軸として再び折り直してみると，折り目は重なる。つまり左右の折り目が対称となる。そこから 2 回目を折ると，左半分に注目するとこの部分も左半分の中心線を軸に重なる，すなわち対称である。以下同様である。ここからもう一つの構造が明らかになった。すなわち，構造 I の表現を用いると，

$\boxed{\text{構造 II：2 のべき乗となる番号の折り目を軸として左右の折り目が対称となる。}}$

という構造である (図 1 参照)。

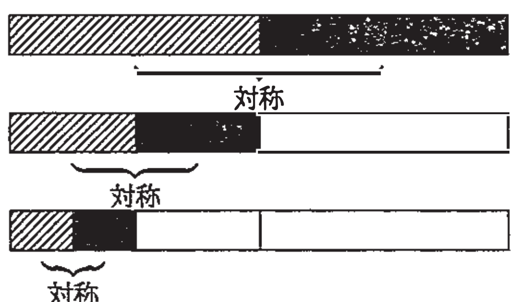


図 1　対称となることの説明

これら 2 つの構造が本質的で，ある番号の折り目は，2 のべき乗となる中心線（以後対称軸と呼ぶ）に対して次々と対称な番号の折り目に変換できるのである。一方が山折りなら他方は谷折りのときを対称と呼ぶことにすると，構造 I および構造 II は次のように表せる。

$$\begin{cases} 2^n\text{番目の折り目は谷折である。} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ 2^n + k \text{ 番目の折り目は } 2^n - k \text{ 番目の折り目と対称である} \quad (0 < k < 2^n) \end{cases}$$

今写像 f を $f(2^n + k) = 2^n - k$ で定義すると，m 番目の折り目を求めるには，$m = 2^n + k$ の形に直して写像 f を $k = 0$ となるまで繰り返せばよいことになる。例えば 300 番目の折り目は，$300 = 2^8 + 44$ であるから，これは $f(300) = 2^8 - 44 = 212$ 番目の折り目と対称である。次は今生じた 212 に対して f を施せばよい。$212 = 2^7 + 84$ であるから，これは $f(212) = 2^7 - 84 = 44$ 番目の折り目と対称である。このように新たに生じた番号に対し同じように f を作用させていけばよい。これは再帰の考え方である。ある番号の折り目を決定するには，この再帰の考え方が重要になってくる。写像 f を 1 回施せば折り目が対称となるので，2 のべき乗となるまで写像 f を何回施したかが分かれば折り目が決定できる。すなわち，$2^n + k \longrightarrow 2^n - k$ という操作により山と

谷が反転し，これを 2 のべき乗になるまで繰り返すことによって折り目が山か谷かが決定できる。この操作を奇数回行ったときは山折りで，偶数回行ったときは谷折りになるのである。このことから，30 番目の折り目は

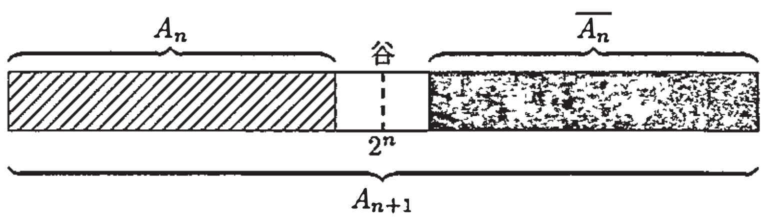
$$30 = 2^4 + 14 \longrightarrow 2^4 - 14 = 2$$

と 1 回の操作で 2 のべき乗になったので山折りとなり，300 番目の折り目は

$$\begin{aligned}300 = 2^8 + 44 &\longrightarrow 2^8 - 44 = 2^7 + 84\\ &\longrightarrow 2^7 - 84 = 2^5 + 12\\ &\longrightarrow 2^5 - 12 = 2^4 + 4\\ &\longrightarrow 2^4 - 4 = 2^3 + 4\\ &\longrightarrow 2^3 - 4 = 4 = 2^2\end{aligned}$$

と，5 回の操作で 2 のべき乗となるのでこれも山折りである。今までのことから分かるように，折った回数は山折り谷折りには影響しない。9 回折ろうが 10 回折ろうが，30 番目や 300 番目の折り目は常に山折りである。

本課題の困難さは，折り進めていくとすでにある折り目と折り目の間に新しく折り目が生じることにあると思われる。しかしこれも見方を変えるとより明確になる。



n 回折ったときの折り目の配列を A_n とする。これからさらにもう一回折ったときの折り目の配列 A_{n+1} はどうなるだろうか。これは，すでにある折り目の配列 A_n の右隣りに新たに中心線となる 2^n 番目の谷折りの折り目が生じ，右半分は A_n と対称の配列 $\overline{A_n}$ が生じることと同じである(上図参照)。このような見方ができれば，本課題の解決に近づけるであろう。

以上のことをもう少し発展的に考えてみる。折り目を決定するには，$2^n+k \longrightarrow 2^n-k$ という操作が重要であった。この操作は，2^n+k から 2^n-k を求めるものであるが，$(2^n+k)+(2^n-k) = 2^{n+1}$ である。つまり，$2^n - k$ は 2^{n+1} の補数である。したがって $2^n + k$ から $2^n - k$ を求めるということは，$2^n + k$ を 2 進表示し，

0 と 1 を反転させ，1 を加える

という操作をすることに他ならない。この操作を 2 のべき乗，すなわち 2 進表示では $100\cdots00$ になるまで続ければよい。それが奇数回のときは山折り，偶数回のときは谷折りになるのである。

この方法を 30 番目で確かめてみる。30 を 2 進表示すると 11110 である。したがって上記の操作をすると，

$$11110 \longrightarrow 10$$

となり，1 回で 2 のべき乗になる。よってこの折り目は山折りである。

同様に 300 番目の折り目考える。これを 2 進表示すると 100101100 であるので

$$100101100 \longrightarrow 11010100 \longrightarrow 101100 \longrightarrow 10100 \longrightarrow 1100 \longrightarrow 100$$

となり 5 回操作を行っている。したがって 300 番目の折り目も山折りである。

このように 2 進表示を用いると，操作がアルゴリズム化され軽微な計算量で折り目を決定することができる。

4　単元について

4.1　単元の目標

具体的な操作を通して，自ら規則性を発見するとともに，再帰的な思考を用いて問題を解決する方法を理解し，手続きを明確に表現するためにアルゴリズム的表現のよさを知る。

4.2　単元の指導計画

第 1 時 紙の折り目の本数

> 1 枚の細長い紙を，右端が左端に重なるように次々に折っていく。この操作を 9 回行ったとき，折り目はいくつできるだろうか。

第 2 時 紙の折り目の配列(本時)

> 1 枚の細長い紙を，右端が左端に重なるように次々に折っていく。このとき，左から数えてある番号の折り目が山折りか谷折りかは折った回数に依らないことの根拠を探ろう。また，左から 300 番目の折り目は山折りだろうか谷折りだろうか。

第 3 時 紙の折り目の配列の一般化

> どんな番号の折り目でも，そこが山折りか谷折りかを決定する方法を考えてみよう。

4.3　単元の評価規準

ア. 関心・意欲・態度	イ. 数学的な見方や考え方	ウ. 表現・処理	エ. 知識・理解
実際に紙を折り，その中から規則性を見つけ，構造を探ろうとする。	折り目のつき方の構造に気づき，折り目の本数や配列を決定できる根拠を考えることができる。	気づいた規則性や構造を表現することができ，実際に折り目の本数や配列を決定することができる。	折り目の本数や配列の規則性や構造を理解し，任意の番号での折り目の本数や配列を求めることができる。

4.4　単元の学習活動における具体の評価規準

授業時数	主な学習内容	学習活動における具体の評価規準	評価方法
第1時	紙の折り目の本数の考察	ア．実際に紙を折ることを通して，規則性や構造を積極的に探ろうとする。 イ．根拠を持って折り目の本数を考察することができる。 ウ．折った回数と折り目の本数との関係を明確に記述することができる。 エ．任意の折った回数に対する折り目の本数を的確に求めることができる。	ワークシート 観察法 発言
第2時	紙の折り目の配列の考察	ア．実際に紙を折ることを通して，規則性や構造を積極的に探ろうとする。 イ．折り目の配列は折る回数に依らないことの根拠を述べることができる。 ウ．300番目の折り目について，山折りになるのか谷折りになるのかを明瞭に記述できる。	ワークシート 観察法 発言
第3時	配列の求め方の一般化	ア．任意の番号での折り目を求める方法を積極的に探ろうとする。 イ．具体的な番号 (30番目や300番目) での折り目の考察を用いて，その求め方を一般化することができる。 エ．折り目は折った回数には依らないことを理解し，任意の番号での折り目を決定する一般的な方法について理解できる。	ワークシート 観察法 発言

5　本時について

5.1　本時の目標

紙を折るという実際の活動を通して，折り目の配列についてその規則性や構造に気づくとともに，それらを活用して30番目および300番目の折り目を決定できるようにする。

5.2　本時の評価規準

本時では，「関心・意欲・態度」「数学的な見方や考え方」「表現・処理」を評価項目とする。それらの評価項目に対してそれぞれ，「十分満足できると判断される」状況 (A) および「おおむね満足できると判断される」状況 (B) を設定する。(B) に達しない状況を「努力を要すると判断される」状況 (C) とし，これに関しては生徒への具体的な対応や手だてを述べる。

ア．関心・意欲・態度

→ 机間指導における観察とワークシートの記述から判断する。

(A)	実際に紙を折って考察した結果を帰納的に表現しようとする。
(B)	実際に紙を折って考察しようとし，気づいたことを表現しようとする。
(C)	実際に紙をいくつも折らせ，小さな規則性でも積極的に見つけるよう励ます。

イ．数学的な見方や考え方

→ ワークシートの記述および発言から判断する。

(A)	規則性や構造を根拠を持って明確に述べることができる。またはワークシートに明確に記述してある。
(B)	規則性から折り目の配列についての不変性を述べることができる。
(C)	折った回数ごとに帰納的に折り目を表してみるよう促し，それをもとに考えさせる。

ウ．表現・処理

→ ワークシートの記述および発言から判断する。

(A)	根拠に基づいた構造から 300 番目の折り目の求め方をワークシートに明確に記述してある。
(B)	300 番目の折り目を求める指針をワークシートに記述してある。
(C)	今まで気づいた規則性を振り返させ，それをまとめる過程で小さい数値（30 番目など）の折り目に気づかせる。

5.3 本時の展開案

段階	学習の内容と学習のねらい・ 教師の発問	予想される生徒の反応・活動	指導上の留意点・ 評価のポイント
導入 10 分	本活動への動機付け ◇実は不思議なことを見つけたんだ。 (紙を 2 回折らせ) ◇ 1 番目の折り目は山折り，谷折り？ ◇ 2 番目の折り目は？ ◇ 3 番目の折り目は？ ◇では 4 番目の折り目は？ ◇もっと折れば折り目ができるでしょ。 ◇何回折った？ ◇折る回数については何も言わなかったよね。では，4 回折ったときの 4 番目の折り目は？ ◇ 5 回折るとどうなる？ ◇折った回数に関係なく，4 番目の折り目はいつでも谷折りなんだよね。個人的にはすごく不思議なんだけど。他の番号でも確かめてみよう。	 ●谷折り ●谷折り ●山折り ●折り目がないから分からない ●谷折りになった ● 3 回 ●やっぱり谷折り ●これも谷折り	 (注 1)

	○例えば 3 番目の折り目。2 回折ったとき，3 回折ったとき，4 回折ったとき，3 番目の折り目はどうなっている？ ○今まで見てきたように，折り目が山折りか谷折りかは折った回数に関係ないようですが，これはいつでも成り立つのでしょうか。これを考えてみよう。	●いつも山折りになっている	
展開 1 20 分	課題 折り目が山折りか谷折りかは折った回数に依らない，というのはいつでも成り立つだろうか。その根拠を考えよう。		
	○根拠まで分からなくても，折り目の付き方にはいろいろな性質が潜んでいます。その性質をたくさん見つけてみよう。	【予想される生徒の反応】 ① 配列の不変性を帰納的に考察する ② 中心軸での対称性に気づく ③ 対称性の入れ子構造に気づく ④ 折り目の構成に気づく	机間指導により，生徒がどのように解決しようとしているのか確認する。 ア．イ．
	○どのような規則性または根拠を考えたか発表してもらいます。	考察した内容の発表	小さな事柄でも気づいた規則性や根拠と考えられることを積極的に発表するよう励ます。 イ．ウ．
展開 2 20 分	○折った回数が何回でも，1 番目の折り目は谷折り，2 番目も谷折り，3 番目は山折りになっていることが分かりました。ではもう少し大きい番号の折り目を考えてもらいましょう。31 番目の折り目はどちらでしょうか。	【予想される生徒の反応】 ⑤ 実際に 5 回折ってみて 31 番目の折り目を答える（山折り） ⑥ 16 番目の折り目を対称軸として 31 番目の折り目は 1 番目の折り目と対称だから山折り	
	○では 32 番目の折り目は？	【予想される生徒の反応】 ⑦ 折り目の構成（反応例④）から新たに谷折りができるので，32 番目は谷折り ⑥ 12 のべき乗はすべて谷折りになるので 32 番目は谷折り	

	工夫して考えれば，番号がいくつでもその折り目を求めることができそうです。では 300 番目の折り目がどうなっているか，これをレポートにまとめてきてください。	【予想される生徒のレポート例】 ⑨ ブロックで考える ⑩ 折り目の構造から考える	完全な解決に至らなくても，解決に至る方針や考え方をレポートにしてもよい。

(注 1) 生徒から「何回折るのか」という質問が発せられた場合は，「折った回数は関係あるの？」と切り返し，折った回数と折り目との関係に注目させる。

【予想される生徒の反応例】

① 配列の不変性を帰納的に考察する

折った回数	折り目
1 回目	谷
2 回目	谷谷山
3 回目	谷谷山谷谷山山
4 回目	谷谷山谷谷山山谷谷谷山山谷山山
5 回目	谷谷山谷谷山山谷谷谷山山谷山山谷谷谷山谷谷山山山谷谷山山谷山山

これから分かるように何回折っても折り目は変わらない（1 番目は谷，2 番目は谷，3 番目は山…）。5 回折ったとき 30 番目は山であるから，7 回折っても 30 番目は山折りになる。

② 中心線での対称性に気づく

1 回目から順に折り目を見てみる。

1 回目　谷

2 回目　谷谷山

3 回目　谷谷山谷谷山山

4 回目　谷谷山谷谷山山谷谷谷山山谷山山

5 回目　谷谷山谷谷山山谷谷谷山山谷山山谷谷谷山谷谷山山山谷谷山山谷山山

このことから，いつも中心に対して折り目は対称になっている。

③ 対称性の入れ子構造に気づく

5 回折ったときから様子を見てみる。中心に対して折り目は対称になっており，その左側は 4 回目の折り目と同じになっている。その 4 回目も中心に対して対称になっており，その左側は 3 回目の折り目と同じになっている。以下同様である。

谷谷山谷谷山山谷谷谷山山谷山山谷谷谷山谷谷山山山谷谷山山谷山山

谷谷山谷谷山山谷谷谷山山谷山山

谷谷山谷谷山山

谷谷山

④ 折り目の構成に気づく

新しく折ると折り目は，それまでの折り目の右側に新しく谷折りができ，それを中心に今までの折り目と対称な折り目が右側につく。

● 1回目から2回目

1回目	右側に谷折りができる	2回目 対称になる
谷	谷谷	谷谷山

● 2回目から3回目

2回目	右側に谷折りができる	3回目 対称になる
谷谷山	谷谷山谷	谷谷山谷谷山山

これ以降も同様に折り目が作られていく。

⑨ ブロックで考える

5回折ると31本の折り目ができる。これを1つのかたまりで考える（下の図で，白のブロックと黒のブロックは折り目が対称であること表す)。

折り目のつき方（④の考え方）から，

6回 $\boxed{31}$ 谷 31

7回 $\boxed{31}$ 谷 31 谷 $\boxed{31}$ 山 31

8回 $\boxed{31}$ 谷 31 谷 $\boxed{31}$ 山 31 谷 $\boxed{31}$ 谷 31 山 $\boxed{31}$ 山 31

となるので，9回折ったときの300番目の折り目が現れるところまでを書くと下のようになる。

288本の折り目

$\boxed{31}$ 谷 31 谷 $\boxed{31}$ 山 31 谷 $\boxed{31}$ 谷 31 山 $\boxed{31}$ 山 31 谷 $\boxed{31}$ 谷 31

300番目の折り目が含まれる

ここから300番目は10番目のブロック（黒のブロック）に含まれていて，$300 = 288 + 12$ だから10番目のブロックの左から12本目が300番目の折り目である。これは2つ目の黒のブロックの左から12番目の折り目と同じになる。黒のブロックの1番目は白のブロックの31番目と対称，黒のブロックの2番目は白のブロックの30番目と対称というようになっているので，下の表から黒のブロックの12番目は白のブロックの20番目と対称である。

黒のブロック	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
白のブロック	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20

白のブロックの20番目は谷折りだから，黒のブロックの12番目は山折りになる。したがって300番目は山折りである。

⑩ 折り目の構造から考える

2^n 番目の折り目はすべて谷折りで，そこを中心に左右が対称になっている。

$300 = 2^8 + 44$ であるから，$2^8 - 44 = 212$ 番目と対称である。

$212 = 2^7 + 84$ であるから，$2^7 - 84 = 44$ 番目と対称である。

$44 = 2^5 + 12$ であるから，$2^5 - 12 = 20$ 番目と対称である。

$20 = 2^4 + 4$ であるから，$2^4 - 4 = 12$ 番目と対称である。

$12 = 2^3 + 4$ であるから，$2^3 - 4 = 4$ 番目（谷折り）と対称である。

これを逆にたどっていくと，300番目は山折りになる。

6　授業の実際

●授業の様子

授業では，紙を4回まで折らせ，折り目の不変性（例えば，2番目の折り目は何回折っても谷折りになっている等）を確認した後，どの番号もそれが山折り（または谷折り）ならば何回折っても折り目は変わらない根拠を問い，ワークシートに記述させた。しかし発問が抽象的であったため，何をどう考察すべきか戸惑っている生徒が多かったため，

「気が付いた規則性を記述してもよいし，実際には折らずに5回折ったときの折り目がどうなるかを考えてくれてもよい」

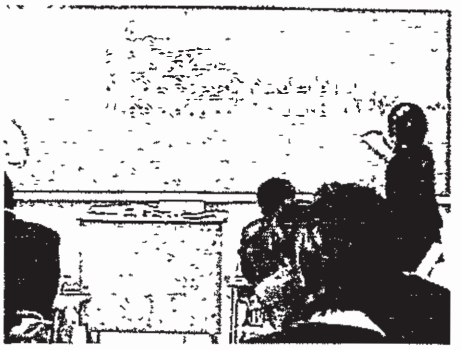
という発問を挿入した。これにより考察すべき事柄が明確になったためか，積極的に問題解決に取り組んでいた。

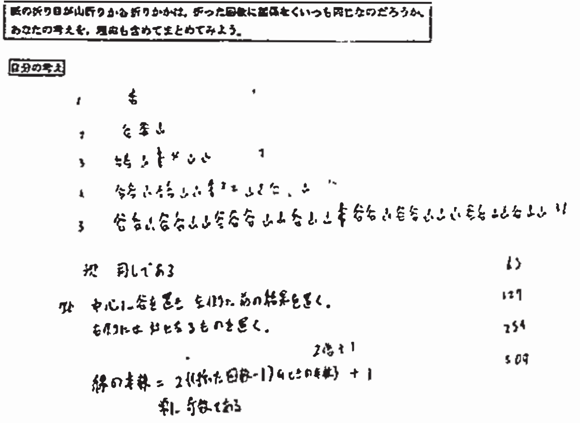
自力解決の形態は特に指示しなかったため，個人で取り組む者，グループで取り組む者等さまざまであったが，多くの生徒が折り目が中心から左右対称になっているという規則性を発見していった。さらには，折り目の中心は常に谷折りで，それらはすべて2のべき乗になっている（生徒の表現では「中心になる番号は前の中心になった数の2倍」），という規則性を記述している者もいた。

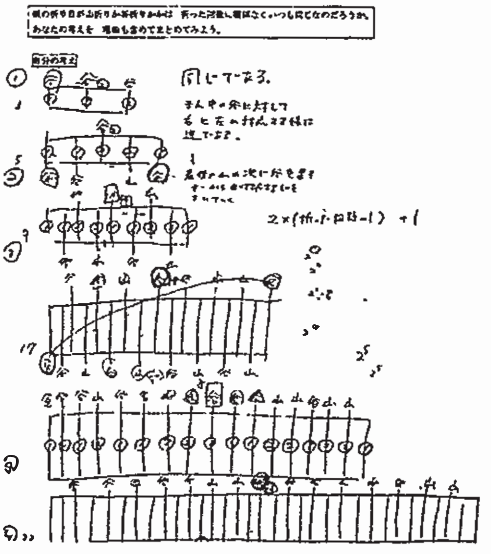
折り目の構成の仕方についても，何人かの生徒が発見するに至った。その構成方法については図で表現するとともに，次のような記述も見られた。

- 最後の山の次に谷を置き，そこから左に対応するものをおいていく。
- 中心に谷を置き，左側に前の結果を置く。右側には対称になるものを置く。

こられの規則性をもとに，5回折ったときの折り目がどのようになるのかも理解していた。



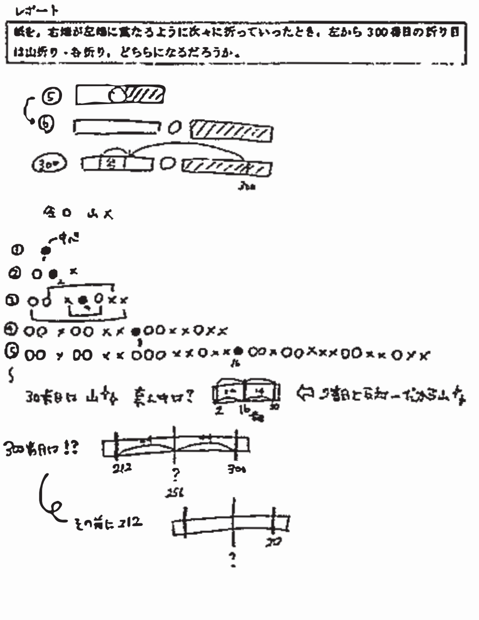




ここまでの内容を発表してもらい，実際に5回折ったときの様子も記述してもらった。この折り目の構成の仕方から，折り目の不変性についての理解は深まったようである。この発表で時間となってしまったため，300番目の折り目についての考察はレポートとして課した。

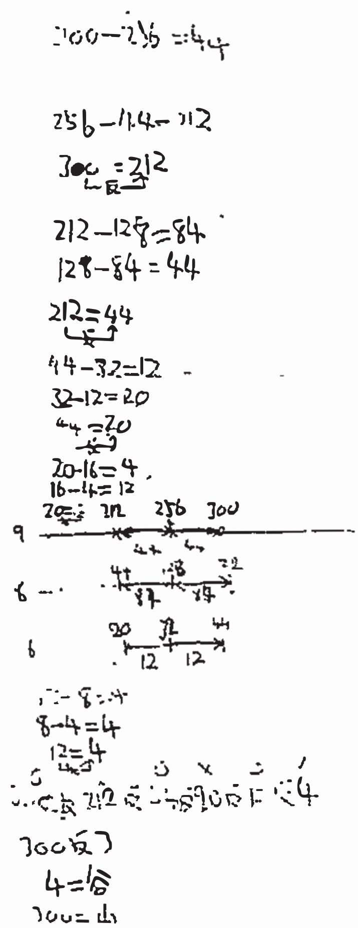
生徒のレポート例

300番目の折り目の考察については生徒には難しかったようで，解決に至ったレポートはそれほど多くはなかった。解決にまで至らないレポートの多くは，右のようなものである。このレポートでは，折り目の対称性から300番目の折り目は256番目の折り目を中心として212番目の折り目と反対になっているところまでは理解している。実際に，30番目の折り目に関しては16番目の折り目を中心として2番目の折り目と反対であるから山折りであると結論付けている。ここまで理解しているにもかかわらず解決まで至らなかったのは，新たに生じた212番目という折り目に対して，この番号の折り目に同様の手続きを行う発想が無かったた



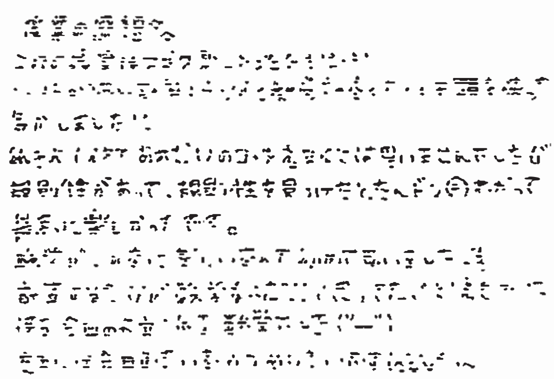
めだと思われる。この過程が再帰的考え方が現れる場面であるが，その考え方を用いることができなかったのである。解決に至らないほとんどのレポートがこれと同様のものであった。

再帰的な考え方を用いて300番目の折り目を決定できたレポートもいくつか確認できた。右はそのレポート例である。このレポートでは，2のべき乗となる中心線に対して左右の折り目が対称となるという性質を再帰的に用いて解決に至っている。しかしこのレポートからも認められるように，その手続きを分かりやすく相手に伝えるという表現上の工夫がなされていない。考え方を表現する方法はいろいろあるだろうが，この課題では手続きを表現してもらいたい場面である。相手が自分の手続きを実行できるように表現する工夫が必要である。その効果的な表現方法がアルゴリズム的表現である。アルゴリズム的表現はステップバイステップの表現であるから，そのアイデアさえあれば表現自体はそれほど困難ではないだろう。さらにその手続きは固有のもの（この場合は300番目）ではなく，それ以外の番号にも適用できることも理解しやすい。すなわち一般化への発想がそれほど困難なく生じてくることが期待できる。今までそのような指導はしてこなかったので，アルゴリズム的な表現を生徒に求めるのは無理があるが，レポートを評価する中で，あらためてその必要性を痛感した。



7　授業の評価

授業を行って最も印象深かったことは，通常の授業よりも生徒一人一人が主体的に，意欲的に取り組んでいたことである。特に普段あまり活躍していない生徒が，この授業では積極的に考え，意見を述べていたことである。これは，この課題が実際に紙を折りながら考察できるという，活動を中心としたものであったことが挙げられる。さらには，本課題の解決には新たな知識は必要ではなく，考えることだけに集中できたのもよかったのだろう。これも離散数学教材の魅力である。



これらのことは生徒の感想にも現れている（右参照）。この感想のように，「数学とは計算である」という狭い捉え方をしている生徒も多い。今回の授業でその意識が変わってくれた生徒がいたことは授業者としては非常に喜ばしいことである。これ以外にも

いつもの数学の授業と違って思考力を試す問題をやって，こういう問題をやることによって，自分の中で数学の本当の楽しさを実感できたように思った。

という感想も見られ，離散数学教材の可能性を大いに感じることができた。

8　結語

以上のように，離散数学教材は，少なくとも本教材は生徒が意欲的に活動し，主体的に考える場を提供できることが認められる。新たな概念や知識に追われ，数学の面白さや魅力をなかなか感じることができない現状の高校数学において，離散数学教材は新たな可能性を認めることができよう。ここで最も大切なことは，じっくり考える時間を生徒に保障してあげることである。安易に解決を急ぎ，教え込みが多くなってしまえば，教材の魅力はほとんど失われてしまうからである。

ところで，300番目の折り目を決定するということは，決定するためのアルゴリズムを構成することである。その中で鍵となるアイデアが再帰的思考であった。前述したとおり，再帰性を活用したり，折り目を決定する手続きを表現することに関しては，生徒は十分には達成されていない。これらについては日本の学習指導要領ではほとんど強調されていないのが現状であろう。そのため，生徒がその活用を知らないのは当然である。新しい数学の概念を積み上げていくことも大切だが，再帰的思考を含め，数学的考え方をさらに醸成していくことも大切である。そのためにも，アルゴリズムを構成したりあるいは再帰的思考を活用したりする教材を，さらに開発していくことが大切であろう。

離散的なものの見方・考え方の重要性

ー鳩の巣原理による単元の構成ー

津島　久美
岡山県立高梁高等学校

【要約】普通科３年生の理系ではあるが実態は文系に近い生徒９名（数Ⅲ・Ｃは未履修）を対象に５回連続で『鳩の巣原理』の授業を行った．３人ずつの３グループに分け，グループで議論させる形式をとった．そして，毎時間の最初と最後にアンケートをとり，数学に対する意識調査も行った．５時間の授業，アンケート結果から得られたことは，思考の葛藤を多くの生徒が味わえたこと，数学に対して意欲的になったこと，などである．そして何より，最も印象深かったのは，離散数学に対して興味を示した生徒もそうでない生徒も，活き活きと授業に参加していたことである．グループ内での討論では，どの生徒も積極的に自分の意見を発言していた．

１．題材について

鳩の巣原理は，存在命題を証明するときにその効力を発揮する．鳩の巣原理の定義は，ディリクレの部屋割り論法とも言われ，それぞれの定義は次の通りである．

《鳩の巣原理》

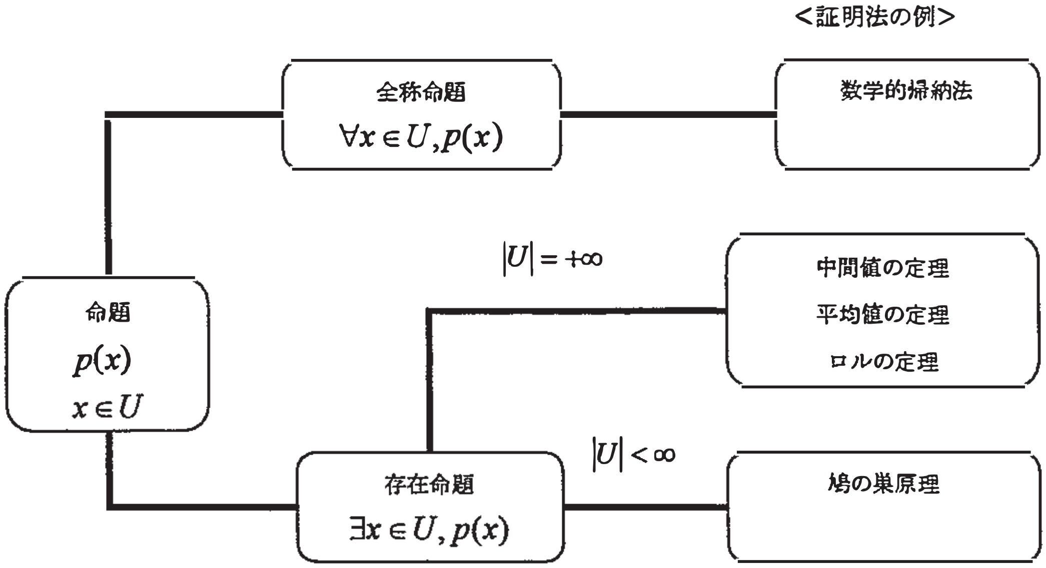
$p+q-1$ 羽の鳩が２つの巣を共有しているとする．すると，少なくとも１つの巣は p 羽の鳩がいるか，もう１つの巣には q 羽の鳩がいる．

《ディリクレの部屋割り論法》

$nk+1$ 人を n 室の部屋に入れたとき，少なくとも１つの部屋は $k+1$ 人以上の人が入ることになる．

鳩の巣原理は，有限集合の存在命題を証明するとき使われる．命題（真か偽かが判断できる文章）の分類とその証明方法を図式化すると，図１の通りである．

図１　数学における命題と証明方法



それぞれについての説明は次の通りである.

《全称命題》

$\forall x \in U, p(x) \cdots$ (＊)

全体集合 U が自然数全体などのとき，すなわち変数 x が自然数のとき，(＊) は自然数を変数とする命題群を意味する.

