

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 6 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540399

研究課題名(和文) 次元無限および有限ボーズ粒子系の数理とその応用

研究課題名(英文) Theory and application of mathematical analysis on 1D Bose systems

研究代表者

鈴木 淳史 (Suzuki, Junji)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：40222062

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：無限および有限次元空間上のボーズ粒子系の量子相関、およびそこから派生する様々な数理的問題に関して、量子転送行列法および厳密WKB法を組み合わせた解析法を構築し、厳密かつ定量的な結果を得た。特にボーズ系に連続極限で一致する高スピン模型に対してその相関関数を顕わに求め、その背後にあるリーマンのゼータ関数との非自明な対応を見出した。またボーズ対称性を拡張した超対称性をもつ広い系に対して、その熱平衡状態を決定する熱力学的ベテ仮設方程式の解を具体的に求める事に初めて成功した。これらの結果を異方的ハイゼンベルグ模型の動力学に応用し、平衡にいたる3つの時間領域の存在を予言した。

研究成果の概要(英文)：We have developed an analytic framework to deal with mathematical problems arising from the quantum correlations in one dimensional Bose system and related models of finite and infinite size. It combines the method of quantum transfer matrix and the exact WKB method. We have obtained exact, concrete and quantitative results in various physical systems. In particular we have analyzed correlation functions in higher spin chains which reduces to the Bose system in a scaling limit. Then a hidden link between this physical system and the Riemann's zeta function has been found. We also analyzed the so called thermodynamic Bethe ansatz for the wider class of supersymmetric systems which generalizes the Bose system. We have found analytic solutions to these equations for the first time. By applying this machinery, we predict theoretically the existence of three different time regimes in the dynamics of anisotropic Heisenberg spin chains.

研究分野：統計力学

キーワード：量子相関 可積分系 量子転送行列法 厳密WKB法 フレッドホルム行列

1. 研究開始当初の背景

(1) 可積分系の波動関数の取り扱いに関して、目覚ましい進展があり、形状因子の厳密な取り扱いが可能となり、量子相関の強い系に関する理論的な枠組みが形成されつつあった。実験的にも、Feshbach 共鳴を利用した技術の進歩により、理想的な一次元の粒子間相互作用の詳細まで操作する事が可能となった。とくに一次元ボーズ粒子系はボーズ凝縮・超伝導クロスオーバーといった実験から、ランダム媒質中の有向ポリマー模型や、非対称排除過程などの統計力学の基礎的な問題まで様々な分野と関係して多くの興味を呼んでいた。これらの問題では、それまで多分にアカデミックであった波動関数に関する詳細な情報や系のサイズ、粒子密度、相互作用などに対する、より多様なパラメータ領域での深い理解が要求された。

(2) これらの問題では、可積分な構造が背後にあったとしても、ベータ根に対する密度関数を用いる従来の手法が通用しない。そこで有限個のベータ根の数値計算と組み合わせる折衷的な解析等がケースバイケースで行われていた。計算の妥当性は、総和則を満たす割合などで推測する他、適当な手段が存在しなかった。

(3) 量子群に関する研究の進展により、この状況がわかりつつあった。とくに神保・三輪および彼らの共同研究者によりゼロ温度、ゼロ磁場における短距離相関に関して、新しい定量的方法論が提案された。さらにフランス・リヨングループによりフレッドホルム行列式を用いた形状因子の新しい表現法が提案され、形式的には問題の解決に前進した。しかしながらそれらの表式は十分実用的であるとはいえず、新たな定量的評価のスキームが求められていた。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、これらの発展に基づき、量子転送行列の方法及び DdV 方程式と呼ばれている非線形方程式とそれに基づく完全 WKB 法を組み合わせる事により、一次元量子可積分系における量子相関を統一的に取り扱う新しい方法論を構築する事を目的とする。

(2) その具体的な応用として、無限および有限系で定義されたボーズ粒子系およびそこから派生する高スピン系や $1+1$ 次元有向き高分子の多点相関を定量的に評価し、さらにレプリカの統計的性質に対する定量的な解析を行う事を目的とする。

3. 研究の方法

(1) 松原グリーン関数による定式化を用いると有限温度における量子系の相関関数を直接取り扱うためには、摂動論に頼らざるをえない。本研究では厳密な評価を目的としているので、この方法は取り上げない。かわりに鈴木によって提唱された量子転送行列の

方法を採用した。これは仮想的な次元を新たに導入することにより、有限温度一次元量子系の問題を、有限サイズ二次元古典系の問題としてとらえ直すものである。

(2) このため有限系の問題を厳密に取り扱う必要が生じるが、これは一般に大変困難な作業である。そこで、適当な補助関数を導入する事によりベータ方程式を直接解く必要無しに定量的評価を行う、というアイデアを用いる。ここでベータ方程式の代わりに中心的な役割を果たすのが補助関数の解析性である。微分方程式の解析において独立に発見されていた完全 WKB 法を適用する事により、これらの補助関数を、厳密かつ高精度に評価した。

