

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540400

研究課題名(和文) 数学的に予言される2次元点渦系平均場方程式のm点爆発解の動力学的理解

研究課題名(英文) Dynamical feature of mathematically obtained m-point blow-up solution in mean field equation for two-dimensional point vortex system

研究代表者

八柳 祐一 (Yatsuyanagi, Yuichi)

静岡大学・教育学部・准教授

研究者番号：30287990

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：Nagasaki-Suzukiらによって数学的に予言されている、円形境界を有する2次元非粘性Euler方程式において、逆温度  $\beta = -8/m$  ( $m$ : 自然数) で  $m$  点爆発する平衡解を、動力学的に解釈するのが、本研究の目的である。

点渦系は、Euler方程式の第2項、 $\text{div}(u)$  の効果により速い緩和を実現する。速い緩和の後、点渦群は、渦度の等高線と流れ関数の等高線が並行、すなわち  $\text{div}(u) = 0$  で特徴付けられる状態へ達する。この状態では、温度が異なる小領域が系内に散在し、各小領域の中では衝突項の効果はゼロになること、系の対称性により遅い緩和よりも更に遅い緩和がある可能性を発見した。

研究成果の概要(英文)：It is mathematically anticipated by Nagasaki and Suzuki that in the two-dimensional point vortex system there is an equilibrium singular solution diverging at  $m$  points whose inverse temperature is given by  $\beta = -8/m$ . Our final goal is to understand the solution dynamically. The following notations are used here:  $u$  velocity field,  $\omega$  vorticity,  $\psi$  stream function. The point vortex system relaxes violently by the second term  $\text{div}(u)$  in the Euler equation. After the violent relaxation, the system reaches a state characterized by  $\text{div}(u) = 0$ . In this state there are many small regions with different temperature and in each region, the collisional effect vanishes. The small diffusive effect remains due to the interaction between small regions with different  $\beta$ . This is the main mechanism of the slow relaxation in the point vortex system.

研究分野：数値流体力学

キーワード：自己組織化 2次元点渦系 絶対負温度 Onsager理論 インバースカスケード

### 1. 研究開始当初の背景

自己組織化とは、「ある系が外部からの特別な指定を受けること無く、特別な空間構造、特別な時間的振る舞い、特別な機能などを自ら形成すること」であり、たとえば天体系において太陽系などの惑星系から超銀河団というサイズにして20桁、密度にして44桁にも渡る広大なスケールで階層構造が形成されること、純電子プラズマ系において強磁場により真空容器に閉じ込められた電子群が多角形状の整列された配位(渦結晶)を形成すること、量子系において超流動ヘリウムやボーズ・アインシュタイン凝集体で観察される量子渦で同じく渦結晶が見られることなどが報告されており、真に普遍的な現象であることがわかる。

このような構造形成を理解するキーワードとして、Onsagerは「負温度」という概念を提唱した。全相空間体積が有限な系では、系のエネルギーが無限大となる極限で状態密度  $W$  がゼロとならなくてはならないため、少なくともあるエネルギー値  $E_0$  において  $W$  は極大となる。よって、 $E > E_0$  となる高エネルギー側では、逆温度  $\beta = d(\log W)/dE < 0$  となり、統計力学的に定義される絶対温度が負となる状態が現れる。ここで、Boltzmann エントロピー  $S = k_B \log W$  を用いた。

Onsager が提唱した負温度状態について、大きな進展のきっかけを与えたのが、1973年に発表された Joyce & Montgomery らによる数値シミュレーションによる渦の凝集の実演、及び平均場方程式の導出であろう。

平均場方程式の解については数学的なアプローチが多数なされており、特に Nagasaki らは、 $\beta = -8\pi m$  ( $m$ : 自然数) において平均場方程式の解が  $m$  個の集積点を持つ ( $m$  点爆発する) という結果を1990年に提出した。この解を、以後、 $m$  点爆発解とよぶ。そもそも Joyce らが導いた平均場方程式は離散渦度分布を持つ点渦系から状態数を数え上げ、最も確からしい分布を点渦系の粒子数、エネルギー、慣性モーメントが一定という条件の下に求め、最終的に渦度を一定に保ち粒子数を無限大とする連続極限をとった結果として導かれるものである。このようにして得られた平均場方程式の解が、 $\beta = 8\pi m$  の場合は、再び粒子的な解に還元する、というのが Nagasaki らの主張である。