(＊) を場合分けして証明しようとすると一般に無数の場合があり，それらすべてを 1 つずつ証明していくことはできない．ここで，用いる強力な武器が数学的帰納法である.

《存在命題》

$\exists x \in U, p(x) \cdots$ (＊＊)

全体集合 U が有限集合のときと無限集合のときとでは (＊＊) の証明法は大きく異なる.

$|U| = +\infty$ のとき，例としては中間値の定理，平均値の定理.

$|U| < \infty$ のとき，例としては鳩の巣原理.

2．単元観

現代社会は情報社会である．コンピュータの発展により，離散数学的な考え方は必要不可欠なものである．そのことを少しでも感じさせることができればと思う．また，私たちの身の回りには数学の恩恵を受けているものがたくさんあるということを伝えることで，数学の有用性を少しでも実感させたい．そして，普段学習することのない離散数学を学習することで，数学に対する興味・関心が増し，他の数学の分野も頑張って取り組んでくれるようになってくれれば幸いである.

3．授業の計画

この授業は，鳩の巣原理とそれを使った問題解決について 5 時間で行う．授業の計画は，表 1 の通りである.

表1　鳩の巣原理の授業の計画

第 1 時	鳩の巣原理を導き出す
第 2 時	鳩の巣原理を使う（公開授業）
第 3 時	鳩の巣原理を使った問題の発表会準備
第 4 時	発表会
第 5 時	評価問題を解く

それぞれの時間の学習指導案は，表 2 から表 6 の通りである.

表２　第１時の学習指導案

数学科学習指導案

岡山県立高梁高等学校　普通科　３年２組９名（男子３名，女子６名）

平成１７年１０月１９日（水）　第1限　（８：４５～９：３０）

使用教室　セミナー①　指導者　津島　久美

本時案（計画　第１時）

学習目標		鳩の巣原理を導き出す	
	指導のねらい	指導過程・学習活動	指導上の留意点・〔評価〕
導入（５分）	挨拶 出欠の確認 アンケートを記入する	・パスカルの話をし，本時は色々と思考をしていくことを伝える	アンケートに真剣に取り組んでいるか〔興味・関心〕
展開（３５分）	自分の考えをお互い議論する 確認問題を解く	鳩が４羽いて，鳩の巣が３個ある．鳩は必ず鳩の巣に入るとしたら，どのような現象が起こるだろうか？？ ・３人組のグループを作り，グループ内で議論させる ・グループごとの考えを発表させる ・各グループの考えをまとめる ２羽以上存在する鳩の巣が少なくとも１つ存在する ・鳩の巣原理の考え方が理解できているかどうかの確認問題を解かせる 一辺の長さが２の正方形内に５点がある．その内のどれか２点の距離が$\boxed{\sqrt{2}}$以下であるような２点は存在するのだろうか ・答え合わせをする	・少なくともという表現に注意する ・グループでさせる ・問題が解けているか，鳩の巣原理の考えをどこに適用すればよいか理解しているか．〔数学的見方・考え方〕〔表現・処理〕
まとめ（５分）	本時の学習内容をふりかえる アンケートを記入する 挨拶	・本時の学習内容を確認させる ・アンケートをとる ・アンケートを回収する	
準備物		プリント，アンケート用紙	

表３　第２時の学習指導案

<table>
<tr><td colspan="4">数学科学習指導案
岡山県立高梁高等学校　普通科　３年２組９名（男子３名，女子６名）
平成１７年１０月２０日（木）　第４限　（１１：３０〜１２：１５）
使用教室　セミナー①　指導者　津島　久美</td></tr>
<tr><td colspan="4">本時案（計画　第２時）</td></tr>
<tr><td colspan="2">学習目標</td><td colspan="2">何が「鳩」に対応し，何が「巣」に対応しているか，に気づくことが大切だと理解させる［数学的見方・考え方］
「巣」の方が「鳩」より数が少ないときに鳩の巣原理が適用できることを理解させる［数学的見方・考え方］</td></tr>
<tr><td colspan="2">指導のねらい</td><td>指導過程・学習活動</td><td>指導上の留意点・［評価］</td></tr>
<tr><td rowspan="2">導入（５分）</td><td>挨拶
出欠の確認
アンケートを記入する</td><td></td><td>アンケートに真剣に取り組んでいるか［興味・関心］</td></tr>
<tr><td>前時の復習</td><td>・鳩の巣原理の考え方を思い出させる</td><td></td></tr>
<tr><td>展開（３５分）</td><td>鳩の巣原理の考えを使う問題を解く

単色三角形のプリントに取り組む</td><td>・鳩の巣原理の考えを使っていくつか問題を解かせる

Ｔ市の人口は約４万人です。人間の髪の毛は３万本以下であるとすると，Ｔ市民の中には，同じ髪の毛の本数の人がいるのだろうか．

４人組でジャンケンをします．このとき，同じものを出した人はいるだろうか．

・答え合わせをする
・どういう状況のときに鳩の巣原理が適用できるかを答えさせる

平面上にどの３点も同一直線上にない６個の点があり，すべての点の間が線分で結ばれている図がある．今，この図のすべての辺に赤か青のどちらか一方の色をつけるとする．このとき，どんな色の付け方をしても，この図の中には３辺が同じ色の三角形は存在するだろうか．

・グループごとで，考えさせる</td><td>・前回と同じグループでさせる

論理的に筋道の通った証明ができているか［表現・処理］［数学的見方・考え方］</td></tr>
<tr><td>まとめ（５分）</td><td>アンケートを記入する

次時の予告
挨拶</td><td>・アンケートをとる
・アンケートを回収する
・次時はプリントの続きをすることを伝え，プリントについて考えてみるように促す</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">準備物</td><td colspan="2">プリント，アンケート用紙</td></tr>
</table>

表4　第３時の学習指導案

数学科学習指導案

岡山県立高梁高等学校　普通科　３年２組９名（男子３名，女子６名）

平成１７年１０月２７日（木）　第４限　（１１：３０〜１２：１５）

使用教室　セミナー①　指導者　津島　久美

本時案（計画　第３時）

学習目標		自分の考えを相手にわかりやすく伝えるためには、どうしたらよいか考えさせる［表現・処理］	
指導のねらい		指導過程・学習活動	指導上の留意点・［評価］
導入（５分）	挨拶 出欠の確認 アンケートを記入する		アンケートに真剣に取り組んでいるか［興味・関心］
展開（３５分）	単色三角形の問題にグループで取り組む プレゼンの準備	・前時の続きで単色三角形のプリントをさせる ・グループ内でそれぞれ自分の考えの議論をさせる 平面上にどの３点も同一直線上にない６個の点があり，すべての点の間が線分で結ばれている図がある。今，この図のすべての辺に赤か青のどちらか一方の色をつけるとする。このとき，どんな色の付け方をしても，この図の中には３辺が同じ色の三角形は存在するだろうか. ・考えがまとまったグループからプレゼンの準備をさせる	・まったく解法が見つかってない場合はヒントを与える ・聞いている人がわかりやすいプレゼンができるよう注意する
まとめ（５分）	アンケートを記入する 次時の予告 挨拶	・アンケートをとる ・アンケートを回収する ・次時は発表の時間であることを伝え、準備をしておくよう指示する	
準備物		プリント，アンケート用紙，模造紙，マジック	

表５　第４時の学習指導案

<table>
<tr><td colspan="4">数学科学習指導案
岡山県立高梁高等学校　普通科　３年２組９名（男子３名，女子６名）
平成１７年１０月３１日（月）　第４限　（１１：３０～１２：１５）
使用教室　セミナー①　指導者　津島　久美</td></tr>
<tr><td colspan="4">本時案（計画　第４時）</td></tr>
<tr><td colspan="2">学習目標</td><td colspan="2">わかりやすいプレゼンをさせる［表現・処理］</td></tr>
<tr><td colspan="2">指導のねらい</td><td>指導過程・学習活動</td><td>指導上の留意点・［評価］</td></tr>
<tr><td>導入（５分）</td><td>挨拶
出欠の確認
アンケートを記入する</td><td></td><td>アンケートに真剣に取り組んでいるか［興味・関心］</td></tr>
<tr><td>展開（３５分）</td><td>プレゼンをする

評価問題を解く</td><td>・順番に，単色三角形の問題の解法をグループごとに発表させる

平面上にどの３点も同一直線上にない６個の点があり，すべての点の間が線分で結ばれている図がある．今，この図のすべての辺に赤か青のどちらか一方の色をつけるとする．このとき，どんな色の付け方をしても，この図の中には３辺が同じ色の三角形は存在するだろうか.

・まとめとして以下の問題を解かせる

一辺の長さが５０㎝の正方形の形をした射撃の的がある．いま，５１発の弾丸が的上のすべて異なった点に当たったとする．このとき，弾丸が当たった点のうち３点が存在し，その３点を頂点とする三角形の面積が５０ｃ㎡以下となっていることを証明せよ.</td><td>・ポイントを押さえたプレゼンができているか
・協力してできているか

・グループではなく，個人でさせる</td></tr>
<tr><td>まとめ（５分）</td><td>アンケートを記入する
次時の予告
挨拶</td><td>・アンケートをとる
・アンケートを回収する

・問題が解けていない人は考えてみるよう促す</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">準備物</td><td colspan="2">プリント，アンケート用紙，模造紙，マジック</td></tr>
</table>

表６　第５時の学習指導案

数学科学習指導案

岡山県立高梁高等学校　普通科　３年２組９名（男子３名，女子６名）

平成１７年１１月２日（水）　第１限　（８：４５～９：３０）

使用教室　セミナー①　指導者　津島　久美

本時案（計画　第５時）

学習目標		評価問題を理解させる［知識・理解］	
指導のねらい		指導過程・学習活動	指導上の留意点・［評価］
導入（５分）	挨拶 出欠の確認 アンケートを記入する		アンケートに真剣に取り組んでいるか ［興味・関心］
展開（３５分）	評価問題を解く 解説を聞く	・前時のつづきで評価問題をさせる 一辺の長さが５０cmの正方形の形をした射撃の的がある．いま，５１発の弾丸が的上のすべて異なった点に当たったとする．このとき，弾丸が当たった点のうち３点が存在し，その３点を頂点とする三角形の面積が５０ｃ㎡以下となっていることを証明せよ． ・解説をする ・鳩の巣原理の一般的な場合を説明する ・鳩の巣原理の考え方が使われている身近な例をあげる	・自分の思考過程が説明できるよう指示する ・どこに鳩の巣原理が使われているか尋ねる
まとめ（５分）	アンケートを記入する 挨拶	・アンケートをとる ・アンケートを回収する	
準備物		プリント，アンケート用紙	

４．授業の記録

（１）日時

この研究の授業は，平成17年10月から11月に５回に分けて行った．

第１時：平成17年10月19日（水）　鳩の巣原理を導き出す

第２時：平成17年10月20日（木）　鳩の巣原理を使って（公開授業）

第３時：平成17年10月27日（木）　鳩の巣原理を使った問題の発表会準備

第４時：平成17年10月31日（月）　発表会

第５時：平成17年11月 2日（水）　評価問題を解く

（２）対象生徒

３年２組数学B選択者９人（男子３人　女子６人）

（３）生徒観

本校は，普通科４クラス，家政科１クラスからなる，創立１２５年の伝統校である．理系ではあるが，数学Ⅲ・Ｃを履修しなかった生徒たちである．９名の進学希望先は福祉，公務員，語学系という，決して理系とは言い切れず，どちらかといえば文系の進学希望で，数学に対しては意欲的な生徒が少ない．また，数学の成績が良い子は多いとはいえない．しかし，クラスの雰囲気は和やかで，まじめなクラスである．

（４）第１時の授業記録

①導入：特別授業のテーマ：「しっかり考える」を伝える

・ ５回連続の特別授業のテーマは「しっかり考える」ことであることを伝え，プリントを配布する．

・ くじ引き（男子１人，女子２人になるようにし，あみだくじ）をし，３人ずつのグループを作る．

②展開：鳩の巣原理について

４羽の鳩と３つの巣の絵を板書し，

鳩が４羽いて，鳩の巣が３個ある．鳩は必ず鳩の巣に入るとしたら，どのような現象が起こるだろうか？？

Ｔ：絶対，鳩は巣に入る．そうしたら，どのような状況が起こると考えられるか？

Ｓ：鳩・巣は区別する？

Ｔ：しないよ

・ グループの代表者に発表させる．

３グループとも，（４，０，０），（３，１，０）など考えられる入り方をすべてあげて，最終的に『少なくとも１つの巣は２羽以上いる』とプリントに記入していた．

Ｔ：２羽以上存在する巣が１個か２個かはわからないけど，絶対２羽以上いる巣が１個はあるよね．今，みんなが発表してくれたこの考えを鳩の巣原理といいます．

ここでは，一般的な鳩の巣原理は述べなかった．

Ｔ：この鳩の巣原理の考えを使って，次の問題を解いてください．

一辺の長さが２の正方形内に５点がある．その内のどれか２点の距離が$\boxed{\sqrt{2}}$ 以下であるような２点は存在するのだろうか

Ｔ：存在するなら，するということを，しないなら，しないということを示してください．

Ｓ：辺の上を含む？

Ｔ：含みます．

＊＊＊各グループで話し合い＊＊＊

Ｔ：「では，Ｓ３君発表してください．」

S3：(黒板で説明．正解．)

③まとめ：アンケート記入

Ｔ：これから何時間か，この鳩の考えを使って授業をしていきます．最後に，今日の授業に関してアンケートを記入してください．

（５）第２時の授業記録

①導入：鳩の巣原理の考え方の確認

Ｔ：　昨日までの数学の授業についてアンケートを記入してください．

Ｔ：　昨日，鳩の巣原理というのをやりましたね．どんなのでしたっけ？Ｓ１君？

Ｓ１：鳩が４羽いて３つの巣があったら，必ず２羽以上いる巣がある．

Ｔ：　そのなかで，すごく大事なことはなんだったっけ？

Ｓ１：え？？

Ｔ：　では，Ｓ２君どう？

Ｓ２：２羽以上いる巣がある．

Ｔ：　そう．２羽以上いることが大事なのではなくて，そういう２羽以上いる巣があるということが大事なんよね．この鳩の巣原理には他にもディリクレの部屋割り論法とか，引き出し論法とも言われています．

では，今日は，２問，問題を解いてもらいたいと思います．Ｓ３さん．問題を読んでください．

問１：Ｔ市の人口は約４万人です．人間の髪の毛は３万本以下であるとすると，Ｔ市民の中には，同じ髪の毛の本数の人がいるのだろうか．
問２：４人組でジャンケンをします．このとき，同じものを出した人はいるだろうか．

②展開：鳩の巣原理を使った簡単な問題を解く

＊＊＊各グループ問題を考える＊＊＊

Ｓ４：０本ってあり？

Ｔ：　あり．０本ありです．

Ｔ：　では，グループ１の代表Ｓ５君発表してください．

Ｓ５：(黒板で説明)

毛を巣，市民を鳩に見立て，それぞれ１万でわると，昨日の鳩の巣原理と同じ．だから，同じ本数の人はいる．

Ｔ：　ありがとう．他のグループも同じですか？

Ｓ６：ちょっとちがう．１万でわると，０本の人もいるから…

Ｔ：　そうだね．０本もありとしたら，本数は４通り考えられるから，１万でわるという発想はいいかもしれんけど，今回は適用できんね．

Ｔ市民の髪の毛の本数は０から３万まで３万１通りあるね．Ｔ市民が４万人いたら，０本の人が２人いるのか，１万本の人が１０人いるとかはわからんけど，とにかく，同じ本数の人がいるね．では，問１はＯＫだ．では，問２にいこう．

＊＊＊各グループ問題を考える＊＊＊

Ｔ：　誰か前で説明してくれませんか？Ｓ７さんの声が聞きたいとの声があるよ．

Ｓ７：(黒板で説明．正解.)

ジャンケンの出し方，グー・チョキ・パーの部屋の絵をかいて考えていた．

Ｔ：　問１も問２もみんな何が鳩に対応して，何が巣に対応するかを考えてくれていたね．それは，すごく大事です．他に鳩の巣原理の考えを使える条件としてどんなことが考えられる？

Ｓ８：鳩の数が巣の数より多いとき．

Ｔ：　そうだね．こうやって，何が鳩，何が巣って対応させて考えるのはすごく大切だね．では，

次の問題です．これも，グループで考えて発表してもらいますが，次の次の時間に発表会をしたいと思います．そのときには，みんなの担任のK先生とS先生にも来て頂きます．つまり，K先生とS先生は鳩の巣原理の考えを知らないわけだから，初めて聞く人にも理解してもらえるような発表をしてくださいね．S9さん問題を読んでください．
プリントに赤・青の色をつけて試行錯誤しながら考えてみてください．

平面上にどの3点も同一直線上にない6個の点があり，すべての点の間が線分で結ばれている図がある．今，この図のすべての辺に赤か青のどちらか一方の色をつけるとする．このとき，どんな色の付け方をしても，この図の中には3辺が同じ色の三角形は存在するだろうか．

＊＊＊各グループ問題を考える＊＊＊
S９：三角形の点は頂点だけ？
T：　そう．六角形の頂点だけよ．対角線の交点を三角形の頂点とはしないよ．

③まとめ：アンケート記入

T：　各グループ，単色の三角形ができるか，できないか，ある程度の予想がついていると思います．この問題を家に帰って考えてもいいし，考えなくてもいいです．では，アンケートを記入してください．次の時間は発表の準備です．

（6）第2時　授業後の研究協議

10月20日（木）13：10～13：55　於：応接室
参加者　景山三平（広島大学大学院教育学研究科教授）
長崎栄三（国立教育政策研究所総合研究官）
後藤文夫（岡山県立高梁高等学校校長）
平松　茂（岡山県立高梁高等学校教頭）
小網晴男（岡山県立高梁高等学校教諭）
津島久美（岡山県立高梁高等学校教諭：授業者）

①授業者の感想

とても緊張した．本時の目標はちゃんと達成できたと思う．グループ学習もうまくいっていたと思う．発表も普段はとてもおとなしい女の子が，快く引き受けてくれたので嬉しかった．単色三角形についてはどうやら，どのグループも単色三角形ができると予想しているようである．

②意見交換

1）雰囲気は良かった．
2）鳩の巣原理という言葉より，ディリクレの部屋割り論法という言葉でいった方がいいのだろうか？
3）机間指導の際，助言の言葉があると良かった．
4）生徒たちは鳩の巣原理の必要性をどこで感じていたのだろうか？
5）グループ活動のよさが活かされていなかった．教師と生徒1対1になりがちだった．
6）鳩の巣原理の一般形を第5時の最後におさえておくといい．
7）普段の授業（連続数学）にもどってからの情意面の変化を知りたい．
8）鳩の巣原理が必要になるような問題を導入問題としてもってくることはできないか．
9）今回の授業では，グループ活動の結果を発表する際に，発表者と先生の対話になりがちだっ

た．そこに他の生徒が巻き込まれる工夫が必要だろう．

10）指導案には，課題とともに重要な発問を入れておく必要がある．また，可能ならば，発問に対する生徒の反応の予想を入れておくとよいだろう．今回の場合，最後の問題については，補助的な発問があってもよいのかもしれない．

11）鳩の巣原理を学んだあと，どのような問題を選択し指導するかは興味のあるところだ．どのような問題を学んでいくと，生徒が関心を持続させ，しかも，原理の扱いに慣れ，そして，新しい発見をしていくのかということが現れるからだ．その意味では，指導案には，それぞれの問題を選んだ理由をどこかに入れておくとよいだろう．

（７）第３時の授業記録

①導入：アンケート記入

②展開：前時に続いて，単色三角形の問題を解く

> 平面上にどの３点も同一直線上にない６個の点があり，すべての点の間が線分で結ばれている図がある．今，この図のすべての辺に赤か青のどちらか一方の色をつけるとする．このとき，どんな色の付け方をしても，この図の中には３辺が同じ色の三角形は存在するだろうか．

Ｔ：　どのグループも三角形が存在するかしないかの予想はついていると思います．あとは，それを説明できるようにしてください．問題が解けたグループからここにマジックと模造紙があるので，プレゼンの準備にとりかかってください．

グループ２

Ｓ２：３辺が同じ色の三角形がないと仮定したら，（赤，赤，青）か（青，青、赤）じゃん．で三角形は全部で２０個できるから，どっちかは１０個以上あるよね…で，つまった．もう１つ考えたのは，辺は１５ある．で，赤か青だから，どっちかの色は８本以上あるよね．そこからはつまった…

Ｓ３：まず，何が鳩で，何が巣かおこうや．

Ｓ２：色が巣で，辺が鳩．

Ｔ：　そうだね．その考え方はいいね．でも，どの８本が赤とかは選びようがないよね．

グループ３

Ｔ：　何か思いつきましたか？Ｓ４君こないだ良い考えしていたよ？（この生徒は対称性に関する発言をしていた）

Ｓ４：え？忘れたなぁ．

Ｓ５：先生，鳩の巣原理って，鳩と巣の差が１じゃなくても良いのですよね？

Ｔ：　うん．いいよ．Ｓ５さん，今，何について考えている？

Ｓ５：点と点から出ている線について考えている．

【どのグループも考えあぐねている】

Ｔ：　ヒントをいうと，その図形は，どの点に着目しても同じよ．今，どのグループも色を巣として考えているのは良いと思う．

グループ１

Ｔ：　Ｓ６君，それどうやって考えた？（１点から５本の線がでている図をかいている．）

Ｓ６：線を鳩，色を巣としたら，いいのはわかるけど…

グループ３

Ｔ：　Ｓ７さん，さっきあなたステキな発言してなかった？

（Ｓ７は前回までずっと欠席で今回が初めての授業参加）

Ｓ７：１点に着目したら，５本線があって，どっちかに塗ったら，どっちかの色は３本ある.

Ｔ：　では，その３本に着目してみたら？

Ｓ７・５：あっ！！できた！あー，でもどう説明したら，いいのだろう.

他のグループも１点から５本線が出ている図を書き，同様のヒントを与えることにより，正解にたどりつく.

③まとめ：アンケート記入

Ｔ：　プレゼン準備が全くできなかったので，各グループ次の時間までにしておいてね．必ず，グループのメンバーとグループ名は入れること．あと，どこに鳩の巣原理を使っているか説明してね.

（８）第４時の授業記録

①導入：アンケート記入，発表順決め

Ｔ：　今日はみんなを愛してくれている両担任も来てくださっています．では，まずいつものアンケートから．あと発表順も決めたいと思うので，代表者はくじ（あみだくじ）を引いてください.

【順番決定】

Ｔ：　ルールは１グループ１０分です．では，作戦タイムを５分とります.

Ｓ１：先生．発表は全員が言った方が良い？それとも，１人が言った方が良い？

Ｔ：　それは，グループに任せます.

Ｔ：　注意してほしいのは，鳩の巣原理という言葉を使っても良いけど，鳩の巣原理の概念が分からない人もいるわけです．その人にも，分かるような説明をしてくださいね.
問題の意味もわからない人もいるかもしれないので，（担任のＳ先生はわからなかった）その辺もお願いします．まず，グループ名，メンバー，は言ってね.

②展開：プレゼンテーション

グループ２

- 模造紙にイラスト入り.
- まず，鳩の巣原理の概念をイラストにより説明.（４羽の鳩と３つの巣のイラスト）
- 問題文の中の「どの３点も同一直線上にない６点」とは簡単にいうと六角形だと説明.
- 担任K先生から凸図形でなく，凹図形の六角形でもいえるのか？との質問に答えられず，詰まる．→次の時間までに考えたいということで，その質問に関しては持ち越しになった.

グループ３

（この日１人欠席）

- 鳩の巣原理の説明に鳩の絵の型紙を持ってきていた．その鳩の絵を動かして鳩の巣原理を説明.
- ①６つの点のうちの１点について考える
②①での同じ色をもつ４つの点について考える，と模造紙に書いてあるが，実際は試行錯誤したら単色三角形はあるんです．という発表.

・K先生から単色の三角形はホントにできるの？と質問．→やってみたら，なるんです．と答える．

グループ１

・鳩の巣原理の説明は前２チームがしたので省略．
・１点から出ている５本の線を鳩，赤・青の色を巣と見立てた．単色三角形ができないと仮定し，５本のうちの同色の３本に着目したとき，必ずできてしまうと説明．（もっともわかりやすかった．両担任，特に数学の大の苦手なＳ先生も納得の様子）
・グループ発表だが，他のグループはみんな何かしらしていたのに対し，このグループは１人が発表し，あとの２人は何にもしていなかった．
・Ｔが最初のグループの質問で出た，凹図形の場合はどうなると思うか，と問う．
・やっぱり，１点から５本の線が出ていることには変わりないから，単色三角形は存在すると思う．と答える．
・K先生から，鳩の巣原理は４羽の鳩と３つの巣のときだけ使えるの？他にも使えるならどんなとき使えるの？と質問．
・巣の方が少ないとき．
・K先生：どれくらい少ないとき？
・どれくらいでも良い．

③まとめ：評価問題の提示

Ｔ：　楽しい発表をありがとう．もう，時間がないので，プリントを配るだけにしておきますが，これは，絶対相談なしです．１人で考えてください．

一辺の長さが５０㎝の正方形の形をした射撃の的がある。いま，５１発の弾丸が的上のすべて異なった点に当たったとする。このとき，弾丸が当たった点のうち３点が存在し，その３点を頂点とする三角形の面積が５０ｃ㎡以下となっていることを証明せよ。

家に帰って考えても良いし，受験勉強もあるから，考えなくても良いです．では，アンケートを記入してください．

（９）第５時の授業記録

①導入：前時の振り返り，アンケート記入

Ｔ：　まず，いつものようにアンケートをとりたいと思います．あと，この間の凹図形の六角形の場合についての説明もお願いします．

Ｓ１：（説明）

②展開：評価問題を解く

一辺の長さが５０㎝の正方形の形をした射撃の的がある．いま，５１発の弾丸が的上のすべて異なった点に当たったとする．このとき，弾丸が当たった点のうち３点が存在し，その３点を頂点とする三角形の面積が５０ｃ㎡以下となっていることを証明せよ．

Ｔ：　ありがとう．では，今日は一人で楽しく考えようということで，このプリントにしばらく取り組んでみてください．できたら，教えてください．

Ｓ２：先生．これ，絶対鳩の巣原理を使って証明せんといけんの？

Ｔ：　鳩の巣原理の考えを使わなくて求められそう？

Ｓ２：いやぁ．「なっていることを証明せよ」って絶対なっているの？

Ｔ：　うん．なっているよ．今まで，何が鳩に対応して，何が巣に対応するか考えてきたね．あと，鳩より巣の数が少ないときに，鳩の巣原理は使えたよね．このことをふまえて，考えてください．

＊＊＊各自考える＊＊＊

Ｔ：「３点が存在し，その３点を頂点とする三角形はどんなのかわからん．」ということですが，こういうことです（板書で説明）．

Ｓ３：弾丸が全部一直線上になることもあるのでは？

Ｔ：　あるね．でも，今回はそういう状況は起こらないことにしようか．

Ｓ４：正方形の頂点に弾丸が当たったら，その三角形の面積は５０以下じゃないよ？

Ｔ：　それは，そうだけど，どこかに５０以下の三角形が存在したらいいのだよ．

Ｓ４：１個はそういう三角形があればいいってこと？

Ｔ：　そうそう．そういう三角形があるよってことを証明してください．

Ｓ：　あぁ〜！！そういうこと！

＊＊＊各自問題を解く＊＊＊

何人か正解する生徒がでてくる．正解した生徒同士で，自分の答案を見せ合っている．

半分以上の生徒が解けたところで．

Ｔ：　解けた人の中で発表してくれる人いませんか．（誰かがＳ５君という）
では，みんなの推薦を受けて，Ｓ５君発表してくれますか？

Ｓ５：（説明．正解．）

解答できていなかった生徒もみんな納得

他の生徒がしていた解答を紹介

③まとめ：鳩の巣原理の一般形の紹介．アンケートの記入

Ｔ：　実は，発表してもらった単色三角形の問題と今日解いた問題は大学入試の問題です．
この鳩の巣原理というのを一般化したものを紹介します．
一般化のものを板書する．ｎとｋが今回はいくらの時か説明する。

Ｔ：　今まで，５時間鳩の巣原理の授業をしてきたけど，この原理の１番すごいところは絶対存在するっていってくれている所なんよね．私たちの生活している世の中は工業によって支えられているよね．いろんな機械があったり，コンピュータだったり…．数学っていうのは，目に見えて恩恵を受けているわけではないけど，そういうものの元になっているのは数学の理論なのです．何かがあるってわかったら，それがどこにあるかを探す機械を作るのは工学部の人たちの仕事だよね．でも，あるかどうかわからなかったら，機械を作ろうとはしないよね．あるかどうかわからないものの為に機械なんて作らないよね．でも，絶対ある！と数学がいってあげることで工業の人たちが機械を作り，何かが発見され，私たちの生活がより豊かになるかもしれないですよね．だから，実は数学ってすごいんだよ．別に鳩の巣原理だけがすごいのではなくて，今，みんなが勉強している微分や積分だってそうです．数学のすごさを少しでも感じてもらえたらいいなぁ，と思います．

【アンケートの配布】

Ｔ：　今日は，今日の授業に関してと，今回の５回の特別授業に関しての２つ答えてください．
５回の授業の数学はいつもの数学とは少し違っていたと思います．そういうのもふまえて

答えてください．では，チャイムがなったので，Ｓ６さんにかけたら出してください．Ｓ６さんは集まったら，私の所に持ってきてね．

５．アンケート結果の分析

アンケートは毎時間の最初に「授業前アンケート」，毎時間の最後に「授業後アンケート」，５時間目の最後には「５回を通して」，そして，１週間後と１ヶ月後にもアンケートをとった．それぞれの結果をまとめると，表７から表９の通りである．その中から，特に強調したい点についてのみ述べる．

表７　授業前アンケートの結果

授業前アンケートの質問項目	個々の生徒の回答（英字は生徒）（選 択：4 そう思う，3 どちらといえばそう思う，2 どちらかといえばそう思わない，1 そう思わない）								
	a	b	C	d	e	f	g	h	i
第１時									
①数学の授業内容に興味・関心をもっているか	3	4	1	3	4	2	3		2
②授業に積極的に参加していますか	2	4	1	3	4	2	3		4
③数学が好きですか	3	2	4	2	4	1	3		2
④数学が得意ですか	2	1	3	2	3	1	2		3
⑤数学の問題に対し，色々と考えることがおもしろいと思うか	3	3	2	3	4	3	2		1
第２時	a	b	C	d	e	f	g	h	i
①数学の授業内容に興味・関心をもっているか	3	3	3	3	4	2	2		3
②授業に積極的に参加していますか	3	4	3	3	4	3	4		4
③数学が好きですか	2	2	4	3	4	1	2		3
④数学が得意ですか	2	1	3	2	3	1	3		3
⑤昨日学習したことについて，授業の後考えることがあったか	2	3	1	2	3	2	1		3
第３時	a	b	C	d	e	f	g	h	i
①数学の授業内容に興味・関心をもっているか	3	4	4	4	3	2	4	3	3
②授業に積極的に参加していますか	3	4	4	3	3	2	4	2	3
③数学が好きですか	2	2	4	3	3	1	3	3	2
④数学が得意ですか	2	1	3	2	2	1	3	2	2
⑤昨日学習したことについて、授業の後考えることがあったか	3	4	3	3	4	3	3	1	2
⑥今までプレゼンをしたことがありますか（1...ある，0...ない）	1	1	1	1	1	1	1	1	1
第４時	a	b	C	d	e	f	g	h	i
①数学の授業内容に興味・関心をもっているか	3	4	4	4	2	2	4		3
②授業に積極的に参加していますか	3	4	2	4	3	2	4		4
③数学が好きですか	3	2	3	3	2	2	3		3
④数学が得意ですか	2	1	3	3	2	1	3		3
第５時	a	b	C	d	e	f	g	h	i
①数学の授業内容に興味・関心をもっているか	3	4	4	4	2	2	3	4	3
②授業に積極的に参加していますか	4	3	3	3	3	3	2	4	3
③数学が好きですか	3	3	3	3	2	2	3	4	3
④数学が得意ですか	3	2	3	2	2	1	2	2	2
⑤昨日学習したことについて，授業の後考えることがあったか	4	3	2	2	2	2	1	2	2

