統合的・発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形指導

統合的・発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形指導

加藤健二*・杉山篤史*・熊倉　啓之**

Geometry Teaching to Em*p*hasize Develo*p*ment of Thinking Com*p*rehensively and Ex*p*ansively in Junior High School

Kenji KATO, Atsushi SUGIYAMA, Hiroyuki KUMAKURA

要旨

本研究は，中学校数学科における統合的・発展的な考え方の育成を重視した図形指導のあり方を追究することを目的とする．特に本稿では，これまでとは異なる図形の教材を開発して実践し，その有効性を検証するとともに，3 年間を通しての実践を整理して，統合的・発展的な考え方を育成する指導のあり方について示唆を得ることである．まず，中 2 の単元「図形の性質」で，「くの字の法則」に関する性質を教材化した上で，実践を行った．生徒の様子から，統合的・発展的に考察する活動が多く観察され，教材の有効性を示すことができた．次に，3 年間の各学年の実践を整理して検討し，実践はどの学年・どの単元でも可能であり，特に「多様に考える」「問題の一部を変える」「多様な方法の共通性を見いだす」「一般化する」活動を取り入れることで，授業化が容易にできて効果的であるという示唆を得た．

キーワード：統合的・発展的な考え方，くの字の法則，一般化

1．はじめに

次期中学校学習指導要領が平成29年3月に告示され，この中で数学科の目標が次の通り示された．

> 数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す．
> (1) 略
> (2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力，数量や図形などの性質を見いだし<u>統合的・発展的に考察する力</u>，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う．
> (3) 略　　　　　　　　　　　　　（下線部筆者）

上記の下線部から，次期学習指導要領においては，「統合的・発展的に考察する力」の育成が重視されていることが読み取れる．

この「統合的・発展的に考察する」場面に関わって，次期学習指導要領解説の中にある「数学的活動を通して」の補足説明の中で，次の図1を示している（文部科学省，2017）．

図1から，数学的活動として捉える問題発見・解決の2つの過程のうち，数学の事象から問題を見いだし，数学的な推論などによって問題を解決し，解決の過程や結果を振り返る過程の中に，統合的・発展的に考察する場面が登場することがわかる．

特に，図形指導で扱う問題は，数学の事象が多い．

そこで，本研究は，この「統合的・発展的に考える」ことに焦点を当て，中学校数学科における統合的・発展的な考え方の育成を重視した図形指導のあり方を追究することを目的とする．

これまでに，本研究では，以下の点を明らかにしてきた（鈴木他，2015；鈴木他，2016）．

＜2015年度＞

ア　中学校の教科書を分析した結果，発展的な考え方を育成するような問題設定は，教科書では扱いが少なく，教科書の通りに問題を扱っているだけでは，発展的な考え方を育成する上で指導が十分ではない．

イ　発展的な考え方に関する先行研究を分析した結果，発展的な考え方がいくつかのタイプに分類することができること（片桐，1988；菊池，1997；橋本，2001），各タイプに適する指導法がそれぞれ工夫され（能田，1983；竹内他，1984；古藤，1992），実践されていること，ただし，片桐（1988）による「思考の観点を変える」タイプの実践（例えば，高畑，2006）は比較的多く研究されている一方で，「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践（例えば，福田，2009）は，必ずしも多く実践され

*静岡大学教育学部附属島田中学校
*静岡大学学術院教育学領域

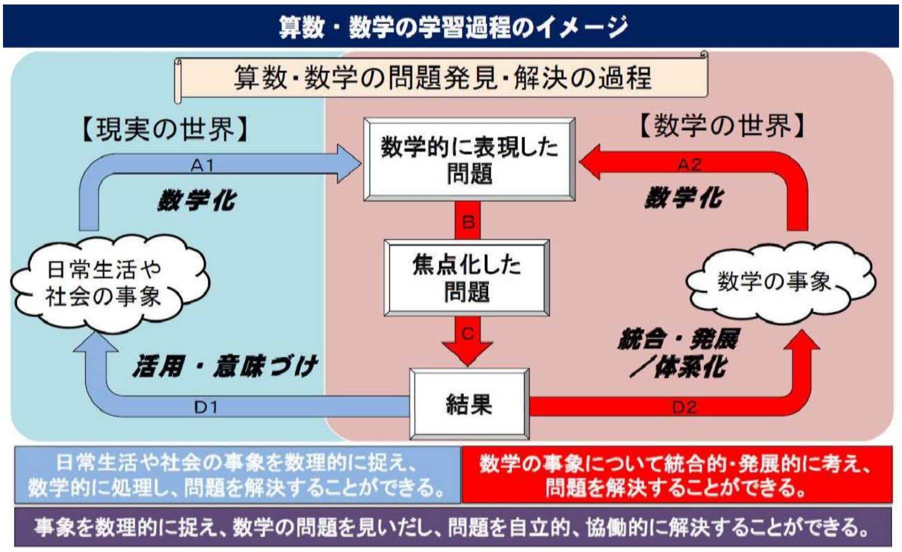


図１　算数・数学の問題発見・解決の過程

ていない.

ウ　「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践を，中1「図形の移動」と中3「相似な図形の面積比」で行い，「発展させることで数学の理解が深まる設定を工夫する」「難易度が高くなり過ぎないようにする配慮する」「発展的な考え方を重視した授業を継続的に実施する」という3つの示唆を得た.

＜2016年度＞

エ　中２の図形の内容の中で，統合的・発展的に考える活動ができる効果的な問題として「多角形の内部から多角形をくりぬいてできる図形の角の和」を教材化して，実践を行った．その結果，「一般化することのよさを感じられる教材を工夫することが重要であること」「多様な方法を分類する活動を取り入れることが有効であること」という２つの示唆を得た.