(3) 補助関数を用いても、結果は一般に結合した複雑な経路積分で書かれるため、そのままでは定量的な評価には適さない。そこで我々の先行研究および神保・三輪らによって解明された有限温度での隠れたグラスマン性を利用し、相関関数の因子化の方法を行った。これにより結果は Mathematica や Fortran などの汎用プログラムを用いて定量的に評価することが可能となった。

4. 研究成果

2 で述べたように本来ボーズ系の量子相関の解析を目指した研究であったが、以下の(1)で説明する高スピン模型の解析に多大な時間を費やし、これを遂行する間に、他グループにより、ボーズ粒子系の長時間多点相関に関する結果が発表されてしまった。また、研究提案の後、より統計力学の根幹に関わる孤立量子系の緩和が大きな話題をよんだため、そちらへの応用を視野にいれ、2年目以降はスピン系の量子相関に重点を移して研究を行った。以下はそこから得られた成果である。

(1) 高スピン模型の相関関数 (文献 5))
ボーズ系は連続時空で定義されているため、同一点での作用積の定義等、微妙な問題を含んでいる。そこでこれらの問題を含まないハイゼンベルグ磁性模型の拡張である高スピン模型の相関関数に関する研究を行った。高スピン模型は、そのスピンの大きさと交換相互作用の強さをスケールリングすることによりボーズ粒子系に帰着する事が知られており、同じユニバーサリティクラスに属する事が期待できる。ハイゼンベルグ模型に関しては、我々の以前の研究により指摘されたように、隠れたグラスマン性が有限温度でも存在し、相関関数の因子化が得られる。これに関しては量子還元 KZ 方程式を利用した議論により温度ゼロでは神保らによって自然な理解が与えられた。一方、高スピン模型に対する量子還元 KZ 方程式が存在しないため因子化のメカニズム自体が非自明である。そこで inhomogeneity とよばれるパラメータを利用する事により離散的な点でのみ成立する密度行列要素間の関数等式を導き、近接格子間

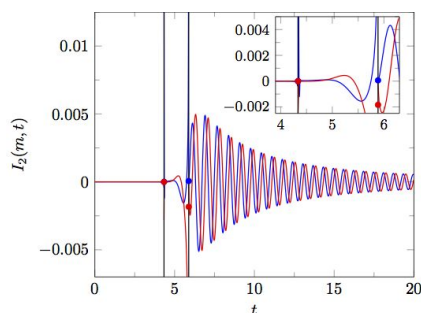
の相関関数は、これにより決定できる事を示した。さらに Fusion と呼ばれる代数的方法を用いる事により、次近傍格子点までのすべての量子相関を任意の温度において高精度に定量評価を行う事に成功した。また副次的な発見としてゼロ温度の極限に関する考察により、半整数スピンの相関関数は奇数の引数をもつリーマンのゼータ関数で、また整数スピンの相関関数は偶数の引数をもつリーマンのゼータ関数で記述される事がわかった。この極めて数論的な関数が何故量子相関の問題に現れるのか、その本質的な理由は不明である。

(2) 超対称系での熱力学的ベータ仮説の解と散乱振幅(文献^{3, 4})

ボーズ粒子系の一点関数を求める事を試みたが技術的な問題に直面したため、対称性をさらに高めた超対称系に関して一点関数の評価を行った。後者のモデルは、一見複雑であるが、その高い対称性に起因する様々な「良い」性質を持っている事が知られている。特に2つの超電荷をもつ $N=2$ と呼ばれる超対称量子系に対して、その熱平衡状態を決定する熱力学的ベータ仮説に関する解析を行った。以前の研究より線形微分方程式系と可積分構造の間には非自明な対応が存在する事がわかっており(ODE/IM 対応)、この問題はその具体的な応用に適している事が明らかになった。解は具体的にベッセル関数およびその自然な拡張で書かれる。熱力学的ベータ仮説の非自明な解はほとんど存在しておらず、希少な例を得る事ができた。また重力/ゲージ理論対応を応用する事により4つの超電荷をもつ $N=4$ と呼ばれる超対称量子でのグルーオン散乱振幅を求める問題は、ある種の極小平面を求める問題に帰着できるが、ODE/IM 対応における量子ロンスキアンとよばれる技法が有用である事を見だし定量的な解析を行った。

