

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 17 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540239

研究課題名(和文) 有界変動函数の空間における発展方程式の研究

研究課題名(英文) Study of evolution equations in the space of BV functions

研究代表者

菊地 光嗣(Kikuchi, Koji)

静岡大学・工学研究科・教授

研究者番号：50195202

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)： 本件の研究により、準線形双曲型方程式系に対して初期条件が十分小さければ元の方程式に対する線形化方程式の解に近い振る舞いをするということ、および、ある種の強粘性項のある膜の振動方程式に対し初期条件に少しだけ滑らかさを仮定すれば(2回微分可能であれば十分)有界変動函数の空間において解が一意的に存在することがわかった。ただこの強粘性項には変分的な構造がないので、変分構造を持った強粘性項に対して解の存在等を得たいと考えているが、研究期間内にはソボレフ空間における解析を推進したにとどまり、その結果を有界変動函数まで拡張するにはいたらなかった。

研究成果の概要(英文)： In this research we obtained that for a quasilinear hyperbolic equation, if the initial data is sufficiently small, then a solution behaves like a solution to the linearized equation, and that for the equation of motion of vibrating membrane with a kind of strong viscosity term, if the initial data is slightly regular (but twice differentiability is sufficient), there is a unique solution in the space of BV functions. But this strong viscosity term does not have variational structure. We hope to obtain the same results for the equation of motion of vibrating membrane with a strong viscosity term which has variational structure. In the period of our research we only develop our analysis in Sobolev spaces, and it is not extended to the theory in the space of BV functions.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：函数方程式論 函数解析学

### 1. 研究開始当初の背景

有界変動函数とは超函数の意味での微分がラドン測度となる函数である。有界変動函数の全体の空間はソボレフ空間を真に含む空間である。方程式のエネルギー汎函数が勾配に関し  $p$  次の増大度となる場合  $p > 1$  ならば通常はその方程式はソボレフ空間において解析を行うのが普通である。しかしながら、一次増大度の場合、ソボレフ空間には有界集合の弱コンパクト性がないため、函数の空間を有界変動函数の空間まで広げて考える必要に迫られる。一次増大度のエネルギー汎函数の典型的な例は面積汎函数である。この汎函数に対する勾配流方程式は面積汎函数の凸性を用いることにより有界変動函数の空間において適切であることが分かっている。一方、対応する双曲型方程式は、膜の振動方程式と呼ばれることもあるが、この方程式については研究代表者の菊地が時間差分化の方法で近似した解の極限がエネルギー保存則を満たせば（有界変動函数の空間において）弱解になるということを示した。また、菊地はこの方程式について線形近似、すなわち初期条件が十分小さければ解はダランペール方程式の解に近いふるまいを示した。

有界変動函数の空間は反射的でもなければ可分でもない。そのため標準的な函数解析学の手法がほとんど使えないという困難点があるが、この研究の開始時にはヤング測度論的な手法を用いたアプローチなど有界変動函数独自の方法が発見されており、有界変動函数の空間における解析が大きく進展する下地が出来上がりつつあった。

面積汎函数の勾配流は汎函数の凸性を用いて解析されたが、一般に凸汎函数よりも少し条件の弱い準凸汎函数については超一次増大度の場合でも勾配流の存在すら未解決である。一方、双曲型の問題の場合には近似解の極限がエネルギー保存則を満たせば弱解になるということは準凸で超一次増大度の場合にはそれほど難しい問題ではないと思われるが、一次増大度になるとこの問題は、部分的な結果しか得られておらず完全な解決にはまだまだ多くの困難点を克服する必要があった。また、準線形双曲型方程式はかなり困難な問題であるので強粘性項をつけて考察することがしばしばある。膜の振動方程式においてもラプラス作用素を時間微分した強粘性項をつけた方程式はソボレフ空間において適切となることが古くから知られていた。しかしながら、もとの方程式は有界変動函数の空間で取り扱うのが適当であるので、強粘性項の形を変えて有界変動函数の空間で適切となるような問題にすることが望ましい。

### 2. 研究の目的

本研究の研究目的は方程式のエネルギー汎函数が一次増大度となる問題に関連する

以下の問題を研究することであった：

(1) 有界変動函数の性質を調べるとともに有界変動函数の空間における解析手法の開発

(2) 一次増大度のエネルギー汎函数を持つ放物型方程式系の研究

(3) 一次増大度のエネルギー汎函数を持つ双曲型方程式系の研究

(4) 粘性項のある膜の振動方程式の有界変動函数の空間における解析

### 3. 研究の方法

一般論として数学の研究には情報収集活動が重要である。本件の補助金もほとんどを情報収集活動に費やした。

#### (1) 各分担者の役割分担

研究目的に応じて各分担者の役割分担を以下のようにした：

研究目的の(1)・・・足達，中島，菊地

研究目的の(2)・・・清水，菊地

研究目的の(3)・・・星賀，菊地

研究目的の(4)・・・菊地

各研究目的に応じて分担者にも情報収集活動をお願いした。

#### (2) 研究連絡

研究の最先端の状況をじっくりと学ぶには文献にあたるのが一番よい。しかしながら印刷されて公表される時期は実際には情報としては少し古く、したがって最前線の情報を得るためには関連する研究者に会って直接研究連絡、討論を行うことで情報を収集する必要がある。研究代表者菊地及び各分担者は各自の分担に応じて他大学を訪問し関係する研究者と必要な研究連絡を行った。また、数名の研究者には静岡大学に來訪してもらい必要な研究連絡を行った。

#### (3) その他

情報活動の一環として文献収集が重要なのであるが、本件の研究期間中は研究連絡による情報収集を活発に行ったため文献収集は手薄になった。その点は反省している。

### 4. 研究成果

#### (1) 研究成果の概要

本件の研究で得られた研究成果のうち大きなものは、一次増大度のエネルギー汎函数を持つ双曲型方程式系の線形近似に関するもの、強粘性項のある膜の振動方程式の有界変動函数の空間における解析に関するもの、超一次増大度の非線形の粘性項を持つ発展方程式に関するもの、の3件である。このうちについてはソボレフ空間での解析となり本来は本件の研究目的からそれているが、有界変動函数の空間で発展方程式を解くと

いう問題を最終目的としたものであり、本来の最終目的とはギャップがかなりあるがここで報告することにする。

一次増大度のエネルギー汎関数を持つ双曲型方程式系の線形近似に関する研究

準線形双曲型方程式系に対して初期条件が十分小さければ元の方程式に対する線形化方程式の解に近い振る舞いをするということを示した。この結果は単独方程式である膜の振動方程式に対してはすでに研究代表者菊地によって得られていたが、その結果を方程式系(連立方程式)に拡張することに成功した。なお、ここでは、方程式のエネルギー汎関数には凸ではなく準凸性しか仮定していない。この研究に関しては大阪大学(現明治大学)教授名和範人氏、大阪大学教授八木厚志氏らと討論を行った。この結果は研究目的の(3)に関するものであるが、有界変動関数に対して勾配ヤング測度論的な解析を用いているので研究目的の(1)とも関連している。

強粘性項のある膜の振動方程式の有界変動関数の空間における解析に関する研究

本件の研究で一番大きく進展したのはこの研究であった。それまで、初期条件に2回微分の滑らかさを仮定したときに時間局所解の存在はわかっていたが、本件の研究により時間大域解の存在および解の一意性を得ることができた。なお、初期条件の2回微分の滑らかさの仮定は依然必要である。この結果は研究目的の(4)に関するものであるが、粘性項のある膜の振動方程式を別の放物型方程式に変換するという手法をとるので研究目的の(2)とも関連がある。この研究の一部は金沢大学教授小俣正朗氏、北海道大学助教エリオット・ギンダ氏らとの討論を通して推進した。

超一次増大度の非線形の強粘性項を持つ発展方程式に関する研究

上記で強粘性項のある膜の振動方程式に関する成果を述べたが、ここで取り扱っている強粘性項には変分構造がない。そのためエネルギー法などが有効に使えないなどの問題点があった。そのため変分構造をもつ強粘性項のついた膜の振動方程式について考察を行ったが、強粘性項が非線形になると本質的な難しさが現れることがわかった。また、ソボレフ空間においても関連する研究はないので、まずソボレフ空間の(強粘性項が一次よりも大きい増大度を持つ)場合について考察し、強粘性項が2次の場合には解の存在を示すことができた。この研究に関しては津田塾大学教授三上敏夫氏、愛媛大学教授内藤雄基氏らと討論を行った。

(2) 本件の研究の総括

上に述べた研究成果では研究目的の(3)に

関する研究と研究目的の(4)に関する研究に成果があり、関連して研究目的の(1)、(2)についても取り扱われているが、とくに研究目的(2)の放物型方程式系に関連する研究はほとんど遂行できなかった。これは本研究の反省点であろう。しかしながら、粘性項のある膜の振動方程式の有界変動関数の空間における解析(研究目的の(4))に関する成果は大きい。特に、この研究を通して非線形の強粘性項というのはほとんど未開拓の分野であり、多くの未知の構造が隠れている可能性がある、ということがわかった。この問題はもちろん有界変動関数に空間に限ったことではないが、今後の研究の課題となるであろう。

(3) 今後の展望

上述のように本件の研究目的からはそれるのであるが、非線形の強粘性項の構造を調べるというのが今後の課題の1つである。

一方、放物型方程式系の有界変動関数の空間での解析は現在も大きな問題として残っている。また、双曲型方程式系についても、線形近似は結論を得ることができたが、近似解の極限がエネルギー保存則を満たせば弱解になるか、という問題は未解決のままである。これらの問題は有界変動関数の空間の構造についてよりくわしく調べる必要があるように思われ、今後の課題として残っている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 15 件)

Koji Kikuchi, Constructing a solution to an evolution equation having a strong viscosity term of p-growth, Proceedings of the International Conference: Functional Analysis and Applications, 査読無, (2014), 55-71

Koji Kikuchi, Existence and uniqueness of a solution in the space of BV functions to the equation of a vibrating membrane with a "viscosity" term, Journal of Calculus of Variations, 査読有, Volume 2013 (2013), Article ID 936915,

<http://dx.doi.org/10.1155/2013/936915>

Koji Kikuchi, Linear approximation of a system of quasilinear hyperbolic equations having linear growth energy functional, Proceedings of Seminar on

Partial Differential Equations in  
Osaka 2012, Osaka University, 査読無,  
(2013年3月), 141-150

[学会発表](計 11 件)

菊地光嗣, 非線形の強粘性項を持つ発展方程式について, 松山解析セミナー2015, 2015年2月7日, 愛媛大学理学部, 愛媛県松山市

Koji Kikuchi, An analysis in the space of BV functions for an evolution equation having a strong viscosity term, Taiwan-Japan Joint Conference on PDE and Analysis, 2012年12月27日, 国立台湾大学(台湾)

Koji Kikuchi, Linear approximation of a system of quasilinear hyperbolic equations having linear growth energy functional, Seminar on partial differential equations in Osaka 2012, 2012年8月23日, 大阪大学工学部, 大阪府吹田市

Koji Kikuchi, An analysis in the space of BV functions for the equation of motion of a vibrating membrane with a 'viscosity' term, AIMS2012, 2012年7月4日, 米国フロリダ州

菊地光嗣, エネルギーが一次増大度となる双曲型方程式系について, 第9回浜松偏微分方程式研究集会, 2011年12月26日, 静岡大学工学部, 静岡県浜松市

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

菊地 光嗣 (KIKUCHI KOJI)  
静岡大学・工学研究科・教授  
研究者番号: 50195202

### (2) 研究分担者

清水 扇丈 (SHIMIZU SENJO)  
静岡大学・理学研究科・教授  
研究者番号: 50273165

星賀 彰 (HOSHIGA AKIRA)  
静岡大学・工学研究科・准教授  
研究者番号: 50261400

足達 慎二 (ADACHI SHINJI)  
静岡大学・工学研究科・准教授  
研究者番号: 40339685

中島 徹 (NAKAJIMA TORU)  
静岡大学・工学研究科・准教授  
研究者番号: 50362182