フィンランドの活用力育成に関わる高等学校数学教科書の問題
(高等学校数学科における活用力育成をめざした教材の開発と指導に関する研究)

高等学校数学科における活用力育成をめざした
教材の開発と指導に関する研究

フィンランドの活用力育成に関わる
高等学校　数学教科書の問題

対象教科書：LUKIOLAISEN　MATEMATIIKKA

１～8

ＷＳＯＹ

2017.3.15

はじめに

本冊子は，フィンランドの高等学校の数学教科書に掲載されている問題の中から，特に「活用力育成」に関わる問題をピックアップして，それらを翻訳して載せたものである。対象とした教科書は，WSOY 社（現在は Sanomatpro 社）発行の短い数学用の教科書「MAB LUKIOLAISEN MATEMATIIKKA」(2005～2010)シリーズの次の８冊である。

1　Lausekeet ja yhtälöt	2　Geometria
3　Matemaattisia malleja Ⅰ	4　Matemaattinen analyysi
5　Tilastot ja todennäköisyys	6　Matemaattisia malleja Ⅱ
7　Talousmatematiikka	8　Matemaattisia malleja Ⅲ

フィンランドの教科書には，日本に比べて，練習問題や復習問題を含めて，多くの問題が掲載されている。その中で，本冊子では例題のみを対象とした。また，原則として，日本の高等学校で扱う内容を活用する問題をピックアップした。

翻訳は，すべて Google 翻訳を利用したこともあり，必ずしも忠実に翻訳されているわけではない箇所がある。また，解答部分は省略している部分もある。中には，単語の訳が調べられなかったものもあり，推測で翻訳している部分もある。それでも，全体として，意味の通じる問題と解答となるように翻訳したつもりである。この冊子の目的が，忠実に問題を翻訳することではなく，あくまでも「活用力育成」に参考となる資料であることを踏まえて，それで十分であると判断した。

なお，本冊子は，科学研究費基盤研究(C)「高等学校数学科における活用力育成をめざした教材の開発と指導に関する研究」（研究代表者：熊倉啓之，課題番号 26381193）の成果の一部として作成したものである。研究メンバーは，以下の通りである。

＜メンバー＞　※所属は，2016 年度現在

梅田英之	静岡県立科学技術高等学校
須藤雄生	筑波大学附属駒場中・高等学校
冨田真永	静岡県立川根高等学校
山本達也	静岡県立三島北高等学校
横澤克彦	長野県屋代高等学校・附属中学校
國宗　進	静岡大学教育学部
松元新一郎	静岡大学教育学部
熊倉啓之	静岡大学教育学部

本冊子が，高等学校数学科における活用力育成をめざした指導に，少しでも役立てば幸いである。

2017 年 3 月　翻訳責任者　熊倉啓之（静岡大学）

＜目　次＞

１．式と方程式

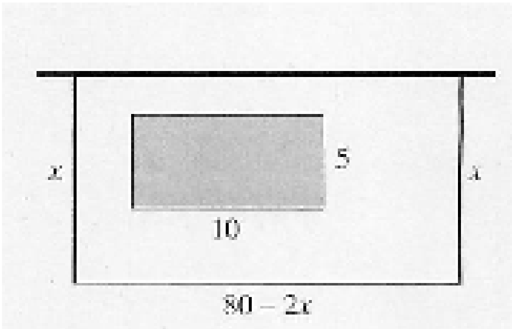
＜WSOY　MAB　1　Lausekeet ja yhtälöt　（短い数学）＞

４　グラフの分析

4.2　グラフの分析

$\boxed{1}$（例１）p.124

　家族は，別荘の周りに，１人でビーチに行かないように，フェンスをつくることを計画している。フェンスで囲む領域は長方形の形状につくるが，１つの縁は境界として使用することができる。80m の長さの柵を利用してフェンスを作るとき，フェンスで囲まれた領域の面積が最大になるようにするには，領域の横の長さと幅をどのように決めればよいか。ただし，別荘は横が 10m，幅が 5m である。



＜解答＞

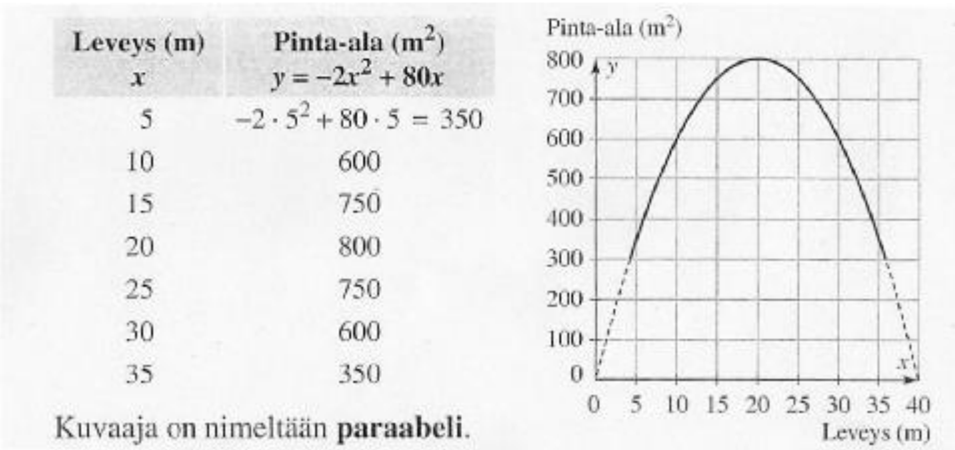
領域の幅を x とすると，横の長さは 80－2x である。

x≧5，80－2x≧10 より，5≦x≦35

領域の面積を y とすると，

$$y=x(80-2x)=-2x^2+80x$$

いろいろな x に対応する y の値とグラフは，次の通りである。



Leveys (m) x	Pinta-ala (m^2) $y=-2x^2+80x$
5	$-2\cdot 5^2+80\cdot 5=350$
10	600
15	750
20	800
25	750
30	600
35	350

Kuvaaja on nimeltään **paraabeli**.

　グラフから，幅が 20m のとき，面積は $800m^2$ となり，最大である。

２　幾何学

＜WSOY　MAB　2　Geometria（短い数学）＞

３　角と長さ

3.1　三角法

$\boxed{1}$（例 2）p.102

航空機が，ヘルシンキーバンター空港を西の方角に向けて出発する。空港の西およそ 50km のローヤン地方で高度 4km に達するようにするには，どの程度の角度で上昇すればよいか？

＜解答＞

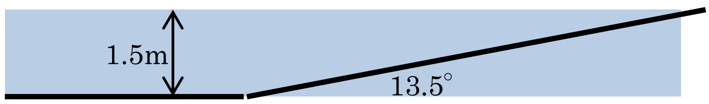
求める角度を α とすると，$\tan\alpha = 4.0／50$

よって，$\tan^{-1}(4.0／50) = 4.573\cdots \fallingdotseq 4.6°$

$\boxed{2}$（例 3）p.102

湖の湖岸は，平均して 13.5° の斜面になっている。春の雨期で湖面が 1.5m 上昇するとき，湖岸はどれくらい水につかるか？

＜解答＞



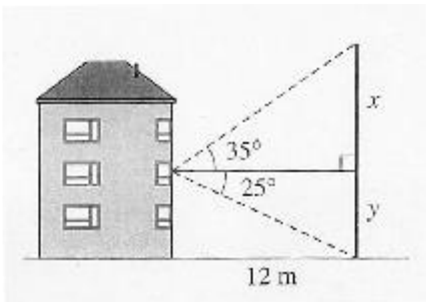
$\sin 13.5° = 1.5／x$

$x = 1.5／\sin 13.5° = 6.425\cdots \fallingdotseq 6.4(\mathrm{m})$

$\boxed{3}$（例 5）p.104

アパートの 2 階の窓から，12m離れた公園内の木を眺めた。木の根元を見下ろした角が 25°，先端を見上げた角が 35° のとき，木の高さはどのくらいか？

＜解答＞



$\tan 35° = x／12$　より，

$x = 12 \times \tan 35° = 8.402\cdots$

$\tan 25° = y／12$　より，

$y = 12 \times \tan 25° = 5.595\cdots$

$x + y = 13.99\cdots \fallingdotseq 14$（m）

3.2　地球と宇宙

$\boxed{4}$（例 2）p.115

人工衛星は，高度 1400km で地球の周りを回転している。人工衛星から地球を見込む最大角度は何度か？　ただし，地球の周の長さを 40000km とする。

＜解答＞

地球の半径を R とすると，

$2\pi R = 40000$

よって，$R = 40000/2\pi = 6366.19\cdots$

地球を見込む角の半分を α，人工衛星の高度を h とすると，

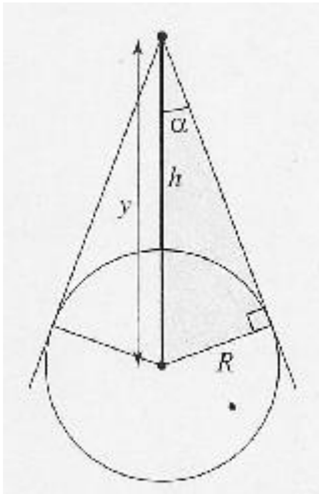
$\sin\alpha = R/(R+h)$

$\quad = 6366.19\cdots/(6366.19\cdots + 1400)$

$\quad = 0.8197\cdots$

$\alpha = \sin^{-1}(0.8197\cdots) = 55.057\cdots$

$2\alpha = 110.11\cdots \fallingdotseq 110°$



$\boxed{5}$（例 4）p.117

タリンは，ヘルシンキの南方 80km に位置している。両方の港に同じ高さの塔を建てて，両方の塔の先端を互いに見ることができるようにしたい。塔はどれくらいの高さにすればよいか？　ただし，地球の周の長さを 40000km とする。

＜解答＞

ヘルシンキとタリンの中心角を α とすると，

$(\alpha/360) \times 40000 = 80$　より

$\alpha = 360 \times 80/40000 = 0.72°$

地球の中心から塔の先端までの高さを y，

塔の高さを x，地球の半径を R とすると，

$\cos 0.36° = R/y$

$y \times \cos 0.36° = R$

$y = R/\cos 0.36°$

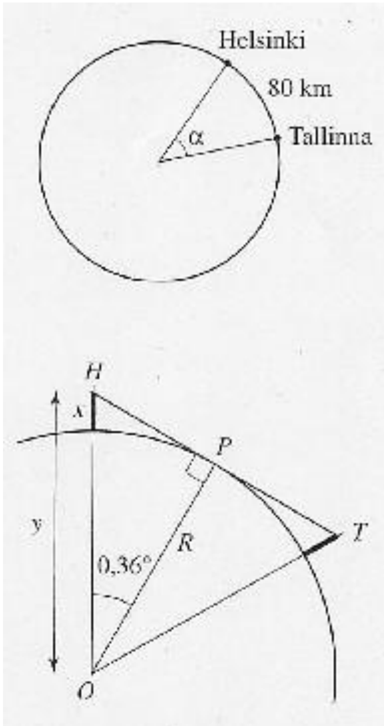
$x = y - R = R/\cos 0.36° - R$

$\quad = R \times (1/\cos 0.36° - 1)$

$\quad = 40000/2\pi \times (1/\cos 0.36° - 1)$

$\quad = 0.1256\cdots \fallingdotseq 0.130$（km）

よって，少なくとも約 130m あればよい。

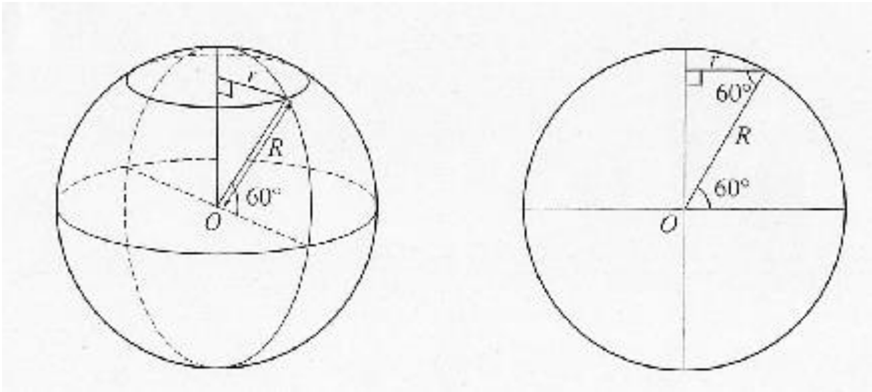


6 （例 5）p.119

北緯 60°の地点の周の長さを求めよ。ただし，地球の周の長さを 40000km とする。

＜解答＞

北緯 60°の地点の円の半径を r，地球の半径を R とする。



cos60°＝r／R　より，r＝Rcos60°

求める周の長さを p とすると，

p＝2πr＝2πRcos60°＝40000×cos60°＝20000

よって，20000km

7 （例 6）p.120

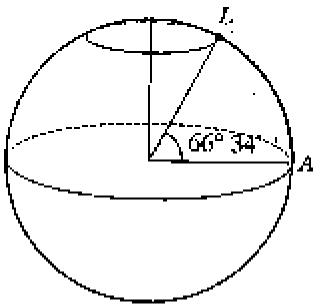
ロバニエミ空港（北緯 66°34’，東経 25°50′）は，北極に近い位置にある。ここから赤道までの距離はどれほどか？　ただし，地球の周の長さを 40000km とする。

＜解答＞

66°34′＝66＋34／60＝66.566…°

求める距離は，

66.566…／360×40000＝7396.2≒7400km



8 （例 7）p.120

トロンハイムとチュニスの位置は，ともに東経 10°の位置にある。トロンハイム（北緯 63°東経 10°）からチュニス（北緯 37°東経 10°）までの距離はどれほどか？

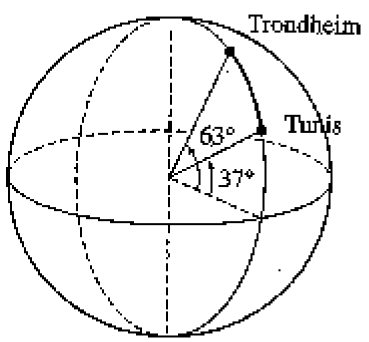
＜解答＞

トロンハイムとチュニスの緯度の差は

　63－37＝26°

よって，

　26／360×40000＝2888.88…≒2900km



$\boxed{9}$（例 8）p.121

　ブダペスト（北緯 48°東経 19°）に住んでいるサンダーが，春分の日（3 月 21 日）に，モンテレー（北緯 25°西経 101°）に住んでいる友人のフェリペに電話をした。サンダーは，ちょうど朝日を見た。フェリペが朝日を見ることができるのは何時間後か？

＜解答＞

経度の 360°の違いが, 24 時間の違いに相当するので, 時差 1 時間が生ずる経度の違いは,

　360°／24＝15°

2 都市の経度の違いは，19＋101＝120°だから，時差は,

　120／15＝8　時間

$\boxed{10}$（例 9）p.121

　約 2200 年前に，エラトステネスは，アスワンにおいてある日の正午に，太陽光が深い穴に垂直に差し込むことを観測した。同じ日の同じ時間に，5000 スタジオン北に位置するアレクサンドリアで，太陽光が差し込む角度が，垂直な方向より 7＋1／5°傾いていることを発見した。これらの情報を基に，地球の周の長さを求めよ。(1 スタジオン≒167m)

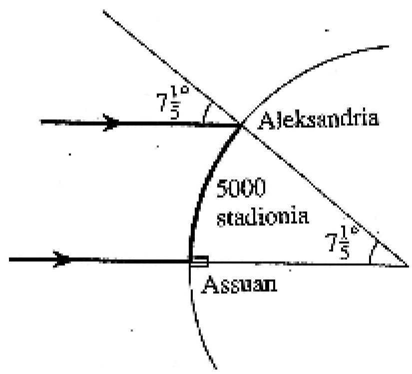
＜解答＞

5000 スタジオン＝5000×0.167＝835km だから,

$$835 = \frac{7\frac{1}{5}}{360} \cdot x$$

$$835 = \frac{1}{50} x$$

　x＝50×835＝41750≒42000km



３．線形計画法・指数モデル

＜WSOY　MAB　3　Matemaattisia malleja　I（短い数学）＞

２　不等式の表す領域と線形計画法

2.2　１次不等式と領域

1（例 5）p.50

　コーヒー焙煎業者は，2 種類のコーヒー「ブラジル」と「コロンビア」を準備した。「ブラジル」は 75 kg，「コロンビア」は 120 kgある。「ブラジル」の品質は優れているが，「コロンビア」は，気象条件が影響して品質が低い。そこで業者は，次の 2 種類の商品を製造することとした。