(3) ゼロ温度スピン形状因子(文献^{1, 2})
スピン $1/2$ の反磁性的 XXZ 模型に関して、その形状因子を厳密な表式を導く事に成功した。ゼロ磁場の場合、すでに頂点作用素を用いた結果が存在するが、我々の表式は有限磁場の場合でも有効であり、より適応範囲の広いものとなっている。前者の表式は複雑な積分経路にそった多重積分を含んだ物であるが、我々の表式はフレッドホルム行列式により記述され、異なったものとなっている。多重積分の高精度な数値計算は一般に困難であるが、フレッドホルム行列式の定量評価はすでにスキームが完成されており、容易に実行可能であった。頂点作用素からの表式で比較的结果が簡単化される場合に関して、数値的な比較を行い、誤差の範囲で両者が一致する事を確かめた。さらにこの結果をダイナミクスおよび多点相関の評価に応用した。まずスピン系の情報伝搬限界速度に対して厳密な評価を与え、形状因子展開の鞍部点との関係を明らかにした。さらに高い励起を考

えると、問題はある近似のもとで有向き高分子の多点相関の漸近評価の問題に帰着する事もできる。その意味で本来の研究目標であるボーズ粒子系の相関にも知見を加える事ができたといえる。また、一般に分散性のある媒質中での光の伝搬と全く同様に、量子スピンの情報伝達も¹ 静的時間領域² precursor のみ伝達する時間領域³ 全波長領域より寄与のある時間領域、の3つに分類する事ができ(下図参照) それぞれの領域端で異常な振舞いが現れる事を理論的に予言した。



この結果は Editor より IOP Select に選出された。

以上のように当初予定したボーズ粒子系に関わる直接的な結果を得る事はできなかったが、量子系の厳密な緩和ダイナミクスに関する研究の基礎を築く事ができ、その意味で現在の研究課題である量子クエンチ系の研究につなげる結果が得られたと考える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

1 M.Dugave, F.Goehmann, K.K.Kozlowski and J.Suzuki, "Asymptotics of correlation functions of the Heisenberg-Ising chain in the easy-axis regime", J.Phys.A Math.Theor. 査読あり Vol. **49** (2016) 07LT01, 11pp, DOI:10.1088/1751-8113/49/7/07LT01

2 M.Dugave, F.Goehmann, K. K.Kozlowski and J.Suzuki, "On form-factor expansions for the XXZ chain in the massive regime", JSTAT 査読あり(2015) **P05037** DOI:10.1088/1742-5468/2015/05/P05037

3 J.Suzuki, "Elementary functions in thermodynamic Bethe ansatz", J.Phys.A 査読あり Vol. **48** (2015) 205204 (27pp), Doi:10.1088/1751-8113/48/20/205204

4 Y.Hatsuda, K.Ito, Y.Satoh and J.Suzuki

``Quantum Wronskian approach to six-point gluon scattering amplitudes at strong coupling", JHEP 査読あり Vol. 08 (2014)162, DOI: 10.1007/JHEP08(2014)162

5 A. Klumper, D. Nawrath and J. Suzuki
``Correlation functions of the integrable isotropic spin-1 chain : algebraic expressions for finite temperature"
JSTAT 査読あり (2013) P08009, 1-38
DOI:10.1088/1742-5468/2013/08/P08009

[学会発表](計 10 件)

1 Junji Suzuki,

``Correlation functions of the Heisenberg-Ising chain"
("Baxter 2015: Integrability and Beyond",
2015 7/19-7/25 ケアンズ(オーストラリア))

2 Junji Suzuki,

``Form factor expansion of the correlation functions of the 1/2 XXZ model in a massive regime"
("Aspects of Integrability in Mathematics and Physics", 2015 3/9-3/11 大阪市立大学 (大阪市))

3 Junji Suzuki,

``Elementary functions in N=2 SUSY TBA",
("Integrability in gauge-gravity duality and strong coupling dynamics of gauge theory", 2014 9/22-9/23 京都大学(京都市))

4 Junji Suzuki,

``Correlations in massive phase"
(Recent Advances in the Theory of Quantum Integrable Systems, 2014 9/1-9/5 Dijon(フランス))

5 Junji Suzuki,

``Elementary functions in TBA",
(Integrable lattice models and quantum field theories, 2014 6/28-7/2 Bad Honnef (ドイツ))

6 Junji Suzuki

`` Applied ODE/IM" ("Infinite Analysis 2014", 2014 3/3-3/7 東京大学(東京))

7 Junji Suzuki

`` Correlation functions of higher spin chains" ("Correlation functions of quantum integrable models", 2013 9/4-9/6 Dijon (フランス))

8 Junji Suzuki

``Quantum spin chains at arbitrary temperatures" ("Integrability in Quantum and Statistical Systems", 2013 8/7-8/9,

台北(台湾))

9 Junji Suzuki

`` Factorization of density matrix elements of higher spin chains at finite temperatures" ("Mathematical Statistical Physics", 2013 7/29-8/3 京都大学(京都市))

10 Junji Suzuki

``Correlations in spin chains at finite temperature", ("Integrability & CFT", 2013 7/18-7/20, Seoul (韓国))

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~sjsuzuk/js-shizuoka-japanese.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 淳史 (SUZUKI Junji)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号: 40222062

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: