

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 13 日現在

機関番号：13801

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25610003

研究課題名(和文) 多元環の2圏論的被覆理論

研究課題名(英文) 2-categorical covering theory for algebras

研究代表者

浅芝 秀人 (Asashiba, Hideto)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：70175165

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)： $k$ を可換環， $I$ を $k$ 小圏， $G$ を群とする。1.  $k$ 小圏全体を対象，それらの上の両側加群を1射とする倍圏を $k\text{-Catb}$ で表す。ラックス関手 $X:I \rightarrow k\text{-Catb}$ の"加群圏" $\text{Mod } X$ とその"導来圏" $D(\text{Mod } X)$ というラックス関手を自然に定義し、ラックス関手 $X$ 達の間で導来同値の概念を定義し、2つのラックス関手 $X, X':I \rightarrow k\text{-Catb}$ が導来同値であれば、それらのグロタンディーク構成 $\text{Gr}(X)$ と $\text{Gr}(X')$ も導来同値となることを証明した。2.  $k$ 小圏上の両側加群に対する被覆理論を構築した。3.  $G$ 次数付き $k$ 小圏 $R$ と $S$ の導来同値からスマッシュ積 $R\#G$ と $S\#G$ の導来同値が導かれるための十分条件を求めた。

研究成果の概要(英文)：We fix a commutative ring  $k$ , a small  $k$ -category  $I$  and a group  $G$ . 1. We denote by  $k\text{-Catb}$  the bicategory of all small  $k$ -categories with bimodules over them as 1-morphisms. We gave a natural definitions of "module category"  $\text{Mod } X$  and "derived category"  $D(\text{Mod } X)$  of a lax functor  $X:I \rightarrow k\text{-Catb}$  as lax functors, and defined a notion of derived equivalences between lax functors  $X$ . We proved that if lax functors  $X, X':I \rightarrow k\text{-Catb}$  are derived equivalent, then so are their Grothendieck constructions  $\text{Gr}(X)$  and  $\text{Gr}(X')$ . 2. We established a covering theory for bimodules over small  $k$ -categories. 3. For  $G$ -graded small  $k$ -categories  $R$  and  $S$  that are derived equivalent, we gave a sufficient condition for the smash products  $R\#G$  and  $S\#G$  to be derived equivalent.

研究分野：数学

キーワード：被覆 グロタンディーク構成 スマッシュ積 導来同値 2圏 軌道圏 両側加群

### 1. 研究開始当初の背景

(1) P.Gabriel, C.Riedtmann 等によって多元環の表現論に導入された被覆理論は、複雑な加群圏構造を持つ多元環をより単純な加群圏構造を持つものに帰着させる方法の1つとして、現在非常に重要な道具となっている。研究代表者は、この理論を導来同値にも使えるように改良し、1999年の論文で有限表現型自己入射の多元環を導来同値のもとで分類することに成功した。古典的な定式化では実用の目的上、圏および群作用に対して非常に強い条件が課されていたが、これらは加群圏やその導来圏では満たされず、群作用に対する条件も満たされない場合が多い。そのためこのような場合、被覆理論を直接適用することができなかつた。

(2) この困難は2011年の論文で克服されたが、その代わり関手の間の自然同型を考える、2圏論的な枠組みを導入することになった。研究代表者は、これを発展させ、群の作用を小圏のコラックス作用に一般化し、2012年の論文において導来同値のための2圏論的被覆の基礎理論を構築し、次の定理を証明した：「小圏Iからのコラックス関手X, X': I kCat が自然に拡張した意味で導来同値であれば、それらのグロタンディーク構成Gr(X)とGr(X')も導来同値となる。」ただし、kは可換環、kCatはk小圏全体のなす2圏である。これにより、導来同値を「貼り合わせる」ことが可能になった。研究目的の問題は、この定理の逆がどのような場合に成り立つかを問うものである。