### 2. 研究の目的

本研究では、純電子プラズマなどで観測される渦結晶状態と  $m$  点爆発解の関係を明らかにするため、 $m$  点爆発解に到達するダイナミクスを、理論的、数値的に明らかにすることを最終目標とする。

純電子プラズマ系で観測される渦結晶は、ちくわ状の電子分布から Kelvin-Helmholtz 不安定生により生成される。また、この時間発展は2次元 Euler 方程式の数値的解法の一つである点渦系で追跡可能な事から、本研究

では、2次元点渦系での  $m$  個の渦結晶と、2次元 Euler 方程式の平均場方程式の解である  $m$  点爆発解の関連を明らかにする。

点渦系はエネルギー保存系であり、系のエネルギーが決まると、そのエネルギーにおいて可能な複数の状態が決まり、時間発展の中で様々な状態を辿りながら、最終的に最も実現可能な確率が高い(状態数が多い)状態を平衡解として選択する。点渦系では、この状態遷移の過程で、準安定な解として渦結晶状態が実現する。

一方、 $m$  点爆発解は、ある正の整数  $m$  を選択すると、 $m$  に応じた  $m$  点爆発解が1個定まることを表す。この解は時間変化しない静的な解である。単一符号からなる点渦系では平衡状態でも有限の慣性モーメントを有することから、一定方向へ回転し続ける解が平衡解となるため、Nagasaki-Suzuki 解を実現するためには、粒子分布の内側と外側に境界が必要となる。しかし、正負渦が共存する系では、このような制限はなく、外側境界のみでも時間的に静的な解を実現できる。

そこで、我々は、単一符号系に対する解を与える Nagasaki-Suzuki 解を両符号系に拡張することを視野に入れた数値的研究を推進するに至った。

### 3. 研究の方法

平衡解へ系がどのように漸近していくか理解するためには、その緩和過程の定量的理解が必要である。そこで、我々は、以下のような問題設定を行い、緩和過程の理解に努めた。

- (1) 平衡点渦分布からの系の温度の決定
- (2) 拡散項とドリフト項の効果の数値的確認
- (3) H 関数を用いた緩和時間の測定

### 4. 研究成果

- (1) 平行点渦分布からの計の温度の決定

図1に、正負点渦系の代表的平衡分布を示す。

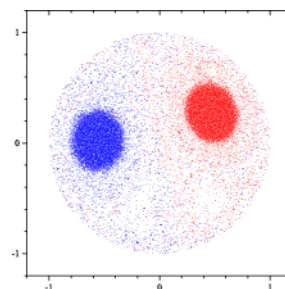


図1 平衡点渦分布 赤が正点渦、青が負点渦を表す。

各点渦のエネルギーを点渦がいる位置での流れ関数値として定義し、個々の点渦のエネルギーで整理した度数分布図を図2に示す。黒い線は正の点渦、赤い線は負の点渦を表す。まず、黒い正の点渦の特徴について検討する。各点渦のエネルギー  $\psi_i$  がある値  $\psi$  に一致するとき、そのエネルギー値に等しい正負点渦群の個数  $N_+$  及び  $N_-$  は、