表８　授業後アンケートの結果

授業後アンケートの質問項目	個々の生徒の回答（英字は生徒）（選択肢：4そう思う，3どちらといえばそう思う，2どちらかといえばそう思わない，1そう思わない）								
	a	b	c	D	e	f	g	h	i
第１時									
①授業に興味・関心をもてたか	4	4	4	4	4	3	4		3
②授業に積極的に参加できたか	4	4	4	4	4	3	4		4
③数学が好きか	3	3	4	4	4	1	3		2
④数学が得意か	2	1	3	3	3	1	3		3
⑤今日の問題は難しかったか	2	3	2	2	2	2	1		4
⑥自由に討論することができたか	4	4	4	3	4	3	4		4
⑦問題を解くにあたってどのように考えることが必要だと思ったか【自由記述】 ・頭をやわらかくする．・さまざまな見方ができるようにならなければならない．・図を書いて実際に図面で考えること．・鳩と巣におきかえてみること．・１つずつ順番に考えること．・図を書いて原理の考えと比べること．・ひらめき．・原理や図を使って考えることが必要だと思った．・既存の考えにとらわれない考え方も時には必要だと思った．									
⑧今日の感想【自由記述】 ・楽しく学べた・よく考えた．・頭をかなり使った．・先生は鳩の絵が下手ですね．・普通の問題を解くよりおもしろかった．・楽しかった．・班になって問題を解くことが今までほとんどやったことがなく，楽しかった．・正誤を問われない問題だと考えの幅が広がりすぎるので大変だった．									

第２時	a	b	c	d	e	f	g	h	i
①授業に興味・関心をもてたか	4	3	4	4	4	4	3		3
②授業に積極的に参加できたか	4	3	4	4	4	3	4		3
③数学が好きか	2	3	4	4	4	2	3		2
④数学が得意か	1	2	3	3	3	1	3		2
⑤今日の問題は難しかったか	4	2	1	3	3	3	1		4
⑥自由に討論することができたか	4	3	4	3	4	2	4		4
⑦この後，問題に取り組んでみようと思うか	4	4	4	4	4	3	3		1
⑧今日の感想【自由記述】 ・いろいろ考えることができてよかったです．・最後の問題は難しい．絶対答えてみたい．・毛と市民．・三角形の問題が難しそうだったけどおもしろそう．興味がもてた．・No2のプリントの問題は何を巣としておいて，鳩としておくか，わかれば理解ができた．No3はけっこう難しい．どうにかして答えを出したい．・後ろにたくさんの人がいて緊張した．発表が少し恥ずかしかった．・髪の毛の問題は難しかった．どこに鳩の巣原理を使えばいいかを考えることも，まぁまぁおもしろかった．									

第３時	a	b	c	d	e	f	g	h	i
①授業に興味・関心をもてたか	3	4	4	4	4	3	3	3	3
②授業に積極的に参加できたか	4	4	1	4	4	3	3	3	1
③数学が好きか	3	2	3	3	3	1	3	2	2
④数学が得意か	2	1	3	2	3	1	3	2	2
⑤今日の問題は難しかったか	4	4	4	4	4	4	4	4	4
⑥自由に討論することができたか	3	4	1	4	4	4	3	3	2
⑦問題を解くにあたってどのように考えることが必要だと思いましたか【自由記述】 ・関連づけ．・１部分だけを取り出して考えることも大切なんですね．・みんなの意見が大事．・全体よりも部分的に考えること．・六角形全体で考えるのではなく，ある１部分を取り出すことが大切だと思った．・ひらめきと努力．・鳩の巣原理にあてはめることが大切である．・とりあえず解こうとする意欲！・どこに鳩の巣原理を用いるのか．									
⑧今日の感想【自由記述】 ・難しかった。・頭が痛い．・〇〇さんは変な人だ．・難しかったけど，なんとなく答えらしきものがわかってよかった．・今日の問題は本当に難しかった．・一人では無理だけどみんなでやると少しは解ける．・今日の問題は前回よりも難しかった．・だんだん何を答えればいいのかわからなくなったりして大変だった．・六角形の問題で，今日ようやく鳩の巣原理を用いるべき所を理解できた．									

第４時	a	b	c	d	e	f	g	h	i
①授業に興味・関心をもてたか	3	4	4	4	4	2	4		4
②授業に積極的に参加できたか	3	4	4	2	3	3	3		3
③数学が好きか	3	4	3	3	3	1	4		2
④数学が得意か	2	1	3	3	2	1	3		2
⑤今日の問題は難しかったか	4	3	4	3	3	3	3		4
⑥この後、問題に取り組んでみようと思うか（１…思う，０…思わない）	1		1						1
⑦プレゼンをする上で気を遣ったこと，うまくいったこと，失敗したこと【自由記述】 ・何が知りたいのかを考えた．・説明の仕方．・〇〇君が１人で発表していた．・説明することはとても難しいとよくわかった．・途中から少しわかりにくくしたこと．・頭ではわかっていても声に出して発表すると，人に説明するのは難しいと思った．・何かしゃべらなきゃ．									
⑧今日の感想【自由記述】 ・楽しく数学ができた．・上手に説明するのって難しい．・疲れた．・他の班の発表も聞けて楽しかった．・他の班の説明はとてもわかりやすかった．・考え方っていろいろあるんだな．									

第５時	a	b	c	d	e	f	g	h	i
①授業に興味・関心をもてたか	4	4	4	4	3	3	4	4	3
②授業に積極的に参加できたか	4	4	4	3	2	4	4	4	2
③数学が好きか	3	3	3	3	3	1	3	3	2
④数学が得意か	3	2	3	3	2	1	3	3	2
⑤今日の問題は難しかったか	3	3	2	2	4	2	4	3	4
⑥問題を解くにあたって，どのように考えることが必要だと思ったか【自由記述】 ・基本を大切にする．・部屋の作り方を工夫すること．・ポッポの定理（ディリクレの部屋割り）．・巣を何にするかいろいろ考えること．・ブロックをどのようにわけるか ・鳩の巣原理をつかうことが大切！・今までの授業の知識をふんだんに活用して考えること．・まず頭をやわらかくしないと，原理をどう使うかがわからない．									
⑦今日の感想【自由記述】 ・納得できて楽しかった．・楽しかったです！！・らくしょう☆・分割のしかたがいろいろあって楽しかった．・全くわからなかった．もう少し頭をやわらかくして考えるべきだった．・人に説明するのは難しい．・ステキな授業でした☆・今日の問題が一番難しかった．									

表９　５回の授業を通してのアンケートの結果

５回の授業を通しての質問項目	個々の生徒の回答（英字は生徒）（選択肢：4 そう思う，3 どちらといえばそう思う，2 どちらかといえばそう思わない，1 そう思わない）								
５時間目の終わり	a	b	c	d	e	f	g	h	i
①５回の授業の内容に興味・関心をもてましたか	4	4	4	4	4	3	4	4	2
②５回の授業に積極的に参加できましたか	4	4	3	3	4	3	3	2	3
③これから，数学を以前より好きになりそうですか	3	4	3	3	4	2	3	3	1
④数学が得意ですか	3	2	3	3	3	1	2	3	2
⑤５回の授業の問題は難しかったですか	2	2	1	2	3	3	3	3	4
⑥普段の数学の授業より，自分で考えることが多かったと思うか	4	4	4	4	4	4	4	4	1
⑦普段と違う数学の授業に参加したことで，これから先，普段の数学も意欲的取り組んでみようと思いますか	4	4	3	3	4	3	3	3	2
⑧５時間を通しての感想【自由記述】 ・とても関心をもってできた．・いい気分．・普段の授業よりも楽しかった．数学の問題にもかかわったのがあることがわかった．またやってみたい．・普段とちがう勉強でとてもおもしろかった．・普通の授業よりはおもしろかった．・いつもと違う授業で楽しかった．５時間とも新しい問題に取り組んで時間をかけて問題を解くことは大切だと思った．今まで数学を誰かと話し合って解くことがほとんどなかったし，高校では初めてだったから，とてもこの５時間はなかなか経験できないものだったと思う．・最初は鳩の巣原理を教えてもらっても「？？」といった状況でしたが，５時間目は楽しく利用できるよ									

うになりました．楽しかったです．・考え方がいろいろある問題ってとても難しかった．問題文は身近なもの（?）だったのに．．．

表10　１週間後・１か月後アンケートの結果

１週間後・１か月後の質問項目	個々の生徒の回答（英字は生徒）（選択肢：4そう思う，3どちらといえばそう思う，2どちらかといえばそう思わない，1そう思わない）								
１週間後	a	b	c	d	e	f	g	h	i
①数学の授業内容に興味・関心をもっているか	2	4	3	3	3	2	3	3	3
②授業に積極的に参加していますか	2	4	2	3	3	2	3	3	3
③数学が好きですか	2	2	3	3	4	2	3	3	2
④数学が得意ですか	2	1	3	2	3	2	3	2	2
１か月後	a	b	c	d	e	f	g	h	i
①数学の授業内容に興味・関心をもっているか	2	3	4	3	3	2	3	4	2
②授業に積極的に参加していますか	2	4	4	3	4	3	3	3	4
③数学が好きですか	2	3	4	3	3	2	3	4	.2
④数学が得意ですか	2	1	3	2	3	1	3	3	2
⑤５回の特別授業を受けたことで、現在数学を勉強する上で何か影響を受けていると思いますか	2	2	1	2	2	2	2	3	1
⑥⑤で4または3と答えた人．具体的にはどんなことが影響を受けていると思いますか【自由記述】 d．鳩の巣を使える問題を見ないから h．思いつく解き方が変わった（?）									

（１）連続数学に対しても意欲的になった

５時間目の最後に「５回を通して」と題して，５時間連続の鳩の巣原理の授業全体に対してのアンケートをとった．その中の質問項目「普段と違う数学の授業に参加したことでこれから先，普段の数学の授業も意欲的に取り組んでみようと思いますか」への回答をまとめると，表11の通りである．普段の数学の授業とは，微分・積分といった連続数学を意味する．

表11　数学への意欲

質問項目	そう思う	どちらかといえばそう思う	どちらといえばそう思わない	そう思わない
普段と違う数学の授業に参加したことで，これから先，普段の数学も意欲的に取り組んで見ようと思いますか。	3名	5名	1名	0名

この質問に対し，８人の生徒がそう思うと回答した．今までとは一味違った数学の授業にふれたことで，生徒たちは数学に対する見方を変え，数学が楽しいと感じ，他の数学に対しても意欲的になったようである．

（２）授業に興味・関心を示す生徒の割合が増えた

「授業前アンケート」では，今まで自分が受けてきた全ての数学の授業に関して尋ねており，この回答をまとめると表12の通りである．ここでは，授業回数を増すごとに，鳩の巣原理の授業の割合が増していると考えることができる．

表 12　数学の授業への興味・関心

数学の授業内容に興味・関心をもっていますか。	そう思う	どちらかといえばそう思う	どちらといえばそう思わない	そう思わない
1時間目	2名	3名	2名	1名
2時間目	1名	5名	2名	0名
3時間目	4名	4名	1名	0名
4時間目	4名	2名	2名	0名
5時間目	4名	3名	2名	0名
1週間後	1名	6名	2名	0名
1か月後	2名	4名	3名	0名

この結果から鳩の巣原理の授業を受ける前には，数学の授業に興味・関心があると答えた生徒は５人であったのに対し，５時間目のときには，７人であった．つまり，鳩の巣原理の授業を受けることによって，普段の数学も含めて，数学に対して興味を示す生徒がふえたと考えることができる．

（３）思考の葛藤を味わった生徒が多い

「５回を通して」のアンケート項目の「普段の数学の授業より，自分で考えることが多かったと思いますか」への回答をまとめると表 13 の通りである．

表 13　数学の授業での思考

質問項目	そう思う	どちらかといえばそう思う	どちらといえばそう思わない	そう思わない
普段の数学の授業より，自分で考えることが多かったと思うか.	8名	0名	0名	1名

それに対し，８人の生徒がそう思うと答えた．普段の授業より，じっくり考え，また，グループで討論することで考えを議論し，議論することでまた自分自身の考えを変えたり…感想にも頭をよく使った．とか，誰かと話し合うのは良い経験だったと答えている生徒もいた．

６．まとめ

卒業論文で鳩の巣原理の教材化を行った．あれから２年．実際に鳩の巣原理の授業をする機会を与えて頂いて，たくさん感じることがあった．

離散数学の有用性は①鋭い着眼点を身につけることができる②問題に潜んでいる数理構造を見抜く能力が身に付く③論理的思考力が身に付く④思考の楽しさが味わえる⑤事象を視覚化しやすい⑥数学嫌い・数学離れを食い止めることができる，ということがあげられると思う．実際生徒たちは，何が鳩で何が巣に対応しているかを考え，どこに鳩の巣原理が使われているかを考えた．また，今回の授業では，グループ学習を行った．生徒の感想には，今まで誰かと話し合って数学の問題を解くことはなかったので，貴重な経験ができたというのもあった．ただ，これは反省だが，今回はグループだったのにもかかわらず，机間指導の際，質問のキャッチボールが教師と生徒の１対１の関係になりがちだった．今後，グループ活動をする際には注意したい．また，グループ活動なので，せっかくいい考えをしている生徒がいても他の生徒によってその考えがつぶされてしまうこともある．それを教師が見逃さないようにしたいが，人数が多くなると難しいのか

なとも思う．また，それらをどのように評価するのかが難しいように思える．今回はワークシートに思ったことをすべて書き込ませ，消しゴムで消さないように指導したが，やはり，生徒はちがうと思ったら消してしまう．もしかしたらそこにはすばらしい考えが書かれているかもしれないのに．また，テストをするときにも採点基準をどのように設けたらいいのかが難しいと思う．他にも理由はたくさんあるだろうが，このことも，なかなか高校数学に導入されない理由の１つなのかもしれない．また，今回の鳩の巣原理の授業は，問題作りをさせることはしていないが，グループもしくは個人で問題作りをさせることも数理構造を理解させたり，論証力を身につけさせるのに有効かもしれない．そして，９名の結果だけで数学に対して興味・関心を示すようになったと結論づけることができるのか，と思われるかもしれないが，この９名は別に特別な生徒達ではなく，数学も得意ではない，ごく一般的な普通科高校の生徒達であるということから結論づけてもいいのではないかと思う．それから，生徒達は本当にたくさんのアイデアを思いつくものである．こちらが予想もしてなかったアイデアをだす生徒もいる．それらのアイデアに対して教師は的確にアドバイスができなければならない．良いアイデアをつぶしてしまってはいけないなということも感じた．そして，忘れてはいけないのは，誰もがみんな離散数学が好きであるとは限らないということだ．離散数学は予備知識を必要としないし，身近なものを題材として取り上げていることが多いので，どの生徒も好きなものだろうと思っていた．しかし，１人だけどうしても最後まで好きになれない子がいた．個人的に理由を聞いてみると，発想を要求されたり，考え方が広がりすぎて困ってしまう，普段の数学みたいに，公式に当てはめたりする方が好き，とのことだった．そういう生徒もいるので，今後離散教材を扱うことがあれば，そのような子のことも考えて授業を進めたいと思う．

最後に，今回の授業でもっとも印象的だったのは，生徒がいきいきと授業に参加していたことである．普段から和やかな雰囲気で授業は展開されているが，いつもにも増して積極的だったし，授業外でも問題のことを考えてくれていたし，そして何よりあの子達の素敵な笑顔を見ることができたのがとても嬉しかった．離散数学に対して興味を示した子もそうでない子も，自分たちで問題に対する考えを討論したり，人前でプレゼンをしたりと普段できない活動をしたことが，今後のあの子達の人生において何らかの良い形で還元されれば，と思う．

参　考

離散数学導入の試み

ー鳩の巣原理の授業を参観してー

景山　三平

広島大学大学院教育学研究科

1．はじめに

平成１６年度の中等教育における教科内容指導研究プロジェクトで「離散数学の有用性ー鳩の巣原理を中心としてー」（２００５年３月）と題して，離散数学の特徴を明確にし，さらに高等学校数学教育においてその内容に関する教材をカリキュラムの中に導入することの必要性を論じた。そこでは，１．命題からみた離散数学の位置づけ，２．特徴，３．育成できる特性，４．指導上の留意点，５．問題点，６．具体的な離散教材内容，離散文献，授業実践例，での内容による構成で展開した。そこでは，特に，離散数学に関連した教材で次のポイントを育成できると述べた。（１）考える意欲の喚起と，数学的な見方や考え方，（２）柔軟な思考力（鋭い着眼点，思考の自由性，多面的にものを見る力），（３）問題に潜んでいる数理構造を見つけ出す能力，（４）アルゴリズム的問題解決能力，（５）数学を活用する能力や態度（思考の楽しさ），（６）学習意欲の喚起と，（連続）数学に対する積極的な学習態度，（７）言葉での説明が多いことに起因する論理的表現力，（８）人間本来の知的好奇心や美への探求心。

2．参観した授業の概要

本稿では，これらのポイントの何が鳩の巣原理を中心とした授業の展開で育成できるかを，５回の研究授業の実施を通して分析した。授業担当者は本学部卒業生で現在岡山県立高梁高等学校教諭津島久美さんであった。受講者は，普通科３年２組理系集中コース９名（男子３名，女子６名）で，その授業実施日は，２００５年１０月１９日，２０日，２７日，３１日，及び１１月２日であった。

５回に亙る授業は，鳩の巣原理の発見（１回目），鳩の巣原理を用いた問題演習（２回目），問題のグループ内での考察（３回目），グループ発表会（４回目），鳩の巣原理の理解度を評価する問題の解決（５回目），の流れで考察を進めた。同時に各授業時間の前後にアンケート調査，１週間後と１ヶ月後にも情意面のアンケート調査を実施した。これらの考察から，微分積分を頂点とする伝統的な高等学校数学カリキュラムの中で離散教材の有用性を示せた（上記（６）の観点の確認）と評価している。具体的に生徒の状況を言えば，この一連の授業では，思考の葛藤の中で生徒たちの笑顔が見られたこと，生徒たちが輝いていたこと，すごく楽しんでいたこと，等が挙げられる。これらのことは，連続数学の授業中にはあまり見られないことであった。

筆者が参観したのは１０月２０日で，丁度２回目の授業であった。前時の授業の中で鳩の巣原理を発見する作業を終了していたので，本時では生徒ののりも比較的よくスムースに進行した。これは，すでに鳩の巣原理の意味を理解し，さらにその利用の仕方をほぼマスターしていたからかも知れない。３つの問題について，グループ内で意見を交換しながら解決する活動であった。

３．アンケート結果

まず，今回の授業受講生徒９名について述べる。理系集中コースとは，理系でも数学III・数学Ｃを選択していない生徒の集まりである。当高等学校おいては III 学年ではこの９名を含めて２９％の生徒が理系である。彼ら９名の進路も農学部を除けば残り８名は文系の分野を希望している。この意味で本調査の目的に照らして興味深いクラスである。

研究授業を実施する前から予想はしていたが，今まで習ったことのない話題での授業なので，生徒の食いつきは良いだろうと。やはり予想通り積極的であった。非常に好意的に反応し，興味をもって活発に活動してくれた。ただ１名の生徒が授業中常に数理的な活動をしたにもかかわらず結局は理解してくれなかったようである。

すべてのアンケート調査結果は，授業前後の情意面の変化や本学習の１週間後や１ヶ月後の残存効果など，興味深いが，ここでは，紙面も限られているので，特に，最後の授業の終了時に実施したアンケート調査「５回の授業を通して」結果について述べたい。前述したように今回の授業は９名のクラスで実施し，結果的には典型的な少人数クラスであり，生徒及び教師みんなの思考や顔が見える授業形態であった。離散数学の話題を授業の中で展開する際には，生徒としては出会ったこともない話題が多いので，グループ学習を基本とすべきであると考えている。今回の授業アンケート結果にはすくなからず普遍性を感じている（統計的な標本調査にはなっていないが，無限母集団の one sample と見なすことができるという意味である）ので，結果を％で表示することとする。

① ５回の授業の内容に興味・関心を持てましたか，
　「そう思う」が　88.9 ％

② ５回の授業に積極的に参加できましたか，
　「そう思う」が　88.9 ％

③ これから，数学を以前より好きになりそうですか，
　「そう思う」が　77.8 ％

④ あなたは数学が得意ですか，
　「そう思う」が　55.6 ％

⑤ ５回の授業の問題は難しかったですか，
　「そう思う」が　55.6 ％

⑥ 普段の数学の授業より，自分で考えることが多かったと思いますか，
　「そう思う」が　88.9 ％

⑦ 普段とちがう数学の授業に参加したことで，これから先，普段の数学も意欲的に取り組んでみようと思いますか，
　「そう思う」が　88.9 ％

⑧５時間の授業を通して感じたことをどうぞ。

とても関心をもってできた；いい気分；普段の授業よりも楽しかった；数学の問題にも変わったものがあることが分かった；またやってみたい；普段と違う勉強でとても面白かった；いつもと違う授業で楽しかった；５時間とも新しい問題に取り組んで時間をかけて問題を解くことは大切だと思った；今まで数学を誰かと話し合って解くことがほとんど無かったし，高校では初めてだったから，とてもこの５時間はなかなか経験できないものだったと思う；最初は鳩の巣原理を教えてもらっても「？？」といった状況でしたが，５時間目は楽しく利用できるようになりました，楽しかったです；考え方が色々ある問題ってとても難しかった，

問題文は身近なものだったのに・・・。

離散数学に最大の関心をもって研究している者としては，極当然の結果であるが，特に，③，⑦の結果に注目して頂きたい。離散の問題を適切に思考することが，従来の数学に取り組む姿勢への変化をもたらすことを。

授業者の総括を見てみると，１）連続数学に対しても意欲的になった，２）授業に興味・関心を示す生徒の割合が増えた，３）思考の葛藤を味わった生徒が多い，４）数学が好きだと答える生徒の割合が増えた，５）授業に対して積極的になった，と記述されている。正の評価をしていることが伺える。

今回の研究授業では，生徒に試験問題を解かせてその理解度を評価するのではなく，数学的な活動を通しての情意面の変化をみることを目的としたので，その目的を十分達成した結果になったと考えている。

４．まとめ

鳩の巣原理に関して，現在の検定済教科書においては数研出版の「数学Ａ」の単元「場合の数と確率」の中で紹介され一つの問題が解説されているにすぎない。一方，大学入試問題には離散数学に関した問題は古くから出題されているが，鳩の巣原理について言えば，１９９７年が最初の出題であった。しかし，高度情報化社会になってきた現代において，益々離散数理的なものの見方や考え方は大切になっている。この意味で，今回の離散数学の話題についての研究授業実施は時代の流れに叶った企画であった。生徒の皆さんの反応も予想以上であった。このように，高校数学において，離散数学の話題をカリキュラムの中に位置づける時期にきていると考えられる。そういう方向での現行学習指導要領の改訂を期待したい。

参考文献

景山三平（２００５），離散数学の有用性―鳩の巣原理を中心として―，中等教育における教科内容指導研究（第３章，第３節），広島大学大学院教育学研究科，pp.117-130.

「グラフ理論」の単元による指導
ー活動や議論を中心とした授業への転換を目指してー

横澤　克彦
長野県上田千曲高等学校

【要約】グラフ理論を中心に20時間の単元指導を行った。対象は工業系４クラス(約150名)で，３名の教員がこれにあたった。グラフ理論は日常的な題材を多く扱うことができ，またグラフ化することで視覚的な理解もしやすい。さらに生徒ー教員間，生徒ー生徒間での議論が設定しやすいため，数学を使って説明する経験も増え，その有用性がより実感できると考えている。

教材化においては，単に問題をつくるだけでなく，授業での発問や議論させるテーマの絞り込み，小グループの人数，関連する話題への拡張など，これまでとは違う授業形態や展開を検討する必要が出てきた。さらに単元化においては，教材の系統性や扱う内容の精選とともに，活動や議論がしやすくなるようなクラスの雰囲気づくりにも配慮していく必要があった。

今回，単元として新たな教材を導入したことで，活動や議論を中心に据えた授業に変えていこうとする意識が生まれ，授業改善の方針を掴むことができた。

Ⅰ．授業の構想
１．単元について
（１）教材観

グラフ理論は複数個の点とその間を結ぶ何本かの線分で構成されているが，これを単なる抽象的な図形と見る以外に，いくつかの具体的なイメージに結びつけることができる。

例えば，点を都市，線分をその間の交通路と見れば鉄道網や道路網となり，電気を流す配線と見れば電気回路網となる。また点を国，線分を二国の隣接性を表すと見なせば地図となる。さらに点を人，線分をその間の交友関係と見れば人脈図となる。*1 このように解釈次第でいろいろな見方ができることは，グラフ理論から様々な題材を扱うことが可能であるを示している。

グラフを鉄道網や道路網とみたときには，ある地点から他の地点へいく効率的な経路が問題になる。これは現実にも起こる問題であるが，その間の都市の個数が大きくなればすぐに難解な問題になってしまう。コンピュータをもってしても処理できない数学的な問題は，我々の身の回りに次々と発生してきているのである。そしてこれらの難問を解き明かす武器を，供給する学問こそが離散数学なのである。*2

学校数学においても数学的な意義だけでなく，問題解決にふさわしく操作的であることなど，教育的な意義のあることが徐々に認識されるようになってきた。*3　Standard(NCTM)でも離散数学を，今後強調するべき内容として組合せ，アルゴリズムなどを挙げている。

---

*1 秋山仁(2005)「『離散数学』デジタル社会が求める新しい数学」、ILLUME[イリューム]、Vol17 No.2 第34号、p13、東京電力

*2　同上、p6

*3 室岡和彦(1999)、室岡和彦「『第６章離散数学』 講座教科教育数学科教育」、p148、学文社

後述の授業例で扱う「雪かき問題」は，雪かきによってすべての家をつなぐ問題であり，「最小全域 tree」の考え方が基になっている。これにはすでにアルゴリズム（以下２つ）が存在しているが，その手順は，グラフ理論の中でも比較的生徒自身で発見しやすいものである。他への適応を考える中で，有用性も実感されるものと期待している。

①クルスカルのアルゴリズム

最も短い辺を選ぶ。次に残りの最小辺を選ぶ。このように続けるが，回路を閉じるような辺は選ばない。

②プライムのアルゴリズム

ある点からスタートし「最も近い隣」に行き，そこから最も近い隣に行き…とするものである。そして回路を閉じるような辺を選ぶとそこで行き止まりになってしまう。その後は他の頂点からスタートするか，すでに到着した任意の頂点から最も近い隣の頂点を見つける。

（２）生徒観

本校は職業高校である。普通科はなく７つの学科（建築科・機械科・電子機械科・電気科・商業科・食物栄養科・社会福祉科）からなる。卒業後は就職する者が過半数で，進学は専門学校がほとんどである。４年生大学への進学は１割程度である。

３年生の数学の内容は数学Ⅲであるが，家政系の必履修はなくなり，工業系４学科のみが履修している。通常の進度であれば「積分」で，置換積分や部分積分の計算を学習している時期である。

今回授業を行う前の電気科３年生に対し数学への認識調査を行った。その結果が次の２点である。

①数学が社会で役立っているとは思いつつも，数学を使って何か解決することには消極的であり，さらに将来数学を使う仕事に就くことには否定的である。

②数学を学ぶことで，論理的に考える力がつくと思わない生徒が多い。

普段の授業でも，できあがった公式に代入していくことはするが，理由を説明したり，公式を導いたりするような，数学を作り上げることは面倒と感じ興味示すことは少ない。

例えば「一筆書き」への取り組みについても方針ないままに手をつけ，できれば「もーいーじゃん」となるか，できなければ寝てしまう。一般化や定理の追究という方向へはなかなか向かわない。

しかし新しい話題や題材に対する興味は強いので，動機づけを工夫し，追究意欲を長続きさせられればと思っている。性格的には素直で素朴な生徒が多いと感じている。

（３）本校の取り組み

現在本校数学科では，上田千曲高校としての「数学」を模索しているところである。

大学受験に直結した授業をすることは少ないが，日常的な題材を解決するような授業にもなっていない。また使っている教科書や問題集も，基本問題を集めたような構成になっているため，１つの問題を多様な見方・考え方で解決するような段階まで学習を進められていない。

今回３年生工業系４学科に対し，２学期中間考査から期末考査までの約２０時間をかけて，離散数学を単元として導入することを試みた。担当教諭は３名である。

具体的には，一筆書きに代表される「グラフ理論」を中心に授業を構成しているが，その理由は，以下の２点について，教材化への期待をもっているからである。

①身近な題材が多いため問題解決に有用であることを，より実感してもらえるのではないか。

②比較的系統性をもった配列が可能であるため，単元化できる可能性が高いのではないか。

２．単元の授業計画

（１）単元名　グラフ理論（離散数学）

（２）単元の目標

計画づくり，衝突への対処，効率的な経路の検索といった有限個の要素間の関係を含む，現実世界の場面を表現し分析するために，頂点－辺グラフや行列を使う力を伸ばす。具体的には次の３点。

①具体的な問題場面を解決していくことを通して，グラフの有用性について考えさせる。

②グラフの辺と頂点が何をさしているのかを問いながら，グラフをかかせる。

また，友達のグラフと比較させ共通点や相違点を話し合わせながら，問題場面の構造に目を向けさせる。

③様々な分野への豊富な応用例を取り上げる。

（３）単元の構成

ＣＰＭＰがつくるカリキュラムの中で，離散数学領域に示されているねらいや構成[*1] を基に，本校での構成を考えた。

内容	ねらい	構成		見方・考え方
		課	タイトル	グラフ作り＝モデル化
グラフモデル オイラー経路 ２部グラフ ハミルトン経路 交グラフ	有限数の要素間の関係，予定の計画，利害に関するコンフリクトの管理，効率的なルートの検索といった現実事象を表現・分析するために使われる頂点－辺グラフの技能を身につける。	1	①一筆書き	・絵からグラフ作り 次数の使い方 オイラー経路
		2	②地図の色分け	・絵からグラフ作り 辺の両端塗り分け
			③円卓で男女知合い隣１	・表からグラフ作り 一筆書きとの違い ハミルトン経路
		3	④博覧会の経路	・表からグラフ作り 一筆書きとの違い
			⑤ミーティングの曜日分け	・表からグラフ作り 二重辺の使い方
		4	⑥周波数	・図からグラフ作り グラフの比較 辺の両端塗り分け
			⑦航空機の飛行高度	・図からグラフ作り グラフの書き換え 辺の両端塗り分け

*1 西村圭一(2005)「離散数学と数学的モデル化ー Henry　O.Pollak ならびに Core-Plus　Mathematics Project(CPMP)に焦点を当ててー、離散数学科研資料

	注）５，７時限目ではグラフ理論から離れたお遊び的に捉えられているようなので，６限目⑨握手問題でのグラフの論理的な追究に向けて布石を打つ。	5	⑧必勝法（ゲーム理論） ・数獲りゲーム ・花占いゲーム	・必勝論法を探る ４の倍数 逆思考
		6	⑨握手問題（ゲーム理論）	・解特定の論法を探る 条件適応
二値化		7	⑩畳の敷き詰め問題	・二値化による説明 ■＝□の審議
ハミルトン経路の審議			⑪頂点通過問題 （また出発点に戻れるか？）	・●＝○の審議
交グラフ	注)10/21 自習プリント	8	⑫航空機の飛行高度（応用）	・図からグラフ作り 辺の両端塗り分け
			⑬問題作り 身の回りからグラフ理論を使うような問題を自作せよ	・身の回りへグラフ理論の見方を適応 ・有用性の実感
ネットワーク 最適化 有向グラフ	頂点ー辺グラフを使って，最適な spanning network や最短経路を含むネットワークの最適化に関する現実社会の状況を表し，分析できる能力を身につける。	9	⑭文化祭準備の最短日数	・グラフ上の数値利用 ・仕事の手順を有向グラフとして表現
			⑮家を建てる最短日数	
木 tree 最小全域 tree		10	⑯雪かき問題（研究授業）	・木 tree ≠ハミルトン ・コスト最小の全域 tree 発見の手順の発見と適応
		11	⑰仕事の短縮日数は？！	（Ｎｏ．９の復習）
		12	⑱早くカレーが食べたい！	・スケジュール作成に向けた手順の利用
		13	⑲「木 tree」が使える場面は他にもある	・他の場面への適応
行列モデル 有向グラフ	いくつかの分野（代数・関数，図形・三角法，確率・統計，離散	14	⑳グラフから計算へ （バス・列車の経路*1）	・グラフを行列表現するよさ ・行列を場面にもどし