### 2. 研究の目的

群Gは、ただ1つの対象\*をもつ圏とみなすことができるが、圏Iがこの意味で群Gであり、Xが関手であるとき、XはG作用をもつ圏C:=X(\*)と同一視できる。またこのとき、Gr(X)とは、軌道圏C/Gに他ならない。したがって上の問題は、群Gからの作用を持つk圏C, C'に特殊化すると、それらの軌道C/GとC'/Gが導来同値であるとき、いつCとC'が導来同値になるかを調べる問題となる。研究の目的は、この問題を解くことである。

### 3. 研究の方法

(1) これまで、多元環の被覆の研究に2圏論的手法は、全く用いられて来なかつた。しかし、被覆を厳密に取り扱うためには2圏論的な概念である自然変換の族が必要であり、対象が互いに同値であることを定義するためにも2圏の構造が必要であるため、被覆理論の研究には、2圏論的考察は不可欠なものであることがわかる。

(2) 他方、2011年の研究により、群Gの作用を持つk圏Cに対して、軌道圏C/Gは自然にG次数付きk圏になる。また一般に、G次数付きk圏Bに対してスマッシュ積B#Gが定義され、これはG作用を持つ圏になる。このことを用いると、G作用を持つ圏(C/G)#Gが定

義されることがわかる。さらに、(C/G)#GはもとのCとG作用を持つ圏として同値になることも示されている。したがって、目的とする問題を解くには、(B=C/Gとみることにより)次の問題が解ければよいことがわかる：「G次数付きk圏BとB'が導来同値であるとき、どのような条件があれば、B#GとB'#Gが導来同値になるか。」本研究は、このように2圏論的手法とスマッシュ積を用いる。

### 4. 研究成果

以下、kを可換環、Iをk小圏、Gを群とする。  
(1) 群Gの線型圏Cへの作用は、群から線型圏全体のなす2圏k-Catへの関手Xと見ることができ、その場合、軌道圏C/Gは、Xのグロタンディーク構成Gr(X)と一致するが、これを、圏Iからk-Catへの反転ラックス関手Xに拡張して、これまで考察してきた。しかしこのGr(X)の形では、三角多元環やspeciesのテンソル多元環として与えられる圏を実現することができない。2圏k-Catのかわりに、その1-射を両側加群に取り替え、2-射を両側加群の間の準同型に取り替えて得られる倍圏k-Catbを考え、Gr(X)の定義をラックス関手X: I k-Catbにまでうまく拡張すれば、この不備を補うことができることが分かった。

そこでまず、ラックス関手I k-Catbの全体に2圏構造を与え2圏Lax(I, k-Catb)を構成した。さらに、グロタンディーク構成を2関手Gr: Lax(I, k-Catb) k-Catに拡張し、これが対角2関手: k-Cat Lax(I, k-Catb)の左随伴であることを示した。G被覆の一般化としてI被覆を定義し、上の随伴のユニットが自然なI被覆X (Gr(X))を与えることを示した。

ラックス関手X: I k-Catbの「加群圏」Mod Xとその「導来圏」D(Mod X)というラックス関手を自然に定義し、ラックス関手X達の間に導来同値の概念を定義した。

2つのラックス関手X, X': I k-Catbが互いに導来同値であれば、それらのグロタンディーク構成Gr(X)とGr(X')も導来同値となる、という圏作用のもとでの被覆理論の主定理を証明した。

この定理は、導来同値を構成する非常に一般的な道具であるため、今後広く応用されることが期待される。

(2) R, SはG作用をもつk小圏, A, BはG次数付きのk小圏であるとする。このとき、軌道圏R/G, S/GはG次数付きのk小圏であり、スマッシュ積A#G, B#GはG作用をもつk小圏であることに注意する。まず、G-不変S-R-両側加群とG次数付きのB-A-両側加群を定義した。次にG-不変S-R-両側加群Mに対して、その軌道両側加群M/GをG次数付きの(S/G)-(R/G)-両側加群として定義し、G次数付きのA-B-両側加群Mに対して、そのスマッシュ積両側加群M#GをG-不変(B#G)-(A#G)-両側加群として定義した。