オ　中３時の各単元において，統合的・発展的に考える活動を，継続して取り入れた．その結果，統合的・発展的に考えようとする態度が身に付いていることが調査結果から読み取れ，年間を通して継続的に統合的・発展的に考える活動を実施することが有効であることが実証された.

2015～2016年度の研究成果を踏まえて，2017年度は，次の2点を中心に研究を進める.

①　中2の図形の内容の中で，これまでとは異なる教材を開発して，統合的・発展的な考え方の育成を重視した実践を行い，授業での生徒の反応を分析して，教材の有効性を検証する.

②　これまでの3年間の研究を通して，各学年・各単元での統合的・発展的な考え方の育成を重視した実践を整理して，望ましい授業のあり方について考察する.

なお，本研究では，「統合的な考え方」「発展的な考え方」を，片桐（1988）を参考にしつつ，次のように規定するものとする.

＜統合的な考え方＞

多くの事象をばらばらにせず，広い観点から本質的な共通性を抽象し，同じものとしてまとめていく考え方であり，次の2つに分類できる.

［C1］複数の事象を，共通なものでまとめる.

［C2］複数の事象を，その中の1つに統合したり一般化したりする.

＜発展的な考え方＞

1つのことが得られても，さらによりよい方法を求めたり，これを基にして，より一般的な，より新しいものを発見したりしていこうとする考え方であり，次の2つに分類できる.

［E1］問題の条件を変える.

［E2］思考の観点を変える.

２．本稿の目的

本稿の目的は，中学校数学科における統合的・発展的な考え方の育成を重視した図形の指導について，これまでとは異なる教材を開発して実践し，その有効性を検証するとともに，３年間を通しての実践を整理して，統合的・発展的な考え方を育成する指導のあり方について示唆を得ることである.

３．研究の方法

以下の手順に従って，研究を進める.

(1)　中２の図形指導の内容について，過去に実践した教材とは異なる統合的・発展的な考え方を育成する効果的な教材について検討する.

(2)　(1)で開発した教材を用いて実践を行い，授業時の生徒の反応等を分析して有効性について検証する.

(3)　３年間を通して，これまでに行ってきた統合的・

発展的な考え方の育成を重視した実践を整理して，統合的・発展的な考え方の育成を重視した指導のあり方について検討を加え，示唆を得る．

４．統合的・発展的な考え方の育成を重視した教材の検討

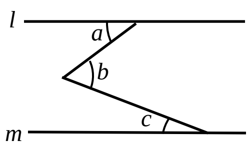
(1)　「くの字の法則」の教材の検討

中２の図形の指導内容としては，平行線の性質，多角形の角，三角形や四角形の性質があるが，昨年度は，多角形の内部から多角形をくりぬいてできる図形の性質を教材化して，実践を行った（鈴木他，2017）

今年度は，昨年度と同じ単元で，「くの字の法則」を取り上げる．具体的な性質は，次の通りである．

【性質】右図で，$l \parallel m$ のとき，次の関係が成り立つ．

$a+c=b$



この教材の特徴として次の３点が挙げられる．

ア　この性質は，中学校２年生用の教科書（赤他，2016，p.110）で扱われていることから，生徒にとって適度な難易度である．

イ　前述の教科書では，この性質の証明が複数の方法で扱われているように，多様な方法が考えられるため，生徒は意欲をもって取り組むことが期待できる．

ウ　(2)で述べるように，この性質をもとに発展させる活動が豊富にある．また，それらを統合して一般化することが比較的容易であり，しかも，一般化した式は簡単な関係式で表される．

(2)　性質を発展させる活動

【性質】を発展させる方法として大きく分類すると，①「くの字」の形を変えて，折線の本数（角の数）を増やす，②折線を平行線の外部にも引く，③平行な２直線を，交わる２直線に変える，④交わる２直線に変え，さらに折線の本数を変える，の４つが考えられる．具体的には，それぞれ次のような性質である．

①　折線の本数を増やす

折線の本数が3本，4本，…，n本の場合を考える．ただし折線を増やすとき，l に平行で折線どうしが作る角を通る直線が，他の折線と交わらないものとする．

ア　折線が３本の場合

次の関係が成り立つ．

$a+c=b+d$

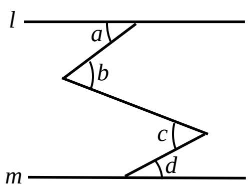


図２　折線の本数３本

上の性質を証明するのに，いろいろな方法が考えられるが，例えば「くの字の法則」を用いて，次のように証明される．

（証明）右の図のように l，m に平行な補助線 n を引くと，

$a+c1=b$

$c2=d$

よって，

$a+c1+c2=b+d$

$a+c=b+d$

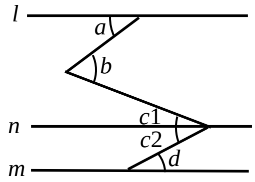


図３　アの証明

イ　折線が４本の場合

次の関係が成り立つ．

$a+c+e=b+d$

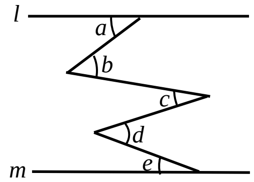


図４　折線の本数４本

上の性質は，例えばアの結果を用いて，次のように証明される．

（証明）右の図のように l，m に平行な補助線 n を引くと，

$a+c=b+d1$

$e=d2$

よって，

$a+c+e=b+d1+d2$

$a+c+e=b+d$

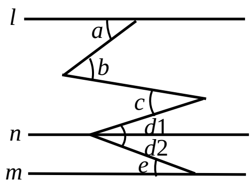
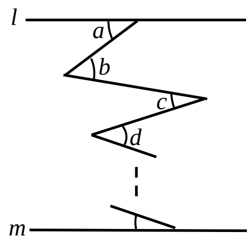


図５　イの証明

ウ　折線が n 本の場合

ア，イの結果から，これらを統合すると，次が成り立つ．

$a+c+\cdots=b+d+\cdots$



別の形で言い換えると，

図６　折線の本数ｎ本

左側の角の和＝右側の角の和

が成り立つ．

一般化した上の性質は，ア，イの証明と同様に，折線の本数が１本少ない場合の関係式を用いて証明できる（正式には数学的帰納法によるが，ここでは省略）．

なお，上述した「左側の角」「右側の角」は，折線の左側にあるか右側にあるかを指していて，左側の角と右側の角が交互に並んでいる場合に成り立つ．このとき，角の大きさは鋭角に限らない（図７）．

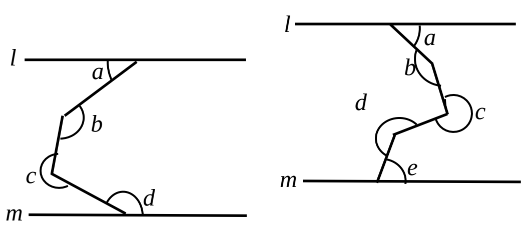


図７　左側の角の和＝右側の角の和が成り立つ場合

② 平行線の外部にも折線をひく

エ　平行線の外部に折線がある場合

次の関係が成り立つ．

$a－c＝b$

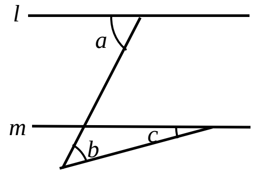


図 8　平行線の外部に折線

上の性質は，同位角が等しいことと，三角形の 2 つの内角和が他の外角に等しいことを用いて，容易に証明される．この結果は，c を負の角と見做すことで，「くの字の法則」と統合することができ，さらに折線の本数を増やしても同じことが成り立つ（詳細は略）．

③ 交わる 2 直線にする

オ　l，m が交わる場合

次の関係が成り立つ．

$a＋c＋p＝b$

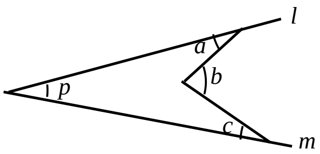


図 9　交わる 2 直線の場合

これは，前述の教科書でも扱っている（p.111）．

③ 交わる 2 直線で，かつ折線の本数を増やす

さらに，①と③を融合させた発展を考える．ただし折線を増やすとき，l，m の交点と折線どうしが作る角を通る直線が，他の折線と交わらないものとする．

カ　交わる 2 直線で，折線が 3 本の場合

次の関係が成り立つ．

$a＋c＋p＝b＋d$

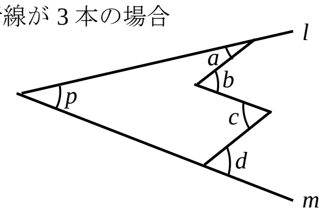


図 10　交わる 2 直線で折線 3 本

①の平行 2 直線の場合と比較すると，左辺に p が加わっていることがわかる．

上の性質は，例えば次のように証明される．

（証明）右図のような

補助線 n を引くと，

$a＋c1＋p1＝b$

$c2＋p2＝d$

よって，

$a＋c1＋c2＋p1＋p2＝b＋d$

$a＋c＋p＝b＋d$

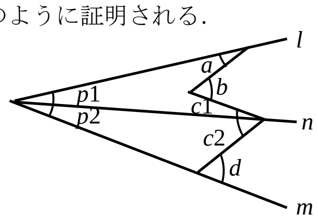


図 11　カの証明

キ　交わる 2 直線で，折線が 4 本の場合

次の関係が成り立つ．

$a＋c＋e＋p$

$＝b＋d$

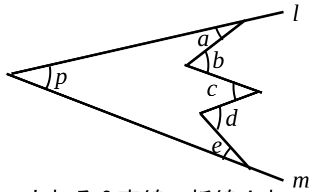


図 12　交わる 2 直線で折線 4 本

①の平行 2 直線の場合と比較すると，左辺に p が加わっていることがわかる．

上の性質は，例えば次のように証明される．

（証明）右図のような

補助線 n を引くと，

$a＋c＋p1$

$＝b＋d1$

$e＋p2＝d2$

よって，

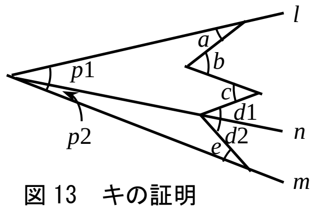


図 13　キの証明

$a＋c＋e＋p1＋p2＝b＋d1＋d2$

$a＋c＋e＋p＝b＋d$

キ　交わる 2 直線で，折線が n 本の場合

①の平行 2 直線の場合と同様にして一般化すると，左辺に p が加わって，次の関係が成り立つ．

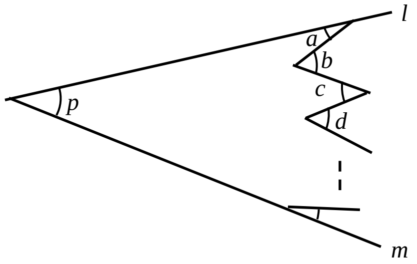


図 14　交わる 2 直線で折線 n 本

$a＋c＋\cdots＋p＝b＋d＋\cdots$

すなわち，

右側の角の和＋p＝左側の角の和

この性質も，①と同様な方法で証明することができる（証明は略）．

5．統合的・発展的な考え方の育成を重視した実践

(1)　授業の概要

中 2 の単元「平行線と多角形」について，対頂角や平行線の性質，三角形の角の性質を一通り学習した後に，前述した「くの字の法則」の追究を 2 時間扱いで行った．

なお，授業の分析は，授業を撮影したビデオ映像，個人追究時に記述したワークシート（追究用紙），授業後に行ったアンケート調査をもとに行った．

① 単元計画

単元計画は，次の 13 時間であり，本時は第 5 時，6 時である．

表 1　単元計画

時間	学　習　内　容
1 2 3	【対頂角，平行線の錯角・同位角】 ・大きさが等しい角を見つける活動を通して，対頂角や平行線の錯角・同位角の意味や性質を理解する．

4	【三角形の角の性質】 ・三角形の内角の和が 180°であることや，１つの外角がこれと隣り合わない２つの内角の和に等しいことの説明を考える．
5 6 本時	【くの字の角を求める】 ・平行線の性質や三角形の角の性質を用いて，図形の角の大きさを求める． ・自分なりの法則を見つけ，それを平行線の性質や三角形の角の性質を用いて筋道を立てて説明する．
7 8	【四角形の内角の和・外角の和】 ・4 つの点を一筆で結んでできる図形を基にして， 四角形の内角の和や外角の和について考える．
9 10 11	【多角形の内角の和・外角の和】 ・5 つの点を一筆で結んでできる図形を基にして， 多角形の内角の和や外角の和について考える． ・星形五角形の先端の角の和が 180°になることの説明を考える．
12 13	【くりぬき図形の角度を求めよう】 ・多角形の内部から多角形をくりぬいてできる図形の角の和を，いろいろな方法で求める． ・外や中の多角形を他の形にしたら，角の和はどうなるのかについて考える．

② **本時の実施時期**：2017 年 11 月

③ **対象生徒**：国立大学附属中学校 2 年生 40 名

④ **授業の目標**：

「くの字の形」にできる角の大きさを，様々な方法で解くことができる．また，「くの字の形」を変えて，統合的・発展的に考えて，法則を発見することができる．

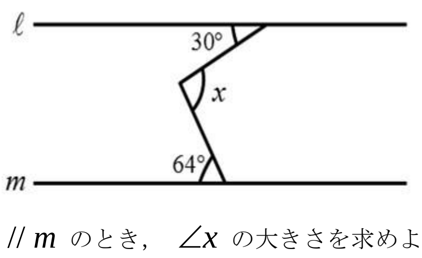
(2) **授業展開と生徒の反応**

① **第 5 時：「くの字の形」にできる角の大きさを求める．**

1) 課題提示

はじめに，次の課題を提示した．

【課題】



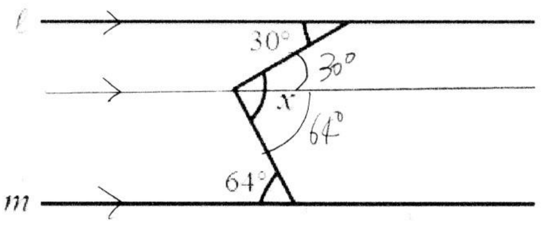
$l\,//\,m$ のとき， $\angle x$ の大きさを求めよう．

今まで学んできた内容とのつながりを持たせるために，最初に平行な2直線に1本の直線を交わらせて，同位角や錯角の性質を復習した．その後，交わっている1本の直線を平行線の真ん中で折り曲げて，課題を提示した．課題把握が簡単で，取り組み易い課題であるため，余計な説明は加えずに，すぐに個人追究に取り掛かった．

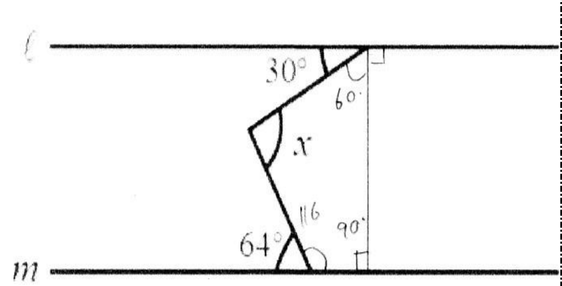
2) 課題の個人追究

個人追究の段階で，多くの生徒が複数の方法で意欲的に取り組んでいた．生徒がかいた補助線を見ると，平行線や垂線が多かった．同位角や錯角の性質を説明したときの経験があるためと考えられる．生徒が考えた主な方法は，次の 6 個である（図 15）．

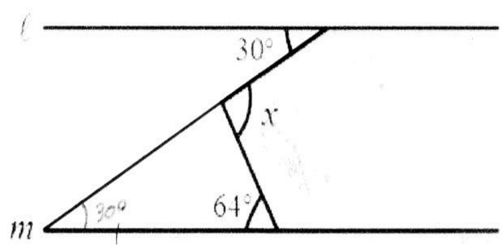
＜考え方①＞　平行線をひく考え



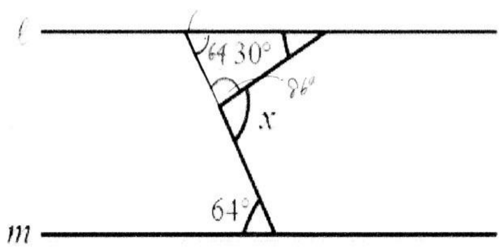
＜考え方②＞垂線を引く考え



＜考え方③＞線分を延長する考え 1



＜考え方④＞線分を延長する考え２



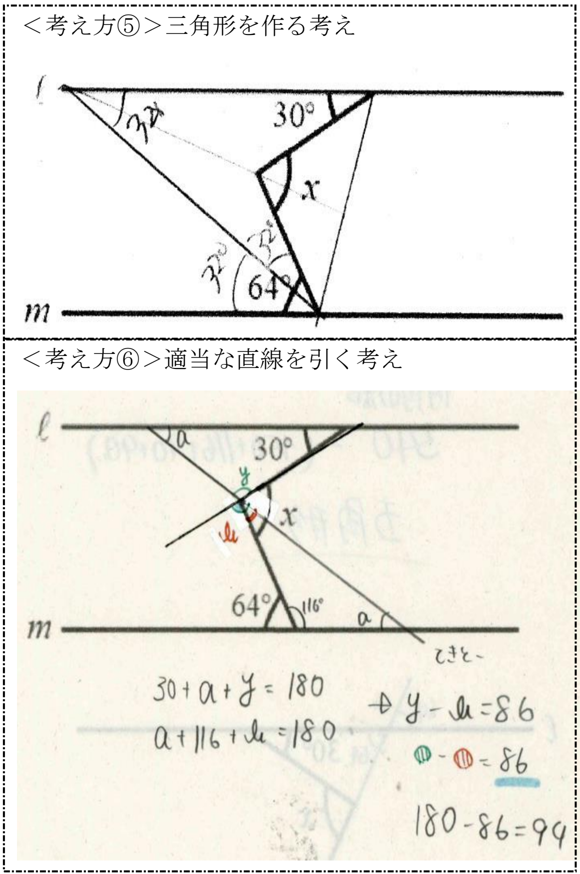


図 15　生徒の考え

いずれの考えも，前時までに扱った「平行線の性質」「三角形の角の性質」を利用した考えであった．特に，＜考え方⑥＞は，わからない角を文字において，三角形の内角の和が 180°であることを用いて関係式を２つ作り，連立方程式における文字の消去の考えも使いながら答えを導いていた．

3)　小集団での追究

次に小集団での追究の時間をとり，互いの考えを伝え合う活動を行った．小集団では，個人で出た多様な考えをできるだけ多く共有することや，個々の説明する力（表現力）を育成することもねらいとしたため，最低でも１人１種類は発表するように指示した．考えが重なっている場合は，説明を省いたり，自分と異なる考えである場合は，熱心に説明を聞いて，追究用紙にその考えを書いたりする生徒の姿が見られた．また，すべての考えが出された後に，小集団として新しい考えを出そうと話し合っている様子も見られた．

4）一斉での追究

一斉での追究では，各小集団から１つずつ考えを発表させた．個人追究でしっかりと時間を確保して多様な考えを引き出したことにより，すべての小集団から異なる考えを出すことができた．図を見ただけでどのような補助線を引いたのかは把握できるが，今後の論証指導のために，どのような補助線を引いたのかについても，丁寧に説明するように指示した．

すべての考えが出たところで，多様な考えを振り返り，「最も効率的な考えはどれか」と発問した．生徒の反応は，予想通り＜考え方①＞を挙げた者が多数であった．しかし，補助線の引き方として，平行線を引くだけでなく，垂線を引く，線分を延長する等も，今後の問題解決で登場する重要な引き方である．したがって，結果的には「どれが効率的な引き方であるか」よりも，振り返って，補助線の引き方を見直すことに意味があると考える．

また，＜考え方⑥＞の考えについても，全体の場で振り返った．補助線の引き方は必ずしも一般的ではないが，この考えの重要な視点は，わからない角を文字で置いた点であると考えたからである．図形の問題でも文字を利用できることの理解を深めると同時に，次時の活動にもつなげる意味があった．

最後に，答えを見て，$\angle x = 30° + 64°$ の関係に気付かせた．そして，この関係は，30°，64°に限らず，他の角であっても成り立つことを確認した上で，これを「くの字の法則」と名付けて，第 5 時を終了した．

②　第 6 時：くの字の形を変える

第 6 時は，一斉→個人→小集団→一斉の流れで展開した．具体的には，次の通りである．

1)　発展課題 1 の提示（一斉）

まず始めに，前時を振り返りながら「くの字の法則」を復習した後に，「くの字の法則の条件をアレンジするとしたら，どのような場合が考えられるか」を挙げさせた．生徒からは，「平行線の間の角の数を変える」「平行線の外部に角を移動する」「平行な 2 直線を交わる 2 直線にする」等の意見が出され，図 16 のように板書した．

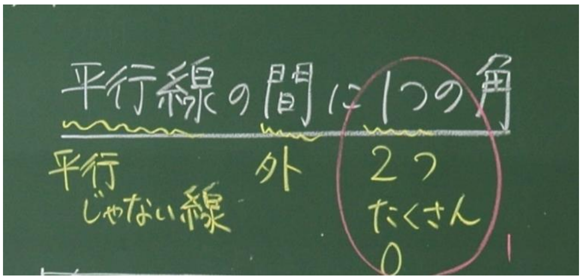


図 16　アレンジの仕方の板書

そして，まずは，次の発展課題 I について考えることを全体で確認した上で，個人追究に取り掛かった．

【発展課題 1】「くの字の法則」で，角を 2 つに増やしたら，どんな法則が見つかるだろうか．

2)　発展課題 1 の個人追究

まずは，角を 2 つに増やした場合を考えさせた．ほとんどの生徒は l，m との平行線を 2 つの頂点と交わるように引き，できた図からどのようなことがいえる

かを考えていた．しかし，平行な補助線を引けずに戸惑っていたり，他の補助線を引いて考えていたりする生徒も少なくなかった．ある程度時間をとった後に，法則を見つけた生徒に，全体の前で発表をさせた（図17）．

＜考え方①＞

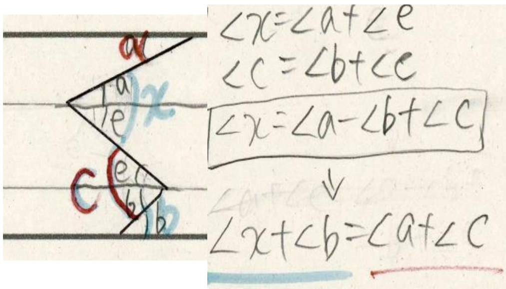


図 17　平行線を引いて考えた生徒

生徒の発表に対して，後の統合的な考察につなげる意味もあり，「$\angle x+\angle b=\angle a+\angle c$ は何を表している？」と学級全体に発問した．しかし，生徒の表情から，理解できていない様子が伝わってきたため，近くの席の生徒と意見交換する場を設けた後，ここでは結論は言わずに，次の発展課題 2 に進めた．

【発展課題２】「くの字の法則」で，角を 3 つ，4 つ，…に増やしたら，どんな法則が見つかるだろうか.

3)　発展課題 2 の個人追究

発展課題 2 に対して，法則を発見した生徒の考えの主なものは，次の 2 つ（図 18，図 19）である.

＜考え方①＞

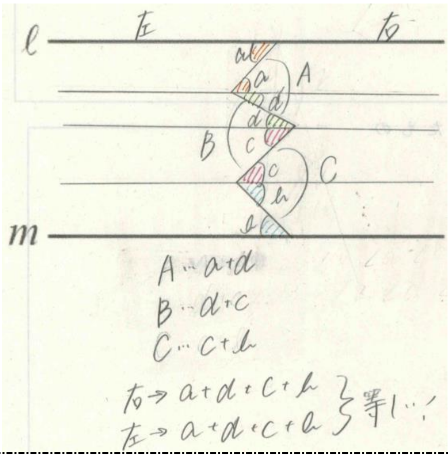


図 18　発展課題 2 の生徒の考え方①

＜考え方②＞

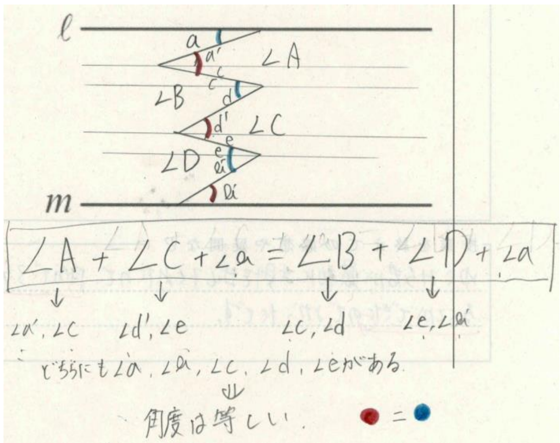


図 19　発展課題 2 の生徒の考え方②

多くの生徒は，平行線の補助線を引いて，等しい角を順に書き挙げていたが，それらをもとに，上の考え方①や②のように，法則として関係式を作っていた生徒は多くはなかった．さらに，角の数が 2 つ，3 つ，4 つの場合の法則をみて，それらを統合して「左側の角の和」＝「右側の角の和」に気付いた生徒は少数ではあったがいた．それらの生徒に対しては，平行 2 直線を交わる 2 直線にするとどんな法則があるか，折線で作る角が平行線の外部にあるときにはどんな法則があるか，と声をかけ，さらなる追究を促した．

4)　発展課題 2 の小集団での追究

「左側の角の和」＝「右側の角の和」に気付いた生徒が数人出てきたところで，小集団での追究に入った．法則が発見できていない生徒は，発見できた生徒の説明を熱心に聞き，理解している様子があちこちで観察された．説明する側の生徒は，ホワイトボードを用いて，数学的な用語を使って筋道を立てて説明する姿が見られた．最終的には，図 20 のように，自分たちで発見した法則を基に，それらを統合して「右側の角の和」＝「左側の角の和」の法則を発見できた班が複数出てきた．

5)　発展課題 2 の一斉での追究

2 人の生徒に発表をさせた．

1 人は「左側の角の和」＝「右側の角の和」の法則を発見した生徒である（図 21）．この生徒は小集団での追究の段階から，積極的に他の生徒に説明をする意欲的な姿が見られた．それは，自分なりの法則を発見できた喜びがあったからと考えられる．また，小集団での追究で説明をしたことで自信がついたからか，一斉での追究において，学級全体の前で説明をするときにも，上手に説明することができた．

＜考え方③＞

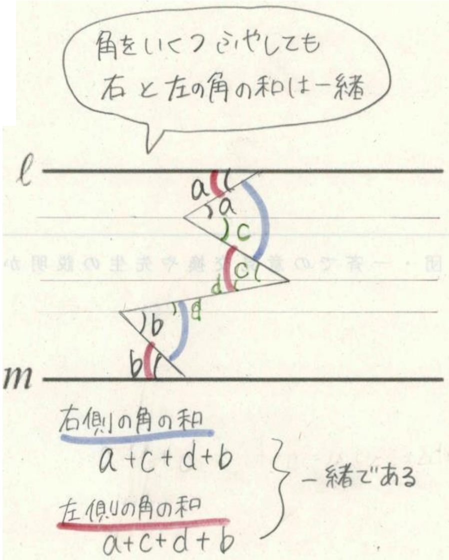


図 20　発展課題 2 の生徒の考え方③

＜考え方④＞

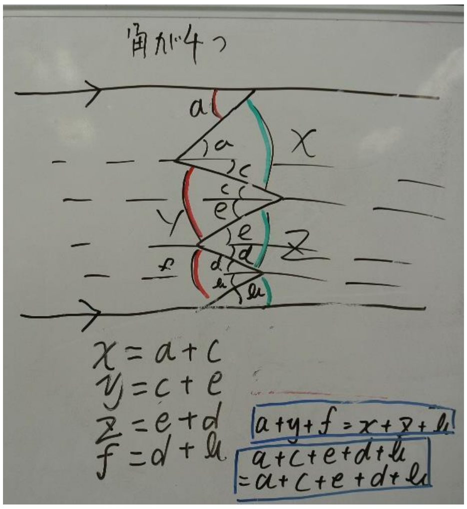


図 21　発展課題 2 の生徒の考え方④

もう 1 人は，「左側の角の和」＝「右側の角の和」を発見した後に，平行 2 直線を交わる 2 直線に変えたときの法則を発見した生徒である（図 22）．この生徒のように，1 つ目の法則を発見した後も引き続き追究を続け，別の法則を発見した生徒は他にも複数いた．これらの生徒も含めて，自分で法則を発見する活動に意欲的に取り組む生徒，小集団での追究や一斉での追究の場面で，他の生徒に一生懸命に説明する生徒，その説明を理解しようと懸命に聞いている生徒の姿が，教室全体で見られた．