*1 室岡和彦（1999）「『第６章離散数学』 講座教科教育数学科教育」、pp.153-155、学文社

行列計算 ネットワーク マルコフ連鎖	数学）にある重要な数学的考えを繋ぎ合わせる一方，様々な現実世界が設定されている問題を表現し，そして解決するために，行列や行列の操作を用いる能力を身につける。	 15 16 17	 21 グラフから行列計算がはじまるんだよ！！ 22 行列計算に強くなろう 23 グラフ→行列→マルコフ連鎖（天気予報[*1]）	て考察 ・積，累乗 ・和差積実数倍 ・交換法則不成立 ・社会へのつながり
期末考査に向けて プレテスト 期末考査		18 19 20	24 プレテスト①（No.1-3，5-7類題復習） 25 プレテスト②（No.4，8-17類題復習） 26 期末考査	・場面を二値化したりグラフ化して説明 ・場面をグラフ化したり行列計算から場面を考察

３．本時の授業

（１）日　時　　平成１７年１１月１日（火）１３：２５～１４：１５

（２）対　象　　３年電気科３３名（男子のみ）

（３）場　所　　長野県上田千曲高等学校　３年電気科ＨＲ教室

（４）本時の目標

モデル化されたグラフで，最短となる雪かきの経路を探していく活動を通して，最小全域 tree 決定への手順（アルゴリズム）を発見し，他へ適応したり，別の場面を想起することができる。

（５）指導上の配慮事項

①最小全域 tree をオイラー経路（一筆書き）やハミルトン経路（戻ってくる）と混同していないか。

②課題把握ができず興味を失っていないか。

③周囲とのコミュニケーションが適切にとれているか。

（６）本時の評価項目（①③を中心に）

①関心・意欲・態度（全体指導や机間指導における観察とワークシートの記述から判断する）

・実際にグラフから経路を選び，最小全域 tree を作成しようとしていたか。

②数学的な見方や考え方（ワークシートの記述および発言から判断する）

・小さい数字から選ぶが，閉路をつくらないような選び方ができているか。

③知識・理解（ワークシートの記述および発言から判断する）

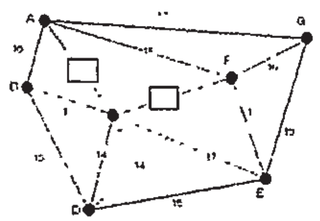
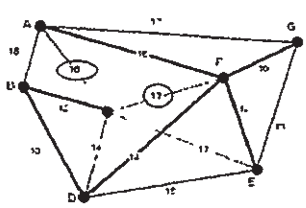
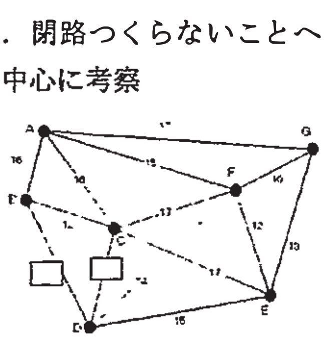
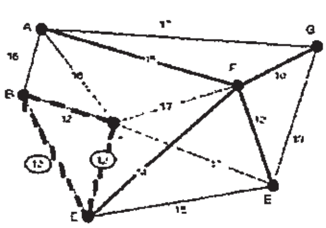
・前述の見方・考え方が適切であることを，現実場面に当てはめて理解することができているか。

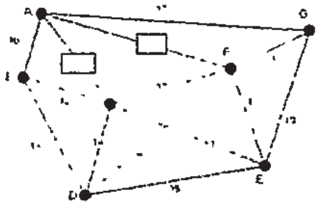
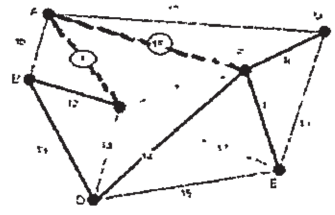
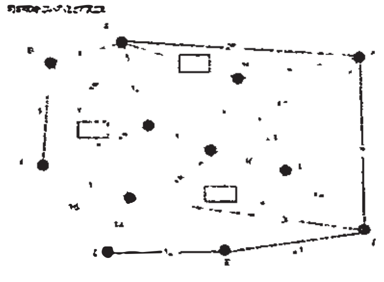
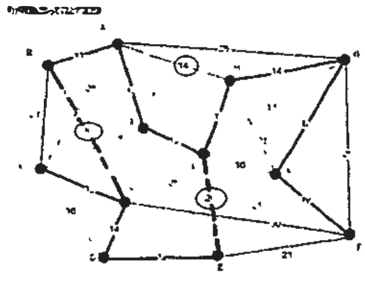
*1 二宮裕之(2005)「全中等学校生徒用数学計画のためのカリキュラム選択　Curriular Options in Mathematics Programs for All Secondary Students(COMPASS)の紹介」、p5、離散数学科研資料

④表現・処理（ワークシートの記述および発言から判断する）

・前述の見方・考え方を他へ適応できるか。また別の現実場面を想起できるか。

（7）授業の展開（指導案）

段階 時間	学習内容とねらい 主な発問	予想される生徒の反応	指導上配慮事項 評価の観点
導入 課題1 10分	雪かきの写真から話題を起こし，興味を持たせる。 1．雪かきの時間を最短にしたいどうすればよいだろう。  AC＝16，CF＝17	・早くやるなら，ブルトーザー(機械)でやればいい。 ・機械でやったとしても早く終わる道選んだ方がいい。 ・時間（分）は掘る時間？ ・掘って帰ってくる時間は無視？ ・往復の道を別につくらない？	課題把握ができず興味を失っていないか 課題を穴埋めすることで，課題把握を確認する オイラー経路やハミルトン経路と混同していないか 評価①
個人 ｸﾞﾙｰﾌﾟ 追究1 5分		やり方・答え相談。 小さい数字つなぐ（太くする） 大きい数字消していく	評価①②
全体 追究1 5分	何本か？ 最短？ 見つけ方は？ CD＝14なぜ選ばない？	7軒の間の道だから6本。 全部の時間たして比較 小さい数字から順番に見てく 無駄だから	評価③
課題2,3 2分 ＋1分	2．閉路つくらないことへの注意を中心に考察 		課題把握ができず興味を失っていないか 課題を穴埋めすることで，課題把握を確認する

個人 ｸﾞﾙｰﾌﾟ 追究2,3 3分 ＋2分	3．別解を見落としなく発見することを中心に考察 	■グラフ４つ差し替え■ 	周囲とのコミュニケーションが適切にとれているか。 評価①②
全体 追究2,3 5+2分	何で閉路つながない？ 無駄とは？ 答え２つでいいのか？	無駄だから２本選べばよい 別の２本でつながっていれば十分どちらも総時間数は同じ	評価③
全体 確認 5分	【まとめ】 より早く，最短の雪かきの道を見つけるための手順は？ ①小さい数字からつなぐ（太くする） ②閉路（１周する道）になるときはつながない できたら… ●木（ｔｒｅｅ）：サイクルが全く存在しないグラフ ●全域ｔｒｅｅ：サイクルを持たず，すべての頂点を結ぶグラフ 頂点（ｎ）個のとき，全域ｔｒｅｅの辺は（ｎ－１）個		
課題４ 5分 個人 追究４ 共同・ ｸﾞﾙｰﾌﾟ 追究４ 3分	4．まとめた手順を使って下さい  答え２通り		評価③④
全体 確認４ 2分	このグラフの利用は他にどんな場面があるかな？ ・手順はっきりしてると，見つけやすい ・闇雲にやってても，あってるか不安だけど，これなら安心	・分からない ・地震・災害時のとき， 最優先に復旧する道選び ・存続させるローカル線	

（８）授業プリント（ワークシート）

グラフ理論Ｎｏ．１０　（また雪かきだあ！！）

学科　　番氏名

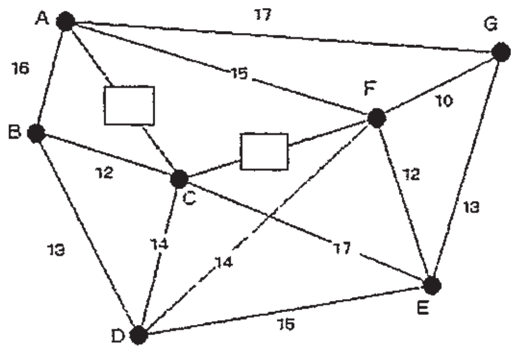
大雪で雪かきをしてます。

図１は７軒の家（Ａ～Ｇ）の配置と，雪かきにかかる時間（分）が示されている。

どの家からも他の家に行けるように雪かきしたい。

でも大雪の日は大変です。

１．雪かき問題（図１）



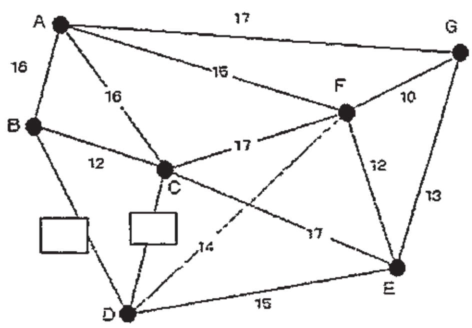
■

■どうすればよいだろう？

どんな方法で見つけましたか？

最短時間＿＿＿分

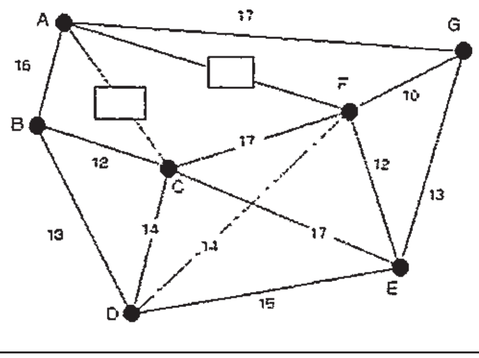
２．町の道が少し変わったぞ！！



■どんなことに気を付けましたか？

最短時間＿＿＿分

３．こんな道に変わったら？



■今度はどんなことに気を付けましたか？

最短時間＿＿＿分

【まとめ】

より早く，[　　　の]　雪かきの道を見つけるための手順は？

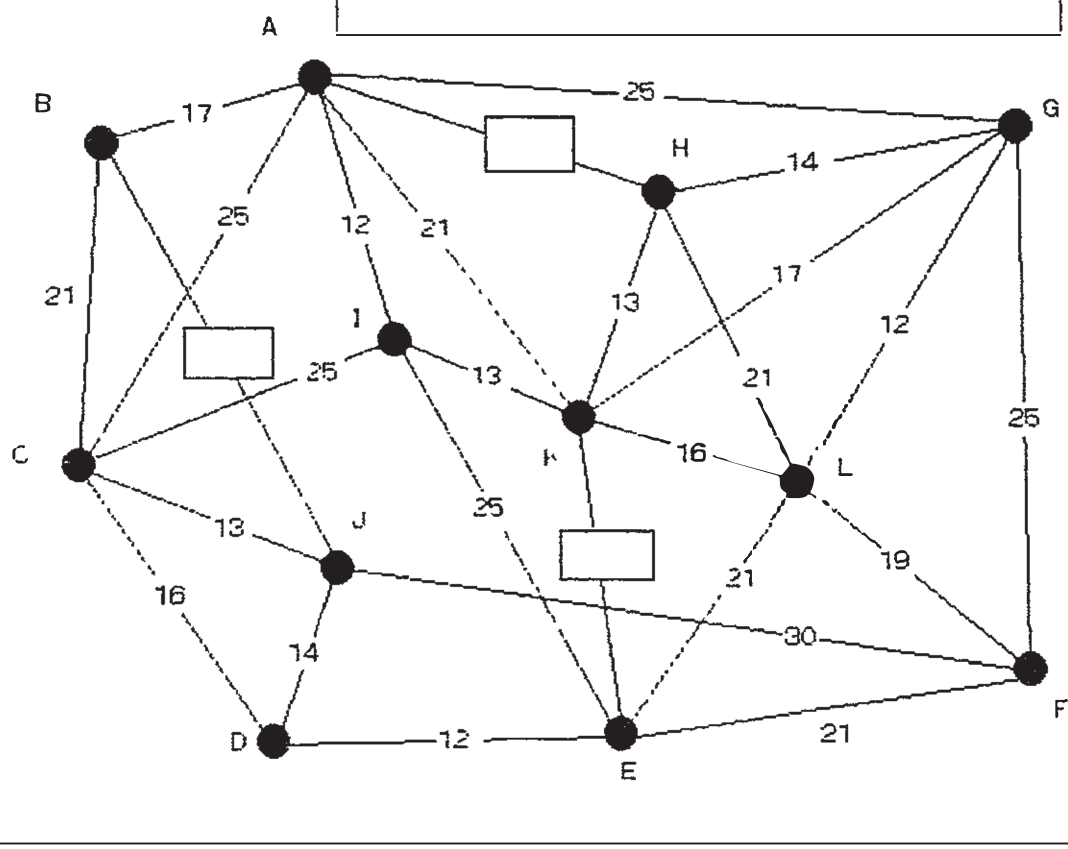
①

②

4．

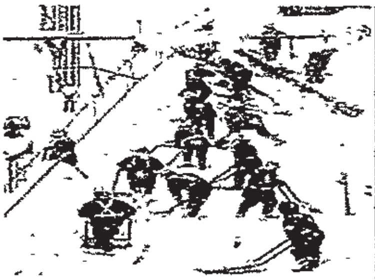
町が複雑になってくると大変だあ！！

【他への適用例】



グラフ理論Ｎｏ．１０　（また雪かきだあ！！）

学科　番氏名　　　解　答



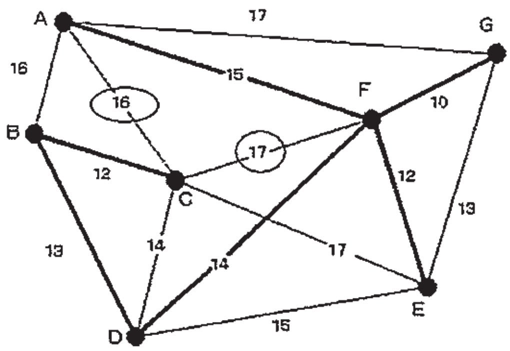
大雪で雪かきをしてます。

図１は７軒の家（Ａ〜Ｇ）の配置と，雪かきにかかる時間（分）が示されている。

どの家からも他の家に行けるように雪かきしたい。

でも大雪の日は大変です。

１．雪かき問題（図１）



■どうすればよいだろう？

クラスで相談

①一筆書きと違う（辺全部使わない）
②戻り道いらない（ハミルトンと違う）

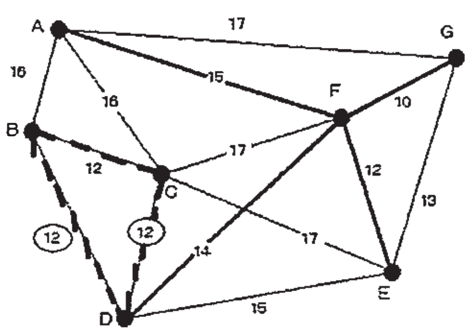
■どんな方法で見つけましたか？

最短時間＿７６＿分

Ｑ．１４選ばず，１５選ぶ理由は？

Ａ．閉路つくらない

２．町の道が少し変わったぞ！！



■どんなことに気を付けましたか？

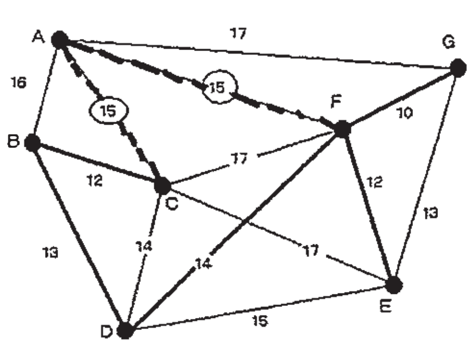
最短時間＿６７＿分

●閉路になる道は選ばない
（三角形ＢＤＥでの２辺選び）
○複数解（３つ）あってよい

３，４人で相談

①小さい数字から選ぶ理由
②閉路つくらない理由

３．こんな道に変わったら？



■今度はどんなことに気を付けましたか？

最短時間＿６１＿分

○閉路になる道は選ばない
●複数解（３つ）あってよい
（４点ＡＢＤＥからの組合せづくり）

【まとめ】

より早く，$\boxed{\text{最短の}}$ 雪かきの道を見つけるための手順は？

①（クルスカルの場合）　小さい数字を選んでつなぐ（太くする）

②　閉路（１周する道）になるときはつながない（太くしない）

木の定義と性質

- 木（ｔｒｅｅ）：サイクルが全く存在しないグラフ
- 全域ｔｒｅｅ：サイクルを持たず，すべての頂点を結ぶグラフ

頂点（ｎ）個のとき，全域ｔｒｅｅの辺は（ｎ－１）個

ごりやく

◆見つけるときの方針があると，総合計の計算繰り返さなくても，察しがつく。

◆２通り目が見つけやすくなる。

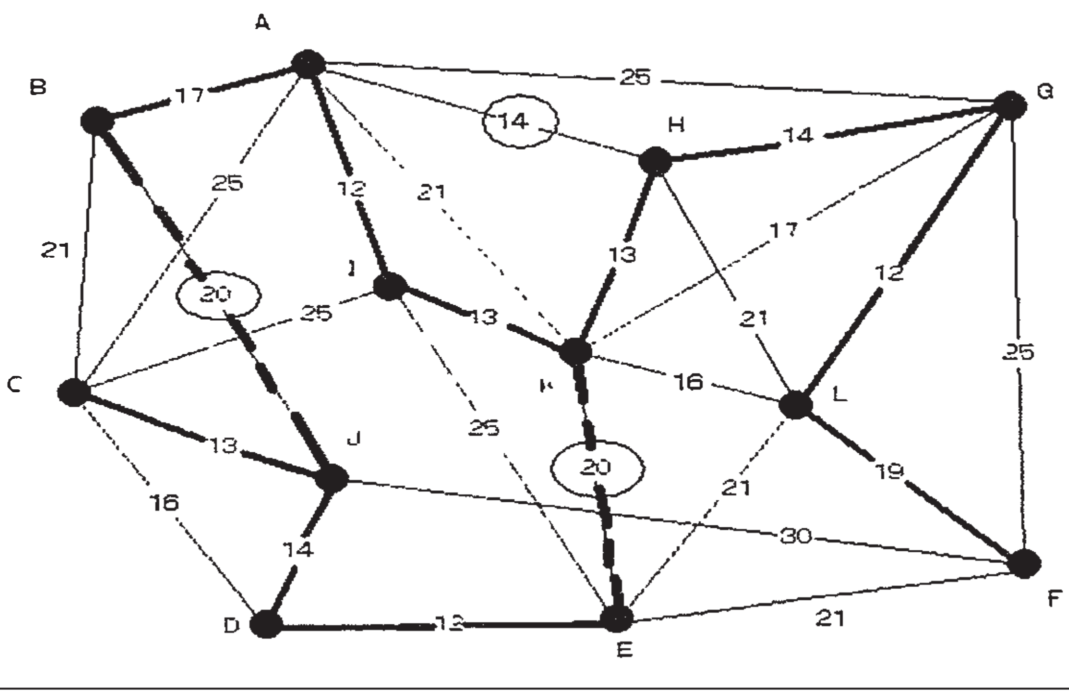
◆他への応用が楽しみになる。

【他への適用例】

●地震・災害時のとき，最優先に復旧する道選び
●存続させるローカル線

４．

町が複雑になってくると大変だぁ！！



４．授業研究会の記録

（１）日　時　平成１７年１１月1日（火）１４：２５～１５：３０

（２）参加者　長尾篤志　（国立教育政策研究所・研究リーダー）
正田　実　（国立教育政策研究所・名誉所員）
熊倉啓之　（静岡大学教育学部・助教授）
逸見由紀子（東京都立西高等学校・教諭）
萩原季弘　（静岡県立沼津東高等学校・教諭）
飯島彦太郎（長野県上田千曲高等学校・校長）
赤岡広行　（長野県上田千曲高等学校・教諭　離散講座２クラス担当）
宮島和昭　（長野県上田千曲高等学校・教諭）
小池隆信　（長野県上田千曲高等学校・教諭）
北澤　晃　（長野県上田千曲高等学校・講師　離散講座２クラス担当）
横澤克彦　（長野県上田千曲高等学校・教諭　離散講座２クラス担当）

（３）授業研究会の記録

本時の目標を以下の①②③に分けそれに対する授業者の発言と研究会での意見を箇条書きする。

①目標１：モデル化されたグラフで，最短となる雪かきの経路を探していく

（授業者）

ａ．まず場面からの課題把握が困難であった。他２名の先生方とここを授業していく中で，課題文をいろいろに変えてみた。例えば，どうすれば楽に雪かきできか？どうすればよいか？空欄をつくりどんな問題だと思う？など。

そして今回は，生徒たちと会話していく中で，課題把握ができていけばよいだろうと考えた、

ｂ．またそれによって誤った把握の発見や訂正もしやすくなることも期待した。ただちょっと時間がかかりすぎた。

（研究会での意見）

ｃ．面白かった。まず写真を見てホッケーと言い出すところから面白かった。

ｄ．戻って来る必要があるのかとか，いろいろ説明していた、どういう設定にしたらいいんだろう。問題文にある「どの家からも他の家に行けるようにしたい。しかも最短で」を引き出した方がよかったか。最短という意味が捉えにくい。みんなでやればいい、機械でやればいいになってしまう。経路の発見に焦点化せず，人数が多くなど方法を考えさせてしまう。

ｅ．「ブルトーザーをどう動かしたら所要時間が短くなるでしょう」という問題なら，言ったり来たりする時間は考えないとか，いろいろ場合や雪かき方法を説明しなくてすむ。

ｆ．私自身課題把握が難しかった。他の家につなげるという意味が，どんなに遠回りしてもとよいと思うまでに時間がかかった。

ｇ．ワークシートの作り方について，２，３問目にまで「どんなことに気を付けましたか？」などの設問は答えにくい。問題を解いていく中で押さえていけばよいし，今回はそれはできていた。

ｈ．答えがでればいいという意識から，手順書をつくろうという意識になればいいんだが。

②最小全域tree決定への手順（アルゴリズム）を発見する

（授業者）

ａ．手順の発見はできてはいたが，その妥当性を他者へ説明しきれないもどかしさが彼らにあった。その後，周囲と相談する時間をとる中で，説明する言葉が見つかってきたようだ。

（研究会での意見）

b．最初の問題で「なぜ１４選ばずに１５を選んだの？」という発問に対して，生徒たちが前に出てきて説明しようとしてるけどできなくて，そのとき先生が「そのもやもやしたことを言葉にしてほしい」と言ったのはよかった。そのあとグループ化したのもよかった。

直感的には分かっていてもそれを言語化することが，論証になっていくし，手順を認識していくことになっていく。

③他へ適応したり，別の場面を想起することができる

（授業者）

a．他のグラフに適用することはできていた。しかし別の場面を想起させたところ，やはり郵便配達などの一筆書きと混同した例をあげる生徒がいた。

そこで新潟中越地震を例にあげ，寸断された道路の復旧手順と同じであることを告げた。

（研究会での意見）

a．教科書を考えたとき，「あなたは計画立案者です。地震の復旧作業の手順を計画しなさい」はどうか。

④他の実践者の意見

a．進路が決まったこの時期に微積をやっていたが，自分には必要ないという生徒が多い。隣と相談させたりもできたし，塗り分け問題など興味を持ってやっていた。

b．雪かき問題は２クラスで指導した。１クラス目は「どこ掘ればよいか」という課題にし，すぐ終わってしまった。もう１クラスでは「どうすればよいか」で，延々と方法論をやっていた。

我々も初めての経験で生徒の反応が読めない面があった。

c．雪かき問題では，一筆書きが頭から離れずにいる生徒がいた。こちらの説明が浸透しない難しさがあった。

d．とてもよく生徒たちが取り組んでいて，数学が楽しそうだった。

積み上げてきた知識があまりいらないことが，離散数学のメリット。

e．グラフづくりでは，生徒の方がむしろよいグラフをつくっていたりする。

⑤これまでの単元の流れ

（授業者）

上記「２．単元の授業計画」と本授業までのワークシートを使って説明

（研究会での意見）

a．グラフ理論で単元をつくったが，単元化を考えたとき，何を教えたことでグラフ理論を指導したことになるのかを明確にする必要がある。

b．何が面白かったですか？

- Ｎｏ３　生徒の方がよいグラフだった。
- Ｎｏ４　５００ｋｍ未満をつなげたグラフと，それ以上をつなげたグラフの２つを用意していたが，生徒の方からその２通りが出てきた。
- Ｎｏ６　握手に関する問題では，実際に６人グループに役割を持たせて握手させたら結構生徒たちの活動が出てきて，それで解けていった。
- Ｎｏ７　二値化の問題では，解答の見事さ感動していた。
- Ｎｏ９　工期の短縮では，短縮するのに長い日数を足していくことが理解できず，なんでを繰り返す生徒がいて議論することができた。

5．生徒の認識の変化（アンケート結果から）

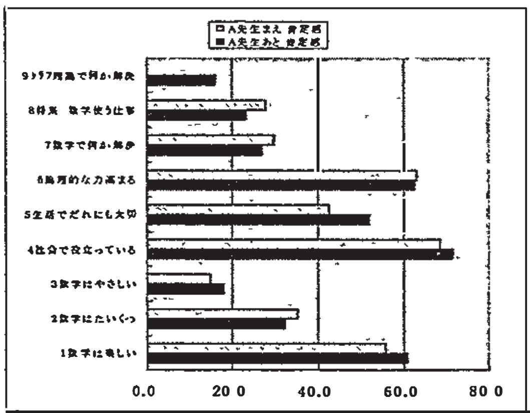
単元指導の前後で生徒の数学に対する意識の変化を調査した。*1

調査項目は，指導前が次の８項目であり，指導後は９項目目を追加した。選択肢は「強くそう思う」「そう思う」「そう思わない」「まったくそう思わない」の４選択肢である。

（1）数学の勉強は楽しい（2）数学は，たいくつだ（3）数学は，やさしい教科である。（4）数学は，社会で役立っている（5）数学は，生活の中でだれにも大切だ（6）数学を学ぶと，論理的に考える力が高まる（7）数学を使って何か解決してみたい（8）将来，数学を使う事が含まれる仕事をしたい（9）グラフ理論を使って何か解決してみたい

集計方法であるが，今回は３名（A先生，K先生，Y先生）で指導にあたったので，それぞれの授業者ごとに集計している。また選択肢の「強くそう思う」「そう思う」を「肯定感」として１つにまとめ，単元指導の前後で比較した。

（1）A先生の授業について

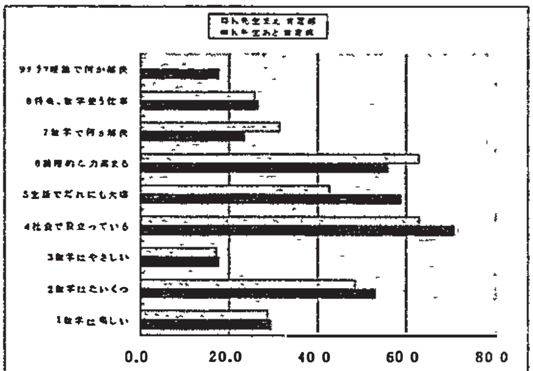


肯定感（強くそう思う+そう思う）	1数学は楽しい	2数学はたいくつ	3数学はやさしい	4社会で役立っている	5生活でだれにも大切	6論理的な力高まる	7数学で何か解決	8将来、数学使う仕事	9ｸﾞﾗﾌ理論で何か解決
A先生まえ54名	30	19	8	37	23	34	16	15	0
(%)	556	352	148	685	426	630	296	278	00
A先生あと56名	34	18	10	40	29	35	15	13	9
(%)	607	321	179	71.4	518	625	268	232	161

A先生のアンケート結果	A先生の授業からの考察（１クラス＋0.5クラス　計５６名）
数学を楽しいと感じたり，社会で役立ち，だれにも大切だという認識が増している。	A先生は生徒との会話も多く，生徒をうまく動かし乗せていく授業を展開していた。先生－生徒間，生徒－生徒間での議論や活動を入れやすいというグラフ理論のよさをよく活かしていたと思う。
項目６～８では，自分が将来にわたって数学を使うことに否定的である。 また項目７と９を比較すると，何か解決することに対して，グラフ理論を使おうとする生徒の方が，数学を使うよりも少ない。	課題説明は十分だったと思うが，まだ問題解決の道具としてグラフ理論が定着していないのかも知れない。同じ見方・考え方を自分の生活にどう活かせるのかといった話題の広め方が十分ではなかったのだろうか。 例えば「仕事の短縮日数は?!」において，単に有向グラフの見方と計算方法だけを伝えるのではなく，「大工さんは１つの仕事に対して総額の給料をもらうので，こうすることで時給を増やせる」といった扱い。

*1 調査項目については、ＴＩＭＳＳ（1995,2000 国際数学・理科教育調査）や高等学校科学教育調査(2000「我が国の高等学校３年生の数学・理科の学力－高等学校科学教育調査報告書－」）を参考にした。

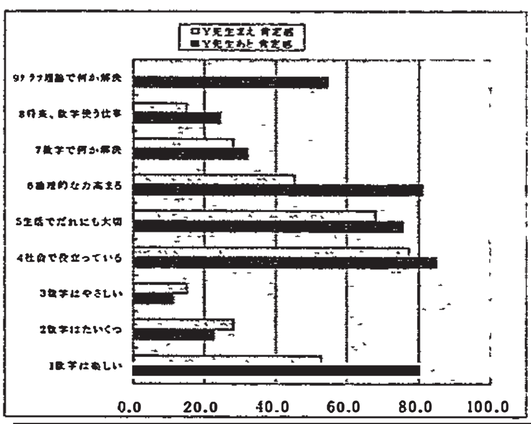
（２）Ｋ先生の授業について



肯定感（強くそう思う＋そう思う）	1数学は楽しい	2数学はたいくつ	3数学はやさしい	4社会で役立っている	5生活でだれにも大切	6論理的な力高まる	7数学で何か解決	8将来、数学使う仕事	9ｸﾞﾗﾌ理論で何か解決
K先生まえ35名	10	17	6	22	15	22	11	9	0
(%)	286	486	171	629	429	629	31 4	257	00
K先生あと34名	10	18	6	24	20	19	8	9	6
(%)	294	529	176	706	588	559	235	265	176

K先生のアンケート結果	K先生の授業からの考察 .5クラス＋0.5クラス計３４名）
社会で役立つ，だれにも大切は単元後大きく伸びている。	この教材が生徒にそれだけ有用性を訴える力を持っているということだろう。身近な事例を数多く取り上げたことがよかったかも知れない。
楽しいが３０％で，たいくつが過半数以上いる。単元後も増えている。 論理的な力や数学で何か解決は単元後に減っている。	クラスやグループで議論する場面が少なかった。問題の解説はしっかりしていたが，説明を一方的に聞くことが多く，自ら数学を使って説明する経験が少なかった。そのため興味はあるがなかなか自信が持てない状態に至っているのではないだろうか。

（３）Ｙ先生の授業について



肯定感（強くそう思う＋そう思う）	1数学は楽しい	2数学はたいくつ	3数学はやさしい	4社会で役立っている	5生活でだれにも大切	6論理的な力高まる	7数学で何か解決	8将来、数学使う仕事	9ｸﾞﾗﾌ理論で何か解決
Y先生まえ53名	28	15	8	41	36	24	15	8	0
(%)	528	283	151	774	679	453	283	151	00
Y先生あと53名	39	12	6	45	40	43	17	13	29
(%)	736	22.6	113	849	755	811	32.1	245	547

Ｙ先生のアンケート結果	Ｙ先生の授業からの考察 （１クラス＋0.5クラス計５３名）
楽しいやたいくつはさらに改善されたが，やさしいが伸びず，論理的な力は，よく増加している。	例えば「握手問題」では実際に６人で握手させて問題の意味と解決の糸口を考えさせた。グループごとに議論したあと，全体で議論し説明もさせた。説明力を強調したことで，論理的な力を意識し，やさしくはないと感じたのではないか。
将来数学が増え，グラフ理論を使って解決が半数以上いた。数学を使っても伸びている。	グラフ理論を学習する中で，数学に対する認識も好転したことは喜ばしい。行列など既存の内容に接続したことなどが理由ではないか。

６．まとめ

長期間授業をし，３名の授業を比較することで以下の知見が得られた、

①グラフ理論は日常的な題材が多く視覚的にも理解し易いので，楽しいと感じる生徒が増える。

②関連する話題への拡張に触れることで，将来も数学を使おうとする態度が生まれる.