・1 kg当たり「ブラジル」が 250 g ,「コロンビア」が 750 g の割合で混ぜた安価な普通のコーヒー

・1 kg当たり，両方とも 500 g ずつの割合で混ぜた高価なスペシャルコーヒー

a）不等式を使って，実際の状況を示せ。さらに，不等式の表す領域をグラフに示して，頂点の座標を求めよ。

b）頂点は，どのような状況を表しているかを説明せよ。

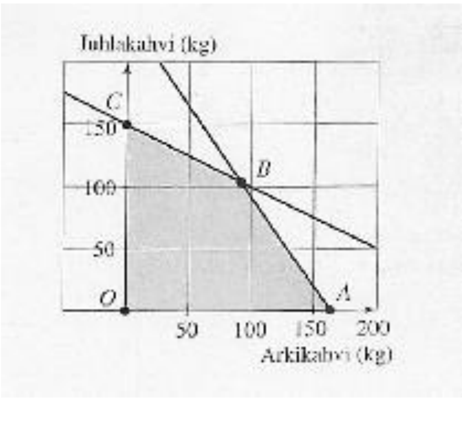
＜解答＞

普通のコーヒーを x kg，スペシャルコーヒーを y kgとする。

種類	普通のコーヒー x	スペシャルコーヒー y	合計
ブラジル（kg）	0.25	0.50	75
コロンビア(kg)	0.75	0.50	120

　ブラジル：0.25x＋0.5y（kg），コロンビア：0.75x＋0.50y（kg）だから，不等式とその表す領域は次の通りである。

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 0.25x + 0.50y \leq 75 \\ 0.75x + 0.50y \leq 120 \end{cases}$$



頂点の座標は，次の通りである。

　O(0,　0)，A(160,　0)，B(90,　105)

　C(0,　150)

b）
＜頂点 A(160，0)の場合＞
　ブラジル：0.25×160 ㎏＝40 ㎏
　コロンビア：0.75×160 ㎏＝120 ㎏
　だから，ブラジルが，75－40＝35 ㎏だけ残ることになる。
＜頂点 C(0，150)の場合＞
　ブラジル：0.50×150 ㎏＝75 ㎏
　コロンビア：0.50×150 ㎏＝75 ㎏
　だから，コロンビアが，120－75＝45 ㎏だけ残ることになる。
＜頂点 B(90，105)の場合＞
　ブラジル：0.25×90＋0.50×105＝75 ㎏
　コロンビア：0.75×90＋0.50×105＝120 ㎏

2.3　線形計画法

$\boxed{2}$（例 2）p.61

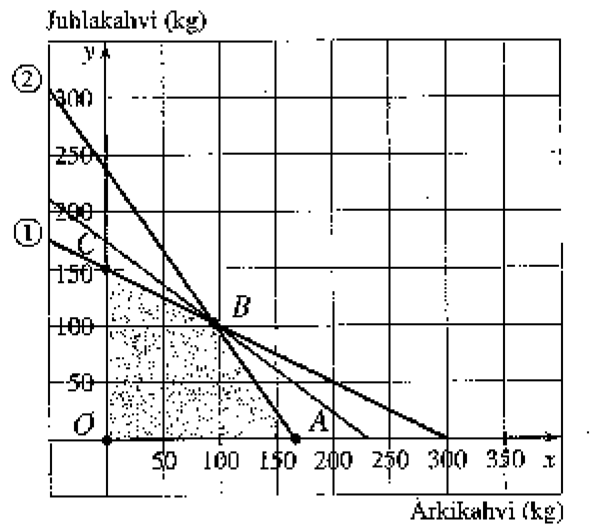
　コーヒーの例（例 5，p50）について，さらに考えることとする。領域 OABC は，製造される普通のコーヒーを x ㎏，スペシャルコーヒーを y ㎏とするときの状況を示している。普通のコーヒーが，1 ㎏当たり 7.50€，スペシャルコーヒーが 1 ㎏当たり 10.00€のとき，利益を最大にするのに，業者はどのように製造するのがよいか？

＜解答＞
利益は, 式 7.50x＋10.00y を使って計算することができる。したがって, 関数 7.50x＋10.00y について考えればよい。
領域 OABC の各頂点での利益を計算する。
　O(0，0)の場合：7.50x＋10.00y＝0＋0＝0
　A(160，0)の場合：7.50x＋10.00y＝7.50×160＝1200
　B(90，105)の場合：7.50x＋10.00y＝7.50×90＋10.00×105＝1725
　C(0，150)の場合：7.50x＋10.00y＝10.00×150＝1500
よって, 安価な普通のコーヒーを 90 ㎏，高価なスペシャルコーヒーを 105 ㎏製造するとき，利益は最大である。また，利益が最大となるときの関数は，次のような直線となる。

　　7.50x＋10.00y＝1725

すなわち，

　　y＝－0.75x＋172.5



$\boxed{3}$（例 3）p.62

農夫が家畜に与える餌として，2 種類の飼料 R1 と R2 がある。資料 R1 の 1 セット分には，300 単位分のエネルギーと 10 単位分のタンパク質，5 単位分の鉄が含まれている。また，資料 R2 の 1 セット分には，200 単位分のエネルギーと 20 単位分のタンパク質，6 単位分の鉄が含まれている。家畜は，少なくとも，毎日 2000 単位分のエネルギーと，120 単位分のタンパク質，52 単位分の鉄を摂取する必要がある。

a）家畜が，毎日必要な単位分のエネルギー，タンパク質，鉄を摂取するには，R1，R2 の飼料をそれぞれどれだけ与えればよいか？

b）飼料 R1 は 1 セット当たり 0.06€，飼料 R2 は 1 セット当たり 0.04€かかるとき，費用をもっとも低くするには，どのように餌を与えればよいか？

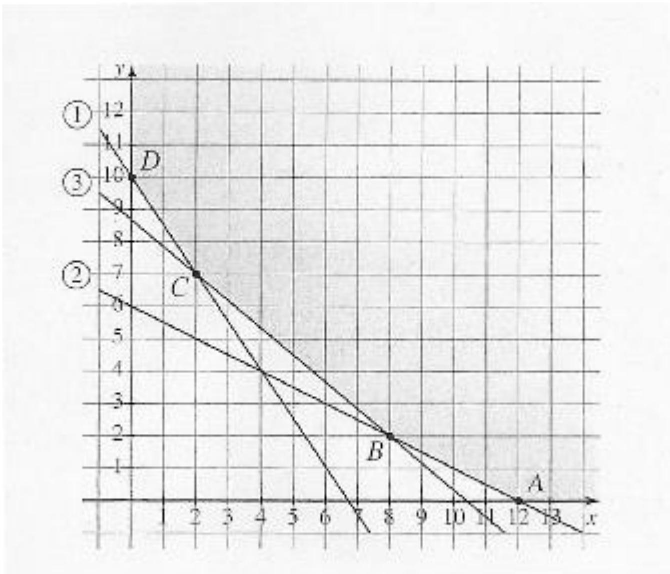
＜解答＞

a）R1 を x セット，R2 を y セット与えるとする。

種類	飼料 R1 x	飼料 R2 y	合計 (最低)
エネルギー（単位）	300	200	2000
タンパク質(単位)	10	20	120
鉄（単位）	5	6	52

よって，不等式とそれが表す領域は，次の通りである。

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 300x + 200y \geq 2000 \\ 10x + 20y \geq 120 \\ 5x + 6y \geq 52 \end{cases}$$



各頂点の座標は,

A(12，0)，D(0，10)

また，2 直線の交点を求めて，

B(8，2)，C(2，7)

よって，それぞれの場合の R1 と R2 のセット数は，次の通りである。

頂点	飼料 R1（単位）	飼料 R2（単位）
A(12，0)	12	0
B(8，2)	8	2
C(2，7)	2	7
D(0，10)	0	10

b）価格を示す目的の関数は，0.06x＋0.04y　である。各頂点における価格を計算すると，次の通りである。

A(12，0)　　0.06×12＋0＝0.72€

B(8，2)　　0.06×8＋0.04×2＝0.56€

C(2，7)　　0.06×2＋0.04×7＝0.40€

A(0，10)　　0＋0.04×10＝0.40€

だから，一番価格が安くなるのは，飼料 R1 を 2 セット，飼料 R2 を 7 セットとする，または，安価な資料 R2 のみを 10 セットとする場合である。このときの価格は 0.40€である。

※（著者注）小数のセット数も許すと，線分 CD 上の点，例えば（1，8.5）つまり，R1 を 1 セット，R2 を 8.5 セットとする場合も，価格は 0.40€となる。

３　指数モデル

3.1　導入

4（例 1）p.64

ハタネズミが増加することは，庭園や森林を破壊する要因となる。研究団体は，ハタネズミの増加の様子を調べることにした。最初に，ハタネズミは約 350 匹いた。ある場所で観測したところ，1 年間でおよそ 12%増加していることがわかった。この割合で増加し続けるとすると，ハタネズミの個数はどのように変化していくだろうか。変化の様子をグラフに表せ。

＜解答＞

1 年後

$1.12 \cdot 350$

$= 392$（匹）

2 年後

$1.12^2 \cdot 350$

$= 1.12 \cdot 392$

$= 439.04$

$\fallingdotseq 439$（匹）

3 年後

$1.12^3 \cdot 350$

$= 1.12 \cdot 439.04$

$= 491.7248$

$\fallingdotseq 492$（匹）

例えば，

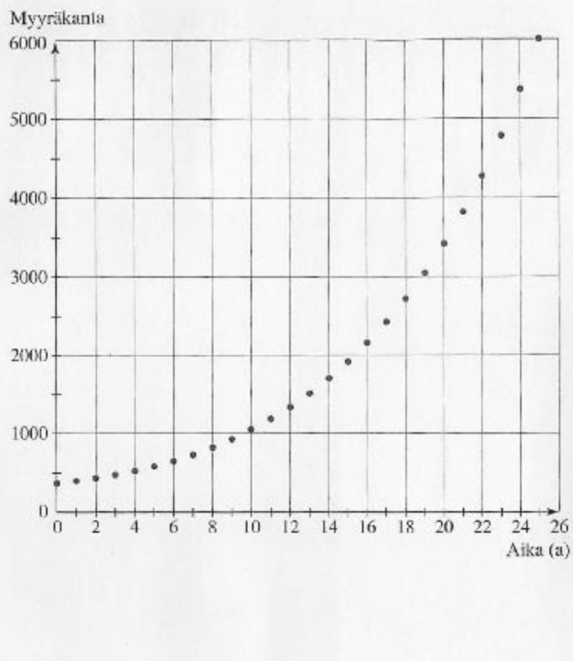
25 年後

$1.12^{25} \cdot 350$

$= 5950.022\cdots$

$\fallingdotseq 5950$（匹）

Aika (a)	Myyräkanta
alussa	350
1	392
2	439
3	492
4	551
5	617
6	691
7	774
8	867
9	971
10	1087
11	1217
12	1364
13	1527
14	1710
15	1916
…	…
25	5950



5（例 2）p.66

　薬の有効成分量は，体内に入ると，1 時間当たりおよそ 1／4 だけ減少していく。200 ㎎の薬を飲んだとして，12 時間の薬の有効成分量の変化をグラフに表せ。

＜解答＞

25%減少するので，75%になる。

　1 時間後　$0.75 \cdot 200$ ㎎＝150 ㎎

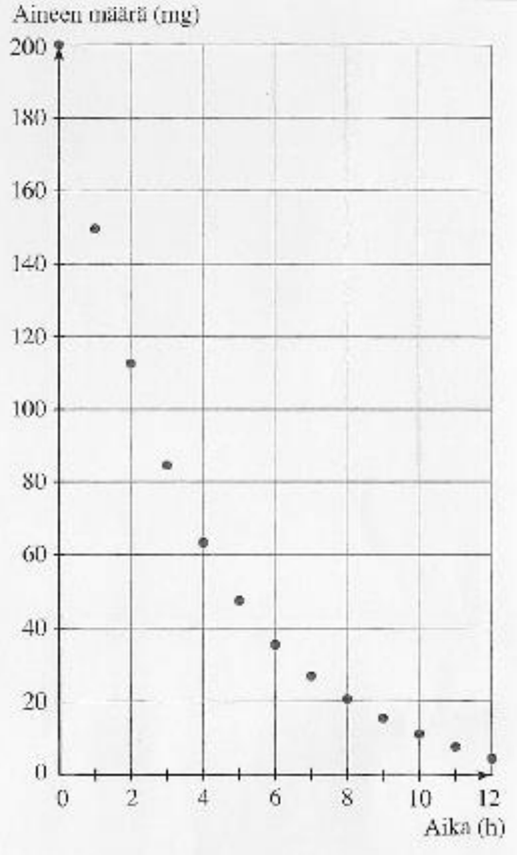
　2 時間後　$0.75^2 \cdot 200$ ㎎

　3 時間後　$0.75^3 \cdot 200$ ㎎

　　　…

　12 時間後　$0.75^{12} \cdot 200$ ㎎

Aika (h)	Aineen määrä (mg)
alussa	200
1	150
2	113
3	84
4	63
5	47
6	36
7	27
8	20
9	15
10	11
11	8
12	6



6（例 3）p.67

　ハイディは，46400 ユーロで家を購入し，その 5 年後に 58000 ユーロで売却した。家の価格は，1 年当たり平均して何%上昇したか？

＜解答＞

1 年当たりの価格の上昇率を q とすると，

　$q^5 \cdot 46400 = 58000$

$$q^5 = \frac{58000}{46400}$$

$q^5 = 1.25$

$q = \sqrt[5]{1.25} = 1.0456\cdots$

よって，およそ 4.6%

$\boxed{7}$（例 6）p.70

とがった角を持つサイは，世界でも最も脅威の動物である。世界自然保護基金 WWF の統計によると，1980 年における数は 12750 頭であったが，1993 年においては，2475 頭を超える程度の頭数である。

a）サイの数が指数関数的に変化したとして，1 年間の平均の減少率を求めよ。

b）同じようにサイの数が変化したとして，1967 年におけるサイの数を推測せよ。

＜解答＞

a）1980 年から 1993 年まで 13 年間なので，減少率を q とすると，

$12750 \cdot q^{13} = 2475$

$$q^{13} = \frac{2475}{12750}$$

$q = 0.8815\cdots$

$0.8815\cdots - 1 = -0.1184\cdots$

よって，11.8%

b）1967 年の頭数を x 頭とすると，

（方法 1）

$x \cdot q^{13} = 12750$

$$x = \frac{12750}{q^{13}} = 65681.8\cdots \approx 65700$$

よって，65700 頭

（方法 2）

$12750 \cdot q^{-13} = 65681.8\cdots \fallingdotseq 65700$　よって，65700 頭

3.2　指数関数

$\boxed{8}$（例 3）p.77

2000 年における家の価格は，46000€で，2000－2006 年の期間では平均して年間 3.9% 価格が上昇している。

a）期間中の家の価格を表す関数式を作れ。

b）2003 年と 2006 年の価格を求めよ。

＜解答＞

a）2000 年から x 年後の家の価格を示す関数式は，$f(x)=46000\cdot 1.039^{x}$

b）2003 年は，$f(3)=46000\cdot 1.039^{3}=51594.62\cdots$

2006 年は，$f(6)=46000\cdot 1.039^{6}=57869.68\cdots$

よって，2003 年　約 52000€，2006 年　約 58000€

$\boxed{9}$（例 4）p.83

サンフランシスコでは大きな地震があった。1906 年 4 月 18 日に起きた地震の規模はマグニチュード 8.2 で，また 1989 年 10 月 17 日に起きた地震の規模はマグニチュード 6.9 であった。1906 年の地震のエネルギーは，1989 年の地震のエネルギーの何倍か？

（前ページ: 地震のエネルギーを E, マグニチュードを M とすると, $\log_{10}E=11.8+1.5M$）

＜解答＞

1909 年：$\log_{10}E_1=11.8+1.5\cdot 8.2=24.1$

1989 年：$\log_{10}E_2=11.8+1.5\cdot 6.9=22.15$

$E_1=10^{24.1}=1.258\cdots\cdot 10^{24}$

$E_2=10^{22.15}=1.412\cdots\cdot 10^{22}$

よって，

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{1.258\cdots 10^{24}}{1.412\cdots 10^{22}}=89.125\cdots$$

したがって，約 90 倍

$\boxed{10}$（例 8）p.87

保全地区では，10 年間の鳥の数の変化を監視している。調査を始めてから t 年後のおよその鳥の数は，次の式で表される。

$f(t)=5270\cdot e^{0.039t}$

a）調査を始めてから 1 年後と 5 年後の鳥の数を求めよ。

b）鳥の数が 7000 を超えるのは，この式に基づいて計算すると何年後か？

＜解答＞

a）$f(1)=5270\cdot e^{0.039\cdot 1}79.59\cdots\fallingdotseq 5500$(羽)

$f(5)=5270\cdot e^{0.039\cdot 5}=6404.68\cdots\fallingdotseq 6400$(羽)

b）$5270\cdot e^{0.039t}=7000$

$$e^{0.039t}=\frac{7000}{5270}$$

$$0.039t=\ln\left(\frac{7000}{5270}\right)$$

$t=7.278\cdots$

よって，8 年後

3.4　指数モデル

$\boxed{11}$（例 1）p.91

　フィンランドに生息するサイマーワモンアザラシ（サイマー湖に生息するワモンアザラシ）は，絶滅寸前の動物であり，現在，効果的な保護策が計画されている。森林委員会のデータによると，2004 年のアザラシの数は，約 270 頭である。2020 年までに，400 頭まで増やすのが目標である。

a）2020 年までに目標に到達するためには，1 年間あたりの平均増加率は何%か。

b）この割合で増加するとして，350 頭を超えるのは何年か？

c）森林委員会によると，2004 年以前は，年間で約 2%ずつ増加していたという。これによれば，2000 年は何頭いたことになるか？

<解答>

a）2004 年から 2020 年まで 16 年間あるので，増加率を q とすると，

$$270 \cdot q^{16} = 400$$

$$q^{16} = \frac{40}{27}$$

$$q = \sqrt[16]{\frac{40}{27}} = 1.0248\cdots$$

よって，約 2.5%

b）2004 年から x 年後に 350 頭になるとすると，

$$270 \cdot q^{x} = 350$$

$$q^{x} = \frac{35}{27}$$

$$x = \frac{\log\left(\frac{35}{27}\right)}{\log q} = 10.56\cdots$$

よって，11 年後，すなわち 2015 年に 350 頭を超える。

c）2000 年のときの頭数を K とする。2000 年から 2004 年まで 4 年間だから，

$$K \cdot 1.02^{4} = 270$$

$$K = 249.43\cdots$$

よって，約 250 頭

$\boxed{12}$（例 2）p.92

　A 町の人口は 2004 年に 8000 人で, その後毎年 2%ずつ減少していくと推定されている。一方，B 町の人口は，2004 年に 5000 人で，その後毎年 4%ずつ増加していくと推定されている。B 町の人口が A 町の人口に追いつくまでに何年かかるか？

＜解答＞　2004 年から x 年後の人口は，

A 町：$8000\cdot 0.98^x$

B 町：$5000\cdot 1.02^x$

2 町の人口が等しくなるのは，$8000\cdot 0.98^x = 5000\cdot 1.02^x$

$$0.98^x = \frac{5000}{8000}\cdot 1.04^x$$

$$\frac{0.98^x}{1.04^x} = 0.625$$

$$x = \frac{\log 0.625}{\log\left(\frac{0.98}{1.04}\right)} = 7.909\cdots$$

よって，約 8 年後

$\boxed{13}$（例 3）p.93

お菓子の価格は，四半期ごとに 3%上昇する。元の価格の 2 倍になるのに，どのくらいかかるか？

＜解答＞お菓子の価格を K として, x 回目の四半期の経過後に 2 倍の価格になるとすると，

$1.03^x\cdot K = 2K$　より　$1.03^x = 2$

$$x = \frac{\log 2}{\log 1.03} = 23.449\cdots$$

$$\frac{23.449\cdots}{4} = 5.86\cdots$$

よって，約 6 年後

【複利】

$\boxed{14}$（例 4）p.94

カレは，5000€を預金していて，1 年間で 1.0%の利子がつく。1 年後，2 年後，3 年後，10 年後の預金総額はいくらか？

＜解答＞

$1.01\cdot 5000€ = 5050€$

$1.01\cdot 5050€ = 5100.50€$

$1.01\cdot 5100.50€ = 5151.505€ \fallingdotseq 5151.51€$

$1.01^{10}\cdot 5100€ = 5523.110\cdots€ \fallingdotseq 5523.11€$

$\boxed{15}$（例 5）p.95

資金には，純利子として，年間 2.32%がつく。預金総額が 25%増額するのに，何年かかるか？　ただし，預金は年の初めに行い，年末に利子がつく。

＜解答＞　最初の資金をKとして，n年後に25%増になるとすると，

$K\cdot 1.0232^n = 1.25\cdot K$

$1.0232^n = 1.25$

$$n = \frac{\log 1.25}{\log 1.0232} = 9.729\cdots$$

よって，10年後

【放射性崩壊】

$\boxed{16}$（例6）p.96

ヨウ素の同位体131は放射性物質で，半減期は8日間である。32日間で，放射性物質は何%に減少するか？

＜解答＞　32／8＝4だから，最初の物質量をKとすると，

$K\cdot 0.5^4 = K\cdot 0.0625\cdots$

よって，約6.3%

$\boxed{17}$（例7）p.97

リンの同位体32は，放射性物質である。60%の放射物質が崩壊するのに18.9日かかるとき，この物質の半減期を求めよ。

＜解答＞　最初の物質量をKとして，半減期のx回後に60%崩壊するとすると，

$K\cdot 0.5^x = 0.40\cdot K$

$0.5^x = 0.40$

$$x = \frac{\log 0.40}{\log 0.5} = 1.321\cdots$$

半減期をT日とすると，

$$x = \frac{19}{T}$$

$$T = \frac{19}{x} = \frac{19}{1.321\cdots} = 14.29\cdots$$

よって，半減期は14.3日

$\boxed{18}$（例8）p.98

化石に含まれている炭素の同位体14が，生きている生物に対して次の割合であるとき，この化石は何年前と推定できるか？

a）75%　　　b）10%

（前ページ：炭素の同位体14の半減期は，5730年である。）

＜解答＞

a）最初の物質量をKとして，半減期のx回後に75%になったとすると，

$K \cdot 0.5^x = 0.75x$

$0.5^x = 0.75$

$$x = \frac{\log 0.75}{\log 0.5} = 0.4150\cdots$$

だから，t年前とすると，

$t = x \cdot T = 0.4150\cdots \cdot 5730 = 2378.1\cdots$

よって，化石の年代は，2400年前

b）最初の物質量をKとして，半減期のx回後に10%になったとすると，

$K \cdot 0.5^x = 0.10x$

$0.5^x = 0.10$

$$x = \frac{\log 0.10}{\log 0.5} = 3.321\cdots$$

だから，t年前とすると，

$t = x \cdot T = 3.321\cdots \cdot 5730 = 19034.6\cdots$

よって，化石の年代は，19000年前

$\boxed{19}$（例9）p.99

ベイコは，炎症を押さえるために抗生物質を飲むように指示された。この薬は，体内で1時間当たり37%減少する。ベイコは50㎎の錠剤をとったとき，体内に残る量が半分になるのはいつか？

＜解答＞　37%減少するので63%になるから，x時間後に半減するとして，

$50 \cdot 0.63^x = 25$

$0.63^x = 0.5$

$$x = \frac{\log 0.5}{\log 0.63} = 1.5002$$

よって，1時間30分後

４　日常の事象とモデル

4.1　線形と指数

$\boxed{20}$（例1）p.110

1995年における古いアパートの平均価格は880€／m^2で，2004年においては1510€／m^2であった。もし，次の各場合に，1994年より20年間は同じように価格が変化するとしたとき，両者の価格を比較せよ。

a）直線的変化　　　b）指数関数的変化

＜解答＞

a の場合，(1510－880)÷(2004－1995)＝630÷9＝7（€／m²）だから，

y＝f(x)＝880＋70･x

例えば，20 年後は，f(20)＝2280

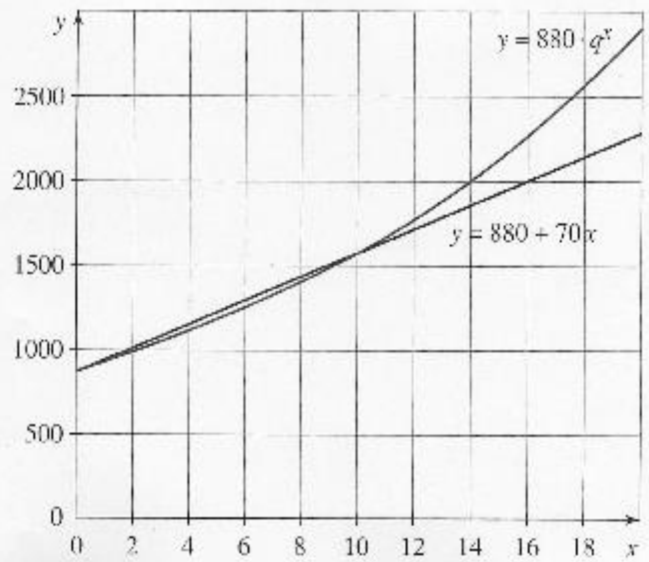
b の場合，880･q^9＝1510

$$q^9 = \frac{151}{88}$$

$$q = \sqrt[9]{\frac{151}{88}} = 1.0618\cdots$$

だから，y＝g(x)＝880･q^x　ただし，q＝1.0618…

x	$y = 880 \cdot q^x$
0	880
1	934,4…
2	992,1…
3	1053,5…
4	1118,6…
5	1187,8…
10	1603,3…
20	2921,3…



10 年後までは，a）の方が価格は高いが，それ以降は，b）の方が価格は高くなる。

$\boxed{21}$（例 6）p.117

カチとリスト兄弟は，それぞれ祖母の遺産の 4200€を受け取った。2 人は，そのお金を，2.3%の利子が付く定期預金として，銀行に預金することにした。利子には 28%の税金がかかる。預金の条件として，この期間中に元金を引き出すことはできないが，利子については，毎年引き出すことが可能である。

カチは，3 年間は利子を引き出さずにそのまま預金することにした。一方，リストは，毎年利子を引き出したいと考えている。2 人の方法による利益を比べよ。3 年後に，それぞれの場合の利益はいくらになるか？

＜解答＞
利子による利益は，$0.72 \cdot 2.3\% = 1.656\%$
カチの場合：
　3 年後の預金額は，$K_3 = 4200€ \cdot 1.01656^3 = 4412.130\cdots€ \fallingdotseq 4412.13€$
　だから，3 年間の利益は，$4412.13€ - 4200€ = 212.13€$
リストの場合：
　1 年間の利益は，$R = 4200€ \cdot 0.01656 = 69.552€ \fallingdotseq 69.55€$
　3 年間の利益は，$3 \cdot R = 3 \cdot 69.55€ = 208.65€$

よって，2 人の利益の差は，$212.13€ - 208.65€ = 3.48€$

４. 微分

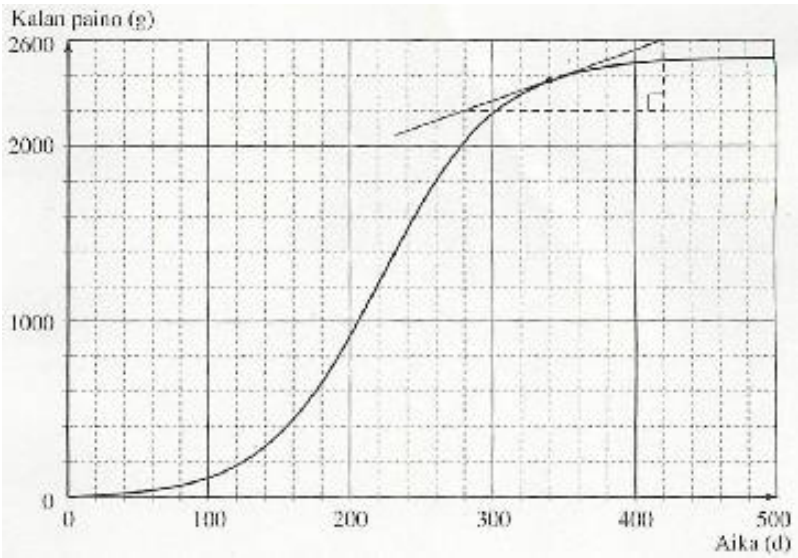
＜WSOY　MAB　4　Matemaattinen analyysi（短い数学）＞

１　関数の変化と導関数の概念

1.1　導関数の変化の測定

$\boxed{1}$（例 4）p.26

養殖場にいる魚について，誕生してから成長に伴って体重（単位：g）が変化する様子をグラフに示すと，次の通りである。



次のおよその値を求めよ。

a)　f'(340)の値を求めよ。

b)　魚の成長率が最大となるのは生まれてから何日後か？

＜解答＞

a)　x＝340 のところで接線を引き，その傾きを求める。その値は，

$$\frac{2600-2200}{420-280} \approx 2.9$$

よって，340 日後の魚の重さの増加率の平均は 2.9g である。

b)　曲線上で接線の傾きが最大となる位置を探す。だいたい x＝220 の位置で，つまり，220 日後の魚の成長率が最大となる。

２　多項式の導関数

2.4　関数の最大と最小

$\boxed{2}$（例 5）p.70

断面が，放物線の形をしている溝がある。地面を x 軸とするとき，放物線の式は，$y=x^2-4.7x+4.8$ で表される。溝の幅が x で，深さが y である。座標の単位はメートルであるとき，溝の a)幅と b)深さの最大値を求めよ。

＜解答＞

a）$y=0$ となる x の値を求めると，$x^2-4.7x+4.8=0$　より

$$x=\frac{4.7\pm\sqrt{4.7^2-4\cdot 4.8}}{2}=\frac{4.7\pm 1.7}{2}=1.5,\quad 3.2$$

よって，$3.2-1.5=1.7$m

b）$y=f(x)=x^2-4.7x+4.8$

$f'(x)=2x-4.7$

$f'(x)=0$ より，$x=2.35$

よって，$y=f(2.35)=-0.7225$m＝約 70cm

３　理論から実践へ

3.1　図形への応用

$\boxed{3}$（例 1）p.84

森林の所有者は，小さな畑をデザインすることになった。彼女は，240m のワイヤーで，長方形の形状をした畑を囲む。できるだけ囲む面積を大きくしたい。面積の最大値を求めよ。

＜解答＞　畑の幅を xm とすると，幅は $120-x$m

ただし，$x>0$　かつ　$120-x>0$ より，$0<x<120$

$A(x)=x(120-x)=120x-x^2$

$A'(x)=120-2x$

$A'(x)=0$ より，$x=60$

これは，$0<x<120$ を満たすので，$x=60$ のとき最大

よって，$A(60)=3600$m²

これは，正方形の形状をした場合である。

$\boxed{4}$（例 2）p.86

1 辺の長さが 24cm の正方形のボール紙を使って，箱を作る。ボール紙の 4 すみから同じ大きさの正方形を切り取った後に折り曲げて，テープで張り付けて，直方体の形状にする。このとき，箱の容積の最大値を求めよ。

＜解答＞　切りとる正方形の 1 辺を x とすると，底面の正方形の 1 辺は $24-2x$

このとき体積は，

$V(x)=x(24-2x)(24-2x)=4x^3-96x^2+576x$

ただし，$x>0$，$24-2x>0$ より，$0<x<12$

$V'(x)=12x^2-192x+576$

$V'(x)=0$　より，$x=4$，12

$V(0)=V(12)=0$，$V(4)=1024$

よって，$1024m^3$

$\boxed{5}$（例 3）p.88

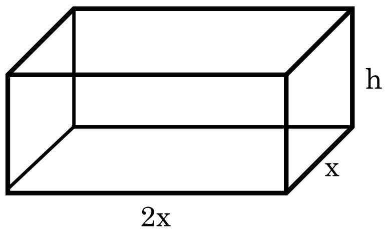
細いワイヤーで，箱の骨組みをつくる。箱の底面は，横幅が奥行きの 2 倍になるようにする。ワイヤーの長さは 4.5m である。箱の体積をできるだけ大きくしたいとき，どのような箱にすればよいか？

＜解答＞

底面の奥行きを xcm とすると，横幅は 2xcm，

高さを hcm とすると，体積は

$V=2x\cdot x\cdot h=2x^2h$



ワイヤーの長さは 450cm だから，

$4x+8x+4h=450$　すなわち，$12x+4h=450$

これより，$h=112.5-3x$

これより，

$V(x)=2x^2(112.5-3x)=225x^2-6x^3$

ただし，$x>0$，$h>0$ より $x<\dfrac{112.5}{3}=37.5$

$V'(x)=450x-18x^2$

$V'(x)=0$　より　$x=0$，25

$V(0)=V(37.5)=0$

$V(25)=46875(cm^3)$

体積の最大値は $46875cm^3$ で，このとき，$x=25cm$，$2x=50cm$，$h=112.5-3x=37.5cm$

$\boxed{6}$（例 4）p.90

道路工事現場に，母線の長さが 3.0m の砂山がある。

a）コーンの高さを変数とする体積を表す式を作れ。

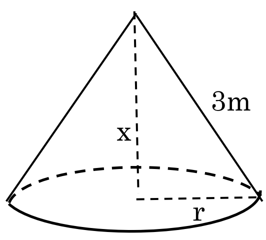
b）コーンの体積が最大となるときの高さを求めよ。また，体積の最大値を求めよ。

＜解答＞

a）高さを x，底円の半径を r とすると，

$r^2+x^2=3^2$

$r^2=9-x^2$



よって，$V(x)=\dfrac{1}{3}\pi r^2x=\dfrac{1}{3}\pi(9-x^2)x=\pi(3x-\dfrac{1}{3}x^3)$

b）$x>0$，$r>0$ より $0<x<3$

$V'(x)=3\pi-\pi x^2$

$V'(x)=0$　より　$x=\pm\sqrt{3}$

$V(0)=V(3)=0$

$V(\sqrt{3})=2\pi\sqrt{3}=10.88\cdots\fallingdotseq 11m$

よって，$x=\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7m$ のとき最大となり，最大値は $11m^3$

3.2　商業や経済への応用

$\boxed{7}$（例 1）p.94

農業試験場では，穀物を適切なサイズに成長させ収穫できるように，窒素肥料を与える量を調べている。通常の収穫量は，1 ヘクタール当たり 3000 ㎏である。肥料の使用量 100x ㎏に対する 1 ヘクタール当たりの収穫量 1000S ㎏は，次の式で表されることがわかっている。

$S(x)=3.00+3.15x-1.125x^2$

このとき，収穫量の最大値を求めよ。

<解答>

$S'(x)=3.15-2.25x$

$S'(x)=0$　より，$x=1.4$

$S(1.4)=5.205$

5.205×1000 ㎏$=5205$ ㎏$\fallingdotseq 5200$kg

よって，肥料の使用量が $1.4\times 100=140$ ㎏のときに最大となり，収穫量の最大値は，5200kg／ha　である。

$\boxed{8}$（例 2）p.95

カリフラワーの市場価格は，収穫時期によって 1 ㎏あたり 0.5€から 1.25€まで変動する。1 ㎏あたりの価格 x€のときに，販売量 y ㎏が次の式で表されることがわかった。

$y=f(x)=1600(1.82-x)$

a)　カリフラワーの販売量は，どのように変化するか？

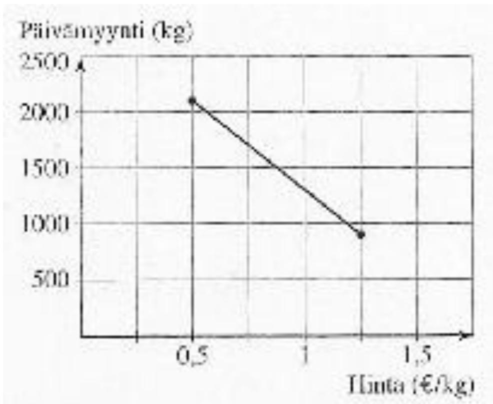
b)　このモデルによると，1 日当たりの売上の最大値はいくらか？

<解答>

a)　$y=f(x)=2912-1600x$

ただし，$0.5\leqq x\leqq 1.25$

価格が 05€／㎏のとき，販売量は 2112 ㎏で最大となり，1.25€／㎏のとき，912 ㎏で最小となる。



b）　1 ㎏あたりの価格 x€のときの売り上げ T€は，

　　$T(x)=yx=1600(1.82-x)x=-1600x^2+2912x$　　$(0.5\leqq x\leqq 1.25)$

　　$T'(x)=-3200x+2912$

　　$T'(x)=0$　より　$x=0.91$

　　$T(0.91)=1324.96$

　よって，価格が 0.91€／㎏のとき，1 日当たりの売り上げは最大となり，1325€となる。

$\boxed{9}$（例 3）p.97

　問屋への卸価格が 1 個 16.5€の契約で，あらたに陶器を作製することになった。100～800 個の作品を作製する予定である。作製するためには，一部残業する必要がある。時間内に完成できる部分と残業による人件費の増加分とがあり，作製の個数が x 個のときの製造コスト K€は，次の式で表される。

　　$K(x)=0.012x^2+5.1x-3.4$

a）作製個数の増加に伴って，製造コストはどのように変化するかを調べよ。

b）100 個作製する場合と 800 個作製する場合とで，1 個当たりの製造コストはどれくらいの差があるか？

＜解答＞

a）$K(x)=0.012x^2+5.1x-34$　　$(100\leqq x\leqq 800)$

　　$K'(x)=0.024x+5.1$

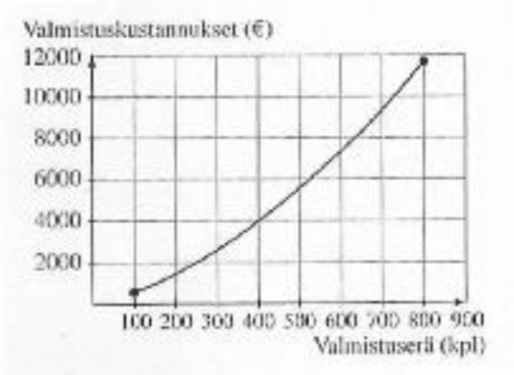
　$K'(x)=0$　より，$x=-212.5$

　これは，$100\leqq x\leqq 800$　の範囲外である。

　　$K(100)=596$(€)

　　$K(800)=11726$(€)

　よって，100 個作製するときは最小で 596€となり 800 個作製するときは最大で 11726€の製造コストがかかる。



b）$K(100)=596$ より，1 個当たりの製造コストは，5.96€

　$K(100)=11726$ より，1 個当たりの製造コストは，$11726\div 800=14.66$€

　よって，$14.66-5.96=8.70$€の差がある。

$\boxed{10}$（例 4）p.99

　例 3 に引き続く問題である。できるだけ利益を大きくするためには，どの位の個数を作製すればよいだろうか。

＜解答＞

　利益を M(x) とすると，

　　$M(x)=16.5x-K(x)$

　　　　$=16.5x-(0.012x^2+5.1x-34)$

　　　　$=-0.012x^2+11.4x+34$　　$(100\leqq x\leqq 800)$

$M'(x)=-0.024x+11.4$
$M'(x)=0$　より，$x=475$
$M(475)=2741.5$(€)
よって，利益が最大になるのは，475 個を作製したときである。

$\boxed{11}$（例 5）p.100
体育館の観客席数は 1118 である。バスケットボールの試合のチケット料金を 1 枚 2€とすると，スタンドを満席にすることができる。もし，チケット料金を上げれば，観客数は減少する。これまでの経験から，観客数 K は，チケット料金 x€によって，次の式で表されることがわかっている。

$$K(x)=1118-2(x-2.00)^2$$

a）観客が入るようにするには，チケット料金をいくらにすればよいか？
b）チケットの売り上げを最大にするには，チケット料金をいくらにすればよいか？

<解答>
a）$K(x)=1118-2(x-2.00)^2$
$\quad=-2x^2+8x+1110$
$K(x)=0$ より，　$-2x^2+8x+1110=0$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4(-2)\times1110}}{2\times(-2)}=\frac{-8\pm94.57\cdots}{-4}=-21.64\cdots,25.64\cdots$$

よって，チケット料金を 2～25€の間に設定すれば，観客数はプラスとなる。
b）売り上げを T(x)とすると，
$T(x)=xK(x)=x(-2x^2+8x+1110)=-2x^3+8x^2+1110x$
$T'(x)=-6x^2+16x+1110$

$$T'(x)=0\quad\text{より，}\quad x=\frac{-16\pm\sqrt{256+26640}}{-12}=-12.33\cdots,\ 15$$

$T(2)=2236$，$T(25)=1500$，$T(15)=11700$
よって，15€のときに，売り上げを最大にすることができる。

$\boxed{12}$（例 6）p.102
ある店では，1 か月で 600 パッケージのコーヒーを，1 パッケージ 3.2€で販売している。店長は，1 パッケージ 0.2€の割合で割引すると，販売数が 100 パッケージずつ増加すると考えている。売上を最大にするには，価格をいくらにすればよいか？　またそのときの売上と販売数はいくらになるか？

<解答>
売上を M(x)とすると，
$M(x)=(600+100x)(3.20-0.20x)$

$=-20x^2+200x+1920$

$M'(x)=-40x+200$

$M'(x)=0$　より，　$x=5$

よって，3.20－5×0.20＝2.20€　のときに，最大となる。

このとき，販売数は，600＋500＝1100 パッケージであり，

売り上げは，2.20×1100＝2420€である。

3.3　身体活動と交通への応用

$\boxed{13}$（例 1）p.107

レーススキーヤーのコーチは，最大酸素摂取量を強化するためのトレーニングをしたいと考えている。x 週間のトレーニングで 1 ㎏あたりの最大酸素摂取量 H(mℓ/㎏/min)は，次のように計算される。

$H(x)=-0.00027x^3-0.04x^2+1.37x-4$

ただし，1 週間当たり 20km 以上のトレーニングや 3km 以下のトレーニングは，酸素摂取量を強化するのに効果がないことが知られている。最大酸素摂取量をできるだけ増やすためには，どれくらいのトレーニングをすればよいか？

＜解答＞

$H(x)=-0.00027x^3-0.04x^2+1.37x-4$

$H'(x)=-0.00081x^2-0.08x+1.37$

$H'(x)=0$　より，

$$x=\frac{0.08\pm\sqrt{0.0108388}}{-0.00162}=\frac{0.08\pm0.10\cdots}{-0.00162}=14.88\cdots,-113.6\cdots$$

よって，14.88…≒15km のときに最大となる。

$H(3)=-0.26$ ，$H(15)=6.64$，$H(x)=5.24$

$\boxed{14}$（例 2）p.109

ジョギングするアスリートと犬を連れた歩行者が定期的に運動をしている。夕方の同じ時間に，互いに垂直に交わる交差点を，それぞれ道路に沿って進んでいる。アスリートは交差点まで 15km の地点，犬を連れた歩行者は交差点まで 3km の地点から，正確に同じ時間 18 : 00 に出発している。アスリートは 20km/h で，犬を連れた歩行者は 6km/h で，それぞれ一定の速さで進む。彼らが最も近づくのはいつか？　またその時の場所はどのあたりか？

＜解答＞

t 時間後の歩行者とアスリートの交差点からの位置を a，b として，2 人の距離を c とすると，

$c^2=a^2+b^2$

$=(3-6t)^2+(15-20t)^2=436t^2-636t+234$　$=f(t)$　とする。

$f'(t)=872t-636$

$f'(t)=0$　より，$t=636\div 872=0.729\cdots$

ここで，$0.729\cdots h=43.7\cdots min\fallingdotseq 44$ 分

このとき，$a=3-6\times 0.729\cdots\fallingdotseq -1.4km$

$b=15-20\times 0.729\cdots\fallingdotseq =0.4km$

よって，44分後に最も近づき，そのとき歩行者は交差点を通り過ぎた1.4kmの地点に，アスリートは交差点手前の0.4kmの地点にいる。

$\boxed{15}$（例3）p.109

自動車での通勤時間は，交通量 m のときの時間を t 分とすると，次の式で表されることがわかっている。

$t=0.01m^2+0.03m+18$

ただし，ここで m とは，毎分の通過した車の台数のことである。（1993 調査）

交通量，つまり毎分に通過する車の台数が 0 台以上 40 台以下であるときに，通勤時間を調べよ。

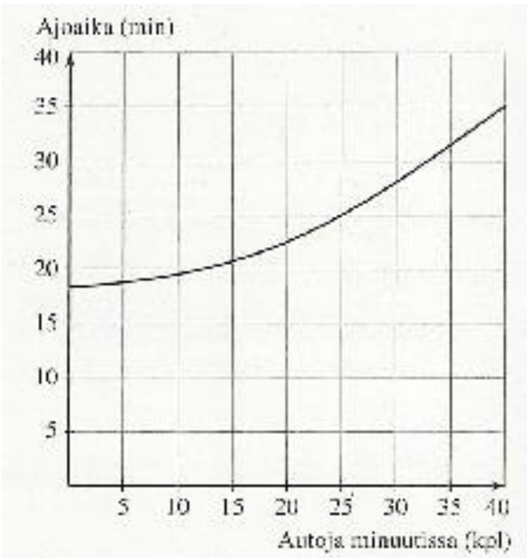
＜解答＞

$t(m)=0.01m^2+0.03m+18$　$(0\leqq m\leqq 40)$

$t'(m)=0.02m+0.03$

$t(0)=18$，$t(40)=35.2$

よって，通勤時間は最大で 35 分，最小で 18 分である。



4　関数の式と方程式との融合

4.1　関数の式の決定

$\boxed{16}$（例 3）p.120

発破工事では，石が 30m 先までとび，その飛行経路は，ピークの高さが 10m の放物線である。飛び始めの角度は，水平な地面からどの程度で飛ぶかを求めよ。

＜解答＞

飛び始めの地点を原点 O として xy 座標軸を設定し，水平方向に飛んだ距離が xm のときの高さを ym として，式を作る。

$y=ax^2+bx+c$

とおくと，$f(0)=0$　より，$c=0$

$f'(x)=2ax+b$

$f(15)=10$,　$f'(15)=0$　より，

$$\begin{cases} 225a+15b=10 \\ 30a+b=0 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-\dfrac{2}{45}$，$b=\dfrac{4}{3}$

よって，$y=f(x)=-\dfrac{2}{45}x^2+\dfrac{4}{3}x$

$f'(x)=-\dfrac{4}{45}x+\dfrac{4}{3}$　より，$f'(0)=\dfrac{3}{4}$

$\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$ より，$\alpha=53.13\cdots^\circ \fallingdotseq 53.1^\circ$

よって，53.1°の方向に飛ぶ。

（訳者注：有効数字 2 桁とすれば，53°）

５．統計と確率

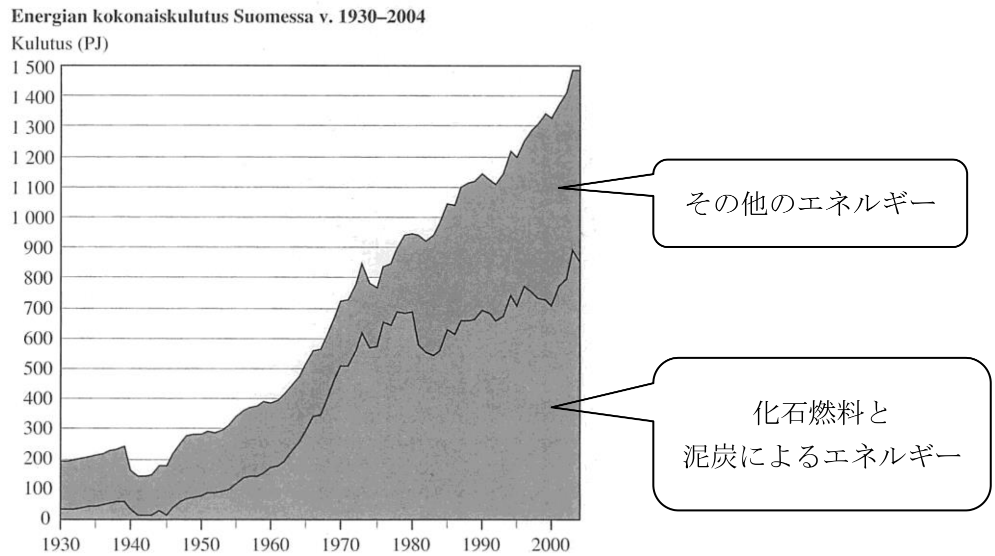
＜WSOY　MAB　5　Tilastot ja todennäköisyys（短い数学）＞

１　統計

1.1　統計とは何か？

1（例 2）p.12

フィンランド気象協会は，1990 年に，温室効果ガス排出量の削減目標を決めた。それは，化石燃料と泥炭によるエネルギー量を約 80％とする，というものである。1930 年から 2004 年までのフィンランドのエネルギー総消費量を示したグラフを使って，排出量の削減目標が達成されているか調べよ。また，1990 年から 2004 年までの消費量の増減を求めよ。



＜解答＞

化石燃料の排出量の内訳は，泥炭の他に，石油や石炭，天然ガスがある。その他のエネルギーには，再生可能江ネルギーや核エネルギー，輸入電力が含まれる。

グラフの上段の曲線は，総エネルギー量を示している。グラフの下段の曲線は，化石燃料と泥炭によるエネルギー消費量を示している。その他のエネルギー消費量は，2 つの曲線の間の部分に示されている。

総消費量は，1990 年が約 1150PJ，2004 年が約 1500PJ で，この間，1500－1150＝350PJ だけ増加した。

化石燃料と泥炭によるエネルギー消費量は，1990 年が約 700PJ，2004 年が約 850PJ で，150PJ 増加した。

その他のエネルギー消費量は，上段の曲線と下段の曲線の値の差で求められる。

1990 年は，約 1150－700＝450PJ

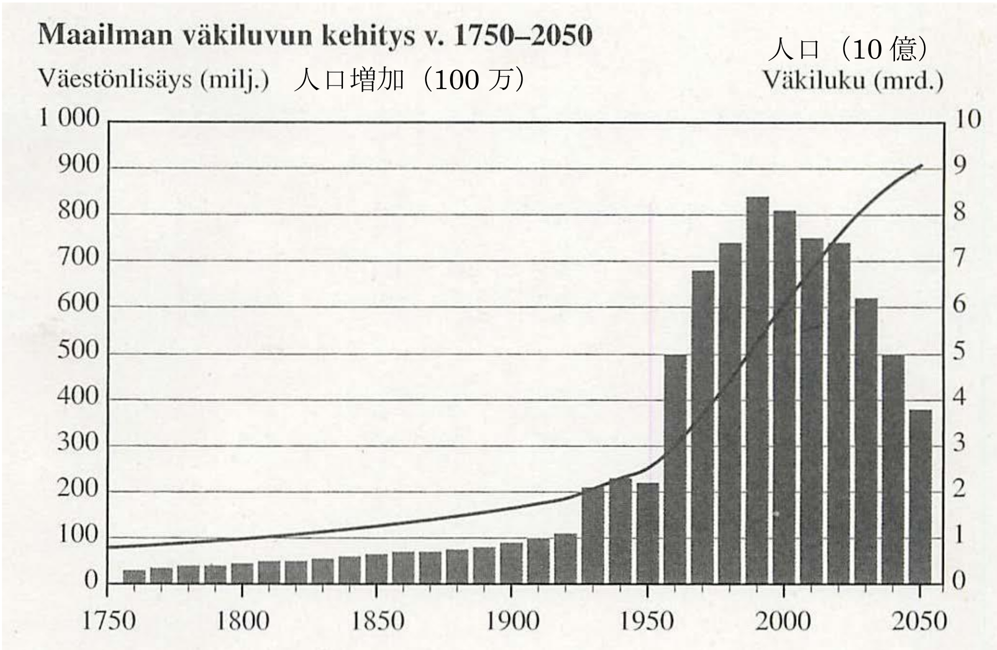
2004 年は，約 1500－850＝650PJ

だから，その他のエネルギー消費量は，200PJ 増加した。

2 酸化炭素を生成する石油，石炭，天然ガス，泥炭の排出量を削減する目標は，達成されていない。これらのエネルギー資源を，その他のエネルギーに変換していくことが，強く望まれる。

2（例 3）p.14

次の図は，1750 年～2050 年の世界の人口の変動を示したものである。



■ 10 年ごとの人口増加数　　　— 人口

統計グラフから，次の問いに答えよ。

a) 世界人口が 80 億人を超えるのは，何時と予想されているか？

b) 10 年ごとの人口増加数が最大となるのはいつか？

＜解答＞

a) 曲線のグラフは，世界人口を示していて，その値は右の縦軸で読む。
2030 年以降に，曲線が 800 億人を超えることがわかる。

b) 各列の棒は，10 年間の人口増加数を示していて，その値は左の縦軸で読む。
1980 年から 1990 年の 10 年間のときが，人口増加数が最大である。

1.2 統計分布

3（例 1）p.21

次の文章について，ラテン語と英語の単語の長さ（文字数）を調べる。度数分布表を調べて，それをグラフに示せ。また，典型的な値（モード）を求めよ。

Gaudeamus igitur
Juvenes dum sumus
Post jucundum juventutem
Post molestam senectutem
Nos habebit humus.