最後に，考え方⑤の生徒の発表の後に，平行線 2 直線を交わる 2 直線にするのに，2 本の直線が逆方向に傾いたときにはどうなるのかを問いかけて，授業を終えた．

＜考え方⑤＞

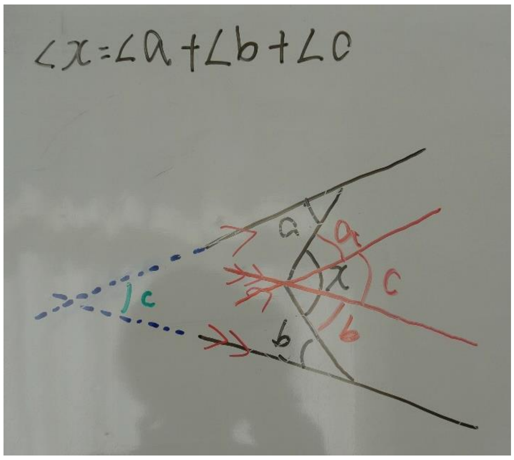


図 22　発展課題 2 の生徒の考え方⑤

(3)　統合的・発展的な考え方の育成に関する考察

2 時間扱いの授業全体を通して，「統合的・発展的な考え方」の育成という視点から検討して，次の点を指摘することができる．

① 「くの字の法則」をもとに，角を 3 つ，4 つと増やして新たな法則を発見していく過程において，個人追究の段階ですでに，それらを統合して「左側の角の和」＝「右側の角の和」という法則を発見した生徒が少数ではあるがいた．さらに，小集団での追究や一斉での追究を通して，多くの生徒が，「くの字の法則」を発展し統合させることができた．実際，授業時に記入した生徒のワークシートには，次のような記述が見られた．

＜生徒の追究用紙より＞

○自分で考えてできた．3 つも 4 つも同じだった．

○くの字の図形を少し変形させて色々な法則を見つけることができた．自分では思いつかないような法則をみつけている人もいたのでためになった．

○角をいくつに増やしても同じ法則が成り立つことがわかって面白かった．

以上の生徒の反応から，本教材は，統合的・発展的な考え方の両方を育成する上で，効果的な教材であるといえるであろう．

② 第 6 時の導入で，前時の「くの字の法則」を図 23 のように示すにとどまり，関係式としてきちんと明示しなかった．このために，個人追究の当初の段階で「法則を発見する」ことの意味が理解できず，思考が進まない生徒が見られたと考えられる．これを改善するためには，「くの字の法則」を関係式として明示した上で，角の数を 2 つにしたときに，どのような法則（関係式）が成り立ちそうかを予想し，具体的な数値で確認する活動が有効であると考える．

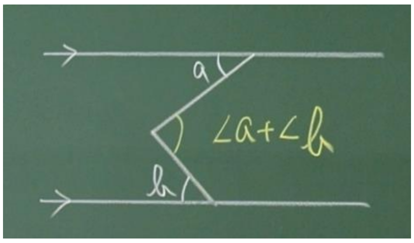


図 23 「くの字の法則」の提示の板書

③ 第 5 時の「くの字の角」を求める課題において，右側の角を文字 x で表したこともあり，角を 2 つ，3 つに増やしたときに，図 21 の考え方④のように，文字 x，y，z を使う生徒が少なくなかった．しかし，角の数を増やし，それらを統合することを考えると，使用する文字は，図 2〜6 のように，a，b，c，…を順に用いる方がよかったといえる．法則を発見する上で，どのような文字を用いるかも重要な視点であると考える．

６．統合的・発展的な考え方を育成する

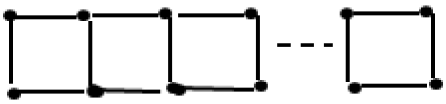
ここでは，3 年間の研究を通して，統合的・発展的な考え方の育成を重視した実践例を整理して，望ましい指導のあり方について検討を加え，示唆を得る．

なお，各問題が，どのような統合的・発展的な考え方に該当するかを，**1** で述べた本研究における統合的・発展的な考え方の規定に従って，［C1］［C2］［E1］［E2］で記載する．

(1) 1 年生の実践例

① マッチ棒の本数を求めよう＜文字と式＞

〔原題〕x 個の正方形を作るためには，何本のマッチ棒が必要か？ → ［E2］



【問 1】正方形を，正五角形，正六角形，…に変えて，マッチ棒の本数を考えよう．→ ［E1］

【問 2】正 n 角形を x 個並べたときのマッチ棒の本数を考えよう．→ ［C2］

② カレンダーの秘密を探ろう＜文字と式＞

〔原題〕カレンダーの 3×3 の 9 日分を囲ったときに成り立つ性質を発見しよう．

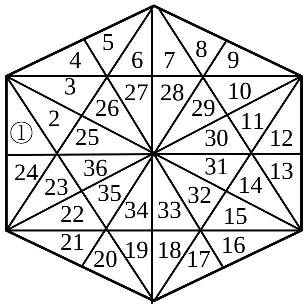
日	月	火	水	木	金	土
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

【問 1】囲み方を変えて，「中央の数の〇倍になる」性質を発見しよう．→ ［E1］

【問 2】問 1 の囲み方について，共通点を見つけよう．→ ［C1］

③ 図形を移動しよう＜平面図形＞

〔原題〕図の①の三角形を 10，31，33 の位置に移動する方法を考えよう．→［E2］



【問 1】移動回数が少ない方法を考えよう．→［E2］

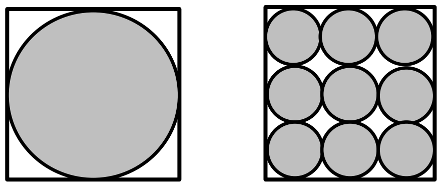
【問 2】どんな図形をどのような位置に移動するにも，必ず 2 回以内で移動できるだろうか．→ ［C1］