③問題解決にふさわしく操作的でもあるため，学校数学に位置づける価値をもっている.

④活動や議論が中心になるため,クラスの雰囲気づくりなど授業者の意識を変えるきっかけになる。

「グラフ」の学習指導に関する研究
―自ら考え有用性を感得する教材に焦点を当てて―

西村　圭一
東京学芸大学附属大泉中学校

【要約】本研究の目的は，離散数学の内容として『グラフ』を取り上げる際に，どのような内容を，どのような教材で，どのように展開すればよいかについての示唆を得ることである。そのために，内容の選択や教材開発，授業展開の方針を明確にした上で，教材開発をし，授業を行った。その結果，自ら考え出すことができる内容，グラフの有用性を感得することができる内容として「グラフの彩色」「最小全域木」が適していること，現実場面の問題にすることが生徒に考える必要性を感じさせる上で有効なこと，問題の条件設定について十分吟味する必要があること，手順を明確にする上でペア間で記述を通して考えあうことが有効なことがわかった。

1　研究の目的と方法

筆者は，離散数学の内容として，『グラフ』に着目した。それは，私たちの研究会で，離散数学を導入する意義として話し合ってきたことのうち，「予備知識がなくても生徒自らの力で解決できる」「生徒に社会的な有用性を感得させる」といった点で特に適した内容が多いと考えたからである。本研究では，『グラフ』を取り上げる際に，どのような内容を，どのような教材で，どのように展開すればよいかについての示唆を得ることを目的とする。そのために，内容の選択や教材開発，授業展開の方針を明確にした上で，教材開発をし，授業を行う。

2『グラフ』の内容の選択・教材開発・授業展開の方針

（1）内容の選択

『グラフ』といっても，その内容は多岐に渡る。そこで，まず，『グラフ』の内容を選択する際の方針を明確にする。それは，『グラフ』に着目した理由と同様で，次の２点である。

①自ら考え出すことができる内容を選択する

離散数学の内容を取り入れる１つの意義は，既習事項の習熟の度合いにかかわらず，対象とする考え方やアルゴリズム，表現方法等を自ら考え出せることにある。したがって，『グラフ』においても，そのよさが顕著なものを選択する。逆を言えば，自ら考え出すことが期待できない内容，教師が考え方を示し，生徒はそれを適用するといったような授業しか想定できない内容は選択しない。

②グラフの有用性を感得することができる内容を選択する

高校生，特に，数学を学ぶ意欲を失いかけている生徒が，離散数学の内容を１つの単元として学び続けるために，さらに，その学習を通して，数学を学ぶ意欲を高めることを期待するには，そこで学んだ内容の有用性（主として社会的有用性だが，場合によっては数学的有用性も含まれる）を感得させることが求められるからである。

（2）教材開発

（1）の内容選択の方針をふまえ，教材を開発する。その際には，次のようにする。

○生徒が考える必要性を感じる教材（問題）にする

生徒が解決したいと思えるような場面設定や提示の仕方でないと，自ら考え出すことや有用性を感得することは期待できないからである。そこで，この１つの手だてとして，現実場面の問題にすることを考える。その際には，現実らしく装っているが起こりえない設定の問題，問題のための問題にならないよう留意するとともに，数学的モデル化過程にも十分配慮する。

（３）授業展開

授業は，次のようにする。

○ペアやグループでの問題解決を取り入れる

生徒が，対象とする考え方やアルゴリズム，表現方法等を考え出しやすくするためであるとともに，数学を使って口頭または記述で説明する，数学的な説明を聞きとるまたはよみとる，数学的に話し合う等の力の育成を図るためである。このような力の育成は，他の内容の授業でも図るべきだと考えるが，離散数学の内容においては，特に実現しやすいと考える。

３　内容・問題・授業展開上の工夫

（１）内容の選択と配列

高等学校への離散数学の導入に関する諸外国の動向等を参考に，『グラフ』の内容として，次のような候補を考え，２（１）①，②の観点で吟味した。

	①	②
オイラー路・オイラー回路	◎	△
２部グラフ	○	○
グラフの彩色	◎	◎
最良なスケジュール作成	◎	△
最短路	◎	○
最小全域木	◎	◎
ハミルトン路・ハミルトン閉路	○	△
巡回セールスマン問題	○	○
ラムゼー理論	△	△
グラフの行列表現	△	○

◎：十分適している
○：適している
△：あまり適していない

その結果，「グラフの彩色」「最小全域木」「最短路」を取り上げることにした。なお，米国の離散数学の内容を含む多くの教科書ではオイラー路・オイラー回路が扱われているが，既に中学校の課題学習として取り上げている例もあるので，今回は選択しないことにした。

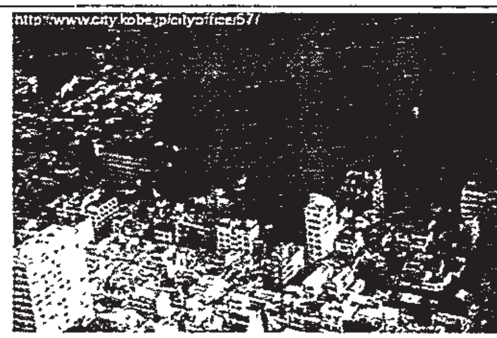
また，扱う順序は，グラフ表現を考え出すという観点から，「最短路」の簡単な問題で導入することにし，その次に「最小全域木」を扱う。すなわち，重み付けのあるグラフに関する問題を先に扱う。その後に，「グラフの彩色」を，グラフの異なったタイプの応用例と位置づけて扱う。

（２）問題

生徒が考える必要性を感じるような現実的な問題場面として，震災対策を取り上げることにした。そして，各内容で扱う問題場面をこれに統一した。開発した問題は次の問題１～問題３の通りである。

問題１　（最短路）

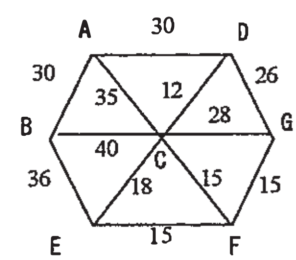
防災科学研究所は，「地震ハザードステーション」のホームページで，今後，地震が起こる確率を公開しています（http://www.j-shis.bosai.go.jp/j-shis/）。それによれば，練馬区大泉が今後 30 年以内に震度 5 弱以上 揺れに見舞われる確率は 97.5%です。



大地震が起きたとき，求められるのは，迅速な被害状況の把握です。C市に本部があり，ヘリコプターもそこにいます。このヘリコプターで，A～Gの７市の状況を把握しに行きます。下の表は，各市の間を移動するのに必要な時間です。移動時間を少しでも短くして，C市のヘリポートに戻ってくることが要求されます。どのようにまわればよいでしょうか。

	A	B	C	D	E	F	G
A		30	35	30	33	35	45
B			40	43	36	42	60
C				12	18	15	28
D					28	24	26
E						15	29
F							15
G							

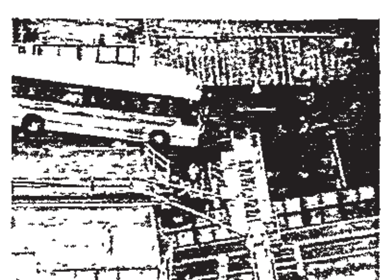
表で与えられた各都市間の距離をもとに，C市を出発して，C市に戻る最短経路を考える。地図上にすべての距離を書き込むと見にくくなることから，生徒自らが，右のようなグラフに表すことを期待する。そして，最初に向かう市までの時間とC市に戻るときの時間の和と，その２市間を直接行ったときの時間との差がもっとも小さいC→D→A→B→E→F→G→Cが最短になることを見いだす。



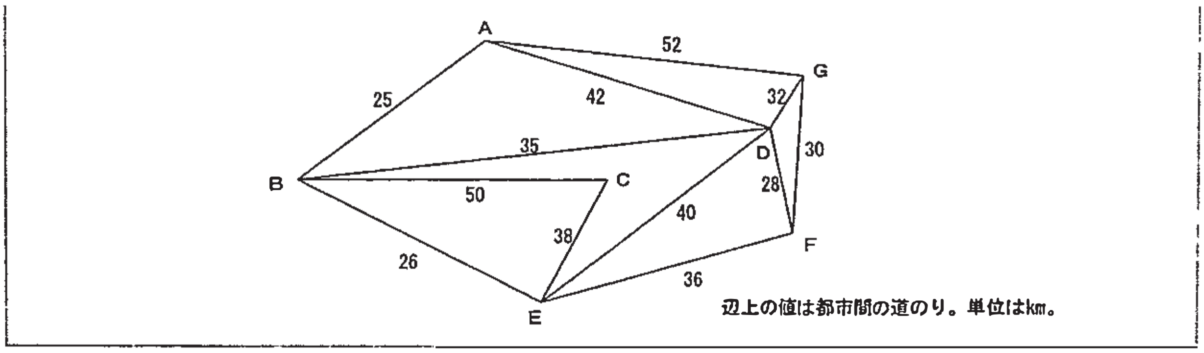
問題２　（最小全域木）

大地震が起きると，下の写真のように，道路が寸断されてしまうことが多々起きます。主要都市間の移動をスムースに行えるようにすることが，救援・救助活動のために必要です。



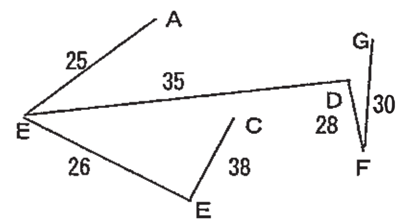


下の図は，A～Gの７都市を結ぶ幹線道路とその距離を表しています。A～Gのどの都市からどの都市へもひとまず移動できるように，道路の復旧を進めます。各道路の被害状況に大差はないので，総距離が短くなるように，復旧する道路を選びたいと思います。どのようにしたらよいでしょうか。



辺上の値は都市間の道のり。単位はkm。

すべての都市間を，直接的あるいは別の都市を経由して間接的に移動できる（全域木）ような道路の選び方の中で，その総長が最短になる場合（最小全域木）を求める（右図）。この問題では，このような最小全域木を求めるアルゴリズムを考え出すことをねらいとする。なお，このようなアルゴリズムとしては，次の２つが有名である。



<プリムのアルゴリズム>

i）スタートの点を１つ選ぶ。

ii）すでにできた木の中の点を持つ辺をすべて見つける。その辺の中から，閉路にならないような最短の辺を選ぶ。そのような辺が複数あるときは，どれか１つを選ぶ。

iii）すべての点にたどり着くまで，ii を繰り返す。

<クルスカルのアルゴリズム>

i）最短の辺を選ぶ。

ii）閉路にならないような辺の中で，最短の辺を選ぶ。そのような辺が複数あるときは，どれか１つを選ぶ。（それ以前に書き加えた辺と連結している必要はなく，同じ長さの辺があるときは，その長さを繰り返し選んでよい。）

iii）閉路にならない辺を書き加えることができなくなるまで ii を繰り返す。

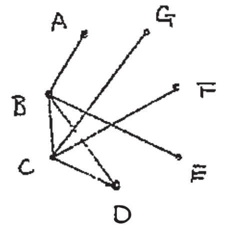
問題３　（グラフの彩色）

危険な薬品を保管している理科室では，地震で，薬品棚が転倒しないように固定したり，薬品の転落防止バーを設置したりしています。さらに，混合すると危険な薬品同士は，一緒の棚に保管しないようにします。下の表は，Ａ～Ｇの薬品間で，混合すると危険な組み合わせを示しています。棚は，少なくとも，いくつ必要でしょうか。

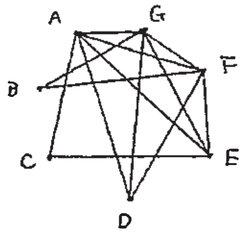
薬品	混合すると危険
A	B
B	A，C，D，E
C	B，D，F，G
D	B，C，E
E	B，D
F	C
G	C

問題場面を次のようなグラフに表して，必要な棚の数を求める。

ア）混合できない薬品同士を結ぶ

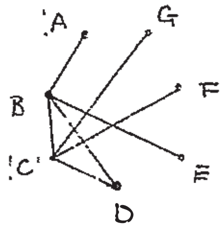


イ）混合できる薬品同士を結ぶ

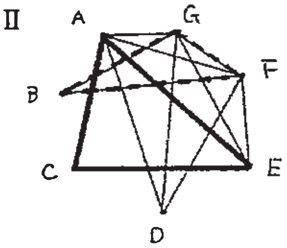


ア）のようなグラフをかいた場合は，下図Ⅰのように，結ばれた点同士が同じマークや色にならないようにしていく（グラフの彩色）。一方，イ）のようなグラフをかいた場合は，この問題では，下図Ⅱのように三角形を見つけていけばよい。混合すると危険な薬品の数や組み合わせに応じて，どちらのタイプのグラフが考えやすいかが変わることや，図Ⅰは図Ⅲのように変形できることに気づくことも期待する。

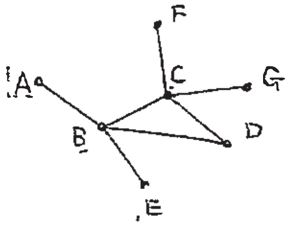
Ⅰ



Ⅱ



Ⅲ



（３）授業展開上の工夫

ペア（２人組）で問題解決をする。２（３）に述べたように，数学を使って口頭で説明すること，数学的な説明を聞きとること，数学的に話し合うことを重視するからである。さらに，問題２では，数学を使って記述で説明することに焦点をあて，次のような工夫をする。

工夫１：見つけた手順（アルゴリズム）を，コンピュータ・プログラマーに伝えるという設定のもとで，他人にわかりやすく伝えるための文章をかく。

工夫２：別のペアと手順の文章を交換し，渡された手順通りに実行する。そして，手順が伝わるか，選び方が同じになるかを確認する。さらに，記述された手順に対して，コメントを書く。

工夫３：自分の手順に対して書かれたコメントをもとに修正する。

また，問題３のあとに，同じような構造をもつ異なる場面の問題をつくらせ，グラフが応用できる他の場面にも目を向けさせる。

４　授業の実際

授業は，東京学芸大学附属大泉中学校において，中学校２年生の「選択数学」の中で行った。授業対象は，４名（男子O，N，W；女子S）である。指導計画を含む学習指導案は，稿末の【資料１】の通りである。第２時は，公開研究授業として，研究協議を行った。その記録は，【資料２】の通りである。また，学習指導案の第３時については，実際には２時間かかった。

以下では，生徒の活動の様子を中心に，授業の概要を述べる。

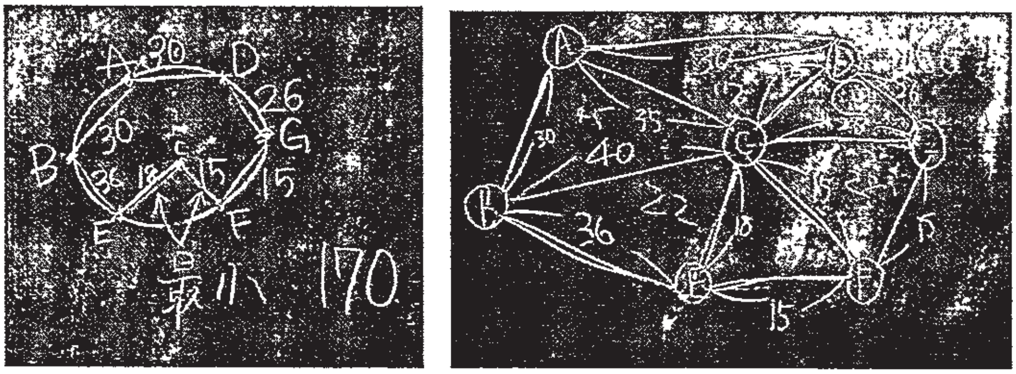
（１）問題１の解決

第１時　2005 年 11 月 24 日（木）14：10−15：00

男子ペア（男子Ｎと男子W），男女ペア（男子Ｏと女子S）で取り組ませた。両ペアとも，まず地図

上に，各都市間を線で結び，そこに移動時間を記入していった。そして，地図上では，こみいってしまうことから，A-B-E-F-G-D-A 間ならびにＣと各都市間の移動時間のみの図を別に書き考えた。つまり，生徒自らでグラフ表現を考え出すことができた。

そして，男女ペアは，Ｃとの出入りの時間が最小になるところを選んだ（下左写真)。一方，男子ペアは，Ｃとの出入りの時間とその２都市間の移動時間の差が最小になるところを選ぶことができた（下右写真)。また，その理由も，「外側の六角形から１辺を取り除いて，内側の２辺を加えることになるから，その差が最小のところになる」と答えた。問題の構造を捉えることができている。



生徒の板書（左＝男子ペア，右＝男女ペア）

（２）問題２の解決

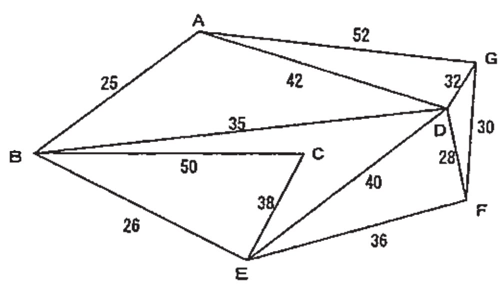
第２時　2005 年 12 月 1 日（木）14：10ー15：00

問題を提示した後，「どの都市からどの都市へもひとまず移動できるように」といった条件の解釈について，男子 O が，「各都市がつながっていればよい」と発言した。他の生徒もこの意味がわかったというので，それ以上の質問はせず，ペア毎に取り組ませた。しかし，その過程で，両ペアとも，「各都市がつながっていればよい」ことの理解がはっきりしていないことがわかった。出発点に戻らなくてはいけないと思っていたり，一筆書きのようにならなくてはいけないと思っていたりしたのである。そこで，再度，確認をした。

その後，両ペアともＣを始点として考え始めた。これは，前時の問題の影響と，Ｃを通る道路が２本しかないという特殊性のためと考えられる。実際は，女子Ｓは，「必ず（２本の内の）どちらかを使うことになるから」と発言していた。男女ペアは，最短になる選び方を見いだした後，他の点から始めた場合も同じになるかについても吟味していた。一方，男子ペアは，はじめに，男子Ｗが「一番長いところ通らなければいい」，男子 N が「短いのばかり，適当に選んでみればいい」と言った後，それぞれが黙ったまま試行錯誤し，最短になる選び方を見いだした。そして，その見つけ方の説明を考えていた。

そこで，それぞれのペアに，最短になる道路の選び方を発表させた。はじめに，男子ペアが発表した。その概略は次の通りである。

Ｃからスタートし，短い方の CE を選ぶ。Ｅで，Ｅを通る道路のうちの最も短い EB を選ぶ。同様に，Ｂで，BA を選ぶ。さらに，Ａでも同様に考えると AD を選んでＤに行くことになるが，Ｄへは BD の方が短いので，BD を選ぶ。Ｄで，Ｄを通る道路のうちの最も短い DF を，Ｆで，Ｆを通る道路のうちの最も短い FG を選ぶ。



男女ペアは「(男子ペアと) まったく同じ」と言うの

で，「G からスタートするとどうなるか」と投げかけ，男子 O に説明させた。その概略は次の通りである。

> G からスタートし，最も短い GF を選ぶ。F で，F を通る道路のうちの最も短い FD を選ぶ。同様に，D で DB を，B で BA を選ぶ。さらに，A でも同様に考えると AD を選ぶことになるが，そうすると三角形ができてしまうので，B に戻って BE を選び，E で EC を選ぶ。

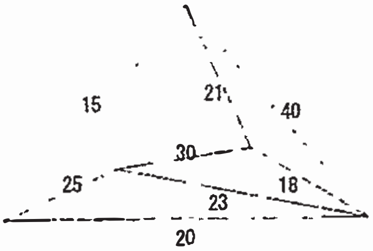
男子ペアは AD と BD を比較して判断しているが，男女ペアは「三角形ができてしまう」という理由で AD を選ばないとしている。しかし，男女ペアの「まったく同じ」という発言からもわかるように，生徒に，この差に対する意識はなかった。

最後に，男子 N が，「各三角形の辺の和を求めると，それが最大の△ADG の辺は 1 つも使われていない」と発言した。男子 N は，問題 1 で「外側の六角形から 1 辺を取り除いて，内側の 2 辺を加えることになるから，その差が最小のところになる」と発言した生徒である。問題 1 と関連づけて考えていることが伺える。

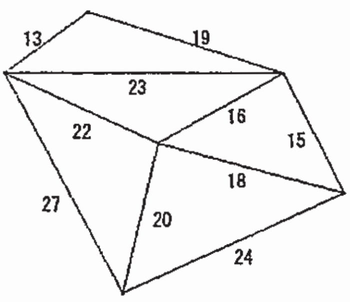
第 3 時　2005 年 12 月 8 日（木）14：10－15：00

どのような都市でも使える，最短の道路の選び方を見つけ出し，他の地域の防災担当者やコンピュータ・プログラマーに伝えること，そのためにわかりやすく示すこと，をめざすということを説明した。そして，都市の数が少ない場合から考えるとよいという方針を引き出した後，3 都市，4 都市の場合について全体で確認した。そして，ペア毎に，別のグラフがかかれたワークシートを配布した【資料 3】。

＜男子ペア＞



右図で，男子 W は 15→21→18→23 と選んだのに対して，男子 N は 15→20→18→23 と選んだ。2 人はともに前時のやり方を踏襲しているが，たまたま，男子 N は 15 の辺の上の点からスタートしたのに対し，男子 W は 15 の辺の下の点からスタートしたために結果が異なったと思われる。男子 W は男子 N に指摘され直した。



次の図でも，再び，2 人の結果は一致しなかった。男子 W は 13・19・15・16・20 と正しく選べたのに対し，男子 N は 13・22・16・15・20 と選んだ。このことを通して，2 人とも，前時の手順がいつも使えるわけではないことに気づいた。

その後，男子 W は，各三角形で最も長い辺に×をつけていく方法を試みた。男子 W 自身が，第 2 時のはじめに思いついた「一番長いところを通らなければいい」を想起したと思われる。別の図で試みる中で，「四角形がある場合は四角形の最も長い辺に×をつける」ことを加えた。それでも，最後の図では不要な道路を消しきれない。五角形でも，・・・と考え始めたところで，授業が終わった。この考え方は，グラフにあるすべての閉路を，その中の最長の辺を消すことで解消していくことに当たる。また，途中で，「(選ぶ) 辺の数は，点の数－1」とつぶやいていた。

一方，男子 N は前時の手順を修正することはできないかと考え続けた。すなわち，選んだ結果を見ると，ある点からスタートし最短の道路を通って，次の点へ行き，また，そこで，最短の道路を選ぶことの繰り返しではだめで，あるときには前の点に戻って考えなければならない。その「あるとき」が「三角形になってしまうとき」だけではない。どのようなときなのかを考えていた。途中，男子 W の考え方の説明を受けたが，しばらくは自分の考え方にこだわっていた。

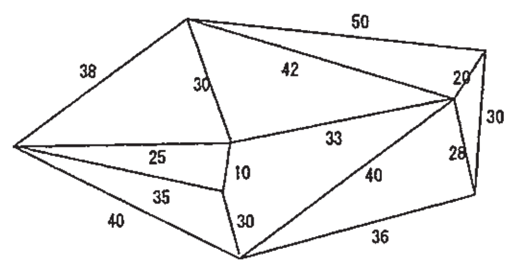
＜男女ペア＞

男子Ｏが最初に，「３都市だと２本，４都市だと３本，７都市では６本だから，５都市の場合は４本になるはず」と発言し，１番目の５都市の図で確認した。そして，２番目以降の図に対して，この考えを用いていた。（その理由までは考えていなかった。）

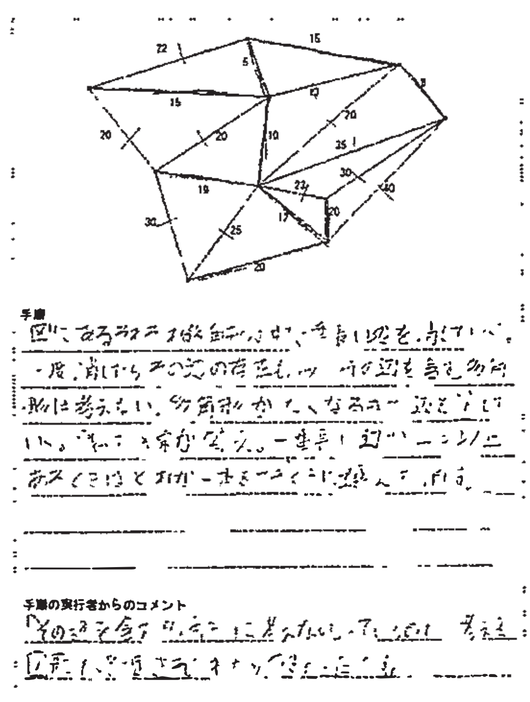
そして，男子Ｏは，「前時の方法で悩むような状態になったら，関係ない点に移って考える，そうすると，２つと３つのブロック（木のこと）ができるので，それを結ぶ最短の道路を選べばよい」という手順を考えた。「悩むような状態」がどのような状態なのか，観察者にはよくわからなかったが，「これはどのような場合も大丈夫」と言って，最後の図まで最短になる選び方を求めた。また，途中，女子Ｓに説明をしていた。

女子Ｓは，男子Ｏの説明を受け，その手順が常に使えるかどうかを吟味した。そして，「大丈夫」とつぶやいて，文章にまとめはじめた。しかし，「文章にできない」と言うので，授業者に対して口頭で説明させた。その概略は次の通りである。「ある点を選んで，その最短の道路を選ぶ。次に，選ばれた道路上にない別の点を選び，また，最短の道路を選ぶ。これを繰り返して，残った点がなくなったら，それをつなぐ最短の道路を探す」。確かに，「選ばれた道路上にない別の点を選び，そこで，最短の道路を選ぶ」限り閉路はできない。最後に木をつなぐ際の辺の選び方が曖昧なものの，男子Ｏの考えより洗練されている。

$\boxed{\text{第４時}}$ 2006年1月12日（木）14：10ー15：00



冬季休業をはさんだため，右のグラフを与え，前時に自分たちが考えた手順の確認をした。さらに，コンピュータ・プログラマーに自分たちの見つけた手順を伝えるという目的を思い出させた上で，次のように指示した。「手順を他人に伝わるように書いてください。それを交換し，書かれた手順通りに実行してもらいます。そして，実際に手順が伝わるか，自分たちが考えたものと同じ結果になるかをチェックします。さらに，書かれた手順がわかりやすかったか，わかりにくかったか，それはどのような点かを具体的に書いてあげてください。」



文章は個別にかき，ペア内でお互いに吟味しあい，完成させた。そして，他のペアと交換し，書かれた手順を実行し，コメントを書いた（右図）。さらに，次のように投げかけた。「コンピュータのソフトも，ユーザからのコメントをもとにバージョンアップしていきます。コメントや他の人の手順を実行したことをもとにして，自分の手順を修正してください。」

生徒が書いた手順ならびにそれを実行した生徒からのコメント，修正後の手順は，以下の通りである。

＜男子Ｗ＞（男子ペア）

図にあるそれぞれの多角形の中で，一番長い辺を消していく。一度消したら，その辺の存在も消えて，

その辺を含む多角形は考えない。多角形がなくなるまで辺を消していく。残った線が答え。一番長い辺が２つ以上あるときは，どれか１本をてきとうに選んで消す。

コメント１：「その辺を含む多角形は考えない」っていうのが，考える図形が限定されてわかりやすかったです。

コメント２：どんな形でも多角形があれば・・・というのがよくわからなかった。（この意味について，男子Ｗから質問され，「図にあるそれぞれの多角形がよくわからなかったという意味であることを説明。）

修 正 後 ：図から一つずつ多角形を見つけていき，その中で一番長い辺を一本ずつ消していく。消された辺はその存在が無くなり，その辺を含む多角形は考えない。多角形がなくなるまで辺を消していく。残った線が答え。一番長い辺が２つ以上あるときは，どれか１本をてきとうに選んで消す。

＜男子Ｎ＞（男子ペア）

どれでも良いので，多角形に注目して，その中の１番長い辺を消す。これをくりかえして，残った全ての辺をつなぐ。ルートが２つできた場合は，その２つのルートを辺とする多角形に注目すれば，どちらかのルートが消える。

コメント１：図の中だと，いろんな多角形があるので見落としてしまいました。

コメント２：三角形をみつけるのと残っている線を見つけるのがむずかしかった。

修 正 後 ：図中のそれぞれの三角形に着目して，その三角形の辺の中で一番長い辺を消す。（この際，一番長い辺が複数ある場合は，どちらでも良い。）図に三角形が無くなるまで，この作業を繰り返す。残った辺が答えとなる。（残った辺が多角形になっていたら，その多角形の一番長い辺を消す。）

＜男子Ｏ＞（男女ペア）

ひく線の数は（都市の数－１）本。まず，適当な都市を選び，そこから一番はやく行ける都市までをむすぶ。また適当な都市を選び，そこから一番はやく行ける都市までをむすぶ。←これを，それが（都市の数÷２）本できるまで続ける（～.5 になった場合は切り捨てる)。そして，次に１本の線を選び，一番はやく行ける都市までをさがす。←これをまたくり返す。このような行為をくり返し，全部つながったら終わり。

コメント１：都市の数÷２は関係ないと思う。

コメント２：「これをそれが」というのが，何を指しているのか分からないから，その後につづく文の意味も分からない。（・・・実行できていない。）

修 正 後 ：ひく線の数は（都市の数－１）本。まず，適当な都市を選び，そこから一番はやく行ける都市までをむすぶ。また適当な都市を選び，そこから一番はやく行ける都市までをむすぶ。←この行為を，都市がなくなるか，一個余るまで続ける。そして，次に１本の線を選び，一番はやく行ける都市までをさがす。←この行為をくり返し，全部つながったら終了。

＜女子Ｓ＞（男女ペア）

各点から最も近い点をそれぞれむすぶ。（等しい距離にある場合はどちらでも良い）むすんだ線同士がつながらない場合は，それぞれをむすぶ最も距離の短いものを選ぶ。

コメント １：簡単にまとめてあって良いが，最後の文は「最も距離の短い線をむすぶ」にすれば，なお分かりやすい。

コメント2：手順がちゃんとわかる。

修 正 後 ：各点から最も近い点をそれぞれむすぶ。（等しい距離にある場合はどちらでも OK）むすんだ線同士がつながらない場合は，最も距離の短い線を結ぶ。

男子N，男子O，女子Sの手順には若干の不備がある。具体的には，男子Nの手順の最後に「ルートが２つできた場合は・・・」（修正前）「残った辺が多角形になっていたら・・・」（修正後）とあるが，その前の手順がきちんと実行できれば，そのようなことにならないので，手順として記述する必要はない。男子Oと女子Sの手順では，「また適当な都市を選び」や「各点から」については，「既に選ばれた辺上にない」という条件が必要である。なお，ペア毎に特徴のある手順を考え出すことができたので，プリムのアルゴリズムやクルスカルのアルゴリズムを紹介したり，比較したりはしなかった。

（３）グラフの彩色

第５時　2006年1月19日（木）14：10ー15：00

前時までに学習した「グラフ」との関係については，何もふれずに問題を提示した。そして，ペアの組み合わせを変え（男子Wと男子O，男子Nと女子S)，考えさせた。

<男子Wと男子O>

２人でしばらく話し合い，右のように，図の横に線を引き，「３個」「Dがあまる」と書いた。さらに，男子Oは「いろいろありそう」とつぶやき，下のような表をかき，じっと考えていた。

薬品	混合すると危険
A	B
B	A，C，D，E
C	B，D，F，G
D	B，C，E
E	B，D
F	C
G	C

	A	B	C	D	E	F	G
A		×	○	○	○	○	○
B	×		×	×	×	○	○
C	○	×		×	○	×	×
D	○	×	×		×	○	○
E	○	×	○	×		○	○
F	○	○	×	○	○		○
G	○	○	×	○	○	○	

<男子Nと女子S>

はじめに，右のような，混合してもよい薬品の表を作った。しばらく考えた後，もとの表に戻り，下のように３個の棚が必要なことを求めた。

A	C，D，E，F，G
B	F，G
C	A，E
D	A，F，G
E	A，C，F，G
F	A，B，D，E，F
G	A，B，D，E，F

薬品	混合すると危険	
Ⓐ	B	C，E
Ⓑ	A，C，D，E	F，G
C	B，D，F，G	
Ⓓ	B，C，E	

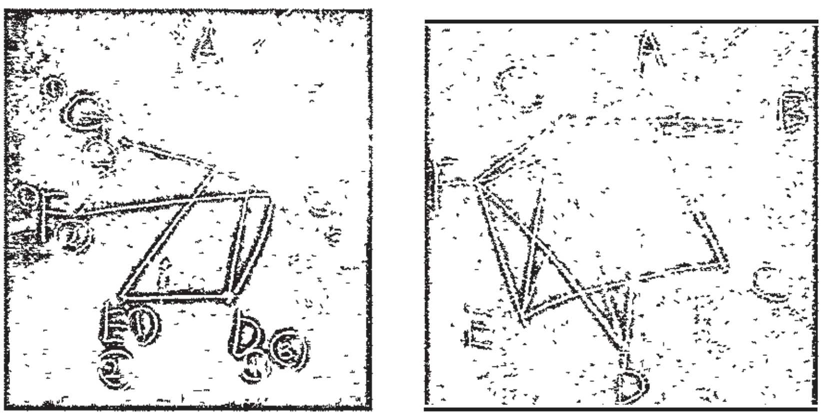
両ペアともグラフに表さなかったが，ひとまず解決できたので発表させた。

女子S　「（黒板に①②③と書き）Aを①に入れると，Bは①には入れられないので②（①の下にA，②の下にBと書いた)。CはAと一緒にできるので①に（Aの下にCと書いた)。あと同じようにして，・・・（Cの下にE，Bの下にF，Gと書いた)。Dは①にも②にもはいらないので③。で，３つ必要です。」

男子Ｗ　「ＢとＣが混ぜると危険なのが４つあるので，そこから考えて，・・・ＢはＦ，Ｇと一緒にできて，ＣはＡ，Ｅと一緒にできて，Ｄが余る。」

男子Ｗがワークシートで混合してもよい薬品を線で結んでいたことを取り上げ，「前の時間までやってきたのと同じような，点と線の図を使うという発想で考えてみよう」と投げかけた（約 15 分後）。両ペアとも，はじめに，混合してもよい薬品同士を線で結んだグラフをかいた。しかし，そのグラフをどう使えばよいのかがわからなかったようで，次に，混合すると危険な薬品同士を結んだグラフをかいた。

それぞれのペアが使い方を見いだしたところで，男子Ｏに２つのグラフを板書させた。そして，女子Ｓに混合すると危険な薬品同士を結んだグラフの使い方を説明させた（下写真左）。はじめに薬品Ａを①にし，Ａと線で結ばれていない薬品Ｇ，Ｆ，Ｄを①にした。次に，薬品Ｃを②にし，これと線で結ばれていない薬品Ｅを②にした。そして，残った薬品Ｂを③にした。さらに，薬品Ｅから考え始めた場合も，棚が３つになることを示した。もう一方の，一緒にしてよい薬品を結んだグラフの使い方は，男子Ｎに説明させた（下写真右）。三角形 AGD を赤チョークでなぞり，「三角形になるものはいっしょにしてよい」とした。（ただし，この場合は，三角形 AGD を選ぶと他に三角形は作れないので，４つの棚が必要になってしまう。そのことは４人とも理解していた。）



生徒の板書

最後に次のように投げかけた。

教師Ｔ　「全員がこの２つのグラフをかいていたんだけど，どうして２つかいたの？」

男子Ｏ　「最初に右のをかいたけど，線が多くてごちゃごちゃしたから。」

教師Ｔ　「いつもこっちの方がすっきりして使いやすいのかな。」

男子Ｗ　「いや。」

男子Ｏ　「混ぜちゃいけない薬品の数が多ければ逆になる。」

教師Ｔ　「なるほど。じゃあ，もっと他の場合，薬品の種類が増えた場合とかね，それを宿題にするのでやってきてください。」

あわせて，薬品と棚の問題以外で，同じようにグラフをかいて考えられる問題をつくることを宿題にした。生徒がつくってきた問題は以下の通りである。

男子Ｗ：あるクラスをなるべく少ないグループ数になるように，いくつかのグループにわけます。だけど，同じグループになるといつまでもふざけつづける人たちがいるから，その人たちを同じグループにならないようにします。グループを一番少なくすると何グループできますか。

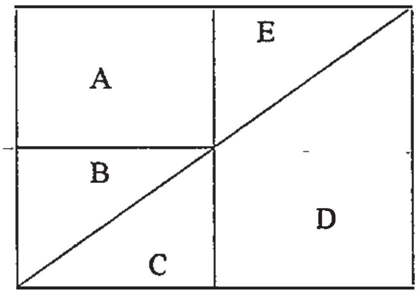
人	ふざける相手
Ａ	
Ｂ	Ｃ，Ｅ
Ｃ	Ｂ
Ｄ	Ｅ
Ｅ	Ｂ，Ｄ

男子N：ある料理を作る時に，６種類のスパイスを入れます。しかし，中には一度に入れると料理がまずくなるものもあります。その時，少なくとも何回に分けてスパイスを入れなければなりませんか?

スパイス	一度に入れられない
A	C，D，E，F
B	D，E，F
C	A，E，F
D	A，B，F
E	A，B，C
F	A，B，C，D

男子O：学校で次の５つの動物を飼育したいのですが，いっしょにできない動物がいます。それらの動物を分けるには小屋は少なくとも何個必要ですか。

動物	いっしょにできない動物
カメ	アリ，ワシ
アリクイ	アリ，ワシ
アリ	カメ，アリクイ，ウサギ
ワシ	カメ，アリクイ，ウサギ
ウサギ	アリ



女子S：AからEに色をぬるとき，となりあうものがおなじ色にならないように，３色でぬるにはどうすればいいですか？

５　考察

（１）内容の選択と配列について

本研究では，①自ら考え出すことができる内容，②グラフの有用性を感得することができる内容，として，「最短路」（問題１），「最小全域木」（問題２），「グラフの彩色」（問題３）を選んだ。①②の方針にそう内容だったかについて検討する。

①に関しては，問題１では，グラフ表現を自ら考え出すことができた。また，一方のペアは，それを用いて問題の構造を捉えることができた。問題２では，最短になる選び方を見つける手順を考え出すことができていた。さらに，それらに多様性が見られることがわかった。問題３では，自らグラフをかいて解決した生徒はいなかったものの，「前の時間までやってきたのと同じような，点と線の図を使うという発想で考えてみよう」という投げかけをした後は，混合してもよい薬品同士を線で結んだグラフと，混合すると危険な薬品同士を結んだグラフの双方をかき，それぞれを用いて解決する方法を考え出すことができていた。これらのことから，いずれも「自ら考え出すことができる内容」だったと考える。また，多様な解決が十分期待できる内容であることもわかった。

一方，②に関しては，生徒がグラフの有用性をある程度感得したことが，次の学習感想からわかる。

男子Ｎ：はじめて問題を解いた時は，頭の中でやっていたけど，グラフにして問題をやると，とてもスムーズで，楽に解くことができた。分かりやすくて，すぐ出来るから，日常生活にもどんどん利用していきたい。

女子S：地震や理科，パソコンなど，グラフは意外と身近なものだと思いました。でも，理科のやつと，地震のだと，同じグラフでも使い方がちがっておもしろいなと思いました。（中略）今やっている順列（筆者中：通常の授業で学習中）のこともグラフでできそうで，他にも利用できそうだなと思いました。

男子W：自分がいままで知らなかった数学を知れて楽しかった。「グラフ」は日常生活でもけっこうでてきて，知っていると便利だなと思った。

問題数が少なかったものの，現実場面の問題を扱ったことで，社会的な有用性を感じていることが伺える。また，女子Ｓは，「今やっている順列のこともグラフでできそう」と書いているように，従来の学習内容に応用したいと考えている点も注目できる。

では，それらの内容を扱う順序はどうだったか。今回は，グラフを，問題１を通して導入したが，事前には，問題３すなわち「グラフの彩色」を通して導入することも検討した。実際に授業をしてみると，問題３では，グラフを知った後でも，自らグラフをかいた生徒はいなかった。したがって，グラフ表現を自ら考え出すという点からは，問題１で導入してよかったと言えよう。

その一方で，問題２において，問題１で導入したことによる混乱が見受けられた。問題１では，ヘリコプターの進路をペンでなぞりながら，「はじめはＡ市に行って，次に・・・」と，いわば「１機のヘリコプターの視点」で考えられる。それに対し，問題２で，同様の視点，例えば「道路を復旧する１台の作業車の視点」に立つと，「ＡからＢを復旧して，次にＡからＣを復旧するには，一旦戻らなくてはならなくて，・・・」と考えることになり，最小全域木の題意とは異なってしまう。「災害対策本部の責任者の視点」，すなわち，「〇〇はここを復旧しに行け」「△△はこっちを」という指示を出す立場に立たなければならない。この違いを理解することは難しい面があったようである。その原因は，グラフの初学時だからなのか，問題提示の仕方にあるのか，はたまた中学生という発達段階にあるのかはわからない。いずれにしても，問題２で，距離を表で提示し，グラフ表現を考え出させた上で，最短になる選び方を見つける手順を考えさせるという展開について，今後検討する必要がある。

なお，問題３は，グラフ表現を作り出すという位置づけより，グラフを利用することのよさを感得させるという位置づけが妥当なことが，次の学習感想からも伺える。

男子Ｏ：グラフは最初にそれを考えるのがむずかしかったけど，１回考えついてしまえば慣れもでてきてスラスラと解けるようになりました。自分で問題を作るのも頭の中にグラフを思い浮かべながら考えてみたら意外と簡単に作ることができました。

（２）教材開発について

生徒の活動の様子や上述のような有用性の感得の様子から，生徒は，今回開発した現実場面の問題に対して，考える必要性を感じていたことがわかる。ここでは，問題場面を震災対策に決めた後の問題の条件設定について検討する。

まず，問題１について考えてみる。問題１では，地図を提示するかどうかを検討した。はじめは，地図を与えないことを考えた。地図から，ある程度，最短になるまわり方がわかってしまうからである。しかし，地図がないという問題設定は不自然なため，提示することにした。そして，本部の位置を中央のＣ市にし，最初に向かう市だけを決めれば所要時間が決まるような問題にした。実際，生徒は，地図を利用しながら，過剰なデータを選別していた。ただし，その選別の根拠をもう少し明らかにさせるような工夫が必要だった。

問題２では，はじめに与えるグラフについて検討し，次のようにした。

a）辺を交差させない

b）同じ長さの道路は設けない

c）任意の１点を選び，そこで最短の道を選んだ後，移動した点で最短の道を選ぶことを繰り返すだけでは閉路ができてしまうようにする

a）は，道路という問題設定上，辺が交差していると，「木」を作る上で誤解を生じやすいと考えたからである。b）は，この手順を見いだしやすくするためである。（後から与えたグラフには，同じ長さの道路も設けた。）c）は，問題の構造を捉えやすくするためである。授業をした結果から，これらの意図

は妥当だったと考える。一方，問題１の影響と，Ｃ を通る道路が２本しかないという特殊性については検討や工夫の余地があったと言える。なお，第３時のはじめのグラフでは，閉路はできないがうまくいかないようにした。男子Ｗと男子Ｎの結果が一致しなかったのは，このことによるものである。

問題３で事前に検討したのは，次の点である。

d）混合すると危険な薬品の組み合わせの提示の仕方

e）薬品の数ならびに混合すると危険な薬品の組合せの数

d)については，これだけの数の薬品の組合せを，「薬品Ａは薬品Ｂと混同すると危険で，薬品Ｂは･･･」と文章で表すのは不自然だと考えて表にした。グラフを知った後であるにもかかわらず，自らグラフをかいた生徒がいなかったことの原因の１つとして，表自体が十分整理された形であるため，グラフに表す必要性を感じなかったことがあげられる。会話文形式にする等の工夫をして，自ら整理する作業を取り入れた方がよかったと考える。e）については，グラフに表す必要性を感じさせるために薬品の数をもう少し増やすことも考えた。しかし，そうすると，今度は，グラフをどう使うかを見いだしにくくなってしまうと考え，７にした。授業をした結果から，これも妥当だったと考える。また，混合すると危険な薬品の組合せは${}_7C_2=21$通り中の８通りにした。このとき，混合してもよい薬品の組合せは13通りあり，どちらのグラフで考えるとよいかの議論が生じやすくなると考えたからである。授業をした結果から，この点もよかったと考える。

また，問題３では，グラフを必要に応じて変形して考えることも行わせたかった。しかし，実際には，生徒に，その必要性を感じさせられなかった。棚がいくつ必要だということを理科の先生に説明する，というような場面設定にする必要があったことがわかる。授業をした結果から，このように，問題の条件設定について十分吟味する必要があることが，あらためて明確になった。

（３）授業展開について

ペアで問題解決に当たらせた。ペア内の会話は少なく，じっくり考えてから伝えることが多かった。今回は，10月後半から始まった選択の授業であり，クラスの異なる生徒が集まっていることも影響していると思われる。しかし，お互いの考えを的確に捉え，問題解決を進めることはできていた。そのことは，解決の結果に，ペア毎の特徴がよくあらわれていたことからも伺える。

また，特に，問題２では，手順を文章で伝える，それを実行しコメントを書く，手順を修正する，という活動を取り入れた（３（３）工夫１～３）。これは，記述を通して考えあうことを意図している。このことが実現したことは，手順の比較や検討ができている，次の学習感想からもわかる。

男子 Ｗ：僕のペアの方法は，他のペアの方法と正反対である。それぞれのペアの逆の考え方で方法を考えていくと，それぞれ別のペアの方法にたどりつく。数学は式で表さなくても，何かを簡単に解く方法を文章で表すことができる。僕のペアの欠点は，辺が多いと作業が多くて大変。他のペアの欠点は，どの点を基準にしたか，忘れやすい。

男子 Ｎ：他のペアの手順は，多角形を使っていない。あと，はじめから最短の路を選んでいるので手間が少ない。

女子Ｓ：私たちのは，点，線に注目していたけど，Ｗくん，Ｎくんのペアは三角形に注目しているのが違い。一番最初の考え方（筆者中：問題１のこと）にはＷくんたちの方が近いと思います。（三角形を利用したところが。）あと，全体的に考える三角形，線や点が限定された方がわかりやすいと思いました。

男子 Ｏ：自分たちのペアの手順は自分で選んでから線をひくという感じだったけど，他のペアの手順は消去法によって選ばれた線をむすんでいくという感じでした。どちらも同じくらい使いやすく，同

じくらい面倒くさいところがあるため，自分にとってやりやすい方を使えばいいと思います。

さらに，男子 N の手順の変容を振り返ってみる（4（2）第4時参照)。自らのペア内では，三角形を見つけ最長辺を消し，四角形を見つけ最長辺を消し，・・・と順に考えていたが，手順としては，そのことを「多角形に注目して」とまとめた。しかし,「いろんな多角形があるので見落としてしまいました」というコメントをもらい，三角形を中心とした記述に修正したのである。この点は，このような授業形態を取らなければ，おそらく，浮き彫りになってこないであろう。例えば，口頭で説明させたときには，「多角形として，まず三角形に着目して，・・・」と述べられてしまえば，多角形の見つけにくさはクローズアップされないであろう。このような点に記述を通して考えあうことのよさが見られた。また，このことは，アルゴリズムを作る上で有効な活動であることがわかる。

その一方，手順を実行し評価する際に，批判的な検討が十分できていない面があった。例えば，男子 O と女子 S の手順で,「既に選ばれた辺上にない」という条件が必要なことを指摘できていなかった。手順の検討に関する手だてが必要であると言えよう。今後，検討する必要がある。

5　まとめと今後の課題

本研究では，離散数学の内容として『グラフ』を取り上げる際に，どのような内容を，どのような教材で，どのように展開すればよいかといったことに関して，次のような示唆が得られた。

- 自ら考え出すことができる内容，グラフの有用性を感得することができる内容として,「グラフの彩色」「最小全域木」は適している。
- 現実場面の問題にすることが，生徒に考える必要性を感じさせる上で有効である。
- 問題の条件設定について，十分吟味する必要がある。
- 手順を明確にする上で，ペア間で記述を通して考えあうことが有効である。

今回の実践は中学校でのものなので，高校で同様の実践を行う必要がある。しかし，今回得られた，内容選択，教材開発，授業展開に関する示唆は，高等学校にも大方の部分で当てはまると考えている。また，今回は，なぜ，その方法で求まるのかといった点についてはあまり深入りしていない。今後は，『グラフ』における証明の位置づけ方を検討する必要がある。また，本研究会でも指摘されていることであるが，教えられ，それを適用するだけの授業になってしまっては，このような内容を扱う意義がなくなってしまうということは，実際に授業をしてみても，強く感じられた。したがって，そうならないようにするための教科書の記述についての検討，例えば「ペアで解決しなさい」「手順を文章に書き，・・・」の文言を入れる等について検討していく必要がある。

主要参考文献

Arthur F.Coxford et al（1998） "ContemporaryMathematics in Context a UnifiedApproach". Course1~4. McGraw—Hill. 1998

COMAP（1997）"For all pratical purposes:introduction to contemporary mathematics -4th edition".W.H.Freeman and Company.

Nancy Crister, Patience Fisher, Gary Froelich（2000）"Discrete Mathematics Through Applications SECOND EDITION". W.H.Freeman and Company.

西村圭一（研究代表）(2004)『中等教育数学科カリキュラムの開発に関する基礎的研究ー米国の教科書の分析及び授業実践を通してー』，東京学芸大学附属学校研究会プロジェクト研究成果報告書，564pp

西村圭一・植野美穂・松元新一郎・田中賢治・清野辰彦・本田千春・細矢和博・指田昭樹・中本信子（2005）「中等教育段階の数学カリキュラム開発に関する基礎的研究—米国の Core-Plus Mathematics Project の分析を通してー」，日本数学教育学会誌『数学教育』第87巻第3号，pp.2-11

【資料１】

学　習　指　導　案

場　　所：東京学芸大学附属大泉中学校１年４組

学　　級：中学２年生　選択数学（４名）

学級所見：男子Ｎと男子Ｗは，数学的処理の力は優れているが，数学的な考え方における柔軟性がやや足りない面がある。男子Ｏは，数学的な見方・考え方が優れていて，特に解決に向けての着想がよい。また，発言力もある。女子Ｓも，男子Ｏと同様に，数学的な見方・考え方が優れている。しかし，男子３名の中で，やや発言しきれていない面がある。

授 業 者：西村圭一

指導計画：(1)グラフ表現・・・・・・・１時間

(2)木・最小木・・・・・・・・２ー３時間

(3)グラフの彩色・・・・・・１時間

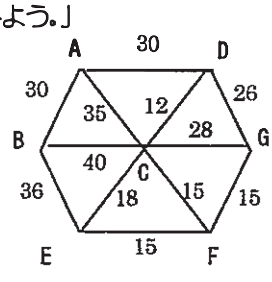
【第1時】2005年11月24日（木）　14：10ー15:00

本時のねらい

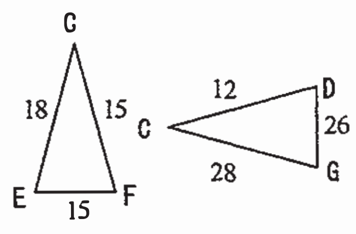
- 問題場面をグラフに表すことのよさに気づく。(関)
- 問題の構造を見抜き，解決に必要な部分だけに焦点を当てることができる。(考)
- 求めた時間が最短になるわけを説明できる。(考)
- グラフまたはグラフ的な表現をすることができる。(表)
- グラフの意味を理解する。(知)

展開

<table>
<tr><th>時間</th><th>学習の流れと主な発問</th><th>予想される生徒の反応</th><th>留意点･評価(○)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>[問題提示]
大地震が起きたとき，求められるのは，迅速な被害状況の把握です。C市に本部があり，ヘリコプターもそこにいます。このヘリコプターで，A，B，D，E，F，Gの6市の状況を把握しに行きます。下の表は，各市の間を移動するのに必要な時間です。移動時間を少しでも短くして，C市のヘリポートに戻ってくることが要求されます。どのようにまわればよいでしょうか。


<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th></tr>
<tr><td>A</td><td></td><td>30</td><td>35</td><td>30</td><td>33</td><td>35</td><td>45</td></tr>
<tr><td>B</td><td></td><td></td><td>40</td><td>43</td><td>36</td><td>42</td><td>60</td></tr>
<tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td><td>12</td><td>18</td><td>15</td><td>28</td></tr>
<tr><td>D</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>28</td><td>24</td><td>26</td></tr>
<tr><td>E</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>15</td><td>29</td></tr>
<tr><td>F</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td>G</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td></td><td>地震についての話題から入る。</td></tr>
<tr><td></td><td>[個別解決]</td><td>･表に示された所要時間を，地図に書き込む。
「ごちゃごちゃして，よくわからないなあ。」
･地図上の位置関係を考慮しながら，いくつかのコースを決め，その所要時間を求める。
･最初に向かう市と，C市に戻る直前の市の決め方に着目する。
「この部分だけ取り出して図にかいてみよう。」

</td><td>移動の時間だけを問題にしていることを押さえる。

○ グラフまたはグラフ的な表現をすることができたか。(表)</td></tr>
</table>

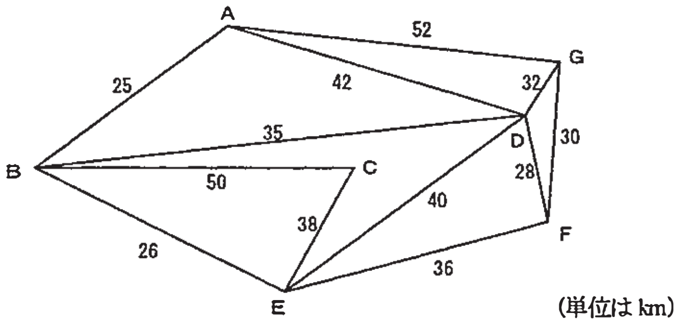
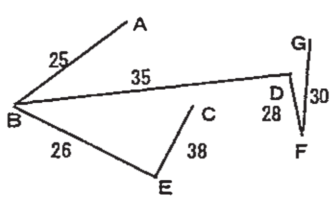
15	［ペアによる解決］ 「何分くらいになりそうですか。時間や考え方をお互いに比べましょう。」 「その時間が最短だと言えるわけを説明できるようにしましょう。」	159 分(C→D→A→B→E→F→G→C) 161 分(C→A→B→E→F→G→D→C) 165 分(C→F→G→D→A→B→E→C) 「必要な部分だけ取り出してみるとわかりやすい。」 「最初に向かう市までの時間とC市に戻るときの時間の和がもっとも小さいときだ。」 「C市と,最初に向かう市と,最後に向かう市の3市の間の移動時間に関係するのでは。」 「C市が途中だと考えて,C市を経由したときの時間と,直接行ったときの時間の差が小さいところを見つければよい。」  18 分の差　　14 分の差	○ 最短時間を求めることができたか。(表) ○ 本問題の解決に必要な部分を見いだすことができたか。(考) ○ 求めた時間が最短であることを説明できたか。(考)
40	［発表］ 「それぞれのペアに,最短時間とその求め方を発表してもらいます。」 「なぜ,最短になるのでしょう。」 「今日,みなさんがかいた点と線で表された図のことを「グラフ」と言います。」 「形や線分の長さには,意味がありましたか。」 「今日,考えたことを振り返り,感想を書きましょう。」	「165 分。最初に向かう市までの時間とC市に戻るときの時間の和がもっとも小さいとき。」 「159 分。最初に向かう市までの時間とC市に戻るときの時間の和と,直接行ったときの時間の差がもっとも小さいとき。」 「六角形の1つの辺をとって,Cと結ぶことになるから。」 「線分の上に書いた数には意味がありました。でも,その数に応じて図をかいたわけではありません。」	○ グラフの意味を理解できたか。(知) ○ 最短時間を求める上でのグラフ表現のよさに気づいたか。(関)

【第2時】2005年12月1日（木） 14：10ー15:00

本時のねらい

・総距離が最短になる道路の求め方を見いだそうとする。(関)
・総距離が最短になる道路の求め方の根拠を考えることができる。(考)
・総距離が最短になる道路の求めることができる。(表)

展開

時間	学習の流れと主な発問	予想される生徒の反応	留意点・評価(○)
0	[問題提示] 下の図は，A－Gの７都市を結ぶ幹線道路とその距離を表しています。A－Gのどの都市からどの都市へもひとまず移動できるように，道路の復旧を進めます。各道路の被害状況に大差はないので，復旧する道路を，総距離が短くなるように選びたいと思います。どのようにしたらよいでしょうか。  (単位はkm)		地震後の救助や救援活動の話題から入る。 距離が等しい道路はない。
	「どの都市からどの都市へもひとまず移動できるように」とは，どういうことでしょうか。	「孤立した都市がない。」 「直接は行けなくても，どこかの都市を経由すれば行くことができる。」	○ グラフが表していることを理解できたか。(知)
	[個別解決]	・さまざまな場合について，総距離を求めてみる。 「三角形にならないようにしないとだめだ。」	閉路にならないようにすることが解決の鍵となる。
15	[ペアによる解決] 「総距離はどのくらいになりそうですか。」	「たぶん182kmが最短だと思う。」 「いろいろ調べたら，これが最短だった。」  	○ 総距離が最短になる道路を求めることができたか。(表)

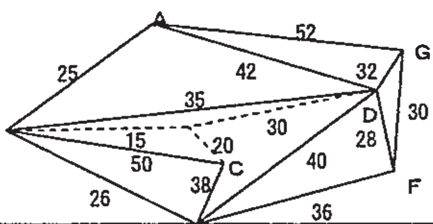
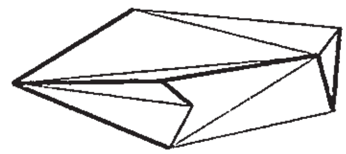
	「考え方をお互いに比べてみましょう。」	「三角形を作らないようにした。」 「結果を見ると，三角形や四角形などの（閉じた）図形ができていない。」 「長い距離の方から順に消していけばよい。」 「短い距離の方から順に使っていけばよい。」	○ 総距離が最短になる道路の求め方を見いだそうとするか。（関心） ○ それぞれの考え方の根拠を考えることができたか。（考）
35	［発表］ 「それぞれのペアに，最短距離とその求め方を発表してもらいます。」 「なぜ，三角形や四角形ができてはだめなのですか。」	182km。 「なるべく短い距離のところを使うようにした。」 「三角形や四角形などの（閉じた）図形ができないように選んだ。」 「三角形や四角形できているときは，そこから1本減らしても互いに移動できる。」 「1周まわることができるときは，1本無駄になっている。」	生徒の様子によっては，見つけた方法がどのような場合にも使えるか，といった観点で検討するよう促す。

【第３時】2005 年 12 月 8 日（木）　14：10〜15:00

本時のねらい

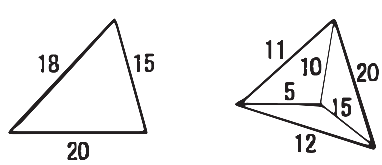
・手順を見いだし，他人にわかりやすく伝えようとする。(関)
・手順を，いつでも使えるかという観点から吟味し，修正することができる。(考)
・手順を，簡潔な文章にまとめることができる。(表)

展開

時間	学習の流れと主な発問	予想される生徒の反応	留意点・評価(○)
0	「結ぶ都市が1つ増えて，8都市になりました。孤立した都市ができないようにするために，復旧する道路を，その総距離が最短になるように選びましょう。」 	「前回は，C からスタートして，三角形ができないように，順に，短い道を選んだな。」  「1つ増えただけでだいぶ変わるなあ。」	前時の考えを振り返らせる。

どのような地域においても，被災後は，いち早く，孤立した都市がないようにすることが求められます。もし，どのような地域でも使える，復旧する道路の選び方の手順があれば，とても役立ちます。また，コンピュータ・プログラマーにその手順を伝えれば，瞬時に，総距離が最短になる道路を選び出すプログラムを作ってもらうこともできるでしょう。

そこで，その手順を見つけ出し，他の人に伝わるように，わかりやすく伝えましょう。

時間	学習の流れと主な発問	予想される生徒の反応	留意点・評価(○)
	「例えば，このような場合には，見つけ方の手順はどうなりますか。」 	「都市の数が少ない場合から考えていけばよい。」 「結果はわかるけど，手順となると難しいな。」	「一般化」する際には，簡単な場合から考えていくとよいことを押さえる。(必要に応じて，多角形の内角の和の学習等を想起させる。) 発表はさせない。
10	［ペアによる解決］ 「今日の目標は，このような 10 都市の場合でも使える手順を見つけ出し，わかりやすく伝えることです。はじめ，それぞれのペアに，別の図を配ります。最後に，手順を書いたプリントを交換して，自分たちの手順		

	が伝わるか，自分たちの考えた選び方と同じになるかを確認してもらいます。」 （ワークシート配布）		「手順」の意味を確認する。
		「どこからスタートしてもいいのかな。」 「一番短いところは必ず使うから，そこから考え始めればいいよ。」 「たどり着いた点から，一番短い道路を選べばいい。」 「三角形になってはだめだったよ。」 「そのとき，次に，どこを考えればいいかを説明するのが難しい。」 「単に，短い距離の方から順に，多角形を作らないように選んでいけば大丈夫じゃない。」 「同じ長さの道路があるときはどうしよう。」	○ 手順が，いつでも使えるかという観点から吟味できたか。（考）
	（補助発問） 「道路は何本選べばいいのでしょうか。」	「3都市のときは2本，4都市のときは3本，5都市のときは6本，…。」 「都市の数より1少ないんだ。」 「各都市の間の数と考えられるからだ。」	各ペアに，適宜，発問する。
30	「清書用のプリントに，手順を，相手に伝わるように書いてください。どのように書くと，手順を的確に伝えられるかを考えてください。」	例1　○ ① 最も短い距離の道路を探す。 ② 三角形や四角形にならなければ選ぶ。 ③ 三角形や四角形になってしまうときは，それ以外の道路の中から，最も短い距離の道路を探す。 ④ 残っている道路に対して，（都市の数・1）本の道路が選べるまで（選べる道路がなくなるまで／孤立した都市がなくなるまで），②③を繰り返す。 例2　○ ① 好きな都市を1つ選び，そこを	○ 手順を見いだし，他人にわかりやすく伝えようとする。（関） ○ 手順を簡潔な文章にまとめることができたか。（表）

		通る最も短い道路を選ぶ。 ② 既に結ばれた都市を通る道路の中で、三角形や四角形にならない最も短いものを選ぶ。 ③ 残っている道路に対して、(都市の数-1)本の道路が選べるまで(選べる道路がなくなるまで／孤立した都市がなくなるまで)、②を繰り返す。 例3　× ①好きな都市を1つ選び、そこを通る最も短い道路を選ぶ。 ②たどり着く都市を通る道路の中で最も短いものを探す。 ③ 三角形や四角形にならなければ選ぶ。 ④ 三角形や四角形になってしまうときは、1つ前の都市に戻って、最も短い道路を選ぶ。 ⑤ 残っている道路に対して、(都市の数-1)本の道路が選べるまで(選べる道路がなくなるまで／孤立した都市がなくなるまで)、②-④を繰り返す。	
40	「プリントを交換してください。書かれた手順通りやってみましょう。」 「手順を作った人が選んだ道路と比較してみよう。 「この手順は、他にどのような場面で使えそうですか。」	「ある駅からある駅までの最短時間の検索。」 「カーナビの最短路検索もそうかな。」	生徒の様子によっては、次時にまわす。

【第5時】2006年1月19日（木）　14：10ー15:00

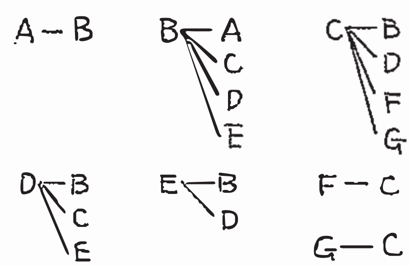
本時のねらい

- 問題場面をグラフに表すことのよさに気づく。(関)
- 必要な棚の数を求めるために，グラフを活用できる。(考)
- 点と辺が何を表すかを決め，問題場面をグラフに表現することができる。また，必要に応じて，グラフを変形できる。(表)
- 必要な棚の数の求め方を，筋道立てて説明することができる。(表)

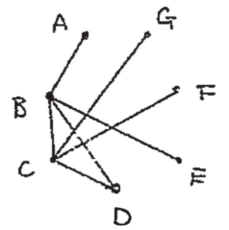
展開

<table>
<tr><th>時間</th><th>学習の流れと主な発問</th><th>予想される生徒の反応</th><th>留意点･評価(○)</th></tr>
<tr><td>0</td><td colspan="2">[問題提示]

混合すると危険な薬品同士は，一緒の棚に保管しないようにします。右の表は，A～Gの薬品間で，混合すると危険な組み合わせを示しています。
棚は，少なくともいくつ必要でしょうか。

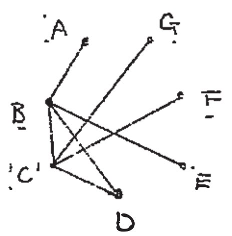
<table><tr><th>薬品</th><th>混合すると危険</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td></tr><tr><td>B</td><td>A,C,D,E</td></tr><tr><td>C</td><td>B,D,F,G</td></tr><tr><td>D</td><td>B,C,E</td></tr><tr><td>E</td><td>B,D</td></tr><tr><td>F</td><td>C</td></tr><tr><td>G</td><td>C</td></tr></table></td><td>棚は3個必要で,
(A,C,E)(B,F,G) (D)
(A,C,E)(D,F,G)(B)
(A,D,F)(B,G)(C,E)
のいずれかの場合。</td></tr>
<tr><td>5</td><td>[ペアによる解決]</td><td>①混合できない薬品の樹形図をかく

・混合できない薬品の多いBやCから考え始める。
例　(B,F,_)　(C,A,_)　(D,G_)
残りのEは真ん中の棚にはいる。
・3個の棚を使えばわけられることがわかったので,2個の棚にできないかを考える。
②混合できない薬品のグラフをかく</td><td>前時までとペアを変える。

①の図でうまく考えられずに,②の図をかくことが期待される。</td></tr>
</table>



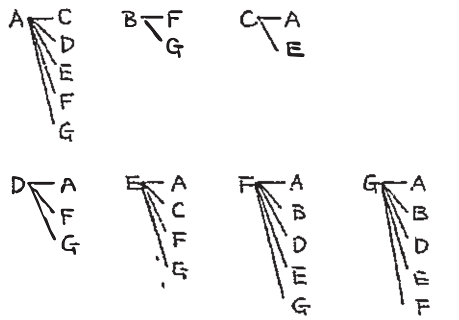
・　辺で結ばれた薬品同士は，別の棚に入れなければならないことをもとに，必要な棚の数を考える。

例）混合できない薬品の多いＣを□にする。Ｃと直接結ばれていないＡ,Ｅが□にできる。次に，Ｂを○にすると，Ｇ,Ｆが○に。Ｄは□にも○にもできないので◻。3個の棚が必要。



「どこから考え始めても3個の棚が必要だ。」

③混合できる薬品の樹形図をかく



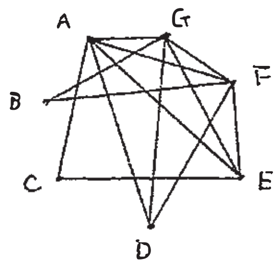
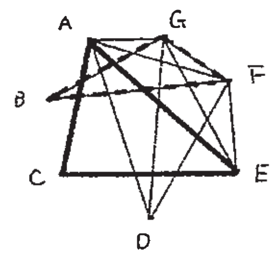
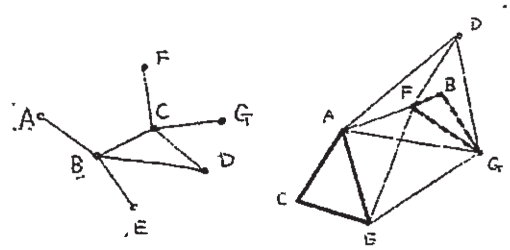
・　混合できる薬品の多いＡやＦやＧから，樹形図をたどっていく。

例）Ａ－Ｃを選び，Ｃのところを見るＥがある。Ａに戻ってＥがあるか確認する。あるので，（A,C,E）。同様に，（F ,B ,G）。Ｄはどちらの棚にも入れられないので，3個の棚が必要。

・　3個の棚を使えばわけられることがわか

○ 点と辺が何を表すかを決め，問題場面をグラフに表現することができる。（表）

③の図でうまく考え

		ったので,2個の棚にできないかを考える。 ④混合できる薬品のグラフをかく  ・三角形になっている薬品同士は,同じ棚に入れられることをもとに,必要な棚の数を考える。 例)	られずに,④の図をかくことが期待される。 ○ 点と辺が何を表すかを決め,問題場面をグラフに表現することができる。(表) ○ 問題場面をグラフに表すことのよさに気づく。(関)
30	(補助発問) 「○個の棚が必要だということを説得できるようにしよう。」	 「別の三角形で考えても3個の棚が必要だ。」 グラフを説明のしやすいように変形する。 例) 	各ペアに,適宜,発問する。 ○ グラフを変形することができるか。(表)
	[発表] 「それぞれのペアに,必要な棚の数とその求め方を発表してもらいます。」	「混合できる薬品の図(グラフ)をかく方法と,混合できない薬品の図(グラフ)をかく方法があるんだ。」 「どちらがわかりやすいかな。」 「このような図に表すと随分考えやすくなったな。」 「最短時間を求めるのとは違った使い方だ。いろいろな使い方があるんだな。」	○ 必要な棚の数の求め方を,筋道立てて説明することができる。(表)

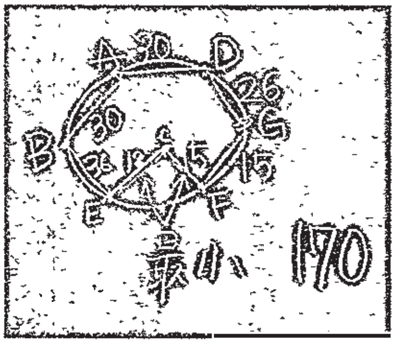
【資料２】

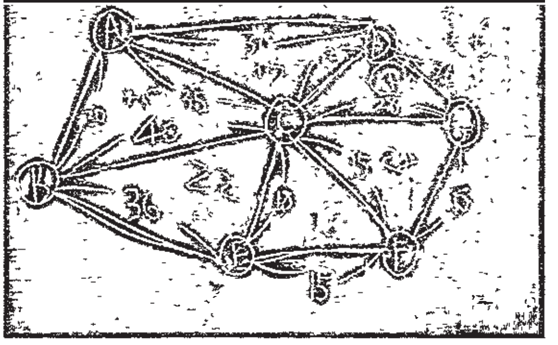
研究協議の記録

日　時　2005年12月1日（木）15：30ー17：00
ところ　東京学芸大学附属大泉中学校校長室
出席者　正田先生
　　　　田中先生（東京学芸大学附属高等学校大泉校舎），松元先生（同附属大泉中学校），細矢先生（東京大学教育学部附属中等教育学校），西村
（以下，敬称略）

前時について

西村：前時も，はじめペアで考えさせ，最後に発表する時間を設けた。前時の課題では，生徒は，まず地図上に，各都市間を線で結び，そこに移動時間を記入していった。つまりグラフ表現ができた。そして，地図上では，こみいってしまうことから，A-B-E-F-G-D-A間ならびにCと各都市間の移動時間のみの図を別に書き考えた。そして，一方のペアは，Cとの出入りの時間が最小になるところを選んだ（下左）。もう一方のペアは，Cとの出入りの時間とその2都市間の移動時間の差が最小になるところを選べた（下右）。このペアの理由は，外側の六角形から１辺を取り除いて，内側の２辺を加えることになるから，その差が最小のところになるというものだった。ほぼ意図したとおりの活動ができていた。





前時の生徒の板書

正田：生徒は必要なデータとそうでないデータを選別していることになる。生徒はどう考えたのか。

西村：問題で与えた地図にもとづいて考えていた。（ヘリの航路が）交差する場合は無駄があるという発言もあった。

正田：結果的にはそれでよいが，過剰なデータを選別する原理がはっきりしていないところが気になる。そこがクリアになれば，あとは，Cと２つの市でできる三角形に着目していく考え方などが出てきて，課題としてよいのだが。

本時について

西村：男子のペアが無口なのでどうなるかと思ったが，最小木を見つけられ，ある程度，手順の説明もできて，正直，ほっとした。「どの都市からどの都市へもひとまず移動できるように」と

っていればよい，といった発言があった。その生徒に，もう少し，つっこんだ質問をしようか迷ったが，本質をついた発言が出て，ヒントになりすぎてしまう心配があったので，そのままにした。ペアで話し合っている段階で，この部分の理解がはっきりしていなかったことがわかり，適宜，助言した。

細矢：問題の把握という点では，はじめのうち，生徒は確かに混乱していた。前時の影響もあるのだろう。一筆書きのようにならなくてはいけないと思っていたり，出発点に戻らなくてはいけないと思っていたりしたようだ。

正田：今日の授業で，生徒は，自分たちが求めたものが，本当に最短だということはわかったのか。

西村：たぶん最短だろう，という段階だと思う。次時に，求め方の手順を明確にしていく過程で，最短になるという理由も考えさせていく予定である。

正田：求答形式で終わると，小学校の問題だ，と言う人がいる。それ以外にないことを証明せよ，となると途端に難しくなる。そこをどうするかが問題だ。今日の問題で言うと，問題文の最後の「どのようにしたらよいでしょうか」というところがひとつのポイントではないか。先生の気持ちは，単に最短を決めるだけではなく，見つけ方を考えさせたいということにあるのはわかるが，生徒にとってはどうだっただろうか。

西村：見つけ方を考えるのだ，ということを，もっとストレートに伝えた方がよかったようだ。

正田：そうすると，生徒の考え方もだいぶ違ってきたはずだ。自分でやるのは大変だが，コンピュータならすぐにできるのだから，コンピュータにのせるために手順をつくるということは目的意識になる。手順がはっきりすれば，理由もはっきりしてくるだろう。手順を発見させて，伝えるということが，離散を扱う主目標になるだろう。

正田：問題文で，もうひとつ。「どの都市からどの都市へもひとまず移動できるように」より，「孤立した都市がないように」といった押さえのほうがよかったのではないか。孤立した都市がないようにするには，２都市なら１本，３都市なら２本，・・・と考えていけば，今日の場合，７都市あるので６本で結べばよいことがわかる。

西村：生徒は，何本結ぶ必要があるか，何本選べばよいのかといった観点では考えていなかった。

正田：全体を見ながら見通しを持つことが求められる。だから，全体で何本結べばよいか，ｎ点あったらｎ－１本結べばよい，という考えを持たせるようにしたい。

松元：４点くらいの場合で考えさせてみることは考えなかったか。

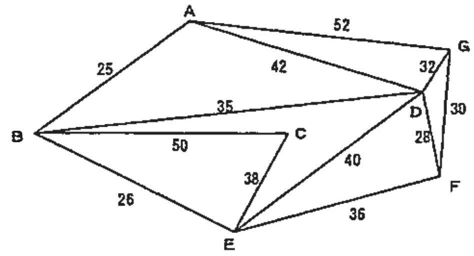
西村：閉路を作ってしまう生徒がいれば，その部分を抜き出して考えさせるつもりだった。しかし，みな，すぐに閉路にしてはだめだ（無駄だ）ということを見抜いていたので，局所的に考えさせることはしなかった。

田中：Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅのところだけを見ると，Ｄ→Ｂ→ＣよりＤ→Ｅ→Ｃの方が短い。しかし，ＤとＥは結ばれていない。なぜか。全体を見ながら見通しを持つということで，そんな部分を取り上げてもよいではないだろうか。

正田：男子２名のペアは，Ｃから考え始めた。これは前時の影響ではないか。ふつう，１番短いところを見つけて，そこから考えるのではないか。

松元：私もそう思った。

細矢：ペアで話し始めたときに，最初に渡辺君が「一番長いところ通らなければいい」と言ったり，中野君が「短いのばかり，適当に選んでみればいい」と言ったりしてはいた。



西村：もう一方のペアも，Ｃから考えはじめていたが，「必ず（２本の内の）どちらかを使うことになるから」と言っていた。

松元：Ｃは次数が２で，特殊な感じがする。ＣとＤを結んでないのには，何か意図があるのか？

西村：特別な意図はない。

松元：そこが結んであるかないかでも，つまり，最初の課題設定がちょっと違うだけで，生徒の考え方はずいぶん変わってくると感じた。

田中：課題設定ということで，前時も含めて，各問題場面で最短を考えることの意義についての議論はしたのか。

西村：災害対策本部の計画立案者になったという想定で考えさせている。ただ，中学生では，計画立案者の立場になりきれない面があった。

田中：高校生なら，そういう意識になれる生徒は増えるだろう。そのときに考えればいいよ，と言う生徒もいるだろうが。

正田：計画立案者の立場というのはよい。そのとき，さらに，自分で考えるのは大変なので，コンピュータで処理できるようにしたい，プログラマーに見つけた方の手順を伝えるという問題意識を持たせてはどうか。

松元：授業で考えれば，クラスを２つに分けて，違う図で考えさせておく。考えていた図を渡し，作った手順を伝え，最短路を求めてもらう。自分の考えた最短路と同じになるかどうかで，不備に気づかせたり，手順として伝わるかをチェックしたりすることができる。

正田：それはいい。手順を発見させて，伝えるという主目標にぴったりな活動になる。

西村：次時は，その方針でやってみたい。そのとき，１つずつの図を与えるより，都市の数が増えたり，道路の長さが異なったりした複数の図を与え，一般化を視野に入れながら，手順を書かせた方がよいような気がするがどうか。

全員：それでいいのではないか。

西村：今日の授業では，生徒はプリムのアルゴリズムに近い考え方をしていた。クルスカルのアルゴリズムに近い考え方をすると予想していたのだが・・・。

細矢：点Ｃの影響だろう。

西村：手順をかくということを考えると，今日の考え方，すなわち，プリムの方が難しい気がする。

細矢：そう。ある点からはじめて，最短の道を選んでいくだけでは手順にならない。閉路になってしまうときに，どこを選ぶかの手順を示すのは難しいかもしれない。

正田：今日の感じなら，複数の図でやっていけば，「最短を選ぶ」「閉路にならないようにする」「ｎ個の点をｎ−１本で結ぶ」といった手順は見いだすだろう。

細矢：そのような点については，中学と高校で，そんなに差はないと思う。

松元：教材の配列についてはどうなのか。

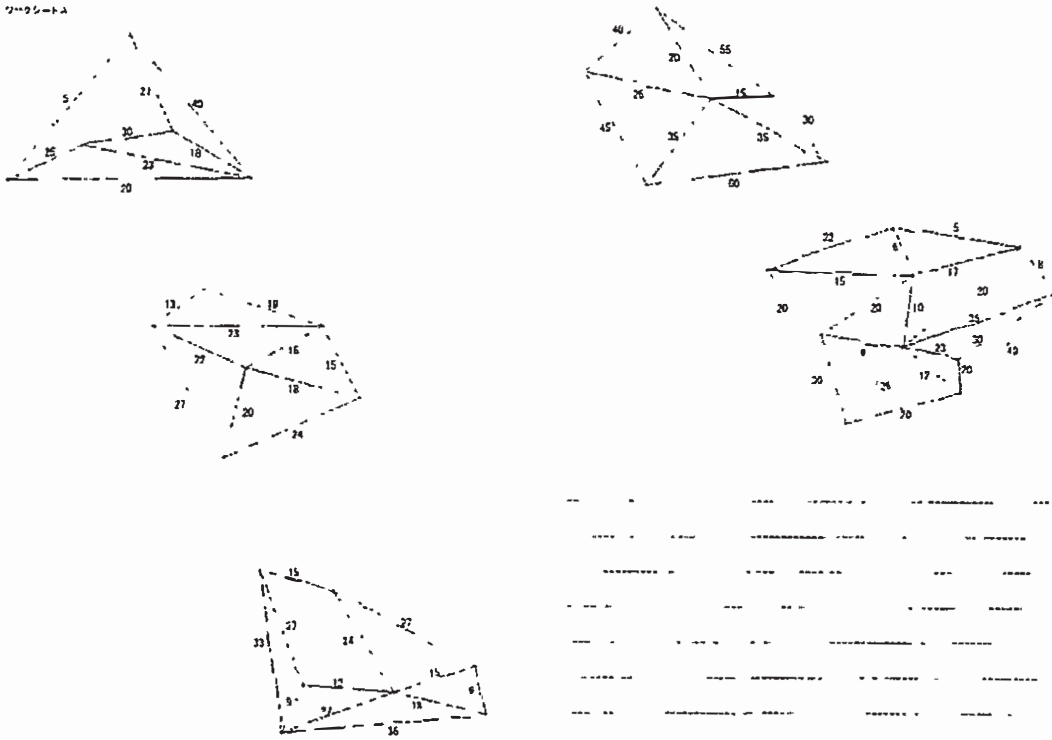
西村：アメリカの教科書では，オイラー路から入っていることが多い。

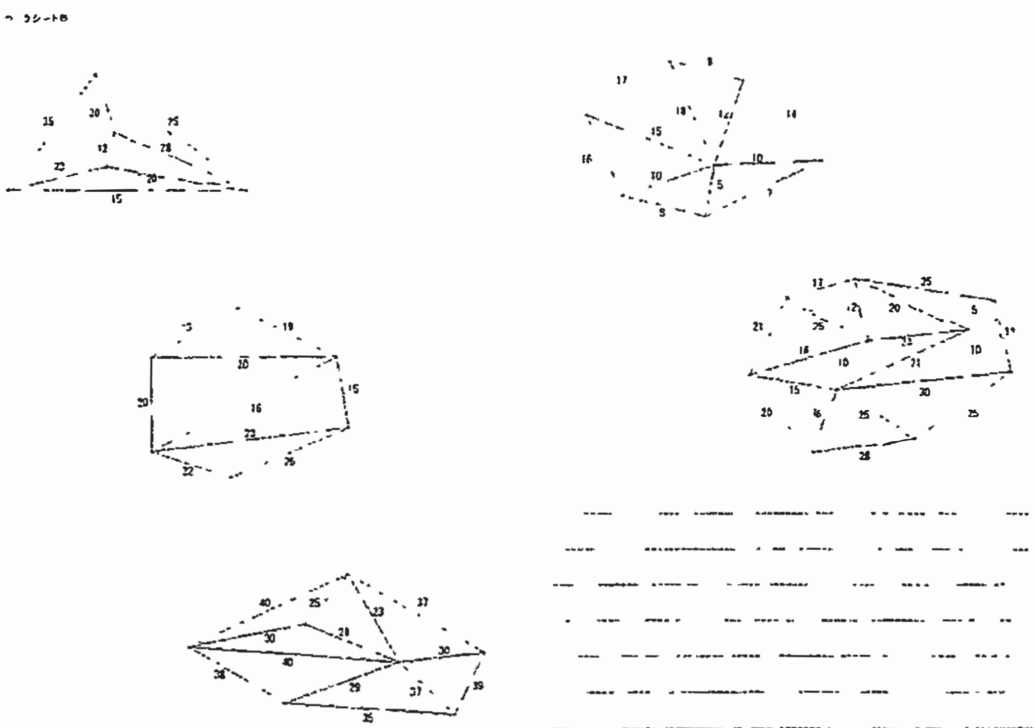
正田：現代化の時代に中学でやっていた。一筆書き，点の次数，オイラーの法則という流れ。図形に関わる扱いをするとなると，こういうことになるのだろう。数学Bのコンピュータの代替と考えると，やはりグラフ化してアルゴリズムを発見することが主になるのではないだろうか。

松元：あとにある薬品の問題から入るという手もあるのではないか。こちらの方が，数字がなくて簡単である。

正田：いずれにしても，点と辺がない状態からグラフ化する，そのように数学化できる事象が身近にあることを知らせることに1時間くらい，手順を見いだして，伝えることに3時間程度はかけないとだめだろう。スケジュール問題，工程表なども含めて，生徒にとって身近な題材，高校で言えば専門学科に即した題材などが見つかるとよい。

【資料3】　第3時に用いたペア別のワークシート





ラムゼー定理を主題とした授業－ラムゼー定理のゲーム化によって－

萩原　季弘
静岡県立沼津東高等学校

【要約】離散数学の中の組み合わせ幾何のひとつである「ラムゼー定理」を教材化した。「ラムゼー定理」はそのままでは抽象的でわかりにくいので「ゲーム化」することで生徒の興味を高めるよう工夫した。ゲームという具体的な作業を通して「ラムゼー定理」に関する現象を観察し，最終的には証明をすることを主題とした。数式では通用しない数学に生徒は戸惑いながらも「今まで一番よく考えた」授業となった。

1．題材について

■(1)ラムゼー定理・鳩ノ巣原理について

グラフ理論の「グラフ」というのは，点と線よりできた図形で，その結合関係のみを考慮し，図形の大きさや形は考えない．十分大きなグラフ（点や線の多いグラフ）に必ず現れる部分構造とはどんなものか。一般に「ある程度以上の大きさの組み合わせ構造は整然たる秩序を持った部分構造を含む」ということについて述べた定理を「ラムゼーの定理」という．「ラムゼーの定理」の名はイギリスの F.P.Ramsey によるものである．この定理の最も簡単な例としてよく紹介されるのが次の定理である。

> 頂点が6である完全グラフの辺を赤青でどのように塗っても，
> 必ずどこかに3辺とも赤か3辺とも青の三角形ができる。

付け加えるなら，一般の位置（どの３点も同一直線上にない）にある点をすべて直線で結び，その直線を赤，青２色で塗るとき，同色だけでできる三角形が必ずできてしまうような最小の点の個数が６である．つまり，５個の頂点では同色三角形ができることを回避できるが，６個以上になると回避する塗り方は存在しない．このようにラムゼー定理に関する条件をみたすような最小の点の個数をラムゼー数と呼ぶ。

今回はこの６頂点のグラフを中心にラムゼー定理を考え，証明することを主題とした．

この証明の軸は「鳩ノ巣原理」である．「ディレクリの引き出し論法」などの名称でも呼ばれるこの原理は，次のような内容である．

> 原理１　$n+1$ 羽の鳩を，n 個の巣箱に入れると２つ以上の鳩が入る巣箱が少なくとも１つ存在する。
> 原理２　$kn+1$（$k \geqq 1$）羽の鳩と n 個の巣箱があり，すべての鳩がこれらの巣箱のいずれかに入れば，巣箱のうちのどれかには $k+1$ 羽以上の鳩が同居していることになる。
> 原理３　無限羽の鳩が，有限個の巣箱に入れば，無限羽の鳩が入る巣箱が少なくとも１つ存在する。

つまり，鳩が１０羽いて鳩の巣が９つしかなければ，どこかの巣箱には２羽以上の鳩が入ることになる，という自明の，しかし数学的には大きな力をもつ原理である。

６頂点のラムゼー定理の証明は，この鳩ノ巣原理を使って次のようにする。１頂点から５本の線が出ていて（線が鳩），これを２色で塗れば（色が鳩ノ巣），どちらかの色は３本以上(５＝２×２＋１である)塗られている。あとはこの３本の同色の辺について考えれば，この部分に同色三角形ができることになる。

■(2)教材観

ラムゼー定理は存在を保証する定理で，生徒にはわかりにくい定理と思われる。表現も抽象的で，具体的な有用性も明確には感じられない定理である。しかし，数式ではなく言葉で説明し証明するには良い題材であり，生徒の数学観の幅を広げ，論証力を鍛える効果が期待される。

ここではゲームを行うことで，現象への興味を喚起し，数理の不思議さ，おもしろさを感じられるように工夫してみた。

ラムゼー定理の証明に用いる鳩ノ巣原理そのものが魅力的で，興味深い応用例がいくつかある。鳩ノ巣原理を中心にした授業展開もできるが，ここではラムゼー定理の証明を導入として鳩ノ巣原理について考えるようにした。

また，ラムゼー定理の証明は自力解決が難しいと考えられるが，着眼点などのヒントを適宜与えることでできるだけ自力解決できるようにしたい。それでもかなり困難な面もあると思えるが，グループ討論などでお互いの意見交換をする中で証明することのおもしろさや難しさを感じてもらいたい。最終的に自力解決できなくても証明のアイディアに感動できるようにしたい。

■(3)授業計画

ここでは３時間での授業を計画した。それぞれのテーマとねらいは以下の通りである。

１時間目　ラムゼーゲーム（５頂点）

ラムゼーゲームのルールを理解しゲームができるようにする。５頂点のゲームを実施し，結果をグラフで表し考察することでグラフによる表現を学ぶとともに，グラフについての最低限の用語や考え方をおさえるようにする。

２時間目　ラムゼーゲーム（６頂点）

６個の頂点の場合が５個の頂点とどう異なるかを考えながら行う。引き分けパターンは無いわけだが，生徒は５頂点で引き分けがある事を確認しているので，どう判断（予想）するかがポイントとなる。次に引き分けがない理由を考える。証明は生徒からスムーズにはでないかもしれないが，そのときは１点に注目するなどのヒントを与える。それでもでないときはプリントで考え方を示す。証明のベースとなるのが鳩ノ巣原理で，簡単な例も採り入れたが，進行によってはカットする。発展的な課題としては，同色三角形が二つになることの証明を用意した。

３時間目　ラムゼー定理の発展

ラムゼー定理の一般の説明。ラムゼー定理の持つ意味と広がりを理解するとともに，生徒自身

が問題を作ってみる。ゲームの拡張からスタートし，どんな問題が考えられるか検討する。証明は難しい（ほとんど不可能？）かも知れないが，問題に対しての結果を数理的な根拠を持って予想することを重視する。時間をみて鳩ノ巣原理についての理解も深める。最後にコンピュータとの関連についてふれる。

■(4)評価規準

1時間目

・ゲームのもつ数理的な側面に興味をもって取り組む。（関心・意欲・態度）

・グラフについての用語を理解している。（知識・理解）

2時間目

・ゲームによって起こる現象の理由を，場合分けや書き並べなどで数理的に考察したり，背理法を用いて説明する。（数学的な考え方）

・鳩ノ巣原理について理解している。（知識・理解）

3時間目

・類似の問題を作ってみようとする。（関心・意欲・態度）

・自分の考えを自分の言葉で人にわかってもらえるように説明できる。（表現・処理）

2. 授業の記録

■(1)日時

1時間目　平成１７年１２月１２日（月）

2時間目　平成１７年１２月１４日（水）｝公開授業

3時間目　平成１７年１２月２１日（水）

■(2)クラス・教室

２年生　理数科：４０人（男子２９人　女子１１人）

■(3)生徒観

通常は授業者が担当しているクラスでなく，授業者と生徒は今回の授業が事実上の初対面である。以下，本校の生徒の実態と理数科の一般的な傾向について述べる。

本校は地区での伝統校で，ほぼ１００％の生徒が大学進学を希望し，学校のカリキュラムや行事も進学を意識したものになっている。理解力の高い生徒が集まっているが近年は学習を学校の課題や塾に依存する傾向にある。数学に対する意欲は必ずしも高くなく，受験科目のひとつというとらえ方が多い。早い授業進度や課題の多さに適応できず早いうちに数学を嫌いになる生徒もいる。

理数科は，さらに学習意識の高い生徒が集まっているが，それだけにプライドも高く，素直に疑問を発したり，わからないという気持ちをおさえてしまう傾向もある。公式適用などの受験数学的

な処理は得意でも離散数学というなれない課題にどう取り組むか，まったく予想できない。

■(4)1時間目

１時間目は授業者の紹介やアンケートなど，授業の計画そのものと関係のない部分が多くいので簡単な記録に止めてある。

① 指導計画

指導のねらい	指導過程・学習活動	指導上の留意点・評価
《導入１》 授業者・授業の紹介	・授業者自己紹介 ・今回の授業の概要 ・アンケート１実施	・事実上初対面の生徒が多い。
《展開１》 実際にゲームをし，どんなことがおこるか確認する	今回はラムゼーゲームというのを紹介します。みんなでやってみて下さい。５頂点でやってみましょう。 ○２人組になってゲームをする。	・プリント配布 ・各ペア５～７試合 ***関心・意欲・態度*** ・ゲームが理解できているか。 ・生徒どうしがゲームをしやすい雰囲気を心掛ける。
《展開１》 本時の課題の提示	引き分けはありましたか? あるとしたらどんなパターンですか。 <予想される生徒の反応> ・引き分けのパターンがでる。 引き分けにはどんな特徴がありますか。 <予想される生徒の反応> ・各頂点から出ている辺の色が，赤と青でできるだけ同じ数になる。 ・サイクルができる 引き分けができるかやってみよう。 <ヒント> ・引き分けを作るためにはどうすればよいか。(どういう状態になると引き分けができやすいのか。)	・引き分けパターンは一つ～二つと予想される。他のパターンを説明。 ・点と線のつながりという点で見ると，実はすべて同じであることの説明。 教師よる説明
《まとめ》	・グラフ理論の基礎的な用語について学ぶ ●次回の予告	・教師による説明。 ・用語を覚えることには固執しない。 ***知識理解***

② 授業の記録

（導入部）ゲームの紹介とゲームになじむ

・自己紹介の後，ラムゼーゲームの説明（プリント配布）。プリントにしたがって４頂点のラムゼーゲームについて。

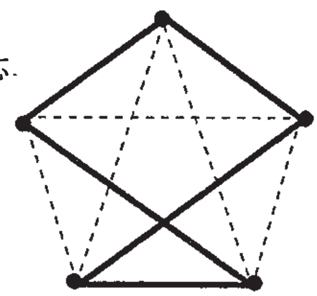
・ワークシート配布。

・「３頂点や４頂点ではすぐ終わってしまうので，５頂点でやってみましょう。」

・５頂点のラムゼーゲームを隣りや前後の人と実施。

（展開部）引き分けのパターンについて

・引き分けについて「引き分けはありましたか？」と問う、それに答えて引き分けのパターンがでる。数グループが手を挙げるが，すべて右下図のパターン。



・他の引き分けパターンを紹介。ゲームとしては不自然な形だとの反応。

・点と点のつながりに注目すると，引き分けはすべて本質的には同じであることを説明。

・引き分けパターンを見て気づくことはないか？

・「対称的」などの意見．どの点からも各色が２本ずつ出ていることを確認。

・引き分けになるか，「負けない」ように勝負してみよう。

・なかなか引き分けない．

（まとめ・整理）

・「グラフ」「頂点」「辺」「完全グラフ」という用語の紹介．

・次回はこのゲームをもう少しやってみることを予告して終了。

■(5)2時間目

① 指導計画

指導のねらい	指導過程・学習活動	指導上の留意点・評価
《前時の確認》	・５頂点の場合は引き分けがある。 ・引き分けに持ち込む秘訣は？	・各頂点からでている線に注目する。
《導入１》 実際にゲームをし，どんなことがおこるか確認する	今日は頂点が６つの場合のラムゼーゲームをやってみよう。 ○２人組になってゲームをする。	・ワークシート配布 ・各ペア３～５試合 ***関心・意欲・態度***
《展開１》 本時の課題の提示	引き分けはありましたか？ あるとしたらどんなパターンですか。 ○グループになって話し合う。 <予想される生徒の反応>	・とりあえずグループ内

	・頂点（または辺）の数が増えたので引き分けパターンも増える ・引き分けはなさそうだ ＜ヒント＞ ●５頂点ゲームで引き分けるのはどういう場合だったか。 ＜予想される生徒の反応＞ ・各頂点から出ている辺の色が，赤と青でできるだけ同じ数になる。 ・サイクルができる ○各グループによる経過報告・発表	でいろいろな意見を交換する。 ・状況を見て問題を「引き分けのパターンを探す」「引き分けがない理由を考える」に整理する。 ・ここで証明がでてしまえば発展問題へ
《展開２》 証明を考える	引き分けがないとしたらその理由を考えよう。 ＜ヒント＞ ・引き分けを作るためにはどうすればよいか。（どういう状態になると引き分けができやすいのか。） ・５頂点の場合とどうちがうのか。 ○できたグループによる発表 ○鳩ノ巣原理について理解する。	・状況によって設問は変更する。 ・意見はワークシートに書き込む。 ***見方・考え方*** ・状況を見てヒントを増やす。（１点に注目する，１点から赤線と青線は何本ずつでているか，その中で引き分けにしやすいのはどういう場合か等） ・できなければ教師による説明 ・教師の説明・整理
《まとめ》	６頂点のラムゼーゲームでは必ず同色三角形ができる。 証明には鳩ノ巣原理が使われていた。 ○感想記入	・ワークシート回収

②　2時間目の授業の記録

Ｔ：授業者　ＳＫ：生徒

Ｔ：前回はラムゼーゲームの内容を理解して，５頂点の場合のゲームをやってみた。引き分けがあったね。どんな特徴だった？

Ｓ１：１頂点から赤，青２本ずつの線が出ていた。

Ｔ：他には？今思いつく事でも良いけど。ありませんか。

５頂点のゲームもいろいろ考えると面白そうな事がまだありそうだけれど，今日は頂点を一つ増やして６頂点でやってみます。

（プリント配布）それでは前回のように近くの人とやってみましょう。但し，今日は引き分けがあるかどうか意識してやってみて。不本意かも知れないけど「勝とう」と思わないで「負けまい」としてやってみるといいかもしれない。では始めて下さい。

＊＊＊各自，隣や前後の生徒とゲーム＊＊＊

T：やってみてなにか予想が立ったかな？引き分けがあった人，手を挙げて。

S2：引き分けはないのではないか

T:うん，引き分けができそうだった人，いますか？…いないですね。では引き分けがないと思う人手を挙げて。

半分くらい手を挙げる

T：引き分けがなさそうですね。では，ないとしたらそれを証明できますか？証明ってのは式でやる証明だけではないね。人が聞いて納得できるように言葉で説明する事も証明になります。では，証明を考えてみて下さい。

＊＊＊各自証明を考える＊＊＊

T：１人で考えると難しいかもしれないね。考えた事を隣の人，近くの人と話してみて下さい。コミュニケーションをとって下さいね。

＊＊＊近くの人と意見交換＊＊＊

T：証明できた人いますか。証明のとっかかりでも良いです。

S3：頂点数が 4n+2 だと（引き分けが）できなくて 4n だとできると思う。なぜそうなるかは，（黒板に図を書いて）頂点が６だと点から５本の線が出る。交互に引いても３：２（片方が３本でもう片方が２本）となる。５頂点で引き分けになるのは１：１のときだった（赤・青２本ずつ）。だからできないだろう。頂点が８つのときは…説明しにくい。

T：それを説明するのが証明だね。他にどうかな？

S4：８頂点を考えている。

T:そうか。頂点の数を変えてみるのはひとつの方法だね。でも，実はこの場合はちょっとうまくいかないんだ。今の S3 君の考えにヒントが隠されている。相手が三角形を作らざるをえない状況ってどういう状況かな？同色三角形ができてしまう状況がこの（S3 が書いた黒板の）図にないかな？ちょっと図を変えてみよう。どう？

S5:赤３本が集まっているところ。

T：そうだね。じゃあ，ここに注目してもう少し考えを続けよう。

＊＊＊各自証明を考える＊＊＊

T：できた人が何人かでてきたようだね。じゃあ T6 君。説明してみて。

T6：（黒板で説明。正解。）

T：わかったかな？するとあとは次の事が問題となるね。つまり，赤３本青２本でているような点があるかどうかということだ。ちょっと考えてね。

＊＊＊各自考える＊＊＊

S7：５本の線が出ているわけだから，それを２色で塗ればどちらかは３色か４色か５色ある。
T：そうだね。これで先ほどのことと合わせれば証明終わりだね。ではこの証明をまとめてみよう。

（プリント配布。内容確認）

最初の５本のうちどちらかは３本以上だというのは「鳩ノ巣原理」という。(「鳩ノ巣原理」の説明)
では時間も少なくなったので感想をかいてください。

③　授業後の研究協議

１２月１４日（水）12:45～　於：会議室
参加者　長崎栄三（国立教育政策研究所）
長尾篤志（文科省初等中等教育教科調査官）
高橋広明（千葉県立松戸六実高校教諭）
萩原季弘（静岡県立沼津東高等学校：授業者）

●授業者(萩原)の感想

今日の授業は証明をいかに引き出すかが焦点で，授業展開にも一番気を遣った。初めてのことで，生徒がどんな方針で証明しようとするか予想できなかった。式を作ったりする方向いくことはある程度予想できたが。授業の雰囲気としては１時間目にゲームに熱心に取り組む様子を見ていたので，それなりに集中してくれるだろうとは思っていた。結果的になんとか生徒から証明がだされてほっとした。生徒は必勝法に関心がいったり，n 頂点の場合の拡張に目がいって，なかなか難しかった。

●意見交換(抄)

・ゲームの方向を三角形ができたら「勝ち」にいくにしたらどうか。そうすれば相手の手をつぶしに行くので，一つの頂点から２色がでるような展開になっていくのではないか。証明で考える状況が生まれやすくなるのではないか。
・頂点の数を増やして考える生徒がいたが，４頂点から入って，５頂点，６頂点ときたので７，８と発展していくのはむしろ自然かもしれない。離散数学の研究の方向もｎを増やしていくような方向にある。
・ゲームの時は活発に近くの生徒どうしで活動していたが証明の段階になったら一人で考え込んでしまっていた。机をつけるなど強制的にグループを作ってしまった方がいいグループ活動ができたかも知れない。
・鳩ノ巣については今日は一言触れた程度だったが，証明のとっかかりのところと鳩ノ巣がつながるところが，簡単だが大きなところ。ここを次にどう補っていくかが大切でないか。
・こういう証明は一度経験しないとできないのではないか。理数科の生徒などこういうことをやるべきではないか。
・別の実践では鳩ノ巣原理を題材に時間をかけることで，鳩ノ巣を使った難しい応用問題にも生徒は対応していた。この実践でも，時間をかければかなりのことができそうだ。
・例題と演習の繰り返しのような授業タイプに慣れている先生なら証明を説明して終わってしまう

かもしれない。そうするとつまらない授業になる。指導法が重要な要素になる。

・生徒が作業する時間が少なかった。授業の半分くらいゲームをやっていてもよかったのではないか。今日の内容は2時間かけるのが妥当かも知れない。

・中学生でも取り組める課題だが中学生では論理的に考えるところまではきつそうだ。今日は高校生らしく論理で取り組もうとしてる姿が見られた。しかも非常に熱心に取り組んでいた。

④参観した本校教員の感想

・ふだんの授業と取り組みがちがう。目の色が違った。

・どんなところに有用なのかを話すともっと意識もあがるのではないか。

・評価が難しそうだ。どこを目標とするのか。小中と同じ形の授業に出来るがテストの出し方など難しそうだ。

・発想を引き出す時間がほしい。実験や考える時間が短かった。(複数あり)

・理数科の生徒だからこそなんとか出来たが，一般のクラス・学校では証明がでるのが難しいのではないか。証明が生徒側から出なかったときは教師が説明することになるが，そのときはそれで生徒が考えたことになるだろうか。

・今までの数学のイメージから教員側が抜け出しにくい。

・教科書に載るとしたらどういう形式になるのか。出版社はたいてい問題集とセットでだすが問題集はつくれるのだろうか、日本型の教科書より欧米型（教科書を読めばわかる形式）の教科書の形を取り入れた方がいいのかもしれない

■(6)3時間目

① 指導計画

指導のねらい	指導過程・学習活動	指導上の留意点・評価
《前時の確認》	・６頂点の場合は引き分けがない。 ・証明には鳩ノ巣原理を用いた。	
《展開１》 「ラムゼー定理」とはどんな定理か確認する	次のことは正しいといえるか。 １．６頂点では赤・青交互に引かずでたらめに引いても同色三角形ができてしまう。 ２．７頂点，８頂点と頂点の数を増やしても同色三角形はできてしまう。 ・グループで話し合い意見を交換する。 <予想される生徒の反応> ・ｎによって場合分けをする，(奇数・偶数，４で割ったあまりなど) ・６頂点のときの証明をそのまま適用する。 ○６頂点以上では同色三角形が必ず出来ることの確認。(ラムゼーの定理) ○ラムゼー定理の意味，由来について知る。	・プリント配布 ・グループを作り意見交換する。 ***見方・考え方*** ・ｎによる場合分けや立式から離れられない場合は，前回の証明のポイントについて振り返るようにする。 ・どんなことを言っているのか確認する程度にしておく ・教師による説明

《展開２－1》 課題の提示 自分で課題設定をする。	ラムゼーゲームの発展形にはどんな形が考えれるだろうか。そのゲームからどんな課題が設定できるだろうか。 ＜予想される生徒の反応＞ ・同色四角形，五角形ができるには？ ・色を三色，四色と増やす。 課題に対して結論を予想してみよう。できれば結論が正しいことを証明してみよう。 ○グループになって話し合う。 ○発表・意見交換	・とりあえずグループ内でいろいろな意見を交換する。 ***関心・意欲・態度*** ・グラフ理論では同色の完全グラフができることを考える。 ・予想については実際にやってみる，今までに分かっていることを応用することを示唆する。 ・発表に対する質疑応答。
《展開２－2》	日常の生活や現象で「ラムゼー定理」になりそうなものをあげてみよう。 ●例として， ・凸四角形ができないような４点の配置 ・凸四角形ができないような５点の配置を作る ＜予想される生徒の反応＞ ・「各クラスに同じ誕生日の生徒がいる」など，確率の問題と混同する発言	・何個(人)という具体的な数値は挙げなくても良い。 ・鳩ノ巣原理と明確に区別しない
《まとめ》	○コンピュータとの関連について知る。 ○感想（アンケート）記入	・教師による説明 ・ワークシート回収

②　3時間目の授業の記録

Ｔ：授業者　ＳＫ：生徒

T：前回は６頂点でのラムゼーゲームをやってみて何が分かったかな？
Ｓ１：引き分けがなかった
T：証明には何を使った？
Ｓ１：鳩ノ巣原理
T：どんなにやっても同色三角形ができたわけだけど，その様子をもう少し詳しく考えるために，次の主張が正しいかどうか考えてみよう。

＊＊＊プリント配布，主張の説明＊＊＊

T：ひとつは，赤青交互に引かなくても，つまり勝手に引いても同色三角形ができてしまうということ，もうひとつは頂点を６つ以上に増やしてもやっぱり同色三角形ができてしまうということ。それぞれ正しいかな?じゃあ今日は机をつけてグループで話し合ってみて。自分ひとりで解決した喜びは格別だけど，時間内で成果を挙げるためには共同で作業することも大切だよ。最近のすばらしい研究は共同研究でなされたものが多いんだよ。みんなも，共同作業で証明を考えてみてくださ

い。

＊＊＊グループ討論＊＊＊

T：ではどんな意見になったかな？主張１が正しいと予測したグループは？…全部そうみたいだね。じゃあ，証明できたグループあるかな？…あ，いくつかあったよね。手を挙げて。じゃあまずそのグループ。

S２：（説明の要点）

辺は全部で１５本ある。

赤，青いずれかは８本以上ある。

１本の辺は２つの頂点を端に持つので，１６個の頂点が必要。

しかし，頂点は６つなので，３本以上同色の辺が集まっている頂点がある。

そのような点をみればあとは前回の証明と同じ。

T：なるほど，他には？じゃあこっちのグループは？

S３：（説明の要点）

ひとつの頂点を見たときに，そこから出ている辺の色は

（赤，青）＝（０，６），（１，５），（２，４），（３，３），

（４，２），（５，１），（６，０）

だから，どちらかの色は３本以上ある。あとは前回と同じ。

T：なるほど。二つの考え分かったかな？S２もS３も，ひとつの頂点から３本以上の同色の辺がでていることを言い，あとは前回と同じとしているね。後半は同じだ。どちらもいいね。証明はいろんな証明があってそれぞれいいところがあると思うけど，分かり易いのはどっちだった？

（生徒の多くははS３を指示）

T：みんなS３の方が分かり易かったみたいだね。えーっと，S４くん。僕はS４くんが最初に書いていたのが好きだったんだけど。ちょっと言ってみて。

S４：前回と変わらない…。

T：そう，そう思ったS４くんは鋭い！前回の証明で"赤青を交互にひく"ということは使ったかな?使ってないね。とうことは頂点からどちらかの色が３本以上出ているという状況は変わらないから，証明は全く同じ。というわけでこの主張は正しいね。では主張２は？

＊＊＊グループ討論＊＊＊

T：ちょっとあまり時間がなくて申し訳ないけど，これも出来ているところがあったよね。はいそのグループ。

S５：７頂点なら３本以上，８頂点なら４本以上と，ひとつの頂点をみると必ず３本以上同じ色の辺がでているので，そのなかの同色の３本をみれば証明は同じ。

T：そうだね。他の証明をしたグループは？ない？こんなのはどうかな？たとえば７頂点にしても８頂点にしても，６つの頂点を含むから，その中に必ず６頂点の図形を含むでしょ？６頂点の場合は証明済みだから，その中に必ず同色三角形があるね。頂点が増えてもその中に必ず６頂点の図形を含むんだから同色三角形も含むことになる。

T：さて，以上でラムゼーの定理の厳密な表現が出てきたことになる。

＊＊＊プリント配布，ラムゼーの定理の説明＊＊＊

T：ラムゼーゲームはいろいろなバリエーションが考えられるね。そこから新しい課題も出てくるかもしれない。各自でゲームのバリエーションを考え，そこから生まれる課題を考えてみよう。できればそれに対する結果の予想も立ててみて。

＊＊＊各自考える＊＊＊

T：少し考えたらグループで出し合って。…ああ，もう時間がないね。考えたものはあとでワークシートを回収するので書いておいてください。それからもう一度アンケートに協力してください。

＊＊＊アンケート用紙配布＊＊＊

T：それでは３時間どうもありがとう。ちょっと時間が足りなかったけど，これで終わりにします。

③　3時間目　授業後の研究協議

１２月２１日（水）12:45～　於：会議室

参加者　熊倉啓之（静岡大学教育学部助教授）

　　　　萩原季弘（静岡県立沼津東高等学校：授業者）

●授業者(萩原)の感想

今日の授業は前半がラムゼー定理がどういうことを言っているのか確認し，後半は自分たちで課題設定をすることが主題だった。前半は思ったより生徒の証明が出るのが遅く後半の時間が十分とれなかった。ラムゼー定理の言わんとするところがどういうことなのか，生徒の中に十分イメージができておらず，生徒が発展課題を考えるまでには至っていなかった。

●意見交換(抄)

・今回の３時間の内容はいずれも面白く，どれかひとつに絞って展開してもよかったのではないか。全体的に多くのことを短時間につめこんだ感じがする。

・グループで話し合ったが，１グループは４人程度の方がよかった。（今回は古典の授業で使っているグループをそのまま使い，１グループ６～７人だった）

・グループ学習は案外慣れが大切で，普段から慣れているとスムーズに行く。数学の授業だけでやってもすぐにはスムーズにはいかない。

・後半で課題を作った(作ろうとした)。それ自体は面白いし，有意義なことだが，今日のところは生徒は課題を設定するところまでイメージができていなかったのではないか。もう一つ用意していた発展課題(ラムゼーの別の形，証明ができる，できそうなもの)をやって，「ラムゼーの発展課題」

のイメージを作るというのも考えられた。
・今回の授業は生徒が予備知識なしで主体的に考えられる題材として価値があった。ただ，何が何でも生徒主体で，生徒が証明をしなければならないわけでもない。具体的に考えられて，一生懸命考えて証明が出てこなくても，鮮やかな証明を知ることでも意味がある。
・数学の有用性のみに目をやるのではなく，「ゲーム」というシチュエーションで生徒の興味を喚起する展開も意味があった。純粋に思考の面白さを感じることが生徒の動機付けになっている。
・思考力を養成するという意味でも可能性のある題材ではないか。

3. 生徒の感想・アンケート

■(1)授業の感想より

（２時間目の終わり，３時間終わってから，の２回分。内容はほとんど同じであったので一緒にした。同じような感想は割愛した。）

関心・意欲・態度

次の感想からは，日頃触れている数学と違う数学にふれ経験ししたことのない考え方に感動している様子がうかがえる。また，ここで学んだ考え方の有用性も感じている。

・(全然わからない…！）と思っていた証明が実は結構簡単なことだったのに驚いた。しかも自分の考えが少しかすっていたので嬉しかった。
・１頂点に集まる辺の数には着目したりしてたのに結論が出てこなかったのが悔しかったです…！着目の仕方（見方）を変えればこんなに簡単だったんだ一とまさに目からウロコが落ちたようでした。面白かったです。
・鮮やかな証明！
・計算してしまった…、なんか簡単じゃーん。アホな計算をやったので上に書いておきます。
・何でも数式だけで証明しようとせずに単純な事実から証明することも大切だと思った。
・まず場合の数の考え方を適用しようとしたが無理だった、証明は定理・公式と計算だけではないのがわかった.
・証明は意外にも簡単だった。数学はおもしろいなと思った。鳩ノ巣原理は使えるものだった。
・意外に引き分け出来ないんだなあと思った。証明がむずかしくない（ｘとか使ってない）のがすごいなあと思った.
・一度わかってしまうと単純なことなのにわからなかった。でも普段はやらないような考え方を使ったりして，終わった後すごく満足感がありました。単純なゲームなのにここまで考えることができてすごいと思います。楽しくでもしっかり考えてできました。
・おもしろかった。考え方を変えないとわからない問題だったと思う。
・数学ってまだまだ奥深いなあと感じました.
・いつもの授業より興味を持てました.
・数学は面白い！！
・面白かった。普段と異なる授業に新しいものを感じた。

数学的な見方・考え方

次の感想からは，多くの生徒がこの授業の最も大切な点である論理的に考えることができたと判断できる。

- 頭をたくさん使った気がした。何回も試してみて引き分けにならなくてちょっといらいらしたけど，証明で納得してすっきりした。
- こんなに数学の授業で考えたのは初めてでした。
- 普段の数学の授業よりも今日の数学の方が頭が回転しているように思えた。と言うよりも普段とは違う頭の部分が動いている感覚があった。
- 久しぶりに自分が"考えてる"ことをした気がします。面白い授業でした。
- 楽しかった。頭が疲れました。
- 楽しかったです。ああでもないこうでもないと考えるのがおもしろかったです。ふだんの数学からはしないような証明の方法に感動しました。

考えたことは必ずしもすっきりとしない，もやもやっとしものを感じるのもよく考えたからこそと思える感想。考える時間が欲しかったと言う感想も。

- 普段，数式だけでしか証明を体験したことがないし，見たこともないので，これで本当に証明が出来ているのか不思議でした。
- 難しいと言うより不思議な感じだった。普段は数式を使って途中でふと何をしているかわからなくなっても，手順通りやればたどりつけるけど，これは「こうで…こうで…こうだから…」ってずっとその考えがどの時点にあるかを考えなければいけなくって…。
- 正しい証明を通り越して考えていたような気がする。自分で袋小路に入っていったような。
- いろいろ考えすぎて訳わかんなくなったけど理屈がわかってなるほどと思う反面，本当にそいうなるのかと思った。おりこうさんかも。
- 鮮やかな証明に見えました。理数科生のひらめきはすごいと思いました。でもやっぱり勝つ方法が知りたいです。
- 普段考えていないようなことを証明するのに言葉だけでできるものが思い浮かばなくて残念だった。
- もっとゆったりとやりたかった。楽しかったが疲れた。
- もうちょっと時間がほしかった。
- 新たな数学という感じで新鮮でした。でも，もやもやした気持ちが多く残った。

その他

そのほか，複合的なものや授業そのものの印象についてn感想。

- いつも数学は全然わかりませんが，今日の授業はわかってよかったです。普段の数学が出来る人はこういう数学をやってもできるのだと思いました。
- 数式がでてこなくてよかった。
- 言われれば納得。こういう imagination ができるようになりそうな授業がいいな。
- 楽しかった
- よかったです。
- 普段の授業では扱わないようなことをやってくれてすごく楽しかったと思います。証明はすっきりしました。3時間ありがとうございました。

・勉強としての数学から離れて楽しめたと思う。
・いつも使わないような考え方をして楽しかった。
・いつもと違う数学で楽しかった。
・たまにはこういう授業もいい。

■(1)アンケート結果

① 1回目 (1時間目の最初に実施 平成17年12月12日 回収人数38人)

Ⅰ. あなたは数学についての次の考えをどう思いますか。

	強くそう思う	そう思う	そう思わない	まったくそう思わない
1. 数学は楽しい	7	23	5	3
2. 数学はたいくつだ	2	5	23	8
3. 数学はやさしい教科である	1	5	12	20
4. 数学は社会で役立っている	12	21	2	3
5. 数学はだれにでも必要だ	8	18	6	6
6. 数学を学ぶと論理力が高まる	7	22	8	1
7. 数学を使って何か解決してみたい	7	13	13	5
8. 数学を使った仕事をしてみたい	3	8	15	12

Ⅱ. あなたの数学の成績はふだんどの程度ですか。

1・たいへんよい	2. よい	3. 悪い	4. たいへん悪い	(ふつう)
0	18	10	9	1

Ⅲ. あたは，小学校から高校までの算数や数学は好きでしたか嫌いでしたか。またその理由の一番大きな理由はどういうことでしたか。理由は次の中から選んで（　）内にその番号を記入してください。

理由 1 内容が面白かった(面白くなかった)
2 内容がわかった（わからなかった）
3 成績がよかった(悪かった)
4 先生が好きだった(好きではなかった)
5 その他

	好き	嫌い	(理由) 1	2	3	4	5
(1) 小学校時代の算数	30	8	11	17	4	1	3
(2) 中学校時代の数学	31	5	8	20	5	3	2
(3) 高校1年の数学	20	18	11	12	7	2	5
(4) 現在の数学	19	17	14	12	4	1	3

Ⅳ. そのほか数学に対して思っていることを書いてください。(裏にかいても構いません)

・法則を発見した人はすごい・数学は美しい・将来的に「予想」を「定理」にしてみたい・確率は好き・物理的な

事がすきで職業にしたいが数学はダメ・やらなきゃならない・もっとのんびりできれば楽しい・考えても解けないので楽しくない・いつもうまっことつじつまが合うので驚く・深くて難しい・難しいが将来に必要・好きではないが得点源・テストで１問も解けない夢を見た・おもしろいが疲れる・自分の武器・授業が早い・成績下位者を無視した授業進度・実生活に役立っているとは思えない・やることが多すぎる

② ２回目（3時間終わってから実施　休み時間に記入して帰りに回収
平成 17 年 12 月 21 日回収人数 36 人）

Ⅰ．あなたは数学についての次の考えをどう思いますか。

	強く そう思う	そう思う	そう 思わない	まったく そう 思わない
１．数学は楽しい	８(+1)	２０(-3)	７(+2)	１(-3)
２．数学はたいくつだ	２(+-)	９(+4)	１８(-5)	７(-1)
３．数学はやさしい教科である	０(-1)	７(+2)	１５(+3)	１４(-6)
４．数学は社会で役立っている	１６(+4)	７(-14)	８(+6)	０(-3)
５．数学はだれにでも必要だ	１０(-2)	１４(+4)	１０(+4)	２(-4)
６．数学を学ぶと論理力が高まる	１２(+5)	２０(-2)	４(-4)	０(-1)
７．数学を使って何か解決してみたい	７(+-)	１２(-1)	１３(+-)	４(-1)
８．数学を使った仕事をしてみたい	３(+-)	８(+-)	１６(+1)	９(+3)

（ ）内は１回目との比較（実数）

Ⅱ．今回の授業に参加して

１．今回の授業ではいつもより自分で考えることが多かったと思いますか。

そう思う	どちらかといえばそう思う	そう思わない
１４	１７	５

２．今回の授業のグループ討論には積極的に参加できましたか

そう思う	どちらかといえばそう思う	そう思わない
９	２１	６

３．今回の授業を通して，普段の数学にも意欲的に取り組んでみようと思いますか

そう思う	どちらかといえばそう思う	そう思わない
１１	２０	５

Ⅲ．授業に参加しての感想を自由に書いてください。（裏に書いても構いません）

※これは前項「生徒の感想」に掲載

■(2)感想・アンケートの考察

ほとんどの生徒が「よく考えた」と回答している。数式だけで（または数式中心で）考えている

ふだんの数学とは異なったイメージを持ち，戸惑いもあるが，結果的には一生懸命思考したという満足感が感じられる。

ラムゼー定理の証明に達しなかった生徒も，証明の説明は理解してくれたようで，しかも多くの生徒がその内容に感動している様子がうかがえる。

これらの感想を見る限り，今回の授業のねらいである，生徒が考え論理力を養っていくことはかなりの程度達成されたとみていいと思える。

これらの生徒の感想から考えると，アンケートの結果は，授業前と授業後でもう少し数学に対し積極的な姿勢に変化することを期待したが，結果的にはそれほど変わらないか，項目によっては後退した印象を受ける。しかし項目を分析すると「論理力」についての評価は高くなっており，「社会に役立つ」と言う評価は低くなっており，ゲームという実社会とは関係のないものを題材として論理力を養う，というこの授業の特徴が現れているといえる。

また，アンケートの回収時期が授業終了後すぐではなかったことや，この授業が週１回の飛び込み授業で，普段の数学の授業は平行して毎日行われていたことも影響あると考えられるが，一方で，論理力をつけ思考を楽しむには時間が少なく，必ずしも十分な授業でなかったという，授業そのものの問題点ももちろんあると考える。今後の教材開発の課題としたい。

4. 展望(まとめ)

今回の試みは，内容としては概ね生徒からも好評で，何より生徒が「考える」という目標をある程度達成することができたといえ，離散数学の可能性を感じることが出来た。

生徒の感想にもあったように，数式でなく言葉で説明することが次のような影響を与えたと考える。

・今まで学習した公式をむやみに持ち出すのでなく，問題の本質をつかみ，どう考えるかという見通しを立てる必要がある。
・そのために実際手を動かし，いくつかの試行をしてみる必要がある。
・わかったことを式でなく言葉で説明しようとしなければならない。普段の証明は式の羅列でもなんとか意味が通じてしまうがここではそうはいかない。論理的な言葉で分かり易く説明する必要が出てくる。
・言葉で説明する中には，普段数式の証明では隠れてしまう（とばしてしまう）ようなこともはっきりさせる必要があり，自分の試行をはっきりたどることができる。しかも，その考え方はいろいろな分野に応用できる重要な考え方（思考ツールということもできるもの）である。
・本質（構造）が見えてしまえばだれにでも理解できるような簡単な事実であることが生徒の感動を誘う。

論理的な思考や言葉による説明は，もちろん他の数学でも必要で数学の根幹であるが，数学用の言語である式や記号が優先し自分の試行を見えにくくしている面がある。今回のような離散数学の問題はそれを打開してくれる教材と成り得ると感じた。

反省点として挙げられるのは，まず第一に時間不足である。このことは２回の研究協議両方，参

観教員の感想，生徒の感想すべてにおいて触れられていた。

生徒がゲームを試行する時間も，その現象を考察する時間も少なかった。３時間で一応は完結しようと急いだことが生徒から十分な時間を奪ってしまったことを反省する。

内容も３時間で終わるには多すぎる内容であった。特にラムゼーゲームの発展形を考えようとした３時間目は内容を急ぎすぎたといえる。２時間目に一応理解したとはいえ，それは６頂点における現象の証明のみで，ラムゼー定理のイメージそのものが生徒に出来るにはなお多くの時間が必要であった。

３時間目の研究協議にもあったように，展開として，６頂点から派生するいくつかの応用課題を一緒に考えることでグラフのイメージを強固にし，鳩ノ巣原理への理解も手助けする時間があればよかったのではないか。生徒の思考が頂点の数を増やしていくのは数列などを学んでいる高校生にとっては自然な発想であることは２時間目の研究協議でも触れられたことである。また，ラムゼー現象の例ももっと多く出してイメージする必要もある。もちろん，ここでも生徒が十分な試行を行うなかでイメージを作っておくことは重要である。

また，鳩ノ巣原理ついても中途半端に扱わないで時間を十分にとりたい。ラムゼー定理をふまえて途中で時間を設定するか，ラムゼー定理に入る前に別個に鳩ノ巣原理について十分学習しておき，ラムゼー定理はその発展課題とする方法もあるだろう。

もうひとつの反省点はグループ学習方法である。これも２回の協議両方で触れられた。離散数学の学習はグループで意見交換することで奥の深いものになると思われる。そのことは他の人の意見に感動している生徒の感想でもわかる。

今回は授業者が普段いっていないクラスで授業を行ったこともあり，グループ学習が必ずしもスムーズではなかった。グループ学習を普段やっていないクラスに，いきなりグループ学習というのは無理があり，それでも導入するのならば，それなりの工夫や展開が必要となることを留意しなければならない。

また，グループ学習での評価の仕方が問題になるが，感想やワークシートなどを組み合わせることで可能になるのではないかと感じた。

また，今回はゲームをすることで生徒の関心が高まった。現実生活との関わりは強調されなかったが，生徒は純粋な思考の楽しみを感じられたようである。しかし，現実生活との関わりを感じることも重要なことである。ラムゼー定理や鳩ノ巣原理で，そういう観点からの教材作りもひとつの課題であろう。

最後にこの教材を教育課程にのせる場合の留意点であるが，なにより教員が授業の意識を変えなければならない。鳩ノ巣原理やラムゼー定理を単なるツールや演習問題として扱うだけなら今回のような生徒の感想はでないだろう。生徒が試行し思考する十分な時間を与え，教員がそれを辛抱強く見ていられるかが鍵となろう。実際，思考・試行時間が短いと思われる今回の授業でさえも，授業者は待っている時間が長く感じたものである。しかし，そこを乗り越えねばこの教材を導入する意味は半減してしまうだろう。

高等学校における
離散数学を中心とした新たな教材の開発研究
平成 18 年 2 月 28 日発行

〒153 - 8681　目黒区下目黒 6 − 5 −22
国立教育政策研究所
研究代表者　長崎　栄三

印刷所：チヨダクレス株式会社