前者の構成を,  $G$ -不変  $S$ - $R$ -両側加群の圏  $S\text{-Mod}(G)\text{-}R$  から  $G$  次数付きの  $(S/G)\text{-}(R/G)\text{-}$  両側加群の圏  $(S/G)\text{-Mod}[G]\text{-}(R/G)$  への関手  $(-/G)$  に拡張し, 後者の構成を,  $B\text{-Mod}[G]\text{-}A$  から  $(B\#G)\text{-Mod}(G)\text{-}(A\#G)$  への関手  $(-\#G)$  に拡張した。

自然な圏同値  $R$   $(R/G)\#G$  と  $(A\#G)/G$   $A$  によって  $S\text{-Mod}(G)\text{-}R$  と  $((S/G)\#G)\text{-Mod}(G)\text{-}((R/G)\#G)$  を同一視し,  $((B\#G)/G)\text{-Mod}[G]\text{-}((A\#G)/G)$  と  $B\text{-Mod}[G]\text{-}A$  を同一視すると,  $(-/G)$  と  $(-\#G)$  は互いに擬逆な圏同値になることを示した。

これらの圏同値はテンソル積と相性がよく, 森田型安定同値についての定理が得られる。以上のことを両側加群の複体に拡張した。これにより, 標準的導来同値について本研究の目指している問題が解ける。

以上によって両側加群についての被覆理論ができたことになる。これは今後, 多元環の両側加群としての射影分解に適用することにより, 多元環の周期性やホッホシルト・コホモロジーの研究に応用できることが期待される。

(3)  $R, S$  は  $G$  次数付きの  $k$  小圏とする。

どのような場合に  $R$  と  $S$  の導来同値から  $R\#G$  と  $S\#G$  の導来同値を導くことができるか, というこの研究課題の最初の目標に対する 1 つの解答を得ることができた。すなわち,  $R$  に対する傾部分圏  $P$  で  $G$  次数付け可能なものがあり, それを  $G$  次数付けしたものが,  $G$  次数付き小圏のなす 2 圏  $G\text{-GrCat}$  のなかで  $S$  と同値になれば, スマッシュ積  $R\#G$  と  $S\#G$  は導来同値となることを証明した。

$k$  が代数的閉体の場合に 2-圏論的被覆理論を応用して次のことを証明した。三角圏  $T$  が局所台有限な自己入射多元圏  $R$  の安定加群圏に三角同値であり,  $R$  の自己同型  $g$  の生成する群  $G$  が  $R$  に自由に作用していれば,  $T$  の自己同値  $g'$  をうまくとって, 標準被覆  $T$   $T/g'$  が三角関手となるような三角圏の構造を  $T/g'$  に入れ,  $T/g'$  が  $R/G$  の安定加群圏と三角同値になるようにできる。

この定理の簡単な応用として,  $k$  が代数的閉体の場合, 標準的有限表現型自己入射多元環 に対して, ディンキン型クイパー  $Q$  と,  $kQ$  の有界導来圏  $D$  の自己同値 をうまくとると, 軌道圏  $D/$  が の安定加群圏と三角同値になるようにできる, という Grimeland と Jacobsen の定理(場合分けを用いた長い議論で証明されていた) に対して, 簡単に統一的な別証明を与えた。以上は 2 圏論的被覆理論の簡単な応用であるが, 最初はこのような応用があることは予期していなかった。

$S$ - $R$ -両側加群と  $R$ - $S$ -両側加群の対  $(M, N)$  が  $G$ -不変な森田型特異同値を与えるためには,  $S/G$ - $R/G$ -両側加群と  $R/G$ - $S/G$ -両側加群の対  $(M/G, N/G)$  が  $G$ -次数付きの森田型特異同値を与えることが必要十分であることを証明した。この証明で用いた方法により, 射影分解に対して被覆理論が応用できるようになる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

[1] Asashiba, Hideto: Cohen-Montgomery duality of bimodules and its applications to equivalences given by bimodules, Proceedings of the 48<sup>th</sup> Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 査読無, 48(2016), 25-32.