Ubi sunt qui ante nos
In mundo fuere?
Vadite ad superos
Transite in inferos
Hos si vis videre.

Vita nostra brevis est
Brevi finietur.
Venit mors velociter
Rapit nos atrociter
Nemini parcetur.

Vivat academia
Vivant professores
Vivat membrum quodlibet
Vivat membra quaelibet
Semper sint in flore.

(C. W. Kindeleben 1781)

Let us rejoice therefore
While we are young.
After a pleasant youth
After a troublesome old age
The earth will have us.

Where are they
Who were in the world before us?
You may cross over to heaven
You may go to hell
If you wish to see them.

Our life is brief
It will be finished shortly.
Death comes quickly
Atrociously, it snatches us away.
No one is spared.

Long live the academy!
Long live the teachers!
Long live each male student!
Long live each female student!
May they always flourish!

＜解答＞

ラテン語の文章における単語の長さごとにその数（つまり度数 f）を集計して，表に記録する。単語の合計は，60 語である。

さらに，比較するために，相対度数 f%を計算する。例えば，長さ 2 の単語の相対度数は，5／60＝0.0833…≒8%　である。

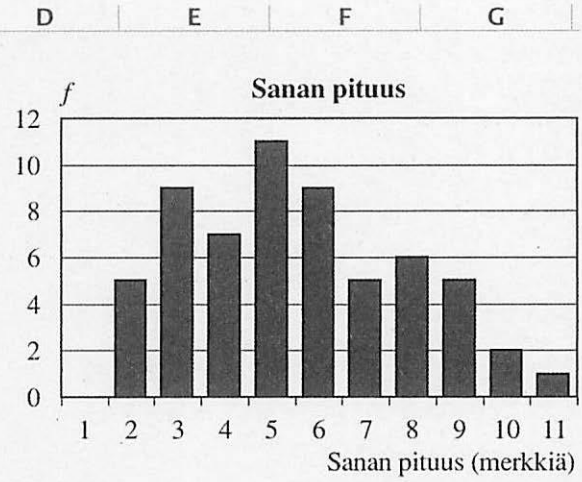
最大の度数（11）は，長さ 5 の単語で，これがラテン語の典型的な長さといえる。

英語の同じ文章についても，同様に調べてみよう。（これは練習とする。）

コンピュータで表計算プログラムを使って，分布の様子をグラフに示す。

Sanan pituus *latina*	Kirjanpito	Frekvenssi *f*	Suhteellinen frekvenssi *f* %
1		0	0
2	卌	5	8
3	卌 ||||	9	15
4	卌 ||	7	12
5	卌 卌 |	11	18
6	卌 ||||	9	15
7	卌	5	8
8	卌 |	6	10
9	卌	5	8
10	||	2	3
11	|	1	2
Yhteensä		60	100

◇	A	B	C
1	**Sanan pituus (merkkiä)**	*f*	*f* %
2	1	0	0 %
3	2	5	8 %
4	3	9	15 %
5	4	7	12 %
6	5	11	18 %
7	6	9	15 %
8	7	5	8 %
9	8	6	10 %
10	9	5	8 %
11	10	2	3 %
12	11	1	2 %
13	Yht.	60	
14			



4（例 2）p.27

ミルクとコーヒー，ガソリンの 2001 年から 2004 年までの物価動向について，2001 年を基準に比較せよ。

Hinnat (€)	Täys-maito 1 ℓ	Kahvi 500 g	Bensiini 95E 1 ℓ
2001	0,67	2,71	1,10
2002	0,70	2,34	1,08
2003	0,71	2,18	1,09
2004	0,71	2,19	1,14

＜解答＞
はじめに，2002 年のミルクの価格を調べる。2001 年と比較した 2002 年の価格の上昇率を求める。

0.70／0.67＝1.0447…≒104.5％

2003 年の場合を求めると，

0.71／0.67＝1.0597…≒106.0％

以下同様に求める。

これによると，ミルクの価格は 6.0％の増，ガソリンの価格は 3.6％の増である。一方，コーヒーの価格は，19.2％の減である。（80.8－100.0＝－19.2）

すなわち，ミルクは上昇，ガソリンは一度は減少し後に増加，コーヒーは減少した。

Hintaindeksit, v. 2001 = 100			
	Täys-maito 1 ℓ	Kahvi 500 g	Bensiini 95E 1 ℓ
2001	100,0	100,0	100,0
2002	104,5	86,3	98,2
2003	106,0	80,4	99,1
2004	106,0	80,8	103,6

1.3　統計的な表現

5 （例 1）p.36

40 人の生徒のスピードテストを行った記録がある。これを，7 つの階級に分類して，分布の様子をグラフに示せ。

10,5	9,7	10,4	10,3	9,1	10,6	10,0	9,9
9,2	10,5	10,4	10,3	9,7	9,6	10,4	8,8
8,8	9,6	10,6	9,6	9,9	9,8	10,2	9,9
10,6	10,6	8,8	10,5	8,9	9,7	8,9	10,4
10,4	9,0	9,6	10,0	8,9	9,7	10,2	9,3

＜解答＞
時間は，8.8 秒～10.6 秒の間であり，これを 7 つの階級に分ける。(10.6－8.8)／7＝0.259…なので，幅を 0.3 秒とする。

最初の階級は，下限値を 8.8 とする。2 番目の階級の下限値は，8.8＋0.3＝9.1 とする。よって，最初の階級は，8.8－9.0 とする。この階級の下限値は 8.8 で上限値は 9.0 である。次の階級は，9.1－9.3 とする。など

この分類によって，次の表を得る。それぞれの階級の平均は，階級の中間値または階級値という。

$$\frac{8.8+9.0}{2}=8.9$$

Suoritusaika (s)	Luokka-keskus	f
8,8–9,0	8,9	7
9,1–9,3	9,2	3
9,4–9,6	9,5	4
9,7–9,9	9,8	8
10,0–10,2	10,1	4
10,3–10,5	10,4	10
10,6–10,8	10,7	4

変数である時間は，連続量で，しかも近似値であるため，

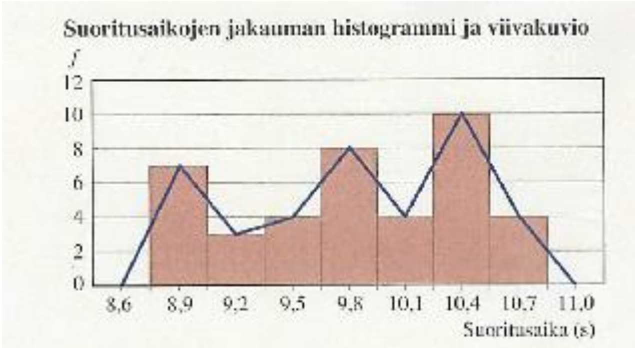
最初の階級のすべての値は，四捨五入する前には，

8.75－9.05 の間にある。次の階級では，9.05－9.35 の間にある。最初と 2 番目の階級の境界値である 9.05 は，2 番目の階級に属する。

最初の階級の 8.8－9.0 の真の下限値は 8.75，真の上限値は 9.05 である。真の上限値と下限値の平均を計算すると，階級値 8.9 となる。

$$\frac{8.75+9.05}{2}=8.9$$

分布の様子は, 棒の横をくっつけて示す。横軸の棒の中点は，階級値を示す。



（補足）

ヒストグラムは，普通連続量の変数のときに使われる。ヒストグラムは，棒グラフに似ているが，棒グラフは離れているのに対して，ヒストグラムはくっつけて表示される。ヒストグラムの重要な点は，面積が度数に比例している点にある。このことは，横幅が等しいことで実現されている。（以下略）

1.4　統計的な指標

$\boxed{6}$（例 15）p.60

ある作業を行うのに, 4－5 分かかると推定されている。このことを詳しく調べるために，20 人が実際に作業を行い，時間（分）を測った。その結果は，次の表の通りである。

3.4	3.9	3.9	3.9	4.2	4.2	4.3	4.3	4.3	4.3
4.4	4.4	4.5	4.5	4.5	4.5	4.7	4.7	5.0	5.1

a)　作業時間の平均値と標準偏差を求めよ。

b)　平均値から標準偏差分だけ離れた範囲内にある作業時間の人は, 全体のどれほどか？

c)　平均値から標準偏差の 2 倍分だけ離れた範囲内にある作業時間の人は, 全体のどれほどか？

＜解答＞

a)　$\bar{x}=\frac{\sum x}{20}=4.35$ 分，　$s_{n-1}=\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{20-1}}\fallingdotseq 0.39$ 分　　※標本標準偏差のみを使用

b)　$\bar{x}-s=4.35-0.39=3.96$ 分，　$\bar{x}+s=4.35+0.39=4.74$ 分

3.96 分以上 4.74 分以下は 14 あるので，14／20＝0.7＝70%

c)　$\bar{x}-2s=4.35-2\cdot 0.39=3.57$ 分，　$\bar{x}+2s=4.35+2\cdot 0.39=5.13$ 分

3.57 分以上 5.13 分以下は 19 あるので，19／20＝0.95＝95%

（補足）

95%の範囲，すなわち平均値から標準偏差の 2 倍分だけ離れた範囲から外れたものは,「平均値とは統計的に有意差がある」と言われている。

$\boxed{7}$（例 16）p.62

Antti は，チームのメンバーと一緒に，「技術」と「持続性」についての 2 つのテストを受けた。テスト結果の平均値と標準偏差は，次の表の通りである。

テスト	Antti	チーム	
		$\bar{x}$	s
技術（最大 98）	64	49	20
持続性（最大 250）	150	140	8

a)　Antti は，どちらのテストの結果の方が，相対的によいといえるか？

b)　他の人に比べて，著しくよい結果といえる点数は何点か？

＜解答＞

a)　技術の平均点との差は，64－49＝15

持続性の平均点との差は，150－140＝10

2 つのテストの標準偏差が異なるので，標準偏差で割って比較する。

技術　$\frac{x-\bar{x}}{s}=\frac{64-49}{20}=0.79$

持続性　$\frac{x-\bar{x}}{s}=\frac{150-140}{8}=1.25$

よって，持続性の方が，結果がよい。

b)　平均値よりも，標準偏差の 2 倍分以上点数がよければ，他の人に比べて著しくよい結果といえる。つまり，$\bar{x}$＋2s＝140＋2・8＝156 点

（説明）

$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$ を，正規化した値という。

z≦－2　または　z≧2 のとき，x は平均値と有意差がある，と言われている。

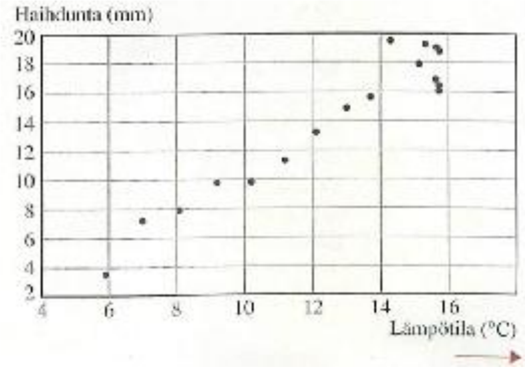
1.5　散布図と相関係数

$\boxed{8}$（例 1）p.70

現在，農業のための気象情報サービスがある。次の表は，この測候所が集めた 7 月から 1 年間の，5 日間の平均気温と蒸発量を調べたものである。これらのデータの間の関係をグラフに示して調べよ。

＜解答＞

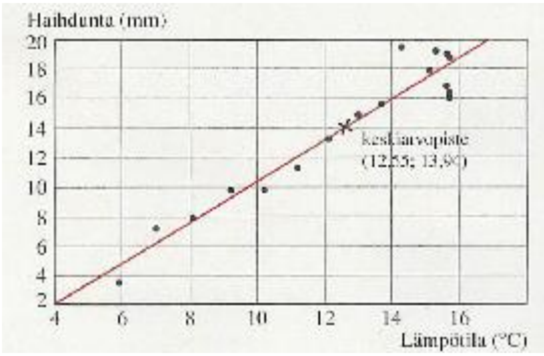
x 座標を気温，y 座標を蒸発量として，散布図を描く。



気温が増加すると，蒸発量も増加している。これらの点は，ほぼ直線上にある。この直線は，どの点からもできるだけ近いように引いた直線で，回帰直線と呼ぶ。x，y の平均値，相関係数を計算すると，次の通りである。

$\bar{x}$＝12.55，$\bar{y}$＝13.94，r≒0.9629

相関係数は，1 に近い。そのことは，2 つの関係が強いことを意味している。回帰直線を描いた図は，次の通りである。



（補足）

回帰直線は，特定の x の値に対応する y の値を予測するのに役立つ。ただし，変域に注意しなければならない。例えば，35℃のときの蒸発量を予測するようなことはやってはいけない。

（以下，r が様々な値のときの散布図とその説明，詳細略）

（説明）

相関係数 r は，2 変数の間の線形関係（相関）を示していて，その値は[－1，＋1]の範囲にある。

r≒0 のとき　変数の間には，線形関係はない。

r＞0 のとき　正の線形関係があり，その値が 1 に近ければその関係は強い。

r＜0 のとき　負の線形関係があり，その値が－1 に近ければその関係は強い。

３　確率の計算

3.1　確率の基本概念

$\boxed{9}$（例 12）p.105

円形の池の周囲に，8 本の梅の樹を新たに植えた。すると，3 本の樹が病気になり，その結果，まだ成熟していないのに実が落下してしまった。病気になった 3 本の樹は並んでいた。このとき，植木屋は，3 本の樹が病気になったのは，伝染したからか，それともたまたま同時に病気になったのか，どちらと判断すればよいだろうか？　確率 5%を限度として，もし偶然に起こる確率が低くなければ，同時に病気になったと判断してよい。

＜解答＞

木が植えてある 8 か所のうち，3 か所の選び方は，$_8C_3$＝56　通り

3 か所が 3 つ並ぶ場合の数は，8 か所を 1，2，3，…，8 と番号付けしたとき，

（1，2，3），（2，3，4），（3，4，5），…，（8，1，2）の 8 通りなので，

偶然に，3 本の樹が並ぶ確率は，8／56＝1／7＝14%

これは，5%以下ではないので，偶然に起こると考えてよい。

よって，3 本の樹は，おそらく同時に病気になったと判断できる。

※（著者注）危険率 5%として，「3 本の樹は，同時に病気になった」という帰無仮説を立てると，14%＞5%なので，帰無仮説は棄却されず，「3 本の樹は伝染して病気になった，とは言えない。」と判定される。

3.2　確率の計算法則

$\boxed{10}$（例 10）p.117

10 枚に 1 枚の割合で当たる宝くじがある。少なくとも 1 枚が当選する確率が 95%より大きくなるようにするには，何枚のくじを購入すればよいか？

＜解答＞

n 枚購入して，少なくとも 1 枚当選する確率は，

$P = 1 - 0.9^n$

$P > 0.95$　となる n を求めればよい。

$1 - 0.9^n = 0.95$　より，

$0.9^n = 0.05$

$$n = \frac{\log 0.05}{\log 0.9} = 28.433\cdots$$

よって，少なくとも 29 枚のくじを購入すればよい。

６. 数列

＜WSOY　MAB　6　Matemaattisia malleja Ⅱ（短い数学）＞

３　数列

3.1　数列の概念

$\boxed{1}$（例 5）p.76

患者は，2 週間，毎日朝食時に 5 ㎎の薬を飲む治療を行う。1 日で，体内に入った薬の量の 30%は減少する。

a)　最初の日から 5 日間までの，体内の薬の量を求めよ。

b)　体内に蓄積された薬の量をすぐに計算できる式を作れ。

c)　日数と体内に蓄積された薬の量の関係をグラフに表せ。

＜解答＞

a)　n 日後の体内に蓄積された薬の量を a_n とすると，

$a_1=5$

$a_2=0.7\times a_1+5=8.5$

$a_3=0.7\times a_2+5=10.95$

$a_4=0.7\times a_3+5=12.665$

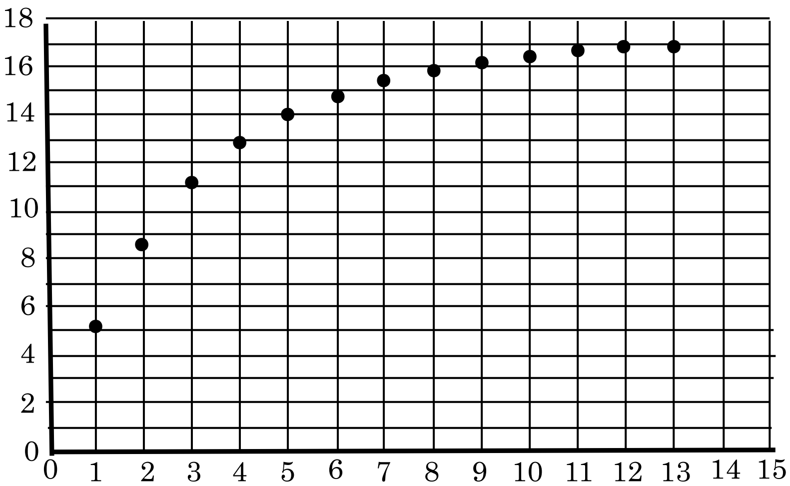
$a_5=0.7\times a_3+5=13.8655$

よって，5mg，8.5mg，11.0mg，12.7mg，13.9mg

b)　$a_1=5$

$a_n=0.7\times a_{n-1}+5$（n＝2,3,4,…）

c)