$$N_{\pm}(\psi) \propto \exp(\mp \beta \Omega \psi)$$

(複号同順)という関係を満たす。すなわち、図2での傾きが逆温度 $\beta$ に比例しており、系の温度は負となっていることが確認できる。

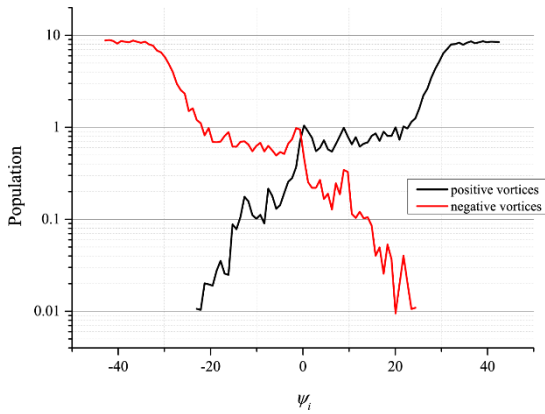


図2 点渦のエネルギーで整理した度数分布

図2は点渦の循環の正負により分類してある。分布との対応をとるために、クランプ内にある点渦とクランプ外にある点渦で分類した度数分布を図3に示す。

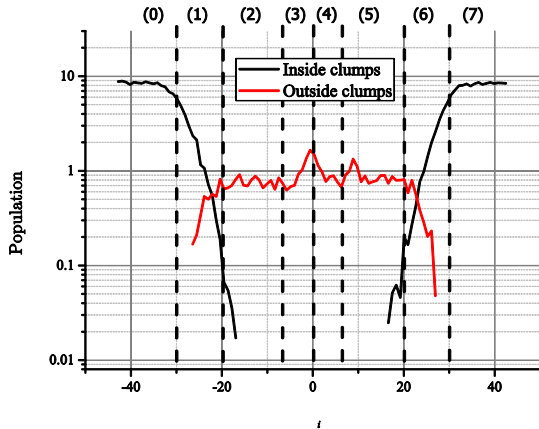


図3 エネルギーの分類

この図より、度数分布の両端のピークは、クランプに由来するものであることが確認できる。

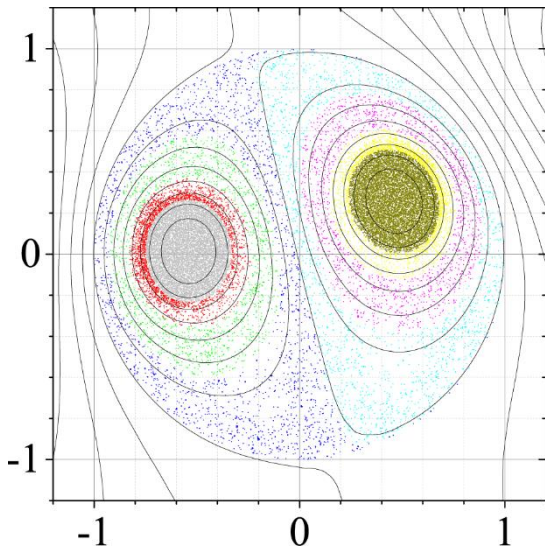


図4 エネルギー値ごとの粒子分布。同じ色の粒子は同じエネルギー

次に、エネルギーごとの粒子分布を詳細に検討するために、図3に示す通り、エネルギーを八つの部分に区切り、各部分ごとにどこに粒子がいるのかプロットした結果を図4に示す。負→正の順で、値が小さい方から順に、(1) 黄土色 (2) 黄 (3) シアン黒(灰色)、赤、緑、青、水色、シアン、黄、黄土色と色分けしている。

図3の左右両端で傾きがフラットになっている部分がクランプの中央部の分布に対応し、指数関数的な変化をしている(1)、(6)部分がフラット分布の外側に位置している。さらにその外側の(2)~(5)の領域にはクランプ粒子は存在せず、クランプ外粒子、すなわち背景粒子の分布がここに分類される。

(0)、(7)では $\beta = 0$ に対し、(1)、(6)では $\beta$ の値は有限値となっている。すなわち、(1)、(6)は熱平衡的な分布に近く、クランプ中央部はまだ十分に緩和していないという予想ができるだろう。我々が点渦系に対して導いたFokker-Planck型衝突項では、拡散項がクランプを崩す方向に作用するのに対し、ドリフト項はクランプを形成し正負渦を分離する働きがあることが分かっている。温度が有限ということはなんからの輸送現象が(1)、(6)では活発に行われていることを示唆しており、この領域で拡散項とドリフト項による粒子輸送が行われているのではないという予想の下、これを数値的に検討した。結果を図5に示す。

この図は、シミュレーション時刻 $T = 200$ においてクランプ外にいた粒子にラベリングを行い、この時点で背景に存在している粒子が他の時刻でどこにいるのかを調べた結果である。 $T = 200$ でクランプ内にいた粒子は、見やすくするため、プロットしていない。よって、クランプ部分が白抜きとなっている。一方、 $T = 50, 100, 150$ でのクランプは白抜きにはなっていない。 $T = 50, 100, 150$ で、クランプの濃度、すなわちクランプ内の粒子数が変化している。これらのことから、 $T = 50$ から $T = 200$ と時刻が進む間に、 $T = 50$ の時点でクランプ内にいた粒子はクランプ外へ輸送されるのに対して、 $T = 200$ の時点でクランプ内にいた粒子は、 $T = 200$ 以前にクランプ外にいた粒子がクランプ内へ輸送されていることを示している。これは、Fokker-Planck型衝突項の拡散項とドリフト項の効果を端的に現している結果である。

つぎに、系の緩和時間の粒子数依存性について数値的に検討した結果を示す。Fokker-Planck型衝突項による緩和時間 $t_R$ は、点渦当たりの循環を $\Omega$ として、

$$t_R \propto 1/\Omega$$

とスケールされる。一方、系のH関数の時間依存性は、

$$H(T) = H_0 + H_1 \exp(-T/t_R)$$

と書けるので、H関数の時間発展から系の緩和時間を計測することが可能である。H関数の時間発展結果を、図6に示す。

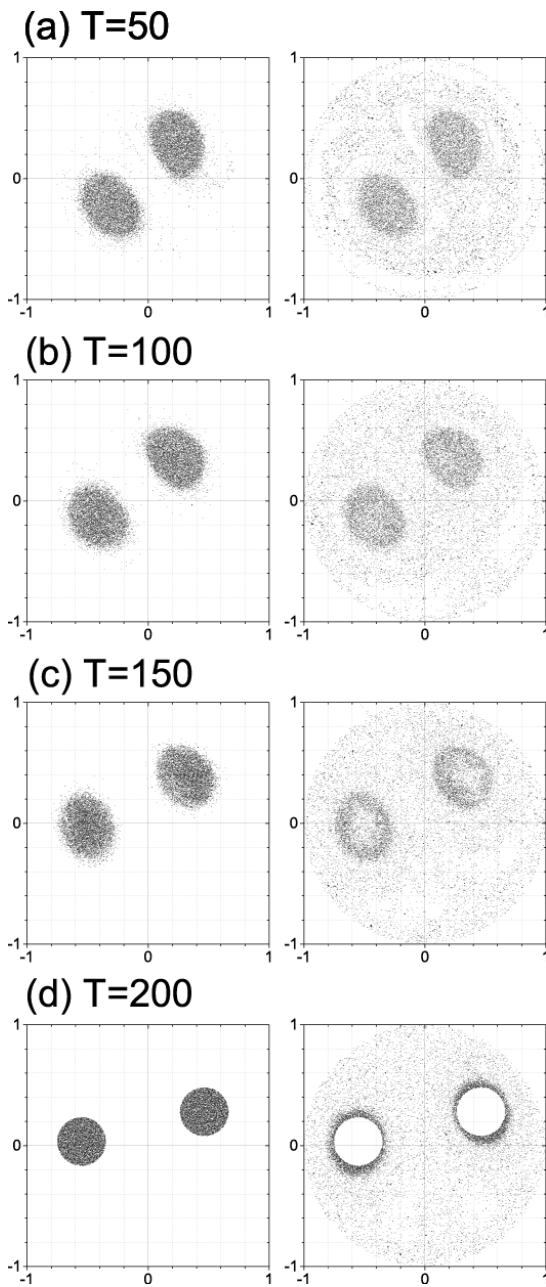


図5 T=200 でクランプ外にいた粒子が他の時刻でどこにいるのかを調査

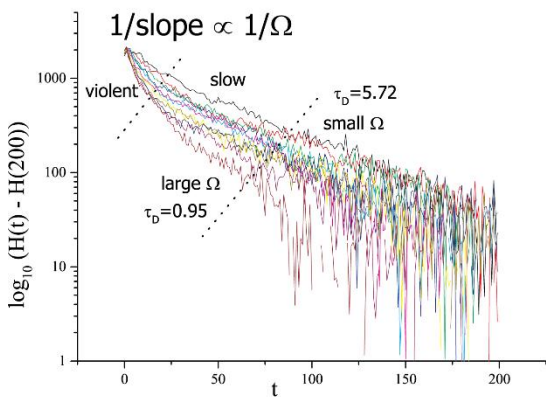


図6 様々な循環でのH関数の時間発展

図6の初期時刻近辺は、 $u \cdot \nabla \omega$ で駆動される

「速い緩和」である。その後、図4のような  $\omega = \omega(\psi)$  という関数関係がなりたつ状態になる。これは、 $u \cdot \nabla \omega = 0$  を意味し、点渦系は衝突項のみで緩和を続ける「遅い緩和」状態に入る。この時点でのH関数の傾きを調べると点渦の循環値  $\Omega$  に比例していることが確認でき、たしかに  $t_R \propto 1/\Omega$  というスケーリングが成り立っていることが確認できた。

H関数の時間変化を調べていく中で、系の対称性と緩和時間の関係で新たな発見があった。系はまず初めに速い緩和により、局所平衡状態に達した後、遅い緩和により熱平衡状態を目指す。この途上、対称性が高い分布に達すると、いままで知られていた遅い緩和よりもさらに遅い緩和をしているように見える場合があることをシミュレーションから発見した。結果を図7に示す。

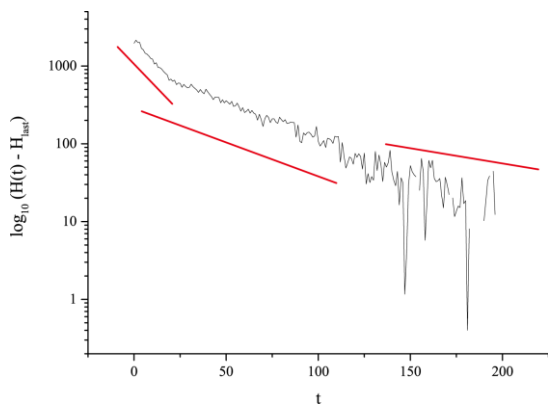


図7 速い緩和と、速めの遅い緩和、遅めの遅い緩和

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

1. Y. Yatsuyanagi, T. Hatori and P-H Chavanis: "Explicit formula of energy-conserving Fokker-Planck type collision term for single species point vortex systems with weak mean flow", Journal of the Physical Society of Japan, 84 (2015) 014402, 1-12. (査読有り)
2. Yuichi Yatsuyanagi, Megumi Ikeda and Tadatsugu Hatori: "Violent and slow relaxations to sinh-Poisson equilibrium state in two-dimensional point vortex system", Pacific Journal of Mathematics for Industry, 6 (2014) 3, 1-6. (査読有り)
3. 八柳祐一, 羽鳥尹承: 「2次元インバースカスケードのメカニズムを握るドリフト項」, 京都大学数理解析研究所講究録, 1885 (2014) 133-147. (査読無し)
4. 八柳祐一, 羽鳥尹承: 「2次元点渦系で、エネルギーを保存する Fokker-Planck 型衝突項」, 京都大学数理解析研究所講究録,