URL: <http://fuji.cec.yamanashi.ac.jp/~ring/oldmeeting/2015/report2015/48report.html>

[2] Asashiba, Hideto: A generalization of Gabriel's covering functors II: 2-categorical Cohen-Montgomery duality, Applied Categorical Structures, 査読有, 巻未定(2016)ページ未定.

DOI: 10.1007/s10485-015-9416-9

[3] Asashiba, Hideto and Kimura, Mayumi: Derived equivalence classification of generalized multifold extensions of piecewise hereditary algebras of tree type, Algebra Discrete Math., 査読有, 19 (2015), no. 2, 145-161.

URL: <http://adm.luguniv.edu.ua/>

[学会発表](計 33 件)

[1] Asashiba, Hideto: Cohen-Montgomery duality for bimodules, Tsinghua Seminar on Algebra, 2016 年 5 月 5 日, 精華大学, 北京(中国).

[2] Asashiba, Hideto: Cohen-Montgomery duality for bimodules, Forum at Beijing Jiaotong University, 2016 年 5 月 4 日, 北京交通大学, 北京(中国).

[3] Asashiba, Hideto: A simple application of a 2-categorical covering theory to a construction of triangulated orbit categories, Seminar on Algebra, 2016 年 4 月 29 日, 北京師範大学, 北京(中国).

[4] Asashiba, Hideto: Gluing of derived equivalences with bimodules, Seminar on Algebra, 2016 年 4 月 28 日, 首都師範大学, 北京(中国).

[5] Asashiba, Hideto: Gluing of derived equivalences by functors, Seminar on Algebra, 2016 年 4 月 26 日, 北京交通大学, 北京(中国).

[6] Asashiba, Hideto: Derived equivalences of actions of a category, 2016 年 4 月 26 日, 北京交通大学, 北京(中国).

[7] Asashiba, Hideto: The smash product of Brauer graphs with group weights and Brauer permutations, Workshop on Brauer graph algebras, 2016 年 3 月 21 日, University of Stuttgart, Stuttgart (ドイツ).

[8] Asashiba, Hideto: A simple application of a 2-categorical covering theory to a construction of triangulated orbit categories, Seminar on Algebra, 2016年3月8日, University of Stuttgart, Stuttgart (ドイツ).

[9] Asashiba, Hideto: Cohen-Montgomery duality for bimodules and its application to stable equivalences of Morita type, Seminar on Representation Theory, 2016年9月21日, IPM-Isfahan, Isfahan (イラン).

[10] Asashiba, Hideto: Cohen-Montgomery duality for bimodules and its application to equivalences given by bimodules, 7<sup>th</sup> China-Japan-Korea International Conference on Ring Theory, 2015年7月2日, 浙江工科大学, 浙江省杭州市(中国).

[11] Asashiba, Hideto: Gluing of derived equivalences with bimodules, 16<sup>th</sup> International Conference on Representations of Algebras, 2014年8月29日, 三亜(中国).

[12] Asashiba, Hideto: Lax functors of bicategories and derived equivalences with application to triangular matrix algebras, Seminar on Representation Theory of Algebras, 2013年6月21日, University of Bielefeld, Bielefeld (ドイツ).

[13] Asashiba, Hideto: Derived equivalences and 2-categorical covering theory (gluing of derived equivalences), Seminar on Representation Theory of Algebras, 2013年6月12日, University of Bonn, Bonn (ドイツ).

[14] Asashiba, Hideto: Gluing of derived equivalences by Grothendieck constructions, Recent Trends in Rings and Algebras, 2013年6月3日, University of Murcia, Murcia (スペイン).

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~shasash/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

浅芝 秀人 (ASASHIBA Hideto)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：70175165

### (2) 研究分担者

なし ( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

伊山 修 (IYAMA Osamu)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号：70347532

玉木 大 (TAMAKI Dai)

信州大学・理学部・教授

研究者番号：10252058