3.2　等差数列とその和

$\boxed{2}$（例 5）p.85

　スタジアムには，20 列のシートがある。第 1 列のシートには 30 個の座席があり，次の列は，前の列よりも 2 席だけ多い座席がある。最後の列の座席数はいくつか？　シートの座席数がシートの列番号の関数として，グラフに表せ。

＜解答＞

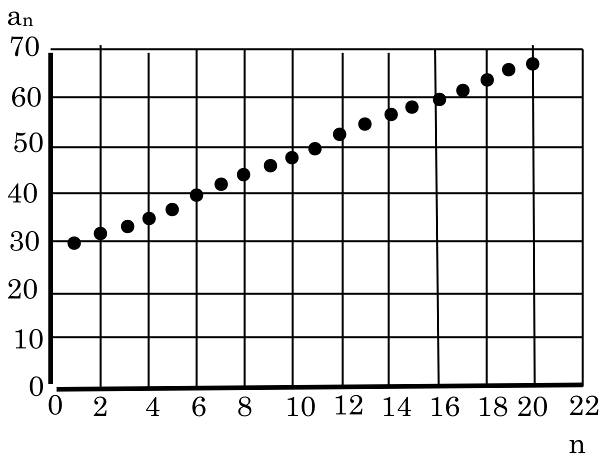
座席数は，シートの列番号の等差数列で，初項 $a_1=30$，公差 $d=2$ である。

最後の列の座席数は，この数列の 20 項だから，

$$a_{20}=30+19\cdot 2=68$$

したがって，最後の列の座席数は 68 席である。

シートの列番号を n，n 列の座席数を a_n としてグラフに表すと，次の通りである。



$\boxed{3}$（例 11）p.91

　ティーナは，20 日間，毎日プールに通って，水泳の練習を開始した。初日は，250m 泳ぎ，次の日は 300m 泳いだ。このように，毎日 50m ずつ泳ぐ距離を延ばした。

a)　彼が 1000m を超えるのは何日後を境にしてか？

b)　彼は 20 日間でどれだけの距離を泳いだか？

＜解答＞

a)　n 日後に a_nm 泳ぐとすると，

$$a_n=250+(n-1)\times 50$$

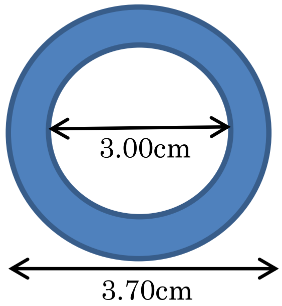
　$a_n=1000$ として，$250+(n-1)\times 50=1000$　よって，$n=16$ より　16 日後

b)　$a_{20}=250+19\times 50=1200$

　よって，n 日後までに泳いだ総距離を S_n とすると，

$$S_{20}=20\times(250+1200)/2=14500(\mathrm{m})$$

$\boxed{4}$（例 12）p.92



長さ 30m の市販のロールフィルムがある。Maija は，このフィルムの厚さを求めるために，フィルムの外側の直径と内側の直径を測ったところ，3.7cm，3.0cm であった。このとき，この値をもとにして，フィルムのおよその厚さを求めよ。

＜解答の概要＞

フィルムの断面部分を n 重の同心円と考えて，内側から i 番目の円周の長さを a_n とする。

$a_1 = 3.00\pi$，$a_n = 3.70\pi$

$n \times (3.00\pi + 3.70\pi) / 2 = 3000$

よって，$n = 285.05\cdots \fallingdotseq 285$

$3.70/2 - 3.00/2 = 0.35$(cm)

$0.35/285 = 0.00122\cdots$(cm)

したがって，約 0.012mm

（参考 1）

一般に，外径 R，内径 r，フィルムの長さ A とすると，

$a_1 = 2\pi r$，$a_n = 2\pi R$

$n \times (2\pi r + 2\pi R) / 2 = A$

よって，$n = A / \pi(R + r)$

したがって，フィルムの厚さ $d = (R - r) / n = \pi(R + r)(R - r) / A$

（参考 2）別の方法

一般に，外径 R，内径 r，フィルムの長さ A とすると，

$Ad = \pi R^2 - \pi r^2$　より，$d = (\pi R^2 - \pi r^2) / A$

3.3　等比数列とその和

$\boxed{5}$（例 8）p.104

鋼球を 2m の高さから平らな鋼板の上に落下させると，銅版の上で跳ね返る。球は，いつも直前の高さの 80%跳ね返る。高さが 0.5m 未満になるのは，何回跳ね返るときか？

＜解答＞　n 回目に跳ね返る高さを a_n とすると，

$a_1 = 0.8 \times 2 = 1.6$(m)

n 回目に 0.5m 未満になるとして，

$a_n = 1.6 \times 0.8^{n-1} < 0.5$

$1.6 \times 0.8^x = 0.5$ のとき，$x = \log(0.5/1.6)/\log 0.8 = 5.212\cdots$

よって，$n - 1 > 5.212\cdots$

$n > 6.212\cdots$

だから，7 回目

$\boxed{6}$（例 11）p.108

ローラは，5 年連続して 1200 ユーロずつ預金する。金利は 3.00％であるが，税金が 28％かかる。5 年後に預金総額はいくらになるか？

＜解答＞

毎年の増額率を q，n 年後の総額を S_n とすると，

$q＝1＋0.72×0.03＝1.0216$

よって，$S_5＝1200q＋1200q^2＋\cdots＋1200q^5$

$＝1200q×(1－q^5)／(1－q)≒6400.18$　　　よって，6400.18€

$\boxed{7}$（例 12）p.109

毎年定期的に貯金して，6 回の貯金で総額が 5000€を超えるには，いくらずつ預金すればよいか？　ただし，純利子（税金を差し引いた利子）は 2.85％で，毎年の初めに貯金して，その年の最後に利子が付加される。

＜解答＞

毎年の貯金額を x として，n 年後の預金総額を a_n とすると，

$a_1＝x$，$q＝1＋0.0285＝1.0285$，$n＝6$

$$x\cdot\frac{1-1.0285^6}{1-1.0285}>5000$$

まず，等しくなる場合を考えると，

$$x\cdot\frac{1-1.0285^6}{1-1.0285}=5000$$

$x\cdot 6.444\cdots＝5000$　　｜：$6.444\cdots$

$x＝775.903\cdots$

よって，776€ずつ貯金すればよい。

$\boxed{8}$（例 13）p.110

地球には，消費量が毎年 2％ずつ増加するとして，40 年間は十分に消費できるだけの石油埋蔵量があることが知られている。もし，毎年の消費量が 0.5％のみの上昇だとしたら，何年間分の十分な石油量があるといえるか？

＜解答＞

現在の石油消費量を a，消費量の増加率を q＝1.02 とする。

石油埋蔵量 S_{40} は，

$S_{40}＝a×(1－1.02^{40})／(1－1.02)≒60.42a$

0.5％上昇するとき，x 年間で石油を使い切るとすると，$S_x＝S_{40}$ より

$a×(1－0.005^x)／(1－0.005)＝60.42a$

$1.005^x＝1.302$，　$x＝\log1.302／\log1.005≒52.91\cdots$　　　よって，およそ 53 年後

４　数列を用いた数学的モデル

4.1　数列の応用

$\boxed{9}$（例 1）p.120

河川のパーチ（スズキの一種）が，ほとんどいなくなってしまったので，漁業協会はパーチを復活させようと，5 年間，毎年春に 2000 匹の稚魚を放流する。漁業協会の見積もりによると，毎年 30%のパーチが，釣りによって，あるいは他の原因でいなくなる。

a)　この計画によれば, パーチの数はどのように推移していくか？　ただし, パーチの数は, 春に放流した直後の数とする。

b)　5 年間の後，パーチは自然に 10%増加することが見込まれ，毎年約 600 匹が釣られるとする。次の 5 年間にパーチの数はどのように推移していくか？

＜解答＞

a)　n 年後のパーチの数を a_n とすると，

$a_1=2000$

$a_2=0.7\times a_1+2000=3400$

$a_3=0.7\times a_2+2000=4380$

一般に，$a_n=0.7\times a_{n-1}+2000$

よって，2000，3400，4400，5100，5500

b)　n 年後のパーチの数を b_n とすると，

$b_0=5500$

$b_1=1.10\times b_0-600=5450$

一般に，$b_n=1.10\times b_{n-1}-600$

よって，5450，5400，5330，5270，5190

$\boxed{10}$（例 2）p.122

森林管理区内では, 1200 羽の水鳥がいて, 毎年 5%ずつ増加していると予想されている。毎年，30 羽が狩りで捕獲される。毎年，同じように鳥の数は推移する。

a)　5 年間の鳥の数はどのように推移するか？

b)　毎年の鳥の数が計算できる式を求めよ。

c)　式を使って，10 年後，20 年後の鳥の数をそれぞれ求めよ。

＜解答＞

a)　n 年後の鳥の数を a_n，増加率を $q=1.05$ とすると，

$a_0=1200$

$a_1=1200q-30$

一般に，$a_n=a_{n-1}q-30$

この式に順に代入して，1230，1261.5，1294.5…，1329.3…，1365.7…

よって，1230，1260，1290，1330，1370

b)　$a_1 = 1200q - 30$

$a_2 = a_1q - 30 = (1200q - 30)q - 30 = 1200q^2 - 30q - 30$

$a_3 = a_2q - 30 = (1200q^2 - 30q - 30)q - 30 = 1200q^3 - (30 + 30q + 30q^2)$

一般に，$a_n = 1200q^n - (30 + 30q + \cdots + 30q^{n-1})$

$= 1200\,q^n - 30 \times (1 - q^n) / (1 - q)$，ただし，$q = 1.05$

c)　$a_{10} = 1577.3\cdots$，$a_{20} = 2191.9\cdots$

よって，約 1580 羽，約 2190 羽

11（例 3）p.124

ある森林は，2 万 m^3 の木材の生産量が見込まれている。木は，毎年 4.5%だけ体積が増加すると推定されている。その森林の所有者は，毎年 $1100m^3$ 分の木材を 10 年間伐採することとした。10 年後に，木材の生産量はどれだけになるだろうか？　また，n 年後の生産量を表す式を作れ。

＜解答＞

n 年後の木材の生産量を a_n，$q = 1.045$ とすると，

$a_0 = 20000$

$a_2 = a_1q - 1100 = 20000q^2 - 1100q - 1100$

$a_3 = a_2q - 1100 = 20000q^3 - (1100 + 1100q + 1100q^2)$

よって，

$a_{10} = 20000q^{10} - 1100(1 + q + q^2 + \cdots + q^9) = 17542.3\cdots$　　よって，$17500m^3$

n 年後の式は

$a_n = 20000q^n - 1100(1 - q^n) / (1 - q)$　ただし，$q = 1.045$

７． 経済数学

＜WSOY　MAB　7　Talousmatemattikka（短い数学）＞

１ パーセントと経済

1.1　パーセント

1（例 5）p.16

　製品価格が，p%ずつ繰り返し割引される。割引回数が 4 回になるときの価格は，元の価格の 4／5 に等しくなるという。このとき，p を求めよ。

＜解答＞

　元の価格を a，q＝1－p/100 とすると，

$q^4 a = 0.8a$

$q^4 = 0.8$

$$q = \sqrt[4]{0.80} = 0.9457\cdots$$

$1 - q = 0.0542\cdots \fallingdotseq 5.4\%$

　よって，p＝5.4%

2（例 6）p.16

　ある装置の商品価値は，毎年 25%ずつ下がるという。購入価格の 20%以下の価値となるのは，何年後か？

＜解答＞

　購入価格を a として，x 年後に元の 20%になるとすると，

$0.75^x a = 0.20a$

$0.75^x = 0.20$

$$x = \frac{\log 0.20}{\log 0.75} = 5.59\cdots$$

　よって，6 年後に，20%以下の価値となる。

3（例 7）p.17

　ある街では，駐車料金を，年の初めに p%値上げし，さらに年の終わりに 2p%値上げした。結局，1 年間で 49.5%の値上げであった。p を求めよ。

＜解答＞

　p/100＝x として，駐車料金のもとの値段を a とすると，

$(1+2x)(1+x)a = 1.495a$

$(1+2x)(1+x) = 1.495$

$2x^2+3x-0.495=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-0.495)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm 3.6}{4}=0.15,\ -1.65$$

よって，p＝15％である。

２　金利と預金

2.1　金利

$\boxed{4}$（例 10）p.74

年の初めに 13000€を貯金した。4 年間で 14000€まで増やすには，年利は何％でなければならないか？　ただし，利子に対して 28％の税金がかかる。

＜解答＞

税金を含めた利率を q とすると，

$13000q^4=14000$

$$q=\pm\sqrt[4]{\frac{14000}{13000}}=\pm 1.01869\cdots$$

求める利率を p とすると，

$0.72p=0.01869\cdots$

$$p=\frac{0.01869\cdots}{0.72}=0.025971\cdots\approx 0.02597$$

よって，2.597％

$\boxed{5}$（例 11）p.74

年の初めに 13000€を貯金した。年利 2.550％，利子への税率 28％であるとき，元金が 15000€までになるのに，どの位の期間かかるか？

＜解答＞

$0.02550\times 0.72=0.01836$　より，x 年かかるとすると，

$13000\times 1.01836^x=15000$

$$1.01836^x=\frac{15}{13}$$

$$x=\frac{\log\left(\frac{15}{13}\right)}{\log 1.01836}=7.8654\cdots$$ (時間)＝7 年＋12×0.8654…≒7 年 10 か月

よって，7 年 10 か月かかる。

2.2　割引現在価値

$\boxed{6}$（例 2）p.81

将来のために，ある農民は 4 年間にわたり，年の初めに口座に 1500€ずつ預金する。ただし，実質の利子率は年利 2.85%であるとして，4 年間の総額の割引現在価値はいくらか？

＜解答＞

$q=1.0285$　として，求める割引現在価値を K とすると，

$$K=1500+1500\times q^{-1}+1500\times q^{-2}+1500\times q^{-3}$$
$$=1500(1+q^{-1}+q^{-2}+q^{-3})$$
$$=5755.182\cdots$$
$$\fallingdotseq 5755.18\ (€)$$

よって，5756€である。

$\boxed{7}$（例 3）p.82

6 年連続して毎年 600€ずつを高校がスポーツクラブに投資すると，総額の割引現在価値はいくらになるか？　ただし，支払いは年末とし，また利子率は 3.5%で税率 28%である。

＜解答＞

実質の利子率は，$0.035\times0.72=0.0252$　だから，$q=1.0252$　として，求める割引現在価値を K とすると，

$$K=600\times q^{-1}+600\times q^{-2}+600\times q^{-3}+600\times q^{-4}+600\times q^{-5}+600\times q^{-6}$$
$$=600(q^{-1}+q^{-2}+q^{-3}+q^{-4}+q^{-5}+q^{-6})$$
$$=3302.665\cdots$$

よって，3303€である。

3　クレジットと返済

3.1　数列とお金

$\boxed{8}$（例 2）p.91

ある家族は，バスルームの改装のために，毎月初めに 250€貯金する。1 回目の貯金は，1 月に行う。実質の年金利が 2.6%であるとき，1 年後の利子の総額および貯金総額を求めよ。

＜解答＞

利息は，$1+2+3+4+\cdots+12=78$ か月分につく（※）ので，

1 年間の利子の総額は，$\{250\times(0.026\div12)\}\times78=42.25$€

また，貯金総額は，$250\times12+42.25=3042.25$€　である。

※（著者注）1 年間については，毎月 $0.026\div12$ だけ，単利の利子が付くと考える。

$\boxed{9}$（例 5）p.96

新生児の子どものために，口座を開設して 200€入金した。次に，1 年後の洗礼式のときに 200€入金し，その後は毎年の誕生日のときに，18 歳の誕生日になるまで 200€ずつ貯金した。実質の年金利が 3.25%のときに，18 年後の貯金の総額はいくらになるか？

＜解答＞

q＝1.0325　とすると，求める総額 S は，

$$S=200+200q+200q^2+200q^3+\cdots+200q^{18}$$

$$=\frac{200(1-q^{19})}{1-q}=5145.616\cdots\approx 5145.62$$

よって，5145.62€　になる。

$\boxed{10}$（例 6）p.97

貯金の総額が 5 年後の末に 5000€を超えるようにするには，毎年いくらずつ貯金すればよいか？　ただし，年率 3.45%として，年の初めに入金し，年末に利子が付くものとする。

＜解答＞

毎年の貯金額を K，q＝1.0345 として，5 年後に 5000€になるとすると，

$$Kq+Kq^2+Kq^3+Kq^4+Kq^5$$

$$=Kq\times\frac{1-q^5}{1-q}=5000$$

$$K\times 5.541\cdots=5000$$

$$K=\frac{5000}{5.541\cdots}=902.212\cdots$$

よって，903€

$\boxed{11}$（例 8）p.100

住宅を購入するための預金口座を開設して，4 年間で，毎月初めに 175€ずつ貯金する。実質金利は 3.2%で，年末に利子が付く。4 年後に，貯金総額はいくらになるか？　また，利子の合計はいくらか？

＜解答＞

1 年間 12 か月分の利子分は，

$$(1+2+\cdots+12)\times(175\times 0.032\div 12)=36.40€$$

よって，1 年間の貯金総額 K は，

$$K=175\times 12+36.40=2136.40€$$

よって，4 年間の貯金総額 S は，q＝1.032 として，

$$S=K+Kq+Kq^2+Kq^3$$

$$=K\times\frac{1-q^4}{1-q}=8964.6095\approx 8964.61$$

また，利息の合計は，

$8964.61-175\times 12\times 4=8964.1-8400=564.61$

よって，貯金総額は 8964.61€で，利息の合計は 564.61€

$\boxed{12}$（例 9）p.101

店主は，販売する商品を拡大して，新商品を 1200 個倉庫に仕入れた。彼女は，最初の補充は 2 月初めに，最後の補充は 12 月初めに，毎月 200 個ずつ仕入れることとする。店主は，これまでの経験に基づき，1 か月で在庫の約 70%が販売されると見積もっている。年末に，どの程度の商品が倉庫にあるかを予想せよ。

＜解答＞

n ヶ月後の倉庫の在庫量を a_n とする。$q=0.3$ とすると，

$a_0=1200$

$a_1=a_0q+200=1200q+200$

$a_2=a_1q+200=(1200q+200)q+200=1200q^2+(200+200q)$

$a_3=a_2q+200=1200q^3+(200+200q+200q^2)$

…

$a_{11}=1200q^{11}+(200+200q+200q^2+\cdots+200q^{10})$

$$=1200q^{11}+200\times\frac{1-q^{11}}{1-q}=285.71\cdots$$

よって，12 月末日の在庫量は，

$a_{11}\times q=285.71\cdots\times 0.3=85.71\cdots$

よって，約 85 個である。

3.2　クレジット

$\boxed{13}$（例 2）p.113

若い夫婦が，家具を購入するために，消費者ローン会社から 3000€を借りた。ローンの実質金利は 13.20%である。貸し付け条件によれば，5 年間で毎月の月末に，一定の額を返済する（元利均等返済）。それとは別に，初回はローン会社に 50€支払い，その後も毎回 5€ずつ支払う。2950€の家具を買うのに，最終的にどれだけのお金を支払うことになるか？

＜解答＞

1か月の金利は，13.20÷12＝1.10％であるので，q＝1.011として，毎月の返済額をAとすると，12×5＝60回で返済完了なので， $A = 3000q^{60} \times \dfrac{1-q}{1-q^{60}} = 68.566\cdots$ （※）

※　（著者注）一般に，元利均等返済において，借入額をK，利率をr，1＋r＝qとし，N回で返済が完了するときの毎月の返済額をA（一定）とすると，次の式が成り立つ。

$$A = Kq^N \times \frac{1-q}{1-q^N}$$

（証明）n回目の返済後の元金残高をa_nとすると，a_0＝K

n回目の返済に際して，

利息　a_{n-1}×r

元金返済分　A－r a_{n-1}

よって，n回目の返済後の元金残高は，

$a_n = a_{n-1} - (A - r\,a_{n-1}) = (1+r)\,a_{n-1} - A = q a_{n-1} - A$

この漸化式を解いて，

$$a_n = Kq^n - \frac{A(1-q^n)}{1-q}$$

a_N＝0とすると， $Kq^N = \dfrac{A(1-q^N)}{1-q}$

よって， $A = Kq^N \times \dfrac{1-q}{1-q^N}$

よって，支払総額は，50＋5×60＋68.57×60＝4464.20€

$\boxed{14}$（例3）p.114

ある家族が，10年返済の住宅ローンで60000€を借りた。ローンの金利は，最初の3年は年利 4.80％の固定金利で，その後の金利はプライムレートとなる。ローンは，四半期ごとに支払う。ローンの 1 年目の利息を，a）元金均等返済※　b）元利均等返済※　の場合について，それぞれ求めよ。また，3年後の残額はそれぞれいくらであるか？

※（著者注）毎回のローン返済額A＝元金返済分L＋利息R

A：一定　➔　元利均等返済

L：一定　➔　元金均等返済

元利均等返済の方が，毎回の返済額が一定なので，返済が容易である反面，返済期間が長くなり，返済総額も多くなる。

＜解答＞

返済回数は，年 4 回×10 年＝40 回である。

a）元金の返済額は，60000÷40＝1500€

1 回目　利息　60000×0.048÷4＝720€

返済額　1500＋720＝2220€

残金　60000－1500＝58500€

2 回目　利息　58500×0.0480÷4＝702€

返済額　1500＋702＝2202€

残金　58500－1500＝57000€

3 回目　利息　57000×0.0480÷4＝684€

返済額　1500＋684＝2184€

残金　57000－1500＝55500€

4 回目　利息　55500×0.0480÷4＝666€

返済額　1500＋666＝2166€

残金　55500－1500＝54000€

3 年後の残額は，

60000－1500×12＝42000€　である。

b）四半期ごとの金利は，4.80÷4＝1.20％だから，q＝1.012 とする。

4×10＝40 回で返済完了なので，手数料 A は，

$$A = 60000q^{40} \times \frac{1-q}{1-q^{40}} = 1897.5026\cdots \approx 1897.50 \ \text{€}$$

1 回目　利息　60000×0.048÷4＝720€

元金返済分　1897.50－720＝1177.50€

残金　60000－1177.50＝58822.50€

2 回目　利息　58822.50×0.0480÷4＝705.87€

元金返済分　1897.50－705.87＝1191.63€

残金　58822.50－1191.63＝57630.87€

3 回目　利息　57630.87×0.0480÷4＝691.57€

元金返済分　1897.50－691.57＝1205.93€

残金　57630.87－1205.93＝56424.94€

4 回目　利息　6424.94×0.0480÷4＝677.10€

元金返済分　1897.50－677.10＝1220.40€

残金　56424.94－1220.40＝55204.54€

3 年後の残額は，

$$60000q^{12} - 1897.50 \times \frac{1-q^{12}}{1-q} = 44899.09 \ \text{€}$$　である。

$\boxed{15}$（例 5）p.118

Niemiset さんは，住宅ローンで 50000 ユーロを借りた。ローンは，毎月同じ返済額とする元利均等返済方式である。金利は，年率 4.680％である。Niemiset さんは，返済期間が a）10 年　b）20 年　のときに，毎月支払う返済額はいくらになるか？

＜解答＞

a）返済回数は 12×10＝120 回で，1 か月あたりの利率は，4.680÷12＝0.39％なので，
q＝1.0039 とすると，毎月の返済額 A は，

$$A = 50000q^{120} \times \frac{1-q}{1-q^{120}} = 522.54\cdots \approx 523 \ \text{€}$$

b）返済回数は 12×20＝240 回で，1 か月あたりの利率は，4.680÷12＝0.39％なので，
q＝1.0039 とすると，毎月の返済額 A は，

$$A = 50000q^{240} \times \frac{1-q}{1-q^{240}} = 321.20\cdots \approx 322 \ \text{€}$$

４　投資と実現可能性

4.1　投資

$\boxed{16}$（例 5）p.139

Jussi さんは，金利の変動によって利益が得られるファンド貯蓄保険を始めた。彼女は，毎月初めに 25€を投資した。ファンドによる利益として，およそ年利 8.4％が見込まれる。ただし，毎回手数料として 2％を支払う。この保険を，a）5 年　b）10 年　続けるとき，利益を含めた総額はいくらになるか？

＜解答＞

手数料を除くと，投資額は，25×0.98＝24.50€

1 年間の利子の総額は，

{24.50×(0.084÷12)}×(1＋2＋3＋…＋12)＝13.377€

よって，投資額と合わせて

24.50×12＋13.38＝307.38€

a）$S_5 = 307.38 \times (1+q+q^2+q^3+q^4) = \dfrac{307.38(1-q^5)}{1-q} = 1817.714\cdots \approx 1817.71 \ \text{€}$

b）$S_5 = 307.38 \times (1+q+q^2+\cdots+q^{10}) = \dfrac{307.38(1-q^{10})}{1-q} = 4538.359\cdots \approx 4538.36 \ \text{€}$

4.2　利益の計算

$\boxed{17}$（例 1）p.144

アイスクリーム店では，コーンアイスを，1.30€＋税で販売している。固定費用として，1 か月あたり 700€かかる以外に，アイスクリーム 1 個につき 0.54€の費用がかかる。1 か月で，どれだけ販売すれば，利益が生じるか？

＜解答＞

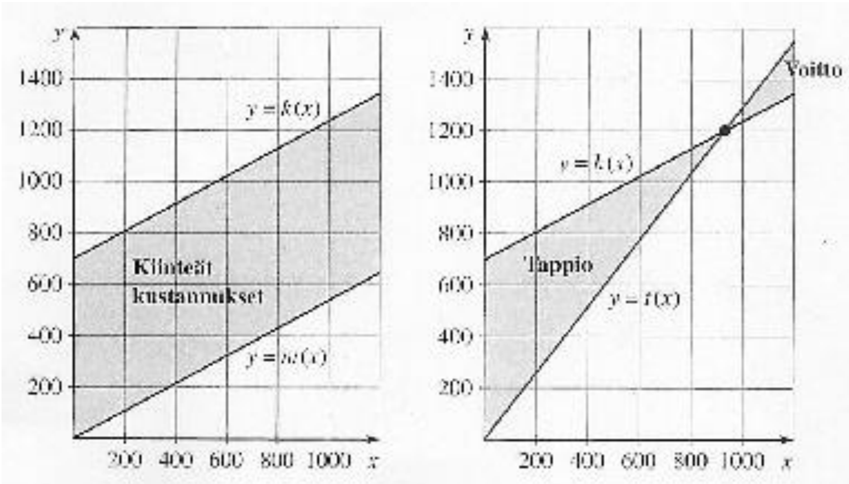
x 個を販売したときの 1 か月でかかる費用 $k(x)$は，$y=k(x)=0.54x+700$

一方，x 個を販売したときの売り上げ $t(x)$は，$y=t(x)=1.30x$

$k(x)=t(x)$より，$0.54x+700=1.30x$

よって，$x=921.05\cdots$

よって，922 個以上販売できれば，利益が生じる。



$\boxed{18}$（例 5）p.148

使用料金 4€の屋内プールの入場者数は，1 か月平均 2000 人である。調査の結果によると，使用料金が 0.5€増加すると入場者数が 100 人減るという。そこで，使用料金が 0.5€増加するごとに，入場者数が 100 人ずつ減少するとする。収入を最大にするには，使用料金をいくらに設定すればよいか？　ただし，屋内プールは，1 か月で最大 2500 人まで収容できる。

＜解答＞

使用料金を $0.5x$€増加させるとすると，入場者数は，$2000-100x$ 人となる。

$2000-100x \geqq 0$ より，$-5 \leqq x \leqq 20$

収入を $T(x)$とすると，

$T(x)=(2000-100x)(4+0.5x)=-50x^2+600x+8000$

$T'(x)=-100x+600$

$T'(x)=0$　より，$x=6$

よって，$4+0.5\times 6=7$€に設定すればよい。

$\boxed{19}$（例 6） p.150

ある株式会社では，数年に一度，設備を更新するのに 35000€かかる。減価償却費を，定額法または定率法のいずれかの方法で配分する。次の各場合で，減価償却費を求めよ。

a）5 年間の定額法で配分する　　b）25%の定率法で配分する

＜解答＞

a）35000÷5＝7000€

b）n 年目の未償却残高を a_n とすると，

$$a_n=0.75a_{n-1}=0.75^{n-1}\times 35000$$

よって，n 年目の減価償却費 p_n は，

$$p_n=0.25a_n=0.25\times 0.75^{n-1}\times 35000$$

未償却残高　　減価償却費

Menojäännös (€)	Poisto (€)
35 000,00	8 750,00
26 250,00	6 562,50
19 687,50	4 921,88
14 765,62	3 691,41
11 074,21	2 768,55
jne.	jne.

８．三角関数・ベクトル

＜WSOY　MAB　8　Matemaattisia malleja Ⅲ（短い数学）＞

２　三角関数の式とグラフ

2.2　三角関数のグラフ

1（例 10）p.61

ギターの音合わせは，周波数 440Hz のラの音で行う。この音の振動の高さは，次の式で示される。ただし，3.2 ㎝は振動の振幅を，t は時間（秒）を表す。

$f(t)=3.2\sin(2\pi f\cdot t)$

0.0025 秒後の振動の高さを求めよ。

＜解答＞

f＝440，t＝0.0025 を代入して，

$f(0.0025)=3.2\times\sin(880\pi\cdot 0.0025)=1.8809\cdots\fallingdotseq 1.9\text{cm}$

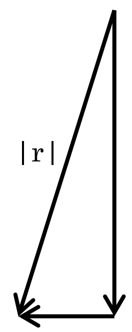
３　ベクトル

3.2　ベクトルの計算

2（例 2）p.61

ヘリコプターが飛行しているのを見ている。このヘリコプターが穏やかな天候状態で 150km／h で南に進むように制御されていて，同時に風速 40km／h の東風が吹いているとき，実際にはどのように進んでいるか？

＜解答＞



$|r|=\sqrt{150^2+40^2}=155.2\cdots$(km／h)

よって，ベクトル r の方向に，155km／h で進む。

５　応用

5.1　図形への応用

3（例 5）p.128

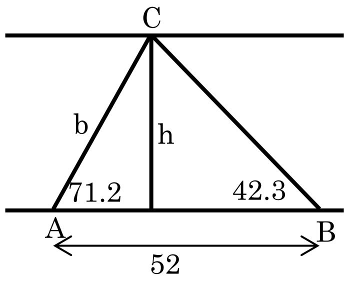
桟橋 A，B のある川岸にいて，川幅が知りたい。対岸の大きな木がある C 地点を基準として，次の測定結果を得た。

AB＝52m，∠BAC＝71.2°，∠CBA＝42.3°

これらの結果を使って，川幅を求めよ。

＜解答＞

∠ACB＝180－(71.2＋42.3)＝113.5°



AC＝b とすると，正弦定理から，

$$\frac{b}{\sin 42.3°}=\frac{52}{\sin 113.5°}$$

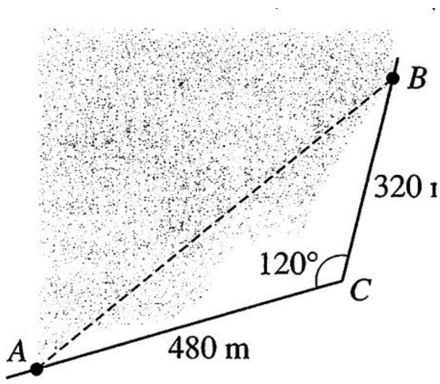
$$b=\frac{52\sin 42.3°}{\sin 113.5°}=38.161\cdots$$

$$h=b\times\sin 71.2°=38.161\cdots\times\sin 71.2°=36.125\cdots$$

（答）36m

4（例 6）p.129

入り江を挟んで，ビーチに小屋 A と B がある。2 つの小屋は，道でつながっていて，この道は C 地点で 120° で交差している。AC は 480m，BC は 320m である。カイサとアクセリは，同じ時間に A と B を出発して，他方の小屋に向かった。カイサは，ボートで海を 3.5km／h で進み，アクセリは，道に沿って 5.0km／h で進んだ。2 人のかかる時間を求めよ。



＜解答＞

AB＝c とすると，

$c^2=320^2+480^2-2\cdot 320\cdot 480\cos 120°$

$\quad=332800+153600$

$\quad=486400$

c＝697.4…≒700(m)

カイサのかかる時間は,

$$\frac{0.7}{3.5}=0.2h=12\min$$

アクセリのかかる時間は,

$$\frac{0.48+0.32}{5.0}=0.16h=9.6\min\approx 10\min$$

（答）カイサ：12 分　　アクセリ：10 分

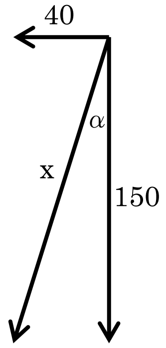
5.2　ベクトルの運動

$\boxed{5}$（例 3）p.134

ヘリコプターは，穏やかな天候状態で 150km／h で南に向かって進むように制御されていて，同時に風速 40km／h の東風が吹いている。

a）実際には，ヘリコプターはどの方向に，どの位の速さで進んでいるか？

b）もし，ヘリコプターが実際に南の方向に進みたいのであれば，どの方向に制御すればよいか？　また，そのときの制御速度はどれだけか？



＜解答＞

a）$x^2 = 150^2 + 40^2$　より　$x = 155.14\cdots \fallingdotseq 155$(km／h)

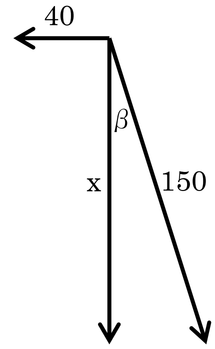
$$\tan\alpha = \frac{40}{150} \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{40}{150}\right) = 14.93\cdots° \approx 14.9°$$