(2) 2 年生の実践例

① 面積を比べよう＜文字式の計算＞

〔原題〕A と B では，どちらの方が影の部分の面積が大きいだろうか．

A B



【問 1】円の数を変えて面積を比べよう．→［E1］

【統合】A と B の面積が等しくなるのは，どのような場合か．→ ［C1］

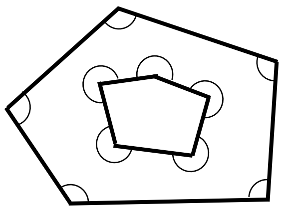
② 問題を作って解こう＜連立方程式＞

〔原題〕連立方程式の問題を作って解こう．→［E1］

【問 1】解が存在するのは，どのような場合か．→ ［C1］

③ くり抜き多角形の角の和を求めよう ＜図形の性質＞

〔原題〕図のように，五角形の内部から五角形をくり抜いてできる図形の 10 個の角の和を求めよう．→［E2］



【問 1】外側の五角形やくりぬいた五角形の形を変えたり，くり抜く図形の個数を変えたりした場合に，

角の和を求めよう．→［E1］

【問 2】n 角形の内部から m 角形を 1 個くりぬいてできる図形の角の和を求めよう．また，くり抜く個数が p 個の場合の角の和を求めよう．→ ［C2］

⑶ 3 年生の実践例

① 整数の性質を調べよう＜式の計算＞

〔原題〕連続する整数の平方の差は，どのような性質があるか.

【問 1】「連続する整数」を，「2 とびの整数」「3 とびの整数」に変えたら，どのような性質があるだろうか. →［E1］

【問 2】「連続する x とび」としたら，どのようなことがいえるだろうか. →［C2］

② 握手の回数を求めよう＜2 次方程式＞

〔原題〕パーティーに参加した人が互いに全員と 1 回ずつ握手する．握手した回数が 210 回のとき，パーティーに参加した人は何人か. →［E2］

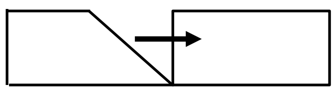
【問 1】握手した回数を変えて，問題を作って解いてみよう．→［E1］

【問 2】問 1 で作った問題に解が存在するのは，どのような場合だろうか. →［C1］

③ 封筒に紙を入れる事象について調べよう

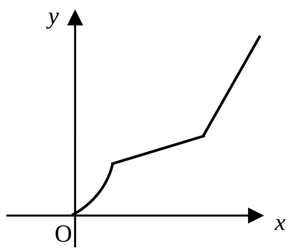
＜関数 $y=ax^2$＞

〔原題〕図のように，封筒に台形の形の紙を入れるとき，入れた部分の長さと入れた部分の面積の関係を式やグラフで表そう.



【問 1】封筒の底が破れていて，紙が突き抜けるとしたら，どのようになるかを考えよう．→［E1］

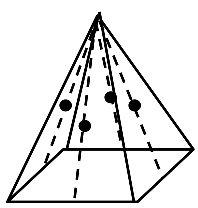
【問 2】紙の形を変えたらグラフが右のようになるとき，紙の形を考えよう.
→［E1］



④ 正四角錐の中にできる図形を考えよう

＜相似な図形＞

〔原題〕図のように，正四角錐の側面の三角形に引いた中線の中点を結ぶと，どのような図形ができるか.



【問 1】正四角錐の底面を別の四角形に変えたら，できる図形はどのようになるか. →［E1］

【問 2】問 1 で，さらに四角錘の頂点の位置を変えたら，できる図形はどのようになるか. →［C1］

⑷ 統合的・発展的な考え方の育成を重視した指導

⑴～⑶ で挙げた実践例を総合的に考察するとき，統合的・発展的な考え方の育成を重視した指導のあり方について，次の示唆を得ることができる.

① 本研究は，主として図形の単元を中心に検討してきたが，他の単元でも，教材を工夫することで，統合的・発展的に考察する活動を取り入れることができることがわかる.

② 特に，「多様な方法を考える［E2］」，「問題の一部を変える［E1］」活動や，「多様な方法の共通性を見いだす［C1］」，「発展させた内容を一般化する［C2］」活動を取り入れることで，授業化が容易にでき効果的であることがわかる.

今後の課題としては，中学生が統合的・発展的な考え方をどの程度身に付けたかを評価する方法について，検討することである.

＜引用・参考文献＞

福田允(2009)「学校数学における発展的な考え方の指導に関する一考察-「式を読む」ことに着目して-」第 42 回数学教育論文発表会論文集，pp.181-186.

橋本吉貴(2001)「算数・数学科における「発展的な考え方」に関する考察」日本数学教育学会誌，83 巻 9 号，pp.10-17.

片桐重男(1988)『数学的な考え方の具体化』明治図書.

菊池平一(1997)「統合的，発展的に考察する」新しい算数研究，No.313，東洋館，pp.6-9.

古藤怜(1992)『算数科多様な考えの生かし方まとめ方』東洋館.

文部科学省(2017)「平成 29 年告示中学校学習指導要領解説」.

能田伸彦(1983)『オープン・アプローチによる指導の研究』東洋館.

赤攝也他(2016)「新版数学の世界 2」大日本図書，p.132.

鈴木直・加藤健二・熊倉啓之(2016)「発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形の指導」静岡大学教育実践総合センター紀要，No.25，pp.43-52.

鈴木直・加藤健二・熊倉啓之(2017)「統合的・発展的に考える活動を重視した中学校数学科における図形指導」静岡大学教育実践総合センター紀要，No.26，pp.45-54.

竹内芳男・沢田利夫(1984)『問題から問題へ』東洋館.