- 1919 (2014) 7-29. (査読無し)
5. Hiroshi Ohtsuka: "On some properties of mean fields of equilibrium vortices described by the Hamiltonian", Special issue of Fluid Dynamics Research (IUTAM Symposium on Vortex Dynamics) 46 (2014) 031422. (査読有り)
  6. 八柳祐一, 羽鳥尹承: 「2次元点渦系の粘性に関する考察～運動論的方程式での連続解と粒子解～」, 京都大学数理解析研究所講究録, 1776 (2012) 163-173. (査読無し)
  7. Yuichi Yatsuyanagi, Tadatsugu Hatori: "Analytical derivation of diffusion coefficient of two-dimensional point vortex system with Klimontovich formalism", RIMS Kokyuroku, 1798 (2012) 101-106. (査読無し)
- [学会発表] (計 18 件)
1. Yuichi YATSUYANAGI, Tadatsugu HATORI: "Self-organization mechanism in two-dimensional point vortex system", The 11th International Workshop on Non-Neutral Plasmas, Sunport Takamatsu (香川県・高松市), Dec. 4th (2014).
  2. 八柳祐一, 羽鳥尹承, 曾我之泰: 「Fokker-Planck 型衝突項を有する運動論的方程式による純電子プラズマの緩和過程の理解」, Plasma Conference 2014 (日本物理学会(領域 2)2014 年秋季大会), 朱鷺メッセ(新潟県・新潟市), 2014 年 11 月 20 日
  3. 八柳祐一, 羽鳥尹承: 「2次元点渦系での H 定理の数値的検討」, 日本流体力学会年会 2014, 東北大学川内北キャンパス(宮城県・仙台市), 2014 年 9 月 16 日
  4. 八柳祐一, 羽鳥尹承: 「2次元点渦系での H 定理の数値的検討」, 日本物理学会 2014 年秋季大会, 中部大学春日井キャンパス(愛知県・春日井市), 2014 年 9 月 7 日
  5. 八柳祐一, 羽鳥尹承: 「Fokker-Planck 型衝突項で特徴付けられる負温度点渦系の熱平衡解」, 日本物理学会第 69 回年次大会, 東海大学湘南キャンパス(神奈川県・平塚市), 2014 年 3 月 28 日
  6. 大塚浩史: 「点渦系の正則化と平均場方程式」, 北陸応用数理研究会 2014, 金沢大学角間キャンパス(石川県・金沢市), 2014 年 2 月 13 日
  7. 八柳祐一, 羽鳥尹承: 「点渦系でのインバースカスケードとフリクション項の関係」, 日本物理学会 2013 年秋季大会, 徳島大学常三島キャンパス, 2013 年 9 月 25 日
  8. 八柳祐一, 羽鳥尹承: 「点渦系でのインバースカスケードとフリクション項の関係」, 日本流体力学会年会 2013, 東京農工大学小金井キャンパス, 2013 年 9 月 12 日
  9. Yuichi YATSUYANAGI, Tadatsugu HATORI: "Explicit Formula of Energy conserving Fokker-Planck-type Collision Term for Double-species Point Vortex System", The 14th European Turbulence Conference, ENS de Lyon, Lyon(France), Sep. 1st (2013).
  10. Hiroshi Ohtsuka: "On some mathematical role of the Hamiltonian of vortices", The 14th European Turbulence Conference, ENS de Lyon, Lyon(France), Sep. 1st (2013).
  11. 八柳祐一, 羽鳥尹承: 「2次元インバースカスケードのメカニズムを握るドリフト項」, RIMS 共闘研究「長距離力に支配された多体系自己組織化の統一的理解を目指して」, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市), 2013 年 6 月 21 日
  12. 大塚浩史: 「2次元ゲルファント問題における爆発解析と点渦系のハミルトニアン」, RIMS 共闘研究「長距離力に支配された多体系自己組織化の統一的理解を目指して」, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市), 2013 年 6 月 21 日
  13. 八柳祐一, 池田恵, 羽鳥尹承: 「異なる温度の部分系から構成される負温度点渦系の平衡分布」, 日本物理学会第 68 回年次大会, 広島大学東広島キャンパス, 2013 年 3 月 27 日
  14. Yuichi YATSUYANAGI, Megumi IKEDA, and Tadatsugu HATORI: "Observation of locally different temperature for equilibrium two-dimensional point vortex system", IUTAM Symposium on Vortex Dynamics: Formation, Structure and Function, Centennial Hall, Kyushu University School of Medicine (福岡県・福岡市), Japan, Mar. 11th, (2013).
  15. Hiroshi Ohtsuka: "On Some Properties of Mean Fields of Equilibrium Vortices Described by the Hamiltonian of Vortices", IUTAM Symposium on Vortex Dynamics: Formation, Structure and Function, Centennial Hall, Kyushu University School of Medicine (福岡県・福岡市), Japan, Mar. 11th, (2013).
  16. Yuichi YATSUYANAGI, Megumi IKEDA, and Tadatsugu HATORI: "Equilibrium state for two-dimensional point vortex system with multiple temperatures", JSST2012 International Conference on Simulation Technology, Integrated Research Center, Kobe Univ.(兵庫県・神戸市), Japan, Sep. 28th, (2012)
  17. 八柳祐一, 羽鳥尹承: 「点渦系におけるエ

エネルギー保存則を破らない拡散効果」, 日本物理学会 2012 年秋季大会, 横浜国立大学常盤台キャンパス(神奈川県・横浜市), 2012 年 9 月 21 日

18. 八柳祐二, 池田恵, 羽鳥尹承: 「2 次元点渦系の点渦分布に基づいた温度の決定」, 日本流体力学会年会 2012, 高知大学朝倉キャンパス(高知県・高知市), 2012 年 9 月 16 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況(計 0 件)

○取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~eyyatsu>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

八柳 祐一 (Yuichi Yatsuyanagi)

静岡大学・教育学部・准教授

研究者番号: 30287990

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者

羽鳥 尹承 (Tadatsugu Hatori)

神奈川大学・理学部・非常勤講師

研究者番号: 80023729

柳沢 卓 (Taku Yanagisawa)

奈良女子大学・理学部・教授

研究者番号: 30192389

大塚 浩史 (Hiroshi Ohtsuka)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号: 20342470