（答）　南から西へ 14.9°の方向に，155km／h で進む。

b）$150^2 = x^2 + 40^2$　より，$x = \sqrt{150^2 - 40^2} = 144.56\cdots \approx 144$

$$\tan\beta = \frac{40}{150} \quad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{40}{150}\right) = 15.46\cdots° \approx 15.5°$$

（答）　南から東へ 15.5°の方向に，144km／h で進む。



$\boxed{6}$（例 4）p.136

飛行機が，穏やかな天候状態のもとで北から東へ 60°の方向に，200km／h で飛行している。風速 55km／h の強い南風に遭遇してコースが変更した。これにより，実際の速度はどうなったか，また進行方向は北から何度の方向か？

＜解答＞

$$\vec{v} = (200\cdot\cos 30°, 200\cdot\sin 30°) \approx (173.2, 100)$$

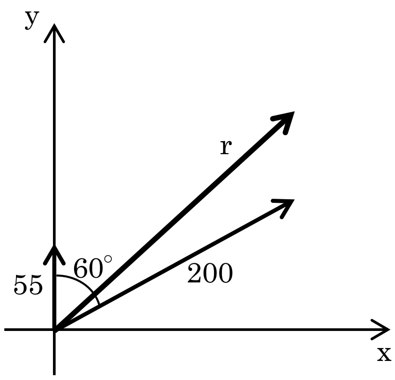
$$\vec{u} = (0, 55)$$

$$\vec{r} = \vec{v} + \vec{u} = (173.2, 155)$$

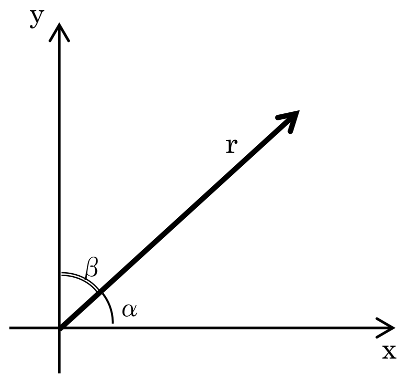
$$r = \sqrt{173.2^2 + 155^2} = 232.4\cdots \approx 232$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{155}{173.2}\right) = 41.81\cdots° \approx 42°$$

$\beta = 90° - 42° = 48°$



（答）速度は 232km／h で，北から 48°の方向に進む



付　　各単元の問題に対するコメント

１　式と方程式

$\boxed{1}$　　(p.1)

日本でもよく見かける「三方を塀で囲む面積の最大値」を求める問題であるが，「別荘の周りを囲む」設定とすることで，変域が限定されている点に特徴がある。このような設定は，日本の問題には見られない。より現実に近い設定になるように工夫されている。

２　幾何学

$\boxed{1}$～$\boxed{3}$　(p.2)

日本でも，三角比を活用した現実事象の問題はあり，例えば$\boxed{3}$のような「木の高さ」を題材とした問題はよく見かけるが，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$で取り上げた「航空機の上昇角度」や「湖岸が水につかる範囲」を題材とした問題は，日本の問題では見かけない。また，いずれの問題も，数値はより現実に近い設定となっているため，手計算で計算は困難になっている点が特徴的である。

$\boxed{4}$～$\boxed{6}$　(p.3~4)

いずれも，地球を題材とした問題で，日本ではほとんど見かけない設定である。三角比の活用としては単純な問題であるが，リアリティのある問題である。地球の周の長さを40000km として示している点は，理科の知識を確かにする意味でも意味があるといえる。

$\boxed{7}$～$\boxed{10}$　(p.4~5)

これらの問題は，三角比の活用問題ではない。いずれも，中学校のおうぎ形の性質を活用する問題であるが，日本の中学校，高等学校いずれの教科書でも，ほとんど見かけない問題である。

３　線形計画法・指数モデル

$\boxed{1}$～$\boxed{3}$　(p.6~9)

これらは，線形計画法の問題であるが，日本では，トピックページで扱っている教科書がほとんどで，場面設定も架空である場合が多い。一方，$\boxed{1}$～$\boxed{3}$は，現実的な量と数値を使っている点に特徴がある。

$\boxed{4}$～$\boxed{21}$　(p.9~18)

これらはすべて，指数関数の活用問題である。日本の教科書にも，現実事象と関連付けた問題はないわけではないが，その数は少ない。フィンランドの問題は，題材も多岐にわたっているのが特徴的である。以下，さらに詳細について補足する。

$\boxed{4}$～$\boxed{5}$　(p.9~10)

$\boxed{4}$は生物の個体数の変化を題材としたもので，日本の教科書でも見かけるが，問題文に「ハタネズミの個数が増加することは，庭園や森林を破壊する」という個体数の変化を調

べる必要性が述べてあり，より現実的な設定にする工夫がなされている。$\boxed{5}$は薬の体内の有効成分量を題材としたもので，日本ではほとんど見かけない。どちらの問題も，「どのように変化するか」という問いかけ方に特徴がある。

$\boxed{6}$〜$\boxed{7}$　(p.10~11)

$\boxed{6}$は，お金を題材とした設定であり，等比数列の活用問題でもある。$\boxed{7}$は，$\boxed{4}$と同じ個体数の変化を題材とした問題である。いずれも，平均の変化率（相乗平均）を求めさせる点に特徴がある。また，$\boxed{7}$については，現実の数値を使用しているため，より現実的な設定となっている。

$\boxed{8}$〜$\boxed{10}$　(p.11〜12)

これらの問題は，指数関数の式を作って，それをもとに問題を解決する設定となっている。$\boxed{8}$は，2000 年，2003 年，2006 年の価格を求めることを通して，指数関数の変化が，1 次関数の変化とは異なることを意識させる意図があると推測される。$\boxed{9}$は, 地震を題材に, $\boxed{10}$は，生物の個体数の変化を題材としているが，いずれも問題解決に対数を用いる点に特徴がある。

$\boxed{11}$〜$\boxed{15}$　(p.13〜15)

いずれも，指数関数とは明記していないが，指数関数を活用して問題を解決する設定となっている。$\boxed{11}$は，絶滅危惧種のアザラシを題材としていて，現実の数値を使用していると推測される。$\boxed{12}$は人口の増加，$\boxed{13}$〜$\boxed{15}$はお金を題材とした問題であるが，数値は架空の設定と考えられる。

$\boxed{16}$〜$\boxed{19}$　(p.15~16)

$\boxed{16}$〜$\boxed{18}$は放射能を，$\boxed{19}$は抗生物質を題材とした設定で，いずれも半減期に関する問題である。特に，$\boxed{19}$は，ほとんど日本では見かけない問題である。

$\boxed{20}$〜$\boxed{21}$　(p.16~18)

いずれも，指数関数と 1 次関数の変化の違いを意識させる問題である。特に，$\boxed{21}$は，場面設定は架空であるが，利益を毎回引き出す場合とそのまま預金する場合とで比較する設定となっていて，日本では見かけない問題である。

４　微分

$\boxed{1}$　　(p.19)

これは，微分係数の活用問題である。魚の成長を題材としていて，関数式が不明であるグラフが最初に与えられて，そのグラフを読み取って，接線の傾きを求めたり，接線の傾きが最大となる x のおよその値を求めさせたりしている点に特徴がある。

$\boxed{2}$　　(p.20)

2 次関数の最大・最小問題である。日本では，微分を使わず，平方完成でグラフを描いて

求めるのが一般的であるが，ここでは微分を活用することを意図している。溝という現実事象と関連付けた題材であるが，式設定など，やや数学の問題のために作った設定といえる。

3～6　(p.20~22)

いずれも，図形の面積や体積の最大値を求める問題である。3は，周の長さ一定のときの長方形の面積の最大値を求める問題で，日本では 2 次関数の活用問題としてよく見かける。4は，ふたのない直方体の箱の容積の最大値を求める問題で，日本でもほとんどの教科書にある問題である。5は，直方体の体積の最大値を求める問題である。長さ一定のワイヤーで直方体を作る題材であるが，数学の問題のために作った設定といえる。6は，円錐の体積の最大値を求める問題である。道路工事用のコーンを題材にしているが，母線の長さを一定にする必然性はあまり感じられない。

7～12　(p.22~25)

いずれも，商業や経済に関する問題で，2 次関数の最大最小問題である。日本の教科書にも，類似の問題が数学 I の 2 次関数の単元にあり，2と同様に，日本では平方完成を用いて解くが，これらを微分を用いて解いている点に特徴がある。題材は，穀物の収穫量，カリフラワーの売上，陶器の製造コスト，バスケットボールの試合のチケット代，コーヒーの売上と多岐にわたっている。

13～15　(p.25~26)

13は，最大酸素摂取量を題材にした 3 次関数の最大最小問題で，日本の教科書では見かけない。最大酸素摂取量が，トレーニング量の 3 次関数になる式が示されているが，この式をどこから引用したかについては不明である。14は，2 人の距離の最小値を求める問題で，日本の教科書にも，類似の問題は見かける。15は，通勤時間を題材にした 2 次関数の最大最小問題で，13と同様に，日本の教科書では見かけない。通勤時間が交通量の 2 次関数になる式が示されているが，この式をどこから引用したかについては不明である。

16　(p.27)

発破工事を題材とした石の飛行に関する 2 次関数の最大最小問題で，物理の落下運動の問題といえる。座標軸を自分で設定して問題を解決する点に特徴がある。

５　統計と確率

1～2　(p.28~29)

1は，温室効果ガス排出量を題材とする問題である。与えられたグラフを読み取り，温室効果ガスの排出量の削減目標が達成されたかどうかを判断させる設定となっている点が特徴的である。2は，世界の人口の変動を題材とした問題で，1と同様に，グラフを読み取って条件に当てはまる数を応える問題である。同じ図の中に，2 種類のグラフが示されている点に特徴がある。いずれの問題も，グラフの読み取りに，数学の特別な知識は必要ではない。

$\boxed{3}$～$\boxed{4}$　(p.29~32)

$\boxed{3}$は，ラテン語と英語の単語の長さを題材とした問題で，実際に調査した結果をもとに表や棒グラフを作って，モードを求める設定である。日本の教科書では見かけない。$\boxed{4}$は，ミルク，コーヒー，ガソリンの物価動向を題材とした問題で，ある年を基準としたときの数年後の物価の上昇率を求める設定である。統計というよりは，割合の問題といってよい。

$\boxed{5}$　(p.32~33)

この問題は，スピードテストの記録を題材にした問題で，度数分布表とヒストグラムを作る設定である。日本では，中 1 の教科書で見かける典型的な問題である。ヒストグラムと棒グラフの違いが記載されている点に特徴がある。

$\boxed{6}$～$\boxed{7}$　(p.33~34)

$\boxed{6}$は，作業時間を題材とした問題で，平均値と標準偏差を求める設定である。平均値±σ，平均値±2σの範囲に入るデータの割合を求めて，平均値との有意差の有無について触れている点に特徴がある。また，標準偏差は，標本標準偏差を用いている。$\boxed{7}$は，技術と持続性のテスト結果を題材とした問題で，他人と比べてどちらの方が相対的に評価が高いかを，平均値と標準偏差をもとに判断する設定である。標準偏差が異なるときに，正規化する必要性に触れている点に特徴がある。このような検定に関する問題は，現行の日本の教科書では扱っていない。

$\boxed{8}$　(p.34~35)

この問題は，気温と蒸発量の関係を題材とした問題で，散布図を描いて相関係数を求める設定である。回帰直線にも触れ，傾きが相関係数に等しく，x，y の平均値を座標とする点を通ることを扱っている点に特徴がある。

$\boxed{9}$～$\boxed{10}$　(p.36)

$\boxed{9}$は，樹の病気を題材とした確率の問題で，病気の原因が伝染性のものかどうかを判断する設定である。確率を検定に活用している点に特徴がある。$\boxed{10}$は，くじを題材にした確率の問題で，独立試行や余事象の確率の知識を用いて解く設定である。問題の解決に対数を用いる点に特徴がある。

６　数列

$\boxed{1}$　(p.37)

この問題は，薬の体内残量を題材とした問題で，漸化式を作ったり，その変化をグラフに示したりする設定である。日本の教科書では，ほとんど見かけない。漸化式を解かずに式を作るのみである点に特徴がある。

$\boxed{2}$～$\boxed{4}$　(p.38~39)

$\boxed{2}$は，スタジアムのシートの数を題材とした等差数列の問題で，グラフを描かせている点に特徴がある。$\boxed{3}$は，水泳の練習を題材とした等差数列の問題で，数列の和を求める設定となっている。$\boxed{4}$は，カメラフィルムを題材とした等差数列の問題である。フィルムの

断面部分を，n 重の同心円と考えて解決する点に特徴がある。いずれも，日本の教科書では見かけない問題である。

$\boxed{5}$～$\boxed{8}$　(p.39~40)

$\boxed{5}$は，鋼球の跳ね返りを題材にした等比数列の問題である。変数を一旦は実数として，問題の解決に対数を利用している点に特徴がある。$\boxed{6}$，$\boxed{7}$は，貯金を題材とした等比数列の和に関する問題である。$\boxed{8}$は，石油埋蔵量を題材とした等比数列の和に関する問題である。$\boxed{5}$と同様に，問題の解決に対数を利用している点に特徴がある。特に$\boxed{8}$は，日本の教科書では見かけない問題である。

$\boxed{9}$～$\boxed{11}$　(p.41~42)

$\boxed{9}$は，川の魚の個体数を題材とした漸化式に関する問題である。$\boxed{1}$と同様に，漸化式を解かずに式を作って問題を解決する設定となっている点に特徴がある。$\boxed{10}$は，森林内の鳥の個体数を題材とした漸化式に関する問題である。ここでは漸化式を解いているが，等比数列の和の公式を利用して帰納的に求めている点に特徴がある。$\boxed{11}$は，森林の木材生産量を題材とした漸化式に関する問題である。$\boxed{10}$と同様に，漸化式を帰納的に求めている点に特徴がある。いずれも，日本の教科書では見かけない問題である。

7　経済数学

この科目は，日本にはない内容である。「割引現在価値」「利息計算」「元利均等返済」など，経済に関する知識が必要となる問題が少なくない。

$\boxed{1}$～$\boxed{3}$　(p.43~44)

$\boxed{1}$は，割引価格を題材とした百分率に関する問題である。問題の解決に累乗根を利用している点に特徴がある。$\boxed{2}$は，装置の商品価値を題材とした百分率に関する問題である。問題の解決に対数を利用している点に特徴がある。$\boxed{3}$は，駐車料金を題材とした百分率に関する問題である。問題の解決に 2 次方程式を利用している点に特徴がある。いずれの問題も，高校で学習する知識を利用しているが，日本の教科書では見かけない問題である。

$\boxed{4}$～$\boxed{5}$　(p.44)

いずれの問題も，貯金を題材とした問題で，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$と同様に，問題の解決に累乗根や対数を利用している点に特徴がある。

$\boxed{6}$～$\boxed{7}$　(p.45)

いずれの問題も，割引現在価値（将来に受け取る価値が，もし現在受け取るとしたら，どの程度の価値があるかを表すもの）を題材とした問題で，問題の解決に等比数列の和を利用している点に特徴がある。

$\boxed{8}$～$\boxed{12}$　(p.45~47)

$\boxed{8}$は，単利の利息計算に基づく貯金を題材とした問題で，等差数列の和を利用する。$\boxed{9}$，$\boxed{10}$は，複利計算に基づく貯金を題材とした問題で，等比数列の和を利用する。$\boxed{11}$は，単利

と複利の両方の計算に基づく貯金を題材とした問題で，等差数列の和・等比数列の和を利用する。12は，商品の倉庫の在庫量を題材とした問題で，漸化式および漸化式を解くのに等比数列の和を利用する。

13～15　(p.47~50)

これらの問題は，借金を題材とした問題である。13と15は，元利均等返済による設定で，問題の解決に，毎回の返済額を証明無しで公式として利用している。14は，元金均等返済と元利均等返済の 2 つを比較する設定である。

16～19　(p.50~52)

16は，単利計算と複利計算の両方に基づく投資貯金を題材とした問題で，等比数列の和を利用する。17は，アイスクリームの販売利益を題材とした問題で，1 次関数の考えを利用する。18は，プールの使用料金を題材とした問題で，2 次関数の最大最小問題と同じように，微分を利用する。19は，設備の減価償却費を題材とした問題で，定額法と定率法の違いを比較する設定である。

８　三角関数・ベクトル

1　(p.53)

この問題は，音の周波数と振動の高さを題材とした三角関数の問題である。日本では，物理で扱う題材であり，数学の教科書ではほとんど見かけない。ただし，「0.0025 秒後の振動の高さを求めよ。」という設問は，解決の必要性が感じられない。

2　(p.53)

この問題は，ヘリコプターの航跡を題材としたベクトルの問題である。このような現実事象を題材としたベクトルの問題は，日本の教科書ではほとんど見かけない。ただし，この問題は基本問題であり，活用力の育成という観点からは多少の物足りなさを感じる。

3～4　(p.53~54)

これらの問題は，測量に関する問題で，三角比の正弦定理や余弦定理を利用する問題である。数値が，現実に近い半端な値となっていて，電卓を使用することを前提としている点に特徴がある。

5～6　(p.55~56)

5はヘリコプター，6は飛行機の飛行に関する問題である。いずれも，ベクトルと三角比を利用する融合問題である。操縦者の立場になるとき，解決の必要性の感じられる設定であり，日本の教科書では見かけない問題である。

ヘルシンキ大聖堂　2007.